arXiv:2602.07504v1 [math.FA] 7 Feb 2026

几乎正规 Toeplitz 算子的 Helton–Howe测度

Yuto Sugahara 理学研究科
京都大学 日本京都左京区
606-8502,
kyodaisugaharay@gmail.com

2026年2月10日

摘要

与几乎正规算子相关的 Helton–Howe 测度由 Helton–Howe 构造。它给出一个迹公式，使我们能够计算原本无法计算的交换子的迹。我们将研究几乎正规 Toeplitz 算子，并根据其符号的调和延拓确定它们的 Helton–Howe 测度。我们的结果可视为对 Toeplitz算子 Fredholm指标绕数公式的推广。

1 引言

设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个自交换子为迹类的有界算子 $[T^*, T]$。我们称这样的算子为几乎正规算子。在 [HH73], Helton–Howe 构造了几乎正规算子的 Helton–Howe测度 P_T，并得到了以下重要的迹公式；

$$\mathrm{tr}([p(X,Y), q(X,Y)]) = \int_{\sigma(T)} J(p,q) dP_T,$$

其中 p, q为多项式，且 $J(p,q) = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}$。另一方面，Pincus在[Pin68] 中构造了一个称为主函数而非测度的 L^1 函数，早于 [HH73]。随后在 [CP74], 中，Carey和Pincus证明Helton–Howe测度与主函数一致，从而Helton–Howe测度关于Lebesgue测度绝对连续。此外，在 [CP77], 中，他们将上述迹公式推广到具有半有限迹的von Neumann代数。

借助Helton–Howe迹公式，若我们确定 P_T，便可计算用其他方法难以计算的算子的迹。然而，Helton–Howe测度得到充分描述的几乎正规算子只有少数几类。由于Helton–Howe测度是绝对连续的，若我们对 T的谱有充分信息，便可确定 P_T 。据作者所知， [CP79] 是唯一在缺乏丰富谱描述的情况下确定几乎正规算子的Helton–Howe测度的文献。该文定理6证明，II_∞ 型因子中某些Toeplitz算子的Helton–Howe测度是平均运动的常数倍。

本文的目标是确定Hardy空间 $H^2(\mathbb{T}) = \{\phi \in L^2(\mathbb{T}) \mid \hat{\phi}(k) = 0 \ \ \forall k < 0\}$上几乎正规 Toeplitz 算子的Helton–Howe测度。若 ϕ 是单位圆上的光滑函数，则 T_ϕ 的本质谱为 $\phi(\mathbb{T})$，其Lebesgue测度为0。因此，由 [HH73],中建立的Helton–Howe测度的指标公式

$$dP_{T_\phi} = -\frac{1}{2\pi i}\mathrm{ind}(T_\phi - x - iy)dxdy$$

成立，其中ind(T)是Fredholm算子 T的指标。我们知道，若 $x+iy$不在 T_ϕ的本质谱中，则ind($T_\phi - x - iy$)等于 –wind($\phi, x+iy$)，减去 ϕ 绕 $x+iy$的绕数。此外，设 Φ 为 ϕ 在单位圆盘上的调和延拓， $J(\Phi)$为映射 $\Phi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^2$的Jacobian。则wind($\phi, x+iy$)等于如下带符号重数函数。

$$m_\Phi(x+iy) = \sum_{\Phi(z)=x+iy, |z|<1} \mathrm{sgn}(J(\Phi)(z)).$$

因此，具有光滑符号的 Toeplitz算子的 Helton–Howe测度由 m_Φ 决定。

本文的主定理表明，对于具有非光滑符号 ϕ 的几乎正规Toeplitz算子，同样的结果也成立。为陈述该结果，我们使用由 ϕ_r's 与 ϕ 和泊松核的卷积得到的逼近。定理

4.2 揭示了

$$dP_{T_\phi} = \text{weak}^*\text{-}\lim_{r\nearrow 1} dP_{T_{\phi_r}} = \text{weak}^*\text{-}\lim_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi i} m_{\Phi_r}(x+iy)dxdy.$$

上述公式中的极限是相对于某个紧集 $K \subset \mathbb{C}$ 的 $C(K)^*$ 弱-$*$ 拓扑而言的。在 $\int_{\mathbb{D}} |J(\Phi)|dxdy < \infty$ 的情况下，我们可以去掉极限并得到

$$dP_{T_\phi} = \frac{1}{2\pi i} m_\Phi(x+iy)dxdy.$$

若 $\Re\phi \in B_p$ 且 $\Im\phi \in B_q$，则可保证 $J(\Phi)$ 的可积性，其中 $p,\ q > 1$ 是有限的 Hölder 共轭数，而 $B_p := B_p^{1/p,}$ $(\mathbb{T})$ 是 Besov空间。总之，几乎正规 Toeplitz算子的 Helton–Howe测度在某种程度上可以用带符号重数函数来描述。

2 符号与预备知识

本文中，$\mathcal{H}$ 表示一个可分无限维复Hilbert空间，且每个算子都属于 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$，即所有有界算子构成的代数。$\mathcal{H}$ 上的内积关于第一个变量是线性的。对于算子 T，$\sigma_e(T)$ 是 T 的本质谱。若 T 是 Fredholm算子，则 ind(T) 是 T 的 Fredholm指标。

我们将讨论 Schatten p类及其他赋范理想。关于赋范理想的全面参考资料，见 [Sim05] 或 [GK69]。

定义 2.1. 我们用 $\mathcal{J}_p$ 表示 *Schatten* p类算子构成的理想，用 $||\cdot||_p$表示 *Schatten* p范数。具体而言，$\mathcal{J}_1$ 是迹类，而 $\mathcal{J}_2$ 是 *Hilbert–Schmidt*类。我们用 $\text{tr} : \mathcal{J}_1 \to \mathbb{C}$.表示 $\mathcal{J}_1$ 上的迹。

命题 2.2 (见 [Sim05]中的推论 3.8)。若 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足 AB 和 BA 均属于 $\mathcal{J}_1$，则 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$。

定义 2.3. 设 Ψ 为一个对称范数。我们用 $(J_\Psi, ||\cdot||_{J_\Psi})$表示相应的最大赋范理想。$J_\Psi^{(0)}$ 是可分理想，即有限秩算子在 J_Ψ中的闭包。Ψ^* 是 Ψ的共轭对称范数。

