随机量子扩散率下时间分数阶薛定谔方程的平均可控性

JonAsier Bárcena-Petisco[a]，Salah-Eddine Chorfi[b]，Fouad Et-tahri*, [c]，Lahcen Maniar[b, d]

巴斯克地区大学 *UPV/EHU* 数学系，*Barrio Sarriena s/n*，莱奥阿，*48940*，西班牙

卡迪·阿亚德大学（*UCA*），塞姆拉利亚理学院，数学、建模与自动系统实验室，邮政信箱 *2390*，马拉喀什，*40000*，摩洛哥

* 通讯作者。阿加迪尔理学院，*Lab-SIV*，伊本·佐赫尔大学，邮政信箱 *8106*，阿加迪尔，*80000*，摩洛哥

*UM6P*先锋中心，穆罕默德六世理工大学，穆莱·拉希德区，本·杰里尔，*43150*，摩洛哥

arXiv:2602.07514v1 [math.OC] 7 Feb 2026

摘要

本文研究时间分数阶薛定谔方程的平均可控性问题，其中量子扩散率参数是具有一般概率分布的随机变量。首先，利用米塔格-莱夫勒函数的解析性和明茨定理，我们证明，该系统的同时零可控性仅能对随机扩散率的可数多个取值成立。特别地，这意味着绝对连续随机扩散率不具有同时零可控性。随后，我们证明，对于绝对连续随机变量，无论控制时间多长，精确平均可控性均不成立。此外，我们引入一种新的双参数分数阶特征函数，从而能够设计一类随机变量，使其在任意时刻、对于任意具有正勒贝格测度的传感器集合，均满足零平均可控性。为此，可以采用属于 L^∞ 且独立于随机参数的开环控制。特别地，我们得到分数阶双调和扩散方程的零可控性。最后，我们提出一些值得未来研究的评论和开放问题。

关键词：分数阶薛定谔方程，随机扩散率，同时可控性与平均可控性，分数阶特征函数

*2000*年*MSC*分类：35J10，35R11，35R60，93B05，93C20

1. 引言

近年来，含有时间分数阶导数的薛定谔方程的分数阶推广因能够刻画量子系统中的反常传播和记忆效应而受到广泛关注。在 [33], Naber 最初通过变换时间分数阶扩散方程推导出了时间分数阶薛定谔方程。另一种方法是，Achar 等人在 [2]通过费曼路径积分方法得到了系统 (1.1)（扩散率为常数）。这些分数阶模型已广泛应用于多个领域，包括量子力学、光学与光子学、凝聚态物质和等离子体物理学；参见 [22, 37] 及其中的参考文献。关于时间分数阶薛定谔方程相关的反问题，可参阅近期研究成果 [11]和 [12]。本文研究时间分数阶薛定谔方程的平均可控性

电子邮箱：jonasier.barcena@ehu.eus (Jon Asier Bárcena-Petisco[a])，s.chorfi@uca.ac.ma (Salah-Eddine Chorfi[b])，fouad.et-tahri@edu.uiz.ac.ma (Fouad Et-tahri*, [c])，maniar@uca.ac.ma (Lahcen Maniar[b, d])

方程，该方程由以下方程所支配：

$$(\mathcal{P}_\xi) \quad \begin{cases} \partial_{0,t}^{\alpha} y - \xi \mathrm{i}\Delta y = \mathbb{1}_{G_0} u, & \text{on } Q_T, \\ y = 0, & \text{on } \Sigma_T, \\ y(0,\cdot) = y_0, & \text{in } G. \end{cases} \tag{1.1}$$

这里，$\partial_{0,t}^{\alpha} y$ 表示阶数为 $\alpha \in (0,1)$ 的 Caputo 分数阶导数，其对适当函数 y 的定义如下：

$$\partial_{0,t}^{\alpha} y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \partial_\tau y(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \tag{1.2}$$

其中，Γ 表示标准的欧拉伽马函数。

上述，$T > 0$ 为固定的时间范围，$G \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ 是边界为 ∂G 的利普希茨区域，$Q_T := (0,T) \times G$，$\Sigma_T := (0,T) \times \partial G$，$G_0 \subset G$ 是具有正勒贝格测度的控制子集，$\mathbb{1}_{G_0}$ 是其在 G_0 上的示性函数，i 表示满足 $\mathrm{i}^2 = -1$ 的虚数单位，而 $\xi = \xi(\omega)$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的实随机变量，并自然诱导出概率测度 μ_ξ，属于$\mathbb{R}$，$u = u(t,x) \in L^\infty((0,T) \times G)$ 是控制，而 $y_0 \in L^2(G)$ 是与随机参数 ω 相互独立的初始数据。此外，我们用 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 表示狄利克雷拉普拉斯算子$-\Delta$的特征值，并用 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 表示 $L^2(G)$ 中对应的特征函数希尔伯特基。注意，$\lambda_0 > 0$，且序列 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 非递减并趋于无穷大。

对于几乎所有的 $\mathbb{P}\,\omega \in \Omega$ 以及所有的 u 和 y_0，方程 $(\mathcal{P}_{\xi(\omega)})$ 的解 $y = y(t,x;\xi(\omega);y_0;u)$ 由杜哈梅尔原理的分数阶推广给出：

$$y(t,\cdot;\xi(\omega);y_0;u) = y(t,\cdot;\xi(\omega);y_0;0) + y(t,\cdot;\xi(\omega);0;u),$$

其中

$$\begin{aligned} y(t,\cdot;\xi(\omega);y_0;0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle y_0, e_n \rangle\, E_{\alpha,1}\left(-\mathrm{i}\xi(\omega)\lambda_n t^\alpha\right) e_n, \\ y(t,\cdot;\xi(\omega);0;u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \langle \mathbb{1}_{G_0} u(s,\cdot), e_n \rangle\, (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\mathrm{i}\xi(\omega)\lambda_n (t-s)^\alpha))\, \mathrm{d}s\, e_n \end{aligned}$$

双参数米塔格-莱夫勒函数定义为

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \tag{1.3}$$

它是推广指数函数的一个整函数；例如参见 [16] 和 [33]。

理想情况下，我们希望对几乎所有的 $\mathbb{P}\,\omega \in \Omega$ 都实现同时可控性。然而，正如我们的首个主要结果（定理 3.1）所证明的，当随机变量绝对连续时，这是不可能的。更准确地说，我们证明，对于每个 $y_0 \in L^2(G) \setminus \{0\}$ 和 $u \in L^\infty((0,T) \times G_0)$，映射 $\xi \mapsto y(T,\cdot;\xi;y_0;u)$ 下 0 的原像是可数集。因此，对于绝对连续随机变量，“系统 (1.1) 同时零可控”这一事件是可忽略的，即

$$\mathbb{P}\left[\omega : y(T,\cdot;\xi(\omega);y_0;u) = 0\right] = 0.$$

为阐明平均化如何影响原系统的动力学，我们考察(1.1)的无控制版本（即 $u = 0$），其中 ξ 服从由下式定义的**Rademacher分布**

$$\mathbb{P}(\xi = -1) = \mathbb{P}(\xi = 1) = \frac{1}{2}.$$

在此情形下，该系统的数学期望（即平均态）

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(y(t,\cdot;\xi;y_0;0)) =&\frac{1}{2}(y(t,\cdot;-1;y_0;0)+y(t,\cdot;1;y_0;0))\\ =&\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\langle y_0,e_n\rangle\left(E_{\alpha,1}\left(-\mathrm{i}\lambda_n t^{\alpha}\right)+E_{\alpha,1}\left(\mathrm{i}\lambda_n t^{\alpha}\right)\right)e_n\\ =&\sum_{n=0}^{\infty}\langle y_0,e_n\rangle E_{2\alpha,1}\left(-\lambda_n^2 t^{2\alpha}\right)e_n,\end{aligned}$$

这由下方的恒等式 (2.7) 得出。于是，平均态满足以下分数阶双调和扩散波动方程

$$\begin{cases}\partial_{0,t}^{2\alpha}\tilde{y}+\Delta^2\tilde{y}=0, & \text{on } Q_T,\\ \Delta\tilde{y}=\tilde{y}=0, & \text{on } \Sigma_T,\\ \tilde{y}(0,\cdot)=y_0, & \text{in } G,\\ \tilde{y}_t(0,\cdot)=0,\ (\text{if } 1<2\alpha<2) & \text{in } G.\end{cases}$$

因此，薛定谔型方程的平均态可能具有更高正则性，这一事实凸显了该课题的重要性。

在上述例子中，即使扩散率由离散随机变量决定，扩散的正则化效应也已足以阻止精确平均可控性。这个例子促使我们为一般随机变量引入一种新的分数阶特征函数（见定义 2.6）。在此框架下，我们进一步证明，对于分数阶特征函数在无穷远处趋于零的随机扩散率，精确平均可控性同样不成立（见定理 4.1）。特别地，对于绝对连续随机扩散率，这一结论也成立，其证明依赖于黎曼–勒贝格引理的一个分数阶变体（见推论 4.2）。

这引出了零平均可控性的问题，因此该问题具有重要意义。在此背景下，分数阶特征函数使我们能够识别一类满足零平均可控性的随机变量，主要定理 5.3 证明了这一点。主要难点在于，在并不明确了解平均态动力学的情况下证明其零可控性。所识别的这一类随机变量要求分数阶特征函数呈指数衰减，例如包括 Rademacher分布。因此，上文所述的分数阶双调和扩散系统是零可控的。

为证明该结论，我们提出一种基于平均态的傅里叶级数分解、分数阶特征函数的指数衰减以及适当谱不等式的策略。由此可建立插值估计，进而利用望远镜论证，推导出适当伴随系统的 L^1-可观测性不等式；我们首先证明该不等式等价于原系统的零平均可控性。

我们想指出，本文重点研究属于 L^∞的控制，因为与 L^2中的控制相比，它们更能反映其背后的物理解释。然而，请注意， L^∞中的控制属于 L^2，因此若按通常做法寻找 L^2中的控制，该方法同样适用。