令 $\mathbb{D}$ 为单位圆盘 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$，$\mathbb{T}$ 为其边界。我们将 $\mathbb{T}$ 视为赋有归一化 Lebesgue测度 $\frac{dt}{2\pi}$ 的测度空间。

k阶 Fourier系数为 $\phi \in L^1(\mathbb{T})$

$$\hat{\phi}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(e^{it})e^{-ikt}dt.$$

回顾一下，Hardy空间 $H^2(\mathbb{T}) = \{\phi \in L^2(\mathbb{T}) \mid \hat{\phi}(k) = 0 \quad \forall k < 0\}$ 是 $L^2(\mathbb{T})$的一个闭子空间，并记 P_+ 为从 $L^2(\mathbb{T})$到 $H^2(\mathbb{T})$的正交投影。对于 $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$，考虑 $L^2(\mathbb{T})$上的乘法算子 M_ϕ。符号为ϕ 的Toeplitz算子 T_ϕ 和Hankel算子 H_ϕ 定义在 $B(L^2(\mathbb{T}))$中，分别为 $T_\phi = P_+M_\phi P_+$ 和 $H_\phi = (1-P_+)M_\phi P_+$。

对于 $\phi \in C(\mathbb{T})$和 $\lambda \notin \phi(\mathbb{T})$，$\mathrm{wind}(\phi,\ \lambda)$表示 ϕ 绕 λ的绕数。关于绕数的详细说明可参见 [Arv01]的第4.4章，其中使用了记号$\#(\phi - \lambda) := \mathrm{wind}(\phi,\ \lambda)$。

若 $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$，我们用符号 ϕ_r 表示 ϕ 与泊松核的卷积，用 Φ 表示 ϕ在单位圆盘上的调和延拓。也就是说，$\Phi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 定义为

$$\Phi(re^{i\theta}) = \phi_r(e^{i\theta}) = \sum_{k\geq 0} \hat{\phi}(k) r^k e^{ik\theta} + \sum_{k>0} \hat{\phi}(-k) r^k e^{-ik\theta}$$

对于 $r < 1$。与上文一样，我们用小写字母表示单位圆上的函数，用大写字母表示它们的调和延拓。

定义 2.4. 假设 ϕ是 $\mathbb{T}$ 上的一个 L^∞ 函数，并且对几乎所有 $w \in \mathbb{C}$，$\#\Phi^{-1}(\{w\})$均有限。于是，我们将带符号重数函数 m_Φ 定义为

$$m_\Phi(w) = \sum_{\Phi(z)=w, |z|<1} \mathrm{sgn}(J(\Phi)(z)),$$

其中 $J(\Phi) = \left|\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial \Phi}{\partial \overline{z}}\right|^2$是 Φ的 ***Jacobian***。

引理 2.5. 如果 $\int_{\mathbb{D}} |J(\Phi)| dxdy < \infty$，则 m_Φ 是一个 L^1 函数。

证明。变量替换后，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\Phi(\mathbb{D})} |m_\Phi(x+iy)| dxdy &\leq \int_{\Phi(\mathbb{D})} \left(\sum_{\Phi(z)=x+iy, |z|<1} 1 \right) dxdy \\ &= \int_{\mathbb{D}} |J(\Phi)| dxdy < \infty.\end{aligned}$$

这意味着 $\#\Phi^{-1}(\{w\}) < \infty$ 几乎处处成立，因此 m_Φ 是良定义的。 □

推论 2.6。若 $\phi \in C^\infty(\mathbb{T})$，则 m_Φ 作为一个 L^1 函数存在。

3 Helton–Howe理论

3.1 Helton–Howe迹公式

下面简要概述 Helton–Howe 测度的性质。

定义 3.1. 我们称具有笛卡尔分解 $X+iY$ 的算子 T 为几乎正规算子，若其自交换子 $[T^*, T] = 2i[X, Y]$ 属于迹类。

D义 3.2. 对于定义在 $\mathbb{R}^2$ 某个区域上的 C^∞ 函数 f、g，定义 e

$$J(f,g) := \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

当 f、g 为实值函数时，这就是 ***Jacobian***。即使所涉及的函数不是实值函数，我们仍使用相同的记号。

定理 3.3（公式（*1'*），见 [HH73]）。对于每个几乎正规算子 $T = X + iY$，都存在唯一的正则博雷尔（纯虚）测度 P_T，其支撑于复平面上的 $\sigma(T)$，使得

$$\mathrm{tr}([p(X,Y), q(X,Y)]) = \int_{\sigma(T)} J(p,q) dP_T$$

其中 p、q 是二元多项式。

定义 3.4。我们将定理 *3.3* 中的 P_T 称为 T 的 ***Helton–Howe*测度**。

定理 3.5（[HH73]主定理中的断言 iii）。设 T 是一个几乎正规算子。若 $U \subset \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C} \setminus \sigma_e(T)$ 的一个连通分支，且 $\lambda \in U$，则在 U 上，

$$\frac{dP_T}{dxdy} = -\frac{1}{2\pi i}\mathrm{ind}(T - \lambda).$$

定理 3.6（主要源自 [CP74]的定理 2）。***Helton–Howe*测度 P_T 关于 *Lebesgue*测度是绝对连续的。**

定理 3.5 和定理 3.6 表明，紧几乎正规算子的 Helton–Howe测度为 0，而单边移位的 Helton–Howe测度为 $\frac{1}{2\pi i} dxdy|_{\mathbb{D}}$.

3.2 全变差的估计

我们给出了关于 Helton–Howe测度全变差的精妙结果.

定义 3.7。我们用 $||P_T|| = |P_T|(\mathbb{C})$ 表示 P的全变差 $_T$.

命题 3.8 (Larry Brown 在 [HH73]中的评注)。设 T 是一个几乎正规算子。其 ***Helton–Howe*测度的全变差有界于** $\frac{||[T^*,T]||_1}{2}$。

当我们考虑具有非平凡自交换子的希尔伯特–施密特算子时，这个估计显得不够紧。然而，由于 Helton–Howe测度在迹类扰动下保持不变，我们可以得到一个更好的估计。

推论 3.9。

$$2||P_T|| \leq \inf_{T-T' \in \mathcal{J}_1} ||[(T')^*, T']||_1.$$

在以下几个初等情形中，这个不等式是严格的。

1. 希尔伯特–施密特算子。
   设 T 是一个希尔伯特–施密特算子，且$\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是依强算子拓扑收敛到恒等算子的有限秩投影。那么，容易看出
   $$\lim_{n\to\infty} ||[(T(1-P_n))^*, T(1-P_n)]||_1 = 0.$$
   另一方面，$P_T = 0$ 正如定理 3.6 后的注释所述。

2. 次正规算子。

由于 iP_T 为正，我们有

$$||[T^*,T]||_1 = \mathrm{tr}([T^*,T]) = |2i\mathrm{tr}([X,Y])| = 2\left|\int dP_T\right| = 2||P_T||.$$

次正规几乎正规算子的一个例子是 Ces`aro 算子$C_0 : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$，其定义为

$$(a_1, a_2, \cdots) \mapsto \left(a_1, \frac{a_1+a_2}{2}, \cdots, \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \cdots\right).$$

C_0 的谱性质见 [BHS65] ，而其几乎正规性见 [Kit91]第660页。

3. 几乎正规加权移位。

设 W_α 是作用在 $\ell^2(\mathbb{Z})$上的双边加权移位算子，权为 $\{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$。也就是说，对于$\ell^2(\mathbb{Z})$的典范正交归一基 $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ，有 $W_\alpha e_n = \alpha_n e_{n+1}$ 。由于 Helton–Howe测度在酉变换下不变，我们可以假设每个 α_n 都是非负实数。那么， W_α 几乎正规，当且仅当

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n^2 - \alpha_{n+1}^2| < \infty.$$

特别地，若 W_α 几乎正规，则 $\alpha_+ = \lim_{n\to\infty}\alpha_n$ 和 $\alpha_- = \lim_{n\to-\infty}\alpha_n$ 存在。我们只考虑 $\alpha_- \le \alpha_+$的情形。另一种情形可类似处理。在此情形下， $\sigma(W_\alpha)$ 是圆环 $\mathrm{ann}(\alpha_-, \alpha_+)$，其外半径为$\alpha_+$ ，内半径为 α_- ，且映射 $\mathbb{C}\setminus\sigma_e(W_\alpha) \ni \lambda \mapsto \mathrm{ind}(\lambda - W_\alpha)$在该圆环内部取值 -1，在圆环外部取值为0。这个谱结果见 [Con00]的命题27.7。因此

$$||P_{W_\alpha}|| = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Area}(\mathrm{ann}(\alpha_-,\alpha_+)) = \frac{\alpha_+^2 - \alpha_-^2}{2}.$$

对于自然数 k，令 T_k 为有限秩算子，使得 $W_\alpha + T_k$ 为权重为 $\{\beta_n^k\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 的加权移位算子，定义为

$$\beta_n^k = \begin{cases} \alpha_+ & \text{if } 0 \le n \le k, \\ \alpha_- & \text{if } -k \le n < 0, \\ \alpha_n & \text{else.} \end{cases}$$

那么，

$$||[(W_\alpha+T_k)^*, W_\alpha+T_k]||_1 = |\alpha_+^2-\alpha_-^2|+|\alpha_+^2-\alpha_{k+1}^2|+|\alpha_-^2-\alpha_{-k-1}^2|+\sum_{n\le -k-1, k\le n}|\alpha_n^2-\alpha_{n+1}^2|.$$

因此我们得到

$$\inf_{W_\alpha - T' \in \mathcal{J}_1} ||[(T')^*, T']||_1 \le \lim_{k\to\infty} ||[(W_\alpha+T_k)^*, W_\alpha+T_k]||_1 = \alpha_+^2 - \alpha_-^2 = 2||P_{W_\alpha}||.$$

4 Toeplitz 算子的 Helton–Howe测度

4.1 带光滑符号的 Toeplitz 算子

设 $\phi \in C^\infty(\mathbb{T})$。那么， T_ϕ 的本质谱为 $\phi(\mathbb{T})$，其二维勒贝格测度为 0。因此，由定理 3.6 可得，

$$dP_{T_\phi} = -\frac{1}{2\pi i}\mathrm{ind}(T_\phi - x - iy)dxdy,$$

其中，我们将 $\lambda \mapsto \mathrm{ind}(T_\phi - \lambda)$ 视为几乎处处有定义的函数。注意，$\mathrm{ind}(T_\phi - \lambda) = -\mathrm{wind}(\phi, \lambda)$（参见 [Arv01] 的第 4.4.3 定理）。将绕数与映射 $\Phi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^2$ 的度对应起来，显然 $\mathrm{wind}(\phi, \lambda) = m_\Phi(\lambda)$。这一事实的证明见 [Dei85] 第 1 章第 6.6 节。因此，我们得到以下结果。

定理 4.1. 设 $\phi \in C^\infty(\mathbb{T})$。那么， T_ϕ 的 *Helton–Howe*测度可表示如下。

$$dP_{T_\phi} = \frac{1}{2\pi i}m_\Phi(x + iy)dxdy.$$

4.2 主要结果

我们利用上一节的结果，计算一般几乎正规 Toeplitz 算子的 Helton–Howe测度。本文的主定理如下。

定理 4.2 (主定理)。 设 ϕ 是单位圆上的一个 L^∞ 函数。若 T_ϕ是几乎正规算子，则其 *Helton–Howe*测度可表示为

$$dP_{T_\phi} = \mathrm{weak}^*\text{-}\lim_{r\nearrow 1} dP_{T_{\phi_r}} = \mathrm{weak}^*\text{-}\lim_{r\nearrow 1}\frac{1}{2\pi i}m_{\Phi_r}(x + iy)dxdy.$$

此外，若 $\int_{\mathbb{D}} |J(\Phi)|dxdy < \infty$，则

$$dP_{T_\phi} = \frac{1}{2\pi i}m_\Phi(x + iy)dxdy.$$

我们将在下文通过一系列引理和命题推导出该定理。

定义 4.3。 取一个正数 $0 < r < 1$ 以及希尔伯特空间的一组标准正交基 $\{e_n\}_{n=0}^\infty$。然后，将算子 R 定义为对角算子

$$R = \mathrm{diag}((r^n)_{n=0}^\infty)$$

相对于基 $\{e_n\}_{n=0}^\infty$。

定义 4.4. 固定一个整数 $\ell \geq 2$以及希尔伯特空间的一组标准正交基 $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ 。对于有界算子 X，定义 $X^{(\ell)}$ 为如下算子

$$X^{(\ell)} = S^{\ell-2}X(S^*)^{\ell-2}$$

其中， S 是相对于基 $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$的单边移位算子。它的矩阵表示或许有助于理解它；

$$X^{(\ell)} = \left(\begin{array}{c|c} O_{\ell-2,\ell-2} & O \\ \hline O & X \end{array}\right).$$