本文其余部分的结构如下。本节接下来将介绍研究现状和符号约定。第 2 节将介绍分数阶微积分和平均可控性的关键概念及其主要刻画。第 3 节和第 4 节将分别证明，对于一般的绝对连续随机变量，不存在同时可控性，以及存在精确平均可控性。第 5 节将致力于证明，对于某一类随机变量，系统 (1.1) 具有零平均可控性。第 6 节将给出一些总结性评论，并提出值得进一步研究的开放问题。

平均可控性的研究现状

关于有限维系统的抽象形式下的平均可控性与同时可控性的研究，始于 [39] 和 [25] 。这些概念随后被推广至偏微分方程；在[29], 中，作者研究了不同概率框架下输运方程、热方程和薛定谔方程的平均状态控制。特别是对于薛定谔方程，他们考虑了扩散率服从均匀分布、指数分布、正态分布、拉普拉斯分布、卡方分布和柯西分布的情形。随后， [40]分析了连续平均热方程。包括 [23] 和 [26], 在内的后续研究，探讨了由狄拉克测度建模的概率密度函数扰动。 [6]和 [13]研究了随机扩散率下热方程的可控性，并证明某些概率律会产生分数阶动力学。在 [1], 中，作者提出了一种数值方法，通过将控制问题投影到由前几个特征函数张成的有限维空间，来近似一族波动方程的精确平均边界控制。

此外，已有大量关于低阶随机扰动的研究成果；参见专著 [27] 和综述 [28], ，以及关于非线性抛物型随机方程的最新进展，例如 [18] 和 [19]。

近期， [10] 的作者研究了具有不确定参数的分数阶动力学所支配的有限维系统的可控性。他们还通过平均卡尔曼秩条件和平均格拉姆矩阵刻画了平均可控性。此外，论文 [5] 证明，对于具有绝对连续扩散系数的随机薛定谔方程，可以利用确定性控制将其平均解驱动至零。作者还证明了平均精确可控性并不成立，而且除非随机扩散率只有有限个可能取值，否则同时零可控性也不成立。本文主要旨在将现有结果推广到时间分数阶情形。这类推广需要运用涉及虚数自变量的Mittag–Leffler函数的新技术和新思路，并面临若干挑战。关于常扩散系数下分数阶扩散方程（热方程的对应形式）的可观测性不等式，请参见 [38] ；关于通过内部控制实现分数阶扩散方程的近似可控性，请参见 [14] 。最后，我们应强调，关于时间分数阶偏微分方程的可观测性与可控性的文献十分有限，尤其是与空间变量具有分数阶导数的相关研究成果相比（例如，参见 [7, 8, 21, 31]）。

符号约定

本文介绍概率论中的标准记号和常用缩写，以备后文使用。

我们用 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 表示自然数集合。用 $|\mathscr{A}|$ 表示可测集 $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ 的勒贝格测度。记号 $B(x, r)$ 表示以 $x \in \mathbb{R}^d$ 为中心、半径为 $r > 0$ 的开球。我们考虑希尔伯特空间 $L^2(G) := L^2(G; \mathbb{C})$，并赋予其通常的厄米内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(G)}$；若无歧义，也记作 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，而 $\| \cdot \|_{L^2(G)}$ 表示其相应的范数。整函数空间记作 $\mathcal{H}(\mathbb{C})$。对于 $T > 0$ 以及给定的希尔伯特空间 $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$，空间 $L^p(0, T; H)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ 和 $C([0, T]; H)$ 表示标准函数空间，而 $W^{1,1}(0, T; H)$ 表示定义在 $[0, T]$ 上的绝对连续 H-值函数空间。

接下来，我们考虑概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$。一个取值于 $L^2(G)$ 的博雷尔随机变量是从 Ω 到 $L^2(G)$ 的函数，且关于 $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(L^2(G)))$ 可测，其中 $\mathcal{B}(L^2(G))$ 表示 $L^2(G)$ 上的博雷尔 σ-代数。实值博雷尔随机变量下文简称实随机变量。我们考虑一个实随机变量 $\xi \colon \Omega \to \mathbb{R}$，它表示量子扩散率。 ξ 的概率分布定义为 $\mu_\xi := \mathbb{P} \circ \xi^{-1}$，称为其分布。绝对连续随机变量的概率密度函数下文简称为 **概率密度函数**。

我们还回顾一下， ξ 的分布是绝对连续的（相对于勒贝格测度）

如果存在一个非负密度 $\rho_\xi \in L^1(\mathbb{R})$，使得对所有博雷尔可测集 $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$，

$$\mu_\xi[\mathscr{A}] := \mathbb{P}[\xi \in \mathscr{A}] = \int_{\mathscr{A}} \rho_\xi(x)\mathrm{d}x.$$

在这种情况下，我们简单地说 ξ 是绝对连续的。

对于连续函数 $F: \mathbb{R} \to L^2(G)$，$F \circ \xi$ 是一个取值于 $L^2(G)$ 的博雷尔随机变量，其期望（只要存在）由下式给出：

$$\mathbb{E}(F \circ \xi) := \int_\Omega F(\xi(\omega))\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\,\mathrm{d}\mu_\xi(\xi).$$

最后，记号 $\sim$ 表示渐近等价，而符号 $\mathcal{O}$ 表示在所考虑的渐近极限下，两个量的比值保持有界。

2. 关于分数阶微积分和平均控制的一些杂项

2.1. 分数阶微积分

令

$$\omega_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)t^{1-\alpha}} & t > 0, \\ 0 & t \le 0, \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0$ 和 Γ 是标准欧拉函数。

$\alpha > 0$ 阶左、右黎曼–刘维尔分数阶积分分别定义为与 $\omega_\alpha \in L^1(0,T)$ 的卷积，即：

$$(I^\alpha_{0,t}g)(t) := (\omega_\alpha * g)(t) = \int_0^t \omega_\alpha(t-s)g(s)\mathrm{d}s,$$
$$(I^\alpha_{t,T}g)(t) := (\omega_\alpha * g(T-\cdot))(T-t) = \int_t^T \omega_\alpha(s-t)g(s)\mathrm{d}s,$$

只要右端有定义。利用卷积运算的性质，我们可推出 [20]:

引理 2.1。设 $\alpha > 0$ 和 $1 \le p \le \infty$。则 $I^\alpha_{0,t}$ 在 $L^p(0,T;H)$ 上连续作用，并且有

$$\|I^\alpha_{0,t}g\|_{L^p(0,T;H)} \le \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|g\|_{L^p(0,T;H)}.$$

右积分 $I^\alpha_{t,T}$ 也同样成立。

下文中，我们考虑一个连续嵌入于 H 的稠密子空间 $V \subset H$。记 V' 为相对于枢轴空间 H 的 V 的对偶空间，并记 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V',V}$ 为 V' 与 V 之间的对偶配对。我们回顾：

$$\langle f, g\rangle_{V',V} = \langle f, g\rangle_H, \quad f \in H,\ g \in V.$$

我们将使用以下分数阶分部积分公式；参见 [20]。

引理 2.2。令 $f \in L^p(0,\ T;\ V')$ 和 $g \in L^q(0,\ T;\ V)$，其中 p、$q \ge 1$ 和 $\alpha > 0$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \le 1 + \alpha$。则有以下恒等式成立：

$$\int_0^T \langle (I^\alpha_{0,t}f)(t), g(t)\rangle_{V',V}\mathrm{d}t = \int_0^T \langle f(t), (I^\alpha_{t,T}g)(t)\rangle_{V',V}\mathrm{d}t.$$

接下来，我们介绍卡普托和黎曼–刘维尔分数阶导数的定义。

- 阶数为 $\alpha \in (0,1)$ 的左、右 Caputo 分数阶导数分别定义为

$$\partial_{0,t}^{\alpha} g(t) = (I_{0,t}^{1-\alpha} g')(t) \quad \text{and} \quad \partial_{t,T}^{\alpha} g(t) = (I_{t,T}^{1-\alpha} g')(t) \tag{2.1}$$

当右端有定义时。注意，若 $g \in W^{1,1}(0,T;H)$，则 $\partial_{0,t}^{\alpha} g$，$\partial_{t,T}^{\alpha} g$ 存在，且 $\partial_{0,t}^{\alpha} g$，$\partial_{t,T}^{\alpha} g \in L^1(0,T;H)$。

- 阶数为 $\alpha \in (0,1)$ 的左、右黎曼–刘维尔分数阶导数分别定义为

$$D_{0,t}^{\alpha} g(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_{0,t}^{1-\alpha} g)(t) \quad \text{and} \quad D_{t,T}^{\alpha} g(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_{t,T}^{1-\alpha} g)(t)$$

只要右端有定义即可。注意，若 $g \in W^{1,1}(0,T;H)$，则 $D_{0,t}^{\alpha} g$，$D_{t,T}^{\alpha} g$ 存在，且属于 $L^1(0,T;H)$。

下面的积分公式使我们能够推导出与含黎曼–刘维尔分数阶导数的正向系统相对应的伴随系统。

命题2.3. 设 $\alpha \in (0,1)$ 且 $T > 0$。我们假设

- $f \in C([0,T];H)$ *such that* $\partial_{0,t}^{\alpha} f \in L^{\infty}(0,T;V')$ *and* $f' \in L^q(0,T;V')$ *for some* $q \geq \frac{1}{1-\alpha}$,
- $g \in L^1(0,T;V)$ 使得 $D_{t,T}^{\alpha} g \in L^1(0,T;V)$。

Then

$$\int_0^T \langle \partial_{0,t}^{\alpha} f(t), g(t) \rangle_{V',V} \mathrm{d}t = \Big[\langle f(t), (I_{t,T}^{1-\alpha} g)(t) \rangle_H \Big]_{t=0}^{t=T} + \int_0^T \langle f(t), D_{t,T}^{\alpha} g(t) \rangle_H \mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

证明： 根据Caputo导数的定义，我们改写为

$$\int_0^T \langle \partial_{0,t}^{\alpha} f(t), g(t) \rangle_{V',V} \mathrm{d}t = \int_0^T \Big\langle (I_{0,t}^{1-\alpha} f')(t), g(t) \Big\rangle_{V',V} \mathrm{d}t.$$

根据引理 2.2，对 $1-\alpha$ （而非 α）、 $p = 1$ 和$q \geq \frac{1}{1-\alpha}$，我们得到

$$\int_0^T \langle \partial_{0,t}^{\alpha} f(t), g(t) \rangle_{V',V} \mathrm{d}t = \int_0^T \Big\langle f'(t), (I_{t,T}^{1-\alpha} g)(t) \Big\rangle_{V',V} \mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