我们还需要 Toeplitz 算子交换子的矩阵表示。令 $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 为 $L^2(\mathbb{T})$的典范正交归一基。

引理 4.5。 设 $\phi = f + \bar{g} \in L^\infty(\mathbb{T})$ 满足 $f, g \in H^2(\mathbb{T})$，并设 n, m 为非负整数。则，

$$\langle [T_\phi^*, T_\phi] e_n, e_m \rangle = \sum_{\ell>0} \left(\hat{f}(m+\ell)\overline{\hat{f}(n+\ell)} - \hat{g}(m+\ell)\overline{\hat{g}(n+\ell)} \right).$$

证明。 直接计算可得 $[T_\phi^*, T_\phi] = H_{\bar{\phi}}^* H_{\bar{\phi}} - H_\phi^* H_\phi$，且

$$\begin{aligned} \langle H_{\bar{\phi}}^* H_{\bar{\phi}} e_n, e_m \rangle &= \langle (1-P_+)\bar{\phi} e_n, (1-P_+)\bar{\phi} e_m \rangle \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \langle (1-P_+)\bar{\phi} e_n, e_\ell \rangle \langle e_\ell, (1-P_+)\bar{\phi} e_m \rangle \\ &= \sum_{\ell>0} \langle \bar{\phi} e_n, e_{-\ell} \rangle \langle e_{-\ell}, \bar{\phi} e_m \rangle \\ &= \sum_{\ell>0} \hat{f}(m+\ell)\overline{\hat{f}(n+\ell)}. \end{aligned}$$

类似地，我们可以计算 $\langle H_\phi^* H_\phi e_n,\ e_m \rangle$，引理得证。 □

对于 $n > 0$，令 P_n 为投影到 $\mathrm{span}\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$ 上的正交投影。我们将使用下面这个引理，它涉及通过特定有限秩算子进行逼近。尽管我们将讨论一般的赋范理想，但证明本文的主定理只需考虑 $\mathcal{J}_\Psi^{(0)} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ 的情形。

引理 4.6. 设 K 为 $\mathcal{J}_\Psi^{(0)}$ 中的一个算子。若 $\{T_i\}$ 是在强算子拓扑下收敛于 T 的算子范数有界网，则 $\{T_i K\}$ 在 $\mathcal{J}_{(0)\,\Psi}$ 中收敛于 TK。

本引理关于 Schatten p-类的证明可见于 [Dav88] 的推论 1.18。可以仿照该技巧给出 $\mathcal{J}_\Psi^{(0)}$ 的证明。

注 4.7. 若我们将希尔伯特空间取为 $H^2(\mathbb{T})$，则当 $X \in \mathcal{J}_\Psi^{(0)}$ 时， $P_n X P_n$ 在$\mathcal{J}_{(0)\,\Psi}$ 中收敛于 X，如引理 *4.6* 所述。因此我们常常考虑一个相对于$\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$仅有有限多个非零元的 $X = (x_{n,m})_{n,m=0}^{\infty}$。

引理 4.8. 设 $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$，且 X 是注 *4.7* 中所述的有限秩算子。那么，$\mathrm{tr}([T_{\phi_r}^*, T_{\phi_r}]X)$ 等于

$$r^2 \mathrm{tr}([T_\phi^*, T_\phi] RXR) - \sum_{\ell \geq 2} r^{2\ell-2}(1-r^2)\ \mathrm{tr}([T_\phi^*, T_\phi](RXR)^{(\ell)}).$$

证明。 我们将 $\phi = f + \bar{g}$ 写作，其中 $f, g \in H^2(\mathbb{T})$。定义

$$S(\phi)_{m,n} := \sum_{\ell>0} \left(\hat{f}(m+\ell)\overline{\hat{f}(n+\ell)} - \hat{g}(m+\ell)\overline{\hat{g}(n+\ell)} \right).$$

根据引理 4.5，这是 $[T_\phi^*, T_\phi]$ 的 (m,n) 项。将 $\hat{}\, f(k)$ 和 $\hat{}\, g(k)$ 分别替换为 $r^k \hat{}\, f(k)$ 和 $r^k \hat{}\, g(k)$，即可得到 $[T_{\phi_r}^*, T_{\phi_r}]$ 的 (m,n) 项。注意，$\hat{}\,\hat{}\, S(\phi)_{m+\ell-1,n+\ell-1} - S(\phi)_{m+\ell,n+\ell} = f(m+\ell)f(n+\ell) - \hat{}\, g(m+\ell)\hat{}\, g(n+\ell)$。因此，根据引理 4.5，$\operatorname{tr}([T_{\phi_r}^*, T_{\phi_r}]X)$ 等于

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n\geq 0} S(\phi_r)_{m,n} x_{n,m}\right) \\
&= \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n\geq 0} x_{n,m} \sum_{\ell>0} r^{n+m+2\ell}\left(\hat{f}(m+\ell)\overline{\hat{f}(n+\ell)} - \hat{g}(m+\ell)\overline{\hat{g}(n+\ell)}\right)\right) \\
&= \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n\geq 0} x_{n,m} \sum_{\ell>0} r^{n+m+2\ell}\left(S(\phi)_{m+\ell-1,n+\ell-1} - S(\phi)_{m+\ell,n+\ell}\right)\right) \\
&= \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n\geq 0} r^{n+m} x_{n,m}\left(r^2 S(\phi)_{m,n} + \sum_{\ell\geq 2} r^{2\ell-2}(r^2-1) S(\phi)_{m+\ell-1,n+\ell-1}\right)\right) \\
&= \underbrace{r^2 \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n\geq 0} r^{n+m} x_{n,m} S(\phi)_{m,n}\right)}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n\geq 0} r^{n+m} x_{n,m} \sum_{\ell\geq 2} r^{2\ell-2}(r^2-1) S(\phi)_{m+\ell-1,n+\ell-1}\right)}_{\mathrm{II}}.
\end{aligned}$$