对 f和$I_t^{1-\alpha}{}_{,T}\, g$在 $W^{1,1}(0,T;V') \times W^{1,1}(0,T;V)$中应用标准分部积分，(2.3)右端的积分得到(2.2)。 □

注*1.* $(I_t^{1-\alpha}{}_{,T}\, g)(t)$ 对所有 $t \in [0,T]$都定义良好，是复数域 V中的一个元素，这归因于$I_t^{1-\alpha}{}_{,T}\, g \in W^{1,1}(0,T;V)$，因为 $g \in L^1(0,T;V)$（于是$I_t^{1-\alpha}{}_{,T}\, g \in L^1(0,T;V)$，见引理 *2.1*），并且 $\frac{d}{dt}(I_t^{1-\alpha}{}_{,T}\, g)(t) = -D_{t,T}^{\alpha} g \in L^1(0,T;V)$。

注2。 注意到，通过稠密性论证，(2.2) 即使不假设通常导数的任何正则性（$f \in C([0,T];H)$ 使得 $\partial_{0,t}^{\alpha} f \in L^{\infty}(0,T;V')$ 以及 $g \in L^1(0,T;V)$ 使得$D_{t,T}^{\alpha} g \in L^1(0,T;V)$）仍然成立。

回顾一下，对于 $\alpha > 0$和 $\beta \in \mathbb{R}$，在（1.3）中定义的米塔格-莱夫勒函数 $E_{\alpha,\beta}(z)$ 是一个整函数。此外，我们有以下引理；证明参见 [34,第32-35]页。

第一个引理　　涉及 Mittag–Leffler函数在 $|z| \to \infty$时的渐近展开　　.

引理2.4. 设 $\alpha \in (0,2)$ 和 $\beta \in \mathbb{R}$ 任意。设 μ 满足 $\frac{\alpha\pi}{2} < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$。那么，对于任意 $p \geq 1$,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha k)} \frac{1}{z^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^{1+p}} \right), \ |z| \to \infty, \ \mu \leq |\arg(z)| \leq \pi. \tag{2.4}$$

因此，我们还得到以下有界性结果。

引理 2.5。令 $\alpha \in (0,1)$ 且 $\beta \in \mathbb{R}$。存在常数 $C_0 > 0$，仅依赖于 α 和 β，使得

$$|E_{\alpha,\beta}(\mathrm{i}t)| \leq \frac{C_0}{1+|t|} \leq C_0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

我们提出一种新的定义分数阶特征函数，该定义本身也具有独立的研究价值 t:

定义 2.6。设 ξ 为实随机变量。我们将二参数分数阶特征函数（***FCF***）定义为 ξ 如下

$$\varphi^{(\xi)}_{\alpha,\beta}(s) := \mathbb{E}(E_{\alpha,\beta}(\mathrm{i}s\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{\alpha,\beta}(\mathrm{i}s\xi)\,\mathrm{d}\mu_\xi(\xi), \qquad s \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

当 $\alpha = \beta = 1$ 时，我们可得到通常的特征函数。注意，这一定义不同于其在 *[36]*中的对应定义。

下面的引理推广了经典特征函数的某些性质，例如有界性，以及适用于绝对连续随机变量的黎曼–勒贝格引理。

引理 2.7。设 $\alpha \in (0,\ 1)$ 且 $\beta > 0$。对于定义在 $(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ 上的任意随机变量 ξ，有

1. $\varphi^{(\xi)}_{\alpha,\ \beta}(s)$ 对所有实数 s 都有定义。2. $|\varphi^{(\xi)}_{\alpha,\ \beta}(s)| \leq C_0$ 对所有 $s \in \mathbb{R}$ 均成立，其中 C_0 是引理 *2.5* 中引入的常数。3. 此外，若 ξ 是绝对连续随机变量，则

$$\varphi^{(\xi)}_{\alpha,\beta}(s) \to 0 \quad as\ \ |s| \to \infty.$$

证明：利用引理 2.5，可得

$$|E_{\alpha,\beta}(\mathrm{i}s\xi)| \leq C_0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

然后，第一个 点由概率测度有限这一事实可得，并且有

$$\begin{aligned} |\varphi^{(\xi)}_{\alpha,\beta}(s)| \leq& \mathbb{E}(|E_{\alpha,\beta}(\mathrm{i}s\xi)|) \\ \leq& \mathbb{E}(C_0) = C_0, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

此外，若 ξ 是绝对连续随机变量，则其 **概率密度函数** 满足 $\rho_\xi \in L^1(\mathbb{R})$，且其**FCF** 由下式给出

$$\varphi^{(\xi)}_{\alpha,\beta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{\alpha,\beta}(\mathrm{i}s\xi)\rho_\xi(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad s \in \mathbb{R}.$$

利用引理 2.5，我们对几乎处处的 $\xi \in \mathbb{R}$ 得到

$$\begin{aligned} |E_{\alpha,\beta}(\mathrm{i}s\xi)\rho_\xi(\xi)| \leq& \frac{C_0}{1+|s||\xi|}\rho_\xi(\xi) \to 0 \quad \text{as } |s| \to \infty, \\ \leq& C_0\rho_\xi(\xi) \in L^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

接着，第三点可由控制收敛定理直接推出。 □

注 3. 在 $0 < \alpha \leq 1$ 和 $\beta \geq \alpha$ 的情况下，我们有

$$|\varphi^{(\xi)}_{\alpha,\beta}(s)| \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)}, \quad s \in \mathbb{R},$$

由于 $|E_{\alpha,\ \beta}(z)| \leq E_{\alpha,\ \beta}(\mathrm{Re}(z))$ 对所有 $z \in \mathbb{C}$ 均成立（参见 *[15]* 中的定理 ***1***）。特别地，当 $\alpha = \beta = 1$ 时，我们可得通常的特征函数的界为1。

例1。 一个有趣的随机变量例子是由 *Rademacher*分布给出的，其定义为

$$\mathbb{P}(\xi=-1)=\mathbb{P}(\xi=1)=\frac{1}{2},$$

它广泛应用于需要对称离散随机性的场景，例如随机算法和统计模拟。

命题2.8。 *Rademacher*分布的FCF为

$$\varphi_{\alpha,\beta}^{(\xi)}(s)=E_{2\alpha,\beta}(-s^2),\quad s\in\mathbb{R}.$$

证明： 对于 Rademacher 随机变量 ξ，我们有

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha,\beta}^{(\xi)}(s)&=E_{\alpha,\beta}(-\mathrm{i}s)\mathbb{P}(\xi=-1)+E_{\alpha,\beta}(\mathrm{i}s)\mathbb{P}(\xi=1)\\&=\frac{1}{2}\left(E_{\alpha,\beta}(-\mathrm{i}s)+E_{\alpha,\beta}(\mathrm{i}s)\right)\\&=\mathrm{Re}\ E_{\alpha,\beta}(\mathrm{i}s)\\&=E_{2\alpha,\beta}(-s^2).\end{aligned}$$

注意，我们使用了恒等式

$$E_{\alpha,\beta}(\mathrm{i}s)=E_{2\alpha,\beta}\left(-s^2\right)+\mathrm{i}sE_{2\alpha,\alpha+\beta}\left(-s^2\right),\quad s\in\mathbb{R}. \tag{2.7}$$

□

2.2. 平均可控性

首先，我们给出所讨论的正问题和伴随问题的一些适定性结果。

命题 2.9. 设 $\alpha\in(0,1)$， $T>0$, $\xi\in\mathbb{R}^*$ 为非零实数， $y_0\in L^2(G)$ 且 $u\in L^\infty(0,T;L^2(G))$。则系统 (1.1) 存在唯一的弱解 $y\in C([0,T];L^2(G))$，满足

$$\|y\|_{C([0,T];L^2(G))}\le C\left(\|y_0\|_{L^2(G)}+\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(G))}\right), \tag{2.8}$$

$$\|\partial_{0,t}^{\alpha}y\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(G))}\le C\left(\|y_0\|_{L^2(G)}+\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(G))}\right), \tag{2.9}$$

其中某个常数为 $C>0$。此外，唯一解由下式给出：

$$y(t,\cdot)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\langle y_0,e_n\rangle E_{\alpha,1}\left(-\mathrm{i}\xi\lambda_nt^\alpha\right)+\int_0^t\langle\mathbb{1}_{G_0}u(s,\cdot),e_n\rangle(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\mathrm{i}\xi\lambda_n(t-s)^\alpha\right)\mathrm{d}s\right]e_n. \tag{2.10}$$

注 4. 该解本质上是一个杜哈梅尔公式。事实上，正如 *[33]* 中所证明的：

$$\partial_t^\alpha\Big(E_{\alpha,\beta}(t^\alpha)\Big)=E_{\alpha,\beta}(t^\alpha).$$

证明：. 令 $y_n\in C(\mathbb{R}^+;\mathbb{C})$ 定义如下：

$$y_n(t)=E_{\alpha,1}\left(-\mathrm{i}\xi\lambda_nt^\alpha\right)y_{0,n}+\int_0^t k_n(t-s)u_n(s)\mathrm{d}s,\quad t>0, \tag{2.11}$$

其中 $y_{0,\ n}=\langle y_0,e_n\rangle$, $k_n(s)=s^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\mathrm{i}\xi\lambda_ns^\alpha)$ 和 $u_n(s)=\langle\mathbb{1}_{G_0}u(s,\cdot)\ e_n\rangle\,\mathbb{1}_{(0,T)}(s)$。