再次利用引理 4.5，我们得到

$$\mathrm{I} = r^2 \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n\geq 0} (RXR)_{n,m} S(\phi)_{m,n}\right) = r^2 \operatorname{tr}([T_\phi^*, T_\phi] RXR).$$

与此同时，

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n\geq 0} (RXR)_{n,m} \sum_{\ell\geq 2} r^{2\ell-2}(r^2-1) S(\phi)_{m+\ell-1,n+\ell-1}\right) \\
&= \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{\ell\geq 2} r^{2\ell-2}(r^2-1) \sum_{n\geq 0} (RXR)_{n,m} S(\phi)_{m+\ell-1,n+\ell-1}\right) \\
&= \sum_{\ell\geq 2} r^{2\ell-2}(r^2-1) \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n\geq 0} (RXR)_{n,m} S(\phi)_{m+\ell-1,n+\ell-1}\right) \\
&= \sum_{\ell\geq 2} r^{2\ell-2}(r^2-1) \sum_{m\geq \ell-1}\left(\sum_{n\geq \ell-1} (RXR)_{n-\ell+1,m-\ell+1} S(\phi)_{m,n}\right) \\
&= \sum_{\ell\geq 2} r^{2\ell-2}(r^2-1) \sum_{m\geq \ell-1}\left(\sum_{n\geq \ell-1} ((RXR)^{(\ell)})_{n,m} S(\phi)_{m,n}\right).
\end{aligned}$$

由于 X 是有限矩阵，因此可以交换上述求和的顺序。由于

当 m 或 n 小于 $\ell-1$时，(m,n)-项 $(RXR)^{(\ell)}$ 为 0，因此有

$$\begin{aligned}\mathrm{II} &= \sum_{\ell\geq 2} r^{2\ell-2}(r^2-1)\sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n\geq 0}((RXR)^{(\ell)})_{n,m}S(\phi)_{m,n}\right)\\ &= \sum_{\ell\geq 2} r^{2\ell-2}(r^2-1)\ \mathrm{tr}([T_\phi^*,T_\phi](RXR)^{(\ell)}).\end{aligned}$$

因此，我们得到了所需的结果。 □

如果 T_ϕ 是几乎正规的，我们可以改进上述引理。

引理 4.9. 设 $\phi\in L^\infty(\mathbb{T})$ 和 X 是任意有界算子。假设 T_ϕ 是几乎正规的。那么，$\mathrm{tr}([T_{\phi_r}^*,T_{\phi_r}]X)$ 等于

$$r^2\mathrm{tr}([T_\phi^*,T_\phi]RXR)-\sum_{\ell\geq 2} r^{2\ell-2}(1-r^2)\ \mathrm{tr}([T_\phi^*,T_\phi](RXR)^{(\ell)}).$$

Proof. 对于有界算子 X，设 $X_n=P_nXP_n$。那么，引理 4.8 表明 s

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}([T_{\phi_r}^*,T_{\phi_r}]X_n)\\ &= r^2\mathrm{tr}([T_\phi^*,T_\phi]RX_nR)-\sum_{\ell\geq 2} r^{2\ell-2}(1-r^2)\ \mathrm{tr}([T_\phi^*,T_\phi](RX_nR)^{(\ell)}).\end{aligned}\tag{4.1}$$

由于 当 $n\to\infty$ 时，X_n 在强算子拓扑下收敛到 X，由引理 4.6 可知

$\lim_{n\to\infty}$迹$([T_{\phi_r}^*,T_{\phi_r}]X_n)$ =迹$([T_{\phi_r}^*,T_{\phi_r}]X)$，$\lim_{n\to\infty}$迹$([T_\phi^*,T_\phi]RX_nR)$ =迹$([T_\phi^*,T_\phi]RXR)$，以及

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{tr}([T_\phi^*,T_\phi](RX_nR)^{(\ell)})=\mathrm{tr}([T_\phi^*,T_\phi](RXR)^{(\ell)})$$

对所有 $\ell\geq 2$. 注意到 $|$迹$([T_\phi^*,T_\phi](RX_nR)^\ell)|\leq |||[T_\phi^*,T_\phi]|||_1||X||$，勒贝格控制收敛定理给出

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{\ell\geq 2} r^{2\ell-2}(1-r^2)\ \mathrm{tr}([T_\phi^*,T_\phi](RX_nR)^{(\ell)})\\ &=\sum_{\ell\geq 2} r^{2\ell-2}(1-r^2)\ \mathrm{tr}([T_\phi^*,T_\phi](RXR)^{(\ell)}).\end{aligned}$$

对方程 (4.1) 两边取极限，即得所需的迹公式。 □

上述两个引理的意义在于，我们可以从 Toeplitz算子的符号中提取 r。下一个命题也是一个重要工具。同样，普通读者只需考虑 $\mathcal{J}_{\Psi^*}=\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_\Psi^{(0)}=\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 的情形。

命题 4.10。 设 $\phi\in L^\infty(\mathbb{T})$ 和 Ψ 是对称范数。假设$[T_\phi^*,T_\phi]\in\mathcal{J}_{\Psi^*}$。那么，对于每个 $r<1$,

$$|||[T_{\phi_r}^*,T_{\phi_r}]|||_{\mathcal{J}_{\Psi^*}}\leq 2|||[T_\phi^*,T_\phi]|||_{\mathcal{J}_{\Psi^*}}.$$

证明。 由于有限秩算子在 $\mathcal{J}_\Psi^{(0)}$ 中稠密，有界算子 T 属于 $\mathcal{J}_{\Psi^*}=(\mathcal{J}_{(0)\,\Psi})^*$，当且仅当存在常数 $M>0$ 满足 $|$tr$(TX)|\leq$

$M||X||_{\mathcal{J}^{(0)}\Psi}$对所有有限秩算子 X 均成立。此类 M 中的最小值为 $||T||_{\mathcal{J}_{\Psi^*}}$。根据引理 4.6，我们只需考虑注 4.7 中的一个 X。于是，由引理 4.8 得

$$\mathrm{tr}([T_{\phi_r}^*, T_{\phi_r}]X) = r^2\mathrm{tr}([T_\phi^*, T_\phi]RXR) - \sum_{\ell\geq 2} r^{2\ell-2}(1-r^2)\ \mathrm{tr}([T_\phi^*, T_\phi](RXR)^{(\ell)}).$$