接下来证明级数 $\sum_{n\ge0}y_n(t)e_n(x)$ 收敛到方程 (1.1) 的弱解。

由引理 2.5，对于所有 $t>0$，以及所有 p， $q\in\mathbb{N}$，我们有：

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=p}^{p+q} y_n(t)e_n\right\|_{L^2(G)} &\le C_0\left\|\sum_{n=p}^{p+q} y_{0,n}e_n\right\|_{L^2(G)} + \int_0^t \left\|\sum_{n=p}^{p+q} k_n(t-s)u_n(s)e_n\right\|_{L^2(G)} \mathrm{d}s \\
&\le C_0\left\|\sum_{n=p}^{p+q} y_{0,n}e_n\right\|_{L^2(G)} + \int_0^t \sup_{n\ge p}|k_n(t-s)| \left\|\sum_{n=p}^{p+q} u_n(s)e_n\right\|_{L^2(G)} \mathrm{d}s \\
&\le C_0\left\|\sum_{n=p}^{p+q} y_{0,n}e_n\right\|_{L^2(G)} + \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(G))}\int_0^t \sup_{n\ge p}|k_n(t-s)|\mathrm{d}s \\
&= C_0\left\|\sum_{n=p}^{p+q} y_{0,n}e_n\right\|_{L^2(G)} + \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(G))}\int_0^t \sup_{n\ge p}|k_n(s)|\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

于是，对于所有 $\tau>0$，我们得到：

$$\sup_{t\in[0,\tau]}\left\|\sum_{n=p}^{p+q} y_n(t)e_n\right\|_{L^2(G)} \le C_0\left\|\sum_{n=p}^{p+q} y_{0,n}e_n\right\|_{L^2(G)} + \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(G))}\int_0^\tau \sup_{n\ge p}|k_n(s)|\mathrm{d}s. \tag{2.12}$$

由引理 2.5，对于所有 $n\ge p$ 和 $s\in(0,\tau]$，我们有

$$\begin{aligned}
|k_n(s)| =& s^{\alpha-1}\left|E_{\alpha,\alpha}(-\mathrm{i}\xi\lambda_n s^\alpha)\right| \\
\le& \frac{C_0}{1+|\xi|\lambda_p s^\alpha}\, s^{\alpha-1} \\
\le& C_0\, s^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned}
&\sup_{n\ge p}|k_n(s)| \le C_0\, s^{\alpha-1} \in L^1(0,\tau), \\
&\sup_{n\ge p}|k_n(s)| \longrightarrow 0 \qquad \text{as } p\to\infty.
\end{aligned}$$

因此，由控制收敛定理，

$$\int_0^T \sup_{n\ge p}|k_n(\tau)|\, d\tau \xrightarrow[p\to\infty]{} 0.$$

将此与 (2.12) 结合，得到：

$$\lim_{p\to\infty}\sup_{t\in[0,\tau]}\left\|\sum_{n=p}^{p+q} y_n(t)e_n\right\|_{L^2(G)} = 0 \qquad \text{for all } q\in\mathbb{N}.$$

∞因此，对于任意 $\tau>0$，级数 $\sum_{n\ge0} y_n(t)e_n$ 在 $t\in[0,\tau]$ 上一致收敛到 $t\mapsto \widetilde{y}(t)=\sum_{n=0} y_n(t)\in C\left([0,\tau],\ L^2(G)\right)$。因此 $\widetilde{y}\in C\left(\mathbb{R}^+,\ L^2(G)\right)$。此外，对于 $\widetilde{y}$，我们得到 (2.8)。

另一方面，利用拉普拉斯变换，我们得到

$$\partial_{0,t}^\alpha y_n(t) = -\mathrm{i}\xi\lambda_n y_n(t) + u_n(t).$$

于是，我们推得

$$|\partial_{0,t}^\alpha y_n(t)| \le |\xi|\lambda_n|y_n(t)| + |u_n(t)|,$$

这意味着

$$\begin{aligned}\|\partial_{0,t}^{\alpha}\widetilde{y}\|_{H^{-1}(G)}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}|\partial_{0,t}^{\alpha}y_n(t)|^2\\ &\le 2\sum_{n=0}^{\infty}|\xi|^2|y_n(t)|^2+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\,|u_n(t)|^2\\ &\le C\|y_0\|_{L^2(G)}^2+C\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(G))}^2.\end{aligned}$$

因此， $y=\widetilde{y}\big|_{(0,T)\times G}$是属于 $C([0,T];\,L^2(G))$并满足(2.8)-(2.9)的弱解。解的唯一性可通过拉普拉斯变换得到。□

为构造与(1.1)对应的反向系统，我们考虑一个光滑函数 $z=z(t,\ x)$。

$$\begin{aligned}&\int_0^T\langle\partial_{0,t}^{\alpha}y(t,\cdot)-\xi\mathrm{i}\Delta y(t,\cdot),z(t,\cdot)\rangle_{H^{-1}(G),H_0^1(G)}\mathrm{d}t\\ &=\int_0^T\langle\partial_{0,t}^{\alpha}y(t,\cdot),z(t,\cdot)\rangle_{H^{-1}(G),H_0^1(G)}\mathrm{d}t-\int_0^T\langle\xi\mathrm{i}\Delta y(t,\cdot),z(t,\cdot)\rangle_{H^{-1}(G),H_0^1(G)}\mathrm{d}t\\ &=\Big[\langle y(t,\cdot),(I_{t,T}^{1-\alpha}z)(t,\cdot)\rangle_{L^2(G)}\Big]_{t=0}^{t=T}+\int_0^T\langle y(t,\cdot),D_{t,T}^{\alpha}z(t,\cdot)\rangle_{H^{-1}(G),H_0^1(G)}\mathrm{d}t\\ &+\int_0^T\langle y(t,\cdot),\xi\mathrm{i}\Delta z(t,\cdot)\rangle_{H^{-1}(G),H_0^1(G)}\mathrm{d}t\\ &=\Big[\langle y(t,\cdot),(I_{t,T}^{1-\alpha}z)(t,\cdot)\rangle_{L^2(G)}\Big]_{t=0}^{t=T}+\int_0^T\langle y(t,\cdot),D_{t,T}^{\alpha}z(t,\cdot)+\xi\mathrm{i}\Delta z(t,\cdot)\rangle_{H^{-1}(G),H_0^1(G)}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因此，我们考虑以下伴随系统

$$\begin{cases}D_{t,T}^{\alpha}z+\xi\mathrm{i}\Delta z=0, & \text{on } Q_T,\\ z=0, & \text{on } \Sigma_T,\\ I_{t,T}^{1-\alpha}z|_{t=T}=z_T, & \text{in } G,\end{cases}\tag{2.13}$$

其中， $D_{t,\ T}^{\alpha}$(分别为$I_{t\ T}^{1-\alpha}$，)表示第2.1小节中引入的阶数为 α(分别为阶数为 $1-\alpha$)的右侧黎曼-刘维尔时间分数阶导数（右侧黎曼-刘维尔时间分数阶积分）。关于伴随系统(2.13)的适定性，我们有如下结果：

命题2.10。设 $\alpha\in(0,1)$， $T>0$, $\xi\in\mathbb{R}^*$ 为非零实数，且 $z_T\in L^2(G)$。则伴随系统(2.13) 存在唯一解 z，使得：

$$z(t,\cdot)=\sum_{n=0}^{\infty}(T-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\mathrm{i}\xi\lambda_n(T-t)^{\alpha}))\,\langle z_T,e_n\rangle\,e_n,\tag{2.14}$$

$$I_{t,T}^{1-\alpha}z(t,\cdot)=\sum_{n=0}^{\infty}E_{\alpha,1}(-\mathrm{i}\xi\lambda_n(T-t)^{\alpha}))\,\langle z_T,e_n\rangle\,e_n,\tag{2.15}$$

并且存在一个常数 $C>0$ （与 z_T 无关），使得：

$$\|I_{t,T}^{1-\alpha}z\|_{C([0,T];L^2(G))}\le C\|z_T\|_{L^2(G)}.$$

此外，

(i) $z\in C([0,T);H^2(G)\cap H_0^1(G))$ *and* $D_{t,T}^{\alpha}z\in C([0,T);L^2(G))$.

(ii) 若 $z_T \in H_0^1(G)$，则 $z \in L^1(0, T; H_0^1(G))$，且若 $z_T \in D((-\Delta)^{3/2})$，则 $D_{t,T}^{\alpha} z \in L^1(0, T; H_0^1(G))$。此外，存在一个常数 $C > 0$（与 z_T 无关），使得

$$\|z\|_{L^1(0,T;H_0^1(G))} \leq C\|z_T\|_{H_0^1(G)},$$
$$\|D_{t,T}^{\alpha} z\|_{L^1(0,T;H_0^1(G))} \leq C\|z_T\|_{D((-\Delta)^{3/2})}.$$

该证明是对 [14, 命题 4.1], 的改写，故略去。

现在我们引入以下平均可控性的概念。本文关注属于 L^∞ 的控制，因为与属于 L^2 的控制相比，它们更能体现其内在的物理含义：

定义 2.11。若对所有 $y_0, y_1 \in L^2(G)$，均存在控制 $u \in L^\infty((0,T) \times G_0)$ 使得，则称系统 (1.1) 在 $L^2(G)$ 下精确平均可控，其控制代价为 $\mathscr{C}_{ex} = \mathscr{C}_{ex}(G, G_0, \xi, T)$（正数）

$$\|u\|_{L^\infty((0,T)\times G_0)} \leq \mathscr{C}_{ex}(\|y_0\|_{L^2(G)} + \|y_1\|_{L^2(G)}) \tag{2.16}$$

且 (1.1)的平均解满足

$$\mathbb{E}(y(T, \cdot; \xi; y_0; u)) = y_1.$$

定义 2.12。若对所有 $y_0 \in L^2(G)$，均存在控制 $u \in L^\infty((0,T) \times G_0$，则称系统 (1.1)在 $L^2(G)$下零平均可控，其控制代价为$\mathscr{C}_{null} = \mathscr{C}_{null}(G, G_0, \xi, T)$ ）使得 t

$$\|u\|_{L^\infty((0,T)\times G_0)} \leq \mathscr{C}_{null}\|y_0\|_{L^2(G)} \tag{2.17}$$

且 *(1.1)* 的平均解满足

$$\mathbb{E}(y(T, \cdot; \xi; y_0; u)) = 0. \tag{2.18}$$

上述可控性概念可通过伴随系统 (2.13) 的可观测性得到相应的对偶表述。

定义 2.13。若对所有 $z_T \in L^2(G)$，下列不等式均成立，则系统 (2.13) 在 $L^2(G)$ 中精确平均可观测，且其可观测性代价为 $\mathscr{C}_{exob} = \mathscr{C}_{exob}(G, G_0, \xi, T)$。

$$\|z_T\|_{L^2(G)} \leq \mathscr{C}_{exob} \int_0^T \int_{G_0} |\mathbb{E}(z(t, x; \xi; z_T))| \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{2.19}$$

定义 2.14。若对所有 $z_T \in L^2(G)$，下列不等式均成立，则系统 (2.13) 在 $L^2(G)$ 中零平均可观测，且其可观测性代价为 $\mathscr{C}_{ob} = \mathscr{C}_{ob}(G, G_0, \xi, T)$。

$$\left\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha} z(0, \cdot; \xi; z_T))\right\|_{L^2(G)} \leq \mathscr{C}_{ob} \int_0^T \int_{G_0} |\mathbb{E}(z(t, x; \xi; z_T))| \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{2.20}$$

命题 2.15. 系统 (1.1) 是零平均可控的（分别地，精确平均可控的），当且仅当伴随问题 (2.13)是零平均可观测的（分别地，精确平均可观测的）。此外，最优可控性代价与可观测性代价满足

$$\mathscr{C}_{null} = \mathscr{C}_{ob} \quad (resp.\ \mathscr{C}_{ex} = \mathscr{C}_{exob}). \tag{2.21}$$

证明： 利用分数阶分部积分 (2.2)，我们可以证明，对于固定的 $u \in L^{\infty}((0,T) \times G_0)$、$y_0 \in L^2(G)$ 和 $z_T \in L^2(G)$（如有必要，我们先考虑 $z_T \in D((-\Delta)^{\frac{3}{2}})$，然后通过稠密性论证取极限）：

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{E}(y(T,\cdot;\xi;y_0;u)), z_T\rangle_{L^2(G)} &- \left\langle y_0, \mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha} z(0,\cdot;\xi;z_T))\right\rangle_{L^2(G)} \\ &= \mathbb{E}\left[\langle y(T,\cdot;\xi;y_0;u), z_T\rangle - \langle y_0, I_{t,T}^{1-\alpha} z(0,\cdot;\xi;z_T)\rangle\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{G_0} u(t,x)\overline{z(t,x;\xi;z_T)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right] \\ &= \int_0^T \int_{G_0} u(t,x)\overline{\mathbb{E}(z(t,x;\xi;z_T))}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{2.22}$$

假设 (1.1) 是零平均可控的。取 $u \in L^{\infty}((0,\ T) \times G_0)$，使得 (2.17) 和 (2.18) 成立。将 (2.22) 应用于此控制，我们得到

$$-\left\langle y_0, \mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha} z(0,\cdot;\xi;z_T))\right\rangle_{L^2(G)} = \int_0^T \int_{G_0} u(t,x)\overline{\mathbb{E}(z(t,x;\xi;z_T))}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \qquad \forall z_T \in L^2(G).$$

利用霍尔德不等式和 (2.17)，可得

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha} z(0,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)} &= \sup_{\|y_0\|\le 1}\left|\left\langle y_0, \mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha} z(0,\cdot;\xi;z_T))\right\rangle_{L^2(G)}\right| \\ &\le \mathscr{C}_{null}\int_0^T \int_{G_0} |\mathbb{E}(z(t,x;\xi;z_T))|\mathrm{d}x\mathrm{d}t \qquad \forall z_T \in L^2(G).\end{aligned}$$

这表明，对 $\mathscr{C}_{ob} \le \mathscr{C}_{null}$，可观测性不等式 (2.20) 成立。

反过来，假设可观测性估计 (2.20) 成立。我们考虑以下 $L^1((0,\ T) \times G_0)$ 的线性子空间 $\mathcal{F}$：

$$\mathcal{F} := \left\{\mathbb{1}_{G_0}\mathbb{E}(z(\cdot,\cdot;\xi;z_T)),\quad z_T \in L^2(G)\right\},$$

以及由下式定义的 $\mathcal{F}$ 上的线性泛函 Φ

$$\Phi(\mathbb{1}_{G_0}\mathbb{E}(z(\cdot,\cdot;\xi;z_T))) := -\left\langle y_0, \mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha} z(0,\cdot;\xi;z_T))\right\rangle_{L^2(G)}.$$

利用可观测性不等式 (2.20)，可得 Φ 在 $\mathcal{F}$ 上定义良好且有界，其范数满足

$$\|\Phi\|_{\mathcal{F}'} \le \mathscr{C}_{ob}\|y_0\|_{L^2(G)}.$$

~然后，根据哈恩–巴拿赫延拓定理，我们可以将 Φ延拓为定义在$L^1((0,T) \times G_0)$上的有界线性泛函 Φ，且其范数保持不变。根据里斯表示定理，存在$u \in L^{\infty}((0,T) \times G_0)$，使得对于任意 $v \in L^1((0,T) \times G_0)$，

$$\widetilde{\Phi}(v) = \langle u, v\rangle_{L^{\infty}((0,T)\times G_0),\, L^1((0,T)\times G_0)},$$

这意味着

$$-\left\langle y_0, \mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha} z(0,\cdot;\xi;z_T))\right\rangle_{L^2(G)} = \int_0^T \int_{G_0} u(t,x)\overline{\mathbb{E}(z(t,x;\xi;z_T))}\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

结合式（2.22）可得，控制 u满足

$$\langle \mathbb{E}(y(T,\cdot;\xi;y_0;u)), z_T\rangle_{L^2(G)} = 0 \qquad \forall z_T \in L^2(G).$$

这表明平均解在时刻 T取值为 0。最后，根据里斯表示定理，我们有

$$\|u\|_{L^\infty((0,T)\times G_0)} = \|\widetilde{\Phi}\|_{(L^1((0,T)\times G_0))'} = \|\Phi\|_{\mathcal{F}'} \leq \mathscr{C}_{ob}\|y_0\|_{L^2(G)},$$

这表明可以通过代价 $\mathscr{C}_{null} \leq \mathscr{C}_{ob}$ 控制平均解。
精确可控性的情形也适用类似的论证。 □

注 5. 证明(2.13) 的零平均可观测性（分别为精确可观测性）等价于证明：存在$C > 0$，使得伴随系统(2.13) 的解满足：对所有 $z_T \in L^2(G)$，有

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{\alpha,1}^{(\xi)}(-\lambda_n T^\alpha)\langle z_T, e_n\rangle e_n\right\|_{L^2(G)} \leq C\int_0^T\int_{G_0}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{\alpha,\alpha}^{(\xi)}(-\lambda_n(T-t)^\alpha))\langle z_T, e_n\rangle e_n\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

$$\left(resp.\ \|z_T\|_{L^2(G)} \leq C\int_0^T\int_{G_0}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{\alpha,\alpha}^{(\xi)}(-\lambda_n(T-t)^\alpha)\langle z_T, e_n\rangle e_n\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right),$$

其中， $\varphi_{\alpha}^{(\xi)}{}_{,\beta}$ 是(2.6)中定义的双参数分数阶特征函数。

3. 缺乏同时零可控性

对于任意绝对连续随机变量，同时零可控性都不成立。事实上，满足这一性质的实现集合是可忽略的，这可由下一个定理得出。

定理 3.1. 设 $G \subset \mathbb{R}^d$ 是一个利普希茨区域， $G_0 \subset G$ 是一个正测度子集， $T > 0$,$y_0 \in L^2(G) \setminus \{0\}$ 且 $u \in L^\infty((0,T) \times G_0)$。那么，该集合:

$$\mathscr{E} := \{\xi \in \mathbb{R} : y(T,\cdot;\xi;y_0;u) = 0\}$$

是可数的。

为了证明该定理，我们需要以下引理。

引理3.2. 设 $\alpha > 0$。则张成$\{t^{\alpha k+\alpha-1}: k \geq 0\}$在 $L^1(0,T)$中稠密。

证明：. 序列 $\{\alpha k + \alpha - 1\}_{k\geq 0}$ 由大于 -1 的互不相同的实数组成，并且

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha n+\alpha}{\alpha^2 n^2 + 2\alpha^2 n + \alpha^2 + 1} = \infty,$$

因此， $L^1(0,T)$中的完整的闵茨定理（参见 [9, 定理 2.3]）保证了 $\{t^{\alpha k+\alpha-1}\}_{k\geq 0}$的线性张成在 $L^1(0,T)$中稠密。
□

引理 3.3。 设 $\alpha \in (0,\ 1)$， $T > 0$和 $f \in L^\infty(0,\ T)$。那么，该映射

$$\begin{aligned}\mathcal{I} : L^\infty(0,T) &\longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C})\\ f &\longmapsto \mathcal{I}(f)(z) := \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-\mathrm{i}z(T-s)^\alpha\right)f(s)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

i是从 $L^\infty(0,T)$ 到整函数空间 $\mathcal{H}(\mathbb{C})$的线性单射。

证明：。注意，对于任意固定的 $z \in \mathbb{C}$，变换 $\mathcal{I}(f)(z)$ 是良定义的，这是因为函数 f 和米塔格-莱夫勒函数有界，并且满足条件 $\alpha - 1 > -1$。根据米塔格-莱夫勒函数的幂级数，我们得到

$$\mathcal{I}(f)(z) = \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} (T-s)^{\alpha k + \alpha - 1} f(s) z^k \, \mathrm{d}s := \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} f_k(s) \mathrm{d}s.$$

由于

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T |f_k(s)| \mathrm{d}s \le \|f\|_{L^\infty(0,T)} T^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(T^\alpha |z|) < \infty,$$

we 可以交换求和与积分，因此得到整个幂级数

$$\mathcal{I}(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \left(\int_0^T (T-s)^{\alpha k + \alpha - 1} f(s) \, \mathrm{d}s \right) z^k. \tag{3.1}$$

关于单射性　若 $\mathcal{I}(f)$ 恒等于零，则其级数的所有系数都为零，因此

$$\int_0^T t^{\alpha k + \alpha - 1} f(T-t) \, \mathrm{d}t = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

由于 $f(T-\cdot) \in L^\infty(0, T)$，且在所有这些矩上都为零，由引理3.2可得 $f(T-\cdot) = 0$ 几乎处处成立，因此 $f = 0$ 几乎处处成立。□