注意到 $||RXR||_{\mathcal{J}_\Psi^{(0)}}$和 $||(RXR)^{(\ell)}||_{\mathcal{J}^{(0)}\Psi}$均由$||X||_{\mathcal{J}^{(0)}\Psi}$所界定，故可得所需结果。□

命题 4.11。设 $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$。若 $\{|||[T_{\phi_r}^*, T_{\phi_r}]|||_1\}_{r<1}$被某个 $M>0$一致有界，则 T_ϕ 是几乎正规算子，并且

$$dP_{T_\phi} = \mathrm{weak}^*\text{-}\lim_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi i} m_{\Phi_r}(x+iy)dxdy.$$

证明。由于 ϕ_r 在 $\mathbb{T}$ 上几乎处处收敛于 ϕ，当 $r\nearrow 1$ 时其 L^∞-范数一致有界（参见最大模原理），因此 T_{ϕ_r} 关于强-$*$ 算子拓扑收敛于 T_ϕ。由于 $\mathcal{J}_1$ 的单位球关于弱算子拓扑是闭的（[Sim05]中的定理 2.7 (d)），可知 $[T_\phi^*, T_\phi]$属于迹类，并且在该命题的假设下 $|||[T_\phi^*, T_\phi]|||_1 \leq M$。

为了将 dP_T 表示为弱-$*$ 极限，我们必须证明

$$\mathrm{tr}([T_{\Re\phi}^n T_{\Im\phi}^m, T_{\Im\phi}]) = \lim_{r\nearrow 1} \mathrm{tr}([T_{\Re\phi_r}^n T_{\Im\phi_r}^m, T_{\Im\phi_r}]).$$

利用公式 $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$，对于任意有界算子 A，B，C，可得

$$[T_{\Re\phi_r}^n T_{\Im\phi_r}^m, T_{\Im\phi_r}] = \sum_{j:\mathrm{finite}} A_r^{(j)}[T_{\Re\phi_r}, T_{\Im\phi_r}]B_r^{(j)},$$

其中 $A_r^{(j)}$和 $B_r^{(j)}$是由 $T_{\Re\phi_r}$ 和 $T_{\Im\phi_r}$构成的乘积。于是，

$$\mathrm{tr}([T_{\Re\phi_r}^n T_{\Im\phi_r}^m, T_{\Im\phi_r}]) = \sum_{j:\mathrm{finite}} \mathrm{tr}(A_r^{(j)}[T_{\Re\phi_r}, T_{\Im\phi_r}]B_r^{(j)}) = \sum_{j:\mathrm{finite}} \mathrm{tr}([T_{\Re\phi_r}, T_{\Im\phi_r}]C_r^{(j)}),$$

其中 $C_r^{(j)} = B_r^{(j)}A_r^{(j)}$。注意，每个 $C_r^{(j)}$都在强算子拓扑下收敛到一个算子，该算子由将 $C_r^{(j)}$中出现的 ϕ_r 替换为 ϕ得到。我们记作 $C^{(j)} := s\text{-}\lim_{r\nearrow 1} C_r^{(j)}$。由 $C^{(j)}$ 的定义可知

$$\mathrm{tr}([T_{\Re\phi}^n T_{\Im\phi}^m, T_{\Im\phi}]) = \sum_{j:\mathrm{finite}} \mathrm{tr}([T_{\Re\phi}, T_{\Im\phi}]C^{(j)}).$$

（这里，我们 并未取极限，只是将 ϕ_r 替换为 ϕ。）因此，我们必须证明

$$\mathrm{tr}([T_{\Re\phi}, T_{\Im\phi}]C^{(j)}) = \lim_{r\nearrow 1} \mathrm{tr}([T_{\Re\phi_r}, T_{\Im\phi_r}]C_r^{(j)}).$$

回顾一下，根据引理 4.9，$\mathrm{tr}([T_{\Re\phi_r}, T_{\Im\phi_r}]C_r^{(j)})$ 等于

$$r^2\mathrm{tr}([T_{\Re\phi}, T_{\Im\phi}]RC_r^{(j)}R) - \mathrm{tr}\left(\sum_{\ell\geq 2} r^{2\ell-2}(1-r^2)[T_{\Re\phi}, T_{\Im\phi}](RC_r^{(j)}R)^{(\ell)}\right).$$

现在，$\lim_{r\nearrow 1}\mathrm{tr}([T_{\Re\phi_r}, T_{\Im\phi_r}]C_r^{(j)})$ 与

$$r^2\lim_{r\nearrow 1}\mathrm{tr}([T_{\Re\phi}, T_{\Im\phi}]RC_r^{(j)}R) - \lim_{r\nearrow 1}\mathrm{tr}\left([T_{\Re\phi}, T_{\Im\phi}]\sum_{\ell\geq 2} r^{2\ell-2}(1-r^2)(RC_r^{(j)}R)^{(\ell)}\right).$$

由于 $C^{(j)} = s\text{-}\lim_{r\nearrow 1} C_r^{(j)}$在算子范数下收敛且一致有界，我们有$s\text{-}\lim_{r\nearrow 1} RC_r^{(j)}R = C^{(j)}$。此外， $Y_r := \sum_{\ell\geq 2} r^{2\ell-2}(1-r^2)(RC_r^{(j)}R)^{(\ell)}$ 如以下所示，在强算子拓扑下收敛至 0。注意，级数 Y_r 在范数意义下一致收敛且范数一致有界。为验证强算子拓扑收敛，取一个 $x \in \text{span}\{e_0, e_1, e_2, \cdots\}$。那么， $x_r := Y_r x$ 实际上是有限和。因此 $\lim_{r\nearrow 1} x_r = 0$.对于任意的 $y \in H^2(\mathbb{T})$，用 $\text{span}\{e_0, e_1, e_2, \cdots\}$中的元素对其作逼近。由此，我们得到 $\lim_{r\nearrow 1} Y_r y = 0$ ，如所声称的那样。结合引理 4.6，可得 $\lim_{r\nearrow 1} \text{tr}([T_{\Re\phi_r}, T_{\Im\phi_r}]C_r^{(j)}) = \text{tr}([T_{\Re\phi}, T_{\Im\phi}]C^{(j)})$。 至此，我们已经证明了

$$\text{tr}([T_{\Re\phi}^n T_{\Im\phi}^m, T_{\Im\phi}]) = \lim_{r\nearrow 1} \text{tr}([T_{\Re\phi_r}^n T_{\Im\phi_r}^m, T_{\Im\phi_r}]). \tag{4.2}$$