注6。　当 $\alpha = 1$ 时，我们得到经典*Paley–Wiener*定理 *[35,* 定理*7.2.1].*

引理 3.4. 设 $\alpha > 0$ 且 $T > 0$。不存在函数 $f \in L^\infty(0, T)$ 和常数 $c \in \mathbb{C}^*$，使得对每个整数 $k \ge 0$，都有

$$\int_0^T (T-s)^{\alpha k + \alpha - 1} f(s) \, \mathrm{d}s = c T^{\alpha k} \frac{\Gamma(\alpha k + \alpha)}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

唯一可能的情形是 $c = 0$ 且 $f = 0$ 几乎处处成立。

证明：。由于 $f \in L^\infty(0, T)$，我们有

$$\int_0^T (T-s)^{\alpha k + \alpha - 1} f(s) \, \mathrm{d}s = \mathcal{O}\left(\frac{T^{\alpha k + \alpha}}{\alpha k + \alpha} \right), \quad k \to \infty.$$

另一方面，根据 斯特林公式,

$$\frac{\Gamma(\alpha k + \alpha)}{\Gamma(\alpha k + 1)} \sim (\alpha k)^{\alpha - 1}, \quad k \to \infty.$$

若 $c \neq 0$，则给定的恒等式推出

$$k^{\alpha - 1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k} \right), \quad k \to \infty,$$

这是不可能的，因为 $\alpha > 0$。

若 $c = 0$，那么，由于族 $\{t^{\alpha k + \alpha - 1}\}_{k \ge 0}$ 在 $L^1(0, T)$ 中稠密（见引理3.2），且 $f \in L^\infty(0, T)$，我们必然有 $f = 0$ 几乎处处。

因此，唯一可能的解是 $c = 0$ 且 $f = 0$ 几乎处处成立。 □

证明：。 [定理 3 的证明。1] 利用杜哈梅尔原理的分数阶推广，我们得到

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\xi \in \mathbb{R} \,:\, \mathcal{I}(f_n)(\xi\lambda_n) = -\langle y_0, e_n\rangle E_{\alpha,1}\left(-\mathrm{i}\xi\lambda_n T^\alpha\right)\} \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\xi \in \mathbb{R} \,:\, F_n(\xi\lambda_n) = 0\} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{E}_n,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}f_n(s) :=& \langle \mathbb{1}_{G_0} u(s,\cdot), e_n\rangle, \quad s \in (0,T), \\ F_n(z) :=& \mathcal{I}(f_n)(z) + \langle y_0, e_n\rangle E_{\alpha,1}\left(-\mathrm{i}zT^\alpha\right), \quad z \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

因此，只需证明存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $\mathscr{E}_n$ 是可数集。由于 $\mathscr{E}_n$ 由 F_n 的实零点除以 λ_n 得到，并且根据引理 3.3，我们知道 F_n 在 $\mathbb{C}$ 上是解析的，因此只需证明存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $F_n \neq 0$。

反设对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $F_n = 0$。将 $\mathcal{I}(f_n)$ 的幂级数与米塔格-莱夫勒函数的幂级数对应起来，可得

$$\int_0^T (T-s)^{\alpha k+\alpha-1} f_n(s)\,\mathrm{d}s = -\langle y_0, e_n\rangle \frac{T^{\alpha k}\Gamma(\alpha k+\alpha)}{\Gamma(\alpha k+1)} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

因此，根据引理 3.4，我们推得 $\langle y_0,\ e_n\rangle = 0$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立，这与 $y_0 \neq 0$ 的假设矛盾。总之，我们得到 $\mathscr{E}_n$ 是可数集。□

4. 精确平均可控性的缺失

下面的结果讨论系统 (1.1) 缺乏精确平均可控性。

定理 4.1。 设 ξ 是$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中的一个随机变量，其$\boldsymbol{FCF}$ $\varphi_\alpha^{(\xi)},_\alpha$ 在无穷远处趋于零。设$G \subset \mathbb{R}^d$ 是一个利普希茨区域，$G_0 \subset G$ 是一个正测度子集。那么，系统(1.1) 在 $L^2(G)$ 中，若控制作用于 $L^\infty((0,T) \times G_0)$，则不是精确平均可控的。

证明基于引理 2.7。

证明： [定理 4.1] 的证明。假设存在 $C > 0$ 使得可观测性不等式 (2.19) 成立，并尝试导出矛盾。将 z_T 作为终值，其中 e_n 是$n \in \mathbb{N}$的特征函数，并满足 $\|e_n\| = 1$. 于是，假设可观测性不等式 (2.19) 成立，对这样的终值使用 (2.14)，我们得到

$$\begin{aligned}1 &\le C\int_0^T \int_{G_0} |\mathbb{E}(z(t,x;\xi;e_n))|\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\le C\int_0^T \int_{G} |\mathbb{E}(z(t,x;\xi;e_n))|\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= C\int_0^T \int_{G} |(T-t)^{\alpha-1}\varphi_{\alpha,\alpha}^{(\xi)}(-\lambda_n(T-t)^\alpha)e_n(x)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\le C\sqrt{|G|}\int_0^T (T-t)^{\alpha-1}|\varphi_{\alpha,\alpha}^{(\xi)}(-\lambda_n(T-t)^\alpha)|\mathrm{d}t \\ &= C\sqrt{|G|}\int_0^T t^{\alpha-1}|\varphi_{\alpha,\alpha}^{(\xi)}(-\lambda_n t^\alpha)|\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{4.1}$$

由于当 $n \to \infty$ 时，对于所有 $t \in (0,T]$，$\varphi_\alpha^{(\xi)},_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)$ 均收敛于 0。此外，根据引理 2.7，

$$t^{\alpha-1}|\varphi_{\alpha,\alpha}^{(\xi)}(-\lambda_n t^\alpha)| \le C_0 t^{\alpha-1} \in L^1(0,T).$$

因此，Lebesgue控制收敛定理表明，积分 (4.1) 在 $n \to \infty$ 时趋于 0。这导致矛盾，从而证明 (2.19) 不成立。□

引理 2.7 表明，对于任意在 (Ω，) 中的绝对连续随机变量， $\varphi_{\alpha}^{(\xi)}$，α 在无穷远处趋于零 ξ 。由此得到以下推论。

推论 4.2。 设 ξ 是 (Ω $\mathcal{F}$， $\mathbb{P}$) 中的绝对连续随机变量。则系统 (1.1) 在 $L^2(G)$ 中并非精确平均可控，控制作用于 $L^\infty((0,\ T) \times G_0)$。

注 7。 即使分布是离散的，系统 (1.1) 也可能不是精确平均可控的，*Rademacher* 分布便说明了这一点（见命题*2.8*）。

5. 零平均可控性

平均可观测性不等式由分数阶特征函数的性质刻画。经过详细分析，我们提出了一类能够实现零平均可控性的实随机变量。

定义5.1。 设 $\alpha \in (0,\ 1)$ 和 $T > 0$。若实随机变量 ξ 的分数阶特征函数 $\varphi_{\alpha}^{(\xi)}$，$_1$ 满足以下条件，则称其属于类 $\mathcal{C}_\alpha$：存在常数 c、$\lambda^\star$、θ、C_1、$C_2 > 0$、 $r > \frac{1}{2}$ 和 $\delta \in (0,\ 1)$，使得:-

$$|\varphi_{\alpha,1}^{(\xi)}(-\lambda t^\alpha)| \le e^{-c\lambda^r (t-s)^\theta} |\varphi_{\alpha,1}^{(\xi)}(-\lambda s^\alpha)|, \quad \delta T \le s < t \le T \ \ and \ \ \lambda \ge \lambda^\star, \tag{5.1}$$

$$C_1 |\varphi_{\alpha,1}^{(\xi)}(-\lambda t^\alpha)| \le |\varphi_{\alpha,\alpha}^{(\xi)}(-\lambda t^\alpha)| \le C_2 |\varphi_{\alpha,1}^{(\xi)}(-\lambda t^\alpha)|, \quad \delta T \le t \le T \ \ and \ \ \lambda \ge \lambda^\star. \tag{5.2}$$

例1中给出了这类随机变量的一个有趣例子，即Rademacher分布。

命题 5.2. *Rademacher*分布属于类 $\mathcal{C}_\alpha$，对所有 $\alpha \in (0, \frac{1}{2}$ -).

证明：令 $T > 0$。首先，我们有 $\varphi_{\alpha}^{(\xi)}$，$_\beta(s) = E_{2\alpha,\ \beta}(-s^2)$ $s \in \mathbb{R}$ （见命题2.8）。

由 [38, 引理 2.3], 可知，对于任意 $\delta \in (0,1)$，存在仅依赖于 δ, T的 $A, B, \lambda^\star > 0$，使得:

$$AE_{2\alpha,1}(-\lambda t^{2\alpha}) \le \frac{\sin(2\alpha\pi)}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{\zeta^{2\alpha-1} e^{-\zeta \lambda^{1/(2\alpha)} t}}{1 + 2\zeta^{2\alpha}\cos(2\alpha\pi) + \zeta^{4\alpha}} \, \mathrm{d}\zeta \le BE_{2\alpha,1}(-\lambda t^{2\alpha}),$$

对所有 $t \in [\delta T, T]$ 和 $\lambda > \lambda^\star$。

令 $s < t$ 使得 $s,\ t \in [\delta T, T]$，则

$$\begin{aligned}
|\varphi_{\alpha,1}^{(\xi)}(-\lambda t^\alpha)| &= E_{2\alpha,1}(-\lambda^2 t^{2\alpha}) \\
&\le \frac{\sin(2\alpha\pi)}{A\pi} \int_1^{+\infty} \frac{\zeta^{2\alpha-1} e^{-\zeta\lambda^{1/\alpha} t}}{1 + 2\zeta^{2\alpha}\cos(2\alpha\pi) + \zeta^{4\alpha}} \, \mathrm{d}\zeta \\
&\le \frac{\sin(2\alpha\pi)}{A\pi} e^{-\lambda^{1/\alpha}(t-s)} \int_1^{+\infty} \frac{\zeta^{2\alpha-1} e^{-\zeta\lambda^{1/\alpha} s}}{1 + 2\zeta^{2\alpha}\cos(2\alpha\pi) + \zeta^{4\alpha}} \, \mathrm{d}\zeta \\
&\le \frac{B}{A} e^{-\lambda^{1/\alpha}(t-s)} E_{2\alpha,1}(-\lambda^2 s^{2\alpha}) \\
&= \frac{B}{A} e^{-\lambda^{1/\alpha}(t-s)} |\varphi_{\alpha,1}^{(\xi)}(-\lambda s^\alpha)| \\
&\le e^{-c\lambda^{1/\alpha}(t-s)} |\varphi_{\alpha,1}^{(\xi)}(-\lambda s^\alpha)|
\end{aligned}$$

其中某个 $c > 0$ 仅取决于 δ 和 T。这表明，对于 $r = \frac{1}{\alpha} > 1$ 和 $\theta = 1$，式 (5.1) 成立。

关于式 (5.2)，我们使用 Mittag–Leffler函数的渐近展开式 (2.4)。对于任意 $t \in [\delta T, T]$，有

$$E_{2\alpha,\beta}(-\lambda^2 t^{2\alpha}) \sim \frac{1}{\Gamma(\beta-2\alpha)} \frac{1}{\lambda^2 t^{2\alpha}}, \quad \lambda \to \infty.$$

Then

$$\frac{E_{2\alpha,\alpha}(-\lambda^2 t^{2\alpha})}{E_{2\alpha,1}(-\lambda^2 t^{2\alpha})} \to \frac{\Gamma(1-2\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} := -r_\alpha < 0, \quad \text{as } \lambda \to \infty, \text{ uniformly for } t \in (\delta T, T).$$

因此，只要取 $\lambda^\star > 0$ 足够大:

$$0 < \frac{r_\alpha}{2} \le \frac{|E_{2\alpha,\alpha}(-\lambda^2 t^{2\alpha})|}{|E_{2\alpha,1}(-\lambda^2 t^{2\alpha})|} \le 2r_\alpha, \quad t \in (\delta T, T) \text{ and } \lambda \ge \lambda^\star,$$

从而得到 (5.2)。 □

注 8. *Rademacher*分布不属于类 $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$。事实上，对于 $\alpha = \frac{1}{2}$，我们有

$$\varphi^{(\xi)}_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha) = E_{1,\frac{1}{2}}(-\lambda^2 t), \qquad \varphi^{(\xi)}_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) = E_{1,1}(-\lambda^2 t) = e^{-\lambda^2 t}.$$

然后，将 (2.4) 应用于 $E_{1,\frac{1}{2}}(-\lambda^2 t)$，可得

$$\frac{|\varphi^{(\xi)}_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)|}{|\varphi^{(\xi)}_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha)|} \sim \frac{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\lambda^2 t}}{e^{-\lambda^2 t}} \to \infty, \qquad as\ \lambda \to \infty.$$

因此，(5.2) 不成立。然而，相应的平均系统由以下双调和热方程组成

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{y} + \Delta^2 \tilde{y} = \mathbb{1}_{G_0} u, & on\ Q_T, \\ \Delta \tilde{y} = \tilde{y} = 0, & on\ \Sigma_T, \\ \tilde{y}(0,\cdot) = y_0, & in\ G, \end{cases}$$

它在任意 $T > 0$下都是零可控的；参见 *[17]*。因此，属于 $\mathcal{C}_\alpha$ 并非必要条件。事实上，寻找一种刻画仍是一个开放问题。

关于分数阶薛定谔系统 (1.1) 的零平均可控性，我们的主要结果如下:

定理5.3。 设 $G \subset \mathbb{R}^d$ 为 *Lipschitz* 局部星形区域， $G_0 \subset G$ 为正测度子集， $\alpha \in (0,1)$， $T > 0$ 且 ξ 为属于类 $\mathcal{C}_\alpha$的实随机变量。那么，系统 (1.1)在时刻 T是零平均可控的。

定理5.3的证明受到文献 [38]，中时间分数阶扩散方程证明的启发；该证明采用文献 [4, 32]，中的谱方法，而后者受到文献 [24] 的启发。

对于所有 $\lambda > 0$，记 $\Lambda_\lambda := \{n : \lambda_n \le \lambda\}$ （分别记为 $\Lambda_\lambda^\perp := \{n : \lambda_n > \lambda\}$）；并用 $\mathcal{P}_\lambda$ （分别用 $\mathcal{P}_\lambda^\perp$）表示将 $L^2(G)$ 正交投影到 $\langle e_n \rangle_{n\in\Lambda_\lambda}$ （分别到 $\langle e_n \rangle_{n\in\Lambda_\lambda^\perp}$）上的投影。

对于正测度的一般子集，以下谱估计可直接由[5, 引理 32], 推出，然后应用 [4] 中针对观测集 $B(x_0,r)\cap G_0$的定理 3 和定理 5。

引理 5.4. 设 $G \subset \mathbb{R}^d$ 为 *Lipschitz* 局部星形区域， $G_0 \subset G$ 为正测度子集，且 $\{e_j\}$ 为狄利克雷拉普拉斯算子的正交归一特征函数。那么，存在一个常数 $C > 0$，使得对所有 $\lambda > 0$ 和 $\{c_j\} \subset \mathbb{C}$，均有:

$$\left(\sum_{j\in\Lambda_\lambda} |c_j|^2 \right)^{1/2} \le C e^{C\sqrt{\lambda}} \left\| \sum_{j\in\Lambda_\lambda} c_j e_j \right\|_{L^1(G_0)}. \tag{5.3}$$

事实上，在 [4] 中，他们证明了实数情形，但通过写成 $c_j = a_j + ib_j$，其中 a_j，$b_j \in \mathbb{R}$，利用对 a_j 和 b_j 的估计，以及估计 $\left|\sum_{j\in\Lambda_\lambda} a_j e_j\right| \le \left|\sum_{j\in\Lambda_\lambda} c_j e_j\right|$ 和 $\left|\sum_{j\in\Lambda_\lambda} b_j e_j\right| \le \left|\sum_{j\in\Lambda_\lambda} c_j e_j\right|$（因为特征函数 e_j 为实值），我们可以轻易得到复数情形。

注9. 为了将(5.1) 和(5.2) 应用于 $\lambda = \lambda_j$（狄利克雷拉普拉斯特征值），不失一般性，经过空间缩放后，我们可以假设 $\lambda_j \ge \lambda^\star$。事实上，对于固定的 $k = \sqrt{\frac{\lambda^\star}{\lambda_0}}$，若令$y_k(t,x) = y(t, \frac{x}{k})$，则 y 满足(1.1) 当且仅当 y_k 满足

$$\begin{cases} \partial^\alpha_{0,t} y_k - \xi \mathrm{i} k^2 \Delta y_k = \mathbb{1}_{G_0^k} u_k, & on\ Q_T^k, \\ y_k = 0, & on\ \Sigma_T^k, \\ y_k(0,\cdot) = y_{0,k}, & in\ G^k, \end{cases} \tag{5.4}$$

其中 $G^k = k.G$, $G_0^k = k.G_0$, $Q_T^k = (0,T)\times G^k$, $\Sigma_T^k = (0,T)\times \partial G^k$, $u_k(t,\cdot) = u(t, \frac{\cdot}{k})$ 且$y_{0,k} = y_0(\frac{\cdot}{k})$。此时，$-k^2\Delta$ 的特征值为 $k^2\lambda_j \ge k^2\lambda_0 = \lambda^\star$。因此，我们可以考虑系统(5.4)，对其应用(5.1) 和(5.2) 并使用新的特征值；又由于(1.1)是零平均可控的当且仅当(5.4)是零平均可控的，故可得结论。

证明： [定理 5 的证明。3] 为清晰起见，证明分为几个步骤 .

步骤 1。 </style}我们旨在证明，存在足够大的 和足够小的，使得对于所有 （），（如注9所述，我们可以假设）， $s \in [\delta T, T]$ 使得$s < t$，并且 $\tau \in \left[\frac{s+t}{2}, t\right]$:

$$\begin{aligned} &\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha} z(T-t,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)} \\ &\le Ce^{C\sqrt{\lambda}} \left(\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)} + e^{-c\lambda^r (t-s)^\theta} \|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha} z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)} \right). \end{aligned} \tag{5.5}$$

后续推导中很重要的一点是，$\lambda \ge \lambda_0$ 可以选为 s 和 t 的函数（见 (5.13)）；为此，除其他限制外，要求 c满足:

$$c \le \frac{1}{T^\theta \lambda_0^r}. \tag{5.6}$$

首先，利用（5.1）和（5.2），我们有:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha} z(T-t,\cdot;\xi;z_T))\|^2_{L^2(G)} &= \sum_{j\in\mathbb{N}} |\langle z_T, e_j\rangle|^2 |\varphi^{(\xi)}_{\alpha,1}(-\lambda_j t^\alpha)|^2 \\ &= \sum_{j\in\Lambda_\lambda} |\langle z_T, e_j\rangle|^2 |\varphi^{(\xi)}_{\alpha,1}(-\lambda_j t^\alpha)|^2 + \sum_{j\in\Lambda_\lambda^\perp} |\langle z_T, e_j\rangle|^2 |\varphi^{(\xi)}_{\alpha,1}(-\lambda_j t^\alpha)|^2 \\ &\le \sum_{j\in\Lambda_\lambda} |\langle z_T, e_j\rangle|^2 |\varphi^{(\xi)}_{\alpha,1}(-\lambda_j \tau^\alpha)|^2 + \sum_{j\in\Lambda_\lambda^\perp} |\langle z_T, e_j\rangle|^2 |\varphi^{(\xi)}_{\alpha,1}(-\lambda_j t^\alpha)|^2 \\ &\le T^{2(1-\alpha)} C_1^{-2} \sum_{j\in\Lambda_\lambda} |\langle z_T, e_j\rangle|^2 \tau^{2(\alpha-1)} |\varphi^{(\xi)}_{\alpha,\alpha}(-\lambda_j \tau^\alpha)|^2 \\ &\quad + e^{-c\lambda^r (t-s)^\theta} \sum_{j\in\Lambda_\lambda^\perp} |\langle z_T, e_j\rangle|^2 |\varphi^{(\xi)}_{\alpha,1}(-\lambda_j s^\alpha)|^2 \\ &\le T^{2(1-\alpha)} C_1^{-2} \sum_{j\in\Lambda_\lambda} |\langle z_T, e_j\rangle|^2 \tau^{2(\alpha-1)} |\varphi^{(\xi)}_{\alpha,\alpha}(-\lambda_j \tau^\alpha)|^2 \\ &\quad + e^{-c\lambda^r (t-s)^\theta} \|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha} z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|^2_{L^2(G)}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