我们将由此等式推导出迹公式。设 K 是一个包含以 0 为中心、半径为 $||\phi||_{L^\infty}$ 的开球的紧集。 K 包含 T_ϕ 和 T_{ϕ_r} 的谱。由于 ϕ_r 属于 $C^\infty(\mathbb{T})$，根据定理 4.1 和等式 (4.2)，我们有以下等式。

$$\begin{aligned}\int_K nx^{n-1}y^m dP_{T_\phi} &= \text{tr}([T_{\Re\phi}^n T_{\Im\phi}^m, T_{\Im\phi}]) \\ &= \lim_{r\nearrow 1} \text{tr}([T_{\Re\phi_r}^n T_{\Im\phi_r}^m, T_{\Im\phi_r}]) \\ &= \lim_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi i} \int_K nx^{n-1}y^m m_{\Phi_r}(x+iy)dxdy.\end{aligned}$$

也就是说，对于任意多项式 p，我们有

$$\int_K p(x,y)dP_{T_\phi} = \lim_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi i} \int_K p(x,y)m_{\Phi_r}(x+iy)dxdy. \tag{4.3}$$

设 f 是 K 上的连续函数。我们将验证下面的等式

$$\int_K f(x,y)dP_{T_\phi} = \lim_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi i} \int_K f(x,y)m_{\Phi_r}(x+iy)dxdy. \tag{4.4}$$

在以下估计中，我们将用到这样一个事实： $[T^*, T]$ 的全变差 $||P_T||$ 不超过其迹范数的一半。这进而意味着

$$||m_{\Phi_r}||_{L^1(K)} = 2\pi||P_{T_{\phi_r}}|| \leq \pi||[T_{\phi_r}^*, T_{\phi_r}]||_1 \leq \pi M.$$

注意到，由于 $C(K)^*$ 的闭单位球在弱-$*$拓扑下是紧的，$\lim_{r\nearrow 1} \frac{1}{2\pi i}\int_K f(x,y)m_{\Phi_r}(x+iy)dxdy$存在。严格来说，我们必须取一个子网。但容易看出，极限不依赖于所取的子网，因此极限作为 $r \nearrow 1$ 存在。我们证明该极限与相对于 Helton–Howe测度的 f 积分一致。对于任意 $\varepsilon > 0$，取一个多项式 p，使得 $||f-p||_{C(K)} < \varepsilon$。可得以下估计。

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_K f\ dP_{T_\phi} - \lim_{r\nearrow 1}\frac{1}{2\pi i}\int_K f\ m_{\Phi_r}dxdy\right| \\
\le &\left|\int_K (f-p)dP_{T_\phi}\right| + \left|\int_K p\ dP_{T_\phi} - \lim_{r\nearrow 1}\frac{1}{2\pi i}\int_K p\ m_{\Phi_r}dxdy\right| + \left|\lim_{r\nearrow 1}\frac{1}{2\pi i}\int_K (f-p)m_{\Phi_r}dxdy\right| \\
= &\left|\int_K (f-p)dP_{T_\phi}\right| + \left|\lim_{r\nearrow 1}\frac{1}{2\pi i}\int_K (f-p)m_{\Phi_r}dxdy\right| \\
\le &\varepsilon||P_{T_\phi}|| + \frac{\varepsilon}{2\pi}\sup_{0<r<1}||m_{\Phi_r}||_{L^1} \\
\le &\varepsilon|||[T_\phi^*, T_\phi]|||_1 + \varepsilon\sup_{0<r<1}|||[T_{\phi_r}^*, T_{\phi_r}]|||_1 \\
\le &\ 2\varepsilon M.
\end{aligned}
$$

因此，我们得到了所需的结果。 □

仿照上述命题中 $\sum_{\ell\ge 2} r^{2\ell-2}(1-r^2)(RC_r^{(j)}R)^{(\ell)}$ 的强算子拓扑收敛证明，我们得到以下结果。

推论 4.12. 设 $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$。若 T_ϕ 几乎正规，则当 $r \nearrow 1$ 时，$[T_{\phi_r}^*, T_{\phi_r}]$ 在由与 $B(\mathcal{H})$ 的对偶性所诱导的弱拓扑下收敛到 $[T_\phi^*, T_\phi]$。

最后，我们可以证明主要结果。

定理 *4.2* 的证明。 第一个结论由命题 4.11 和命题 4.10 立即得到。我们只需证明第二个断言。设 K 是一个紧集，包含以 0 为中心、半径为 $||\phi||_{L^\infty}$ 的球。那么，

$$
\begin{aligned}
\int_K nx^{n-1}y^m dP_{T_\phi} &= \lim_{r\nearrow 1}\frac{1}{2\pi i}\int_K nx^{n-1}y^m m_{\Phi_r}(x+iy)dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_K nx^{n-1}y^m m_\Phi(x+iy)dxdy.
\end{aligned}
$$

我们验证最后一个等式。首先，注意到对于 $z\in\mathbb{D}$，$\Phi(z) = w$ 当且仅当 $\Phi_r(z/r) = w$。由带符号重数函数的定义可知，m_{Φ_r} 在 K 上几乎处处收敛到 m_Φ，并且

$$
|m_{\Phi_r}(w)| \le \#(\Phi_r^{-1}(\{w\})\cap\mathbb{D}) \le \#(\Phi^{-1}(\{w\})\cap\mathbb{D})
$$

对所有 $w\in\mathbb{C}$。与引理 2.5 中一样，$\#(\Phi^{-1}(\{w\})\cap\mathbb{D})$ 是可积的。因此，应用勒贝格控制收敛定理，最后一个等式成立。 □