另一方面，利用引理 5.4、（2.14）和 $\mathcal{P}_\lambda z_T = z_T - \mathcal{P}_\lambda^\perp z_T$，我们得到：

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\Lambda_\lambda}|\langle z_T,e_j\rangle|^2\tau^{2(\alpha-1)}|\varphi_{\alpha,\alpha}^{(\xi)}(-\lambda_j\tau^\alpha)|^2 &\le C^2e^{2C\sqrt{\lambda}}\Big\|\sum_{j\in\Lambda_\lambda}\langle z_T,e_j\rangle\tau^{\alpha-1}\varphi_{\alpha,\alpha}^{(\xi)}(-\lambda_j\tau^\alpha)e_j\Big\|_{L^1(G_0)}^2\\ &= C^2e^{2C\sqrt{\lambda}}\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;\mathcal{P}_\lambda z_T))\|_{L^1(G_0)}^2\\ &\le 2C^2e^{2C\sqrt{\lambda}}\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}^2\\ &\quad+2C^2e^{2C\sqrt{\lambda}}\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;\mathcal{P}_\lambda^\perp z_T))\|_{L^1(G_0)}^2.\end{aligned}\tag{5.8}$$

现在，利用柯西–施瓦茨不等式以及（2.14）、$|\tau-s|\ge\frac{|t-s|}{2}$ 和估计（5.1）与（5.2），可得：

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;\mathcal{P}_\lambda^\perp z_T))\|_{L^1(G_0)}^2 &\le |G_0|\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;\mathcal{P}_\lambda^\perp z_T))\|_{L^2(G_0)}^2\\ &\le |G_0|\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;\mathcal{P}_\lambda^\perp z_T))\|_{L^2(G)}^2\\ &= |G_0|\sum_{j\in\Lambda_\lambda^\perp}|\langle z_T,e_j\rangle|^2\tau^{2(\alpha-1)}|\varphi_{\alpha,\alpha}^{(\xi)}(-\lambda_j\tau^\alpha)|^2\\ &\le (\delta T)^{2(\alpha-1)}C_2^2|G_0|\sum_{j\in\Lambda_\lambda^\perp}|\langle z_T,e_j\rangle|^2|\varphi_{\alpha,1}^{(\xi)}(-\lambda_j\tau^\alpha)|^2\\ &\le (\delta T)^{2(\alpha-1)}C_2^2|G_0|e^{-2^{-\theta}c\lambda^r(t-s)^\theta}\sum_{j\in\Lambda_\lambda^\perp}|\langle z_T,e_j\rangle|^2|\varphi_{\alpha,1}^{(\xi)}(-\lambda_j s^\alpha)|^2\\ &\le (\delta T)^{2(\alpha-1)}C_2^2|G_0|e^{-2^{-\theta}c\lambda^r(t-s)^\theta}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-s,\cdot;\xi;z_0))\|_{L^2(G)}^2.\end{aligned}\tag{5.9}$$

总之，结合（5.7）、（5.8）和（5.9），并取 $C>0$ 充分大且 $c>0$充分小，可得到（5.5）。

步骤 2。现在我们证明，对于所有 $\kappa\in(0,1)$，存在一个充分大的常数 $C>0$，其取值依赖于 κ，使得以下插值估计成立：

$$\begin{aligned}&\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-t,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}\\ &\le\Big[Ce^{C(t-s)^{-\sigma}}\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}\Big]^{1-\kappa}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}^\kappa,\end{aligned}\tag{5.10}$$

对于所有 $s,\ t\in[\delta T,T]$，满足 $s<t$、$\tau\in[\frac{s+t}{2},t]$和 $\sigma=\frac{\theta}{2r-1}$。

在下文中，我们假设 $\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}\neq0$且 $\|\mathbb{E}(I_t^{1-\alpha}{}_T z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}\neq0$。事实上，如果 $\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}=0$，通过在（5.5）中取 $\lambda\to\infty$，可得到 $\|\mathbb{E}(I_t^{1-\alpha}{}_T z(T-t,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}=0$，因此（5.10）成立。此外，如果 $\|\mathbb{E}(I_t^{1-\alpha}{}_T z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}=0$，则根据（2.15）和（5.1），可得到 $\|\mathbb{E}(I_t^{1-\alpha}{}_T z(T-t,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}=0$，因此（5.10）同样成立。

由于 $r>-\frac{1}{2}$，我们可以通过权重 $\kappa\in(0,1)$ 平衡 (5.5) 中的两个指数项，注意到：

$$\begin{aligned}\max_{\lambda>0}\Big(C\sqrt{\lambda}-c\kappa\lambda^r(t-s)^\theta\Big)=&\frac{2r-1}{(2r)^{\frac{2r}{2r-1}}}C^{\frac{2r}{2r-1}}(c\kappa)^{-\frac{1}{2r-1}}(t-s)^{-\frac{\theta}{2r-1}}\\ \le&C'(t-s)^{-\frac{\theta}{2r-1}}=C'(t-s)^{-\sigma},\end{aligned}$$

对于某个适当的常数 $C'>0$，它取决于 c、 C、 r、 κ 和 $\sigma=\frac{\theta}{2r-1}$。因此，由 (5.5) 得

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-t,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)} &\le Ce^{C'(t-s)^{-\sigma}}\Big(e^{c\kappa\lambda^r(t-s)^\theta}\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}\\ &\quad +e^{c(\kappa-1)\lambda^r(t-s)^\theta}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}\Big)\\ &= Ce^{C'(t-s)^{-\sigma}}\Big[\Big(e^{c\lambda^r(t-s)^\theta}\Big)^\kappa\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}\\ &\quad +\Big(e^{c\lambda^r(t-s)^\theta}\Big)^{\kappa-1}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}\Big].\end{aligned}\tag{5.11}$$

为确定 (5.11) 右侧的最优界，我们考虑函数

$$x\mapsto x^\kappa\|\mathbb{E}(z(T-t,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}+x^{\kappa-1}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)},$$

定义在 (0，∞) 上，该函数在以下位置取得唯一的最小值

$$x_*=\frac{(1-\kappa)\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}}{\kappa\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}}.$$

接下来，我们讨论两种可能的情形:

若 $x_*<e_\circ$ 此时，我们有:

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)} &\le e\left(\frac{\kappa}{1-\kappa}\right)\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}\\ &\le C''e^{C''(t-s)^{-\sigma}}\|\mathbb{E}(z(t,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)},\end{aligned}\tag{5.12}$$

对于某个充分大的常数 $C''>0$，该常数取决于 $\kappa_\circ$

利用 (5.1)、(2.14) 和估计式 (5.12)，我们得到:

$$\begin{aligned}&\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-t,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}\le\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}\\ &\le\Big[C''e^{C''(t-s)^{-\sigma}}\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;z_0))\|_{L^1(G_0)}\Big]^{1-\kappa}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}^\kappa.\end{aligned}$$

如果 $x_*\ge e_\circ$ 适当选取由 λ 给出的

$$\lambda=\left(\frac{\ln(x_*)}{c(t-s)^\theta}\right)^{\frac{1}{r}}\ge\lambda_0.\tag{5.13}$$

注意，由于 (5.6) 和 $x_*\ge e$，有 $\lambda\ge\lambda_0$。因此，我们可以确保 $e^{c\lambda^r(t-s)^\theta}=x_*.$。对于这一选择，(5.11) 得出:

$$\begin{aligned}&\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-t,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}\\ &\le C\left[\left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)^\kappa+\left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)^{k-1}\right]e^{C'(t-s)^{-\sigma}}\|\mathbb{E}(z(T-t,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}^{1-\kappa}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}^\kappa\\ &\le\Big[C''e^{C''(t-s)^{-\sigma}}\|\mathbb{E}(z(T-t,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}\Big]^{1-\kappa}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}^\kappa,\end{aligned}$$

对于某个充分大的常数 $C''>0$，其取决于 $\kappa_\circ$

因此，在所有情况下，估计式 (5.10) 均成立。

步骤 3. 现在，我们可以利用插值不等式 (5.10) 推导出可观测性不等式 (2.20)。令 $\frac{s+t}{2}<\tau<t$，由 (5.10) 可得:

$$\begin{aligned}&\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-t,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}\\ &\le\Big[Ce^{C(t-s)^{-\sigma}}\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}\Big]^{1-\kappa}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}^\kappa.\end{aligned}$$

然后，由杨氏不等式可得:

$$\begin{aligned}
&\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-t,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}\\
&\le(1-\kappa)\varepsilon^{\frac{1}{1-\kappa}}Ce^{C(t-s)^{-\sigma}}\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}+\kappa\varepsilon^{-\frac{1}{\kappa}}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}\\
&\le\varepsilon^{\frac{1}{1-\kappa}}Ce^{C(t-s)^{-\sigma}}\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}+\varepsilon^{-\frac{1}{\kappa}}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)},
\end{aligned}$$

对任意 $\varepsilon>0$ 和 $\frac{s+t}{2}<\tau<t.$ 对上述不等式关于 τ在 $\left(\frac{s+t}{2},t\right)$ 上积分，得到 —— :

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-t,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}&\le\varepsilon^{\frac{1}{1-\kappa}}\frac{C}{t-s}e^{C(t-s)^{-\sigma}}\int_{\frac{s+t}{2}}^{t}\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}\mathrm{d}\tau\\
&\quad+\varepsilon^{-\frac{1}{\kappa}}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}\\
&\le\varepsilon^{\frac{1}{1-\kappa}}\frac{C}{t-s}e^{C(t-s)^{-\sigma}}\int_{s}^{t}\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}\mathrm{d}\tau\\
&\quad+\varepsilon^{-\frac{1}{\kappa}}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}.
\end{aligned}$$

取 $\varepsilon=e^{(t-s)^{-\sigma