接下来是定理 3.5 与定理 4.2 的一个直接推论。

推论 4.13. 设 $\phi\in L^\infty(\mathbb{T})$，并假设 T_ϕ 是几乎正规的，且 $\int_{\mathbb{D}}|J(\Phi)|dxdy<\infty$。则对 $\sigma_e(T_\phi)$ 之外的几乎所有 λ，我们有

$$
\mathrm{ind}(\lambda - T_\phi) = -m_\Phi(\lambda).
$$

尽管我们已给出了当 T_ϕ 恰好几乎正规时Helton–Howe测度的一个公式，但作者只知道少数几个保证几乎正规性的条件。综合用于证明主定理的诸命题，我们得到几乎正规性的一个抽象刻画。

推论 4.14. T_ϕ 几乎正规当且仅当网 $\{||[T^*_{\phi_r}, T_{\phi_r}]||_1\}_{r<1}$ 一致有界。

利用Besov空间可以给出一个更明确的充分条件。由于$[T^*_\phi, T_\phi] = 2i($ $H^*_{\Im\phi}H_{\Re\phi} - H^*_{\Re\phi}H_{\Im\phi})$，我们将重点讨论Hankel算子。以下定义可在 [Zhu07]第115页的论述中找到。

定义 4.15 （解析Besov空间）。 设 $\phi \in H^\infty$（$\mathbb{T}$） 对于 $1 \le p < \infty$， ϕ属于解析 *Besov*空间 A_p ， 当且仅当

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{p-2} |\Phi'(z)|^p dxdy < \infty & if\ p \neq 1, \\ \int_{\mathbb{D}} |\Phi''(z)| dxdy < \infty & if\ p = 1. \end{cases}$$

定义 4.16 （Besov空间）。 设 $1 \le p < \infty$。函数 L^∞ ϕ 在 $\mathbb{T}$ 上属于*Besov*空间 B_p ， 当且仅当 P_+（ϕ） $\in A_p$ 且 （$(1-P_+)$ （ϕ） $\in A_p$.

命题 4.17 （Pel12] ）第6章推论1.2和2.2）。 设 $\phi \in L^\infty$（$\mathbb{T}$）。对于 $1 \le p < \infty$, *Hankel* 算子 H_ϕ 属于 $\mathcal{J}_p$ ， 当且仅当 $(1-P_+)\,\phi \in B_p$。

推论 4.18。 对于 $\phi \in L^\infty$（$\mathbb{T}$） ， 当且仅当 T_ϕ 满足以下条件时，它是几乎正规的：

$$\Re\phi \in B_p \quad and \quad \Im\phi \in B_q$$

其中， p 和 q 均为有限且彼此为 *H¨older* 共轭，或者

$$\Re\phi \in B_1 \quad and \quad \Im\phi \in L^\infty.$$

引理 4.19。 设 $\phi \in L^\infty$（$\mathbb{T}$）。假设 $\Re\phi \in B_p$ 和 $\Im\phi \in B_q$ ， 其中 p、 $q > 1$ 是有限的 *H¨older* 共轭数。那么， T_ϕ 是几乎正规的，并且

$$dP_{T_\phi} = \frac{1}{2\pi i} m_\Phi(x+iy) dxdy.$$

证明。 根据引理 2.5，只需证明 $\int_{\mathbb{D}} |J(\Phi)| dxdy < \infty$。设 $f = \Re\phi$ 和$g = \Im\phi$。 F, G 表示它们的调和延拓。于是,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |J(\Phi)| dxdy &= \int_{\mathbb{D}} \left| \left|\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}}\right|^2 \right| dxdy \\ &= \int_{\mathbb{D}} 2 \left| \frac{\partial G}{\partial z}\overline{\frac{\partial F}{\partial z}} - \frac{\partial F}{\partial z}\overline{\frac{\partial G}{\partial z}} \right| dxdy \\ &\lesssim \left(\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{p-2} \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|^p dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{q-2} \left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|^q dxdy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

注意到， $\frac{\partial F}{\partial z}$与 $P_+ f$的调和延拓的微分一致。证毕。

□

致谢

我由衷感谢我的导师 Masaki Izumi 教授一直以来的支持与指导。他仔细审阅了本论文的早期草稿,

并提出了许多建议，使这份论文的最终版本得到显著改进。

参考文献

[Arv01] W. Arveson，《谱理论简明教程》，数学研究生教材，Springer New York，2001年。[BHS65] A. Brown、P.R. Halmos 和 A.L. Shields，《Cesàro 算子》，《Acta Sci. Math. (Szeged)》（1965），第26卷，125–137页。[Con00] J.B. Conway，《算子理论教程》，数学研究生学习丛书，美国数学学会，2000年。[CP74] R.W. Carey 和 J.D. Pincus，《确定函数的指数公式》，《印第安纳大学数学杂志》第23卷（1974），第11期，1031–1042页。[CP77] ，《冯·诺依曼代数中的镶嵌、主函数与平均运动》，《数学学报》第138卷（1977），153–218页。[CP79] ，《平均运动、主函数与狄利克雷级数的零点》，《积分方程与算子理论》第2卷（1979），第4期，484–502页。[Dav88] K.R. Davidson，《巢代数：希尔伯特空间上算子的三角形式》，皮特曼数学研究札记丛书，第191卷，Longman Scientific & Technical，英国哈洛，1988年。[Dei85] K. Deimling，《非线性泛函分析》，Springer-Verlag，柏林、海德堡，1985年。[GK69] I.C. Gohberg 和 M.G. Krein，《线性非自伴算子理论导论》，美国数学学会，美国罗得岛州普罗维登斯，1969年。[HH73] J.W. Helton 和 R.E. Howe，《积分算子：交换子、迹、指标与同调》，算子理论会议论文集（达尔豪斯大学，新斯科舍省哈利法克斯，1973年），第345卷，Springer Berlin New York，1973年，第141–209页。[Kit91] F. Kittaneh，《若干迹为零的迹类交换子》，《美国数学会会刊》第113卷（1991），第3期，655–661页。[Pel12] V.V. Peller，《Hankel 算子及其应用》，Springer 数学专著，Springer New York，2012年。[Pin68] J.D. Pincus，《交换子与奇异积分方程组 I》，《数学学报》第121卷（1968），219–249页。

[Sim05] B. Simon, 《迹理想及其应用》，第二版，数学调查与专著，第120卷，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2005年。[Zhu07] K. Zhu, 《函数空间中的算子理论》，第二版，数学调查与专著，第138卷，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2007年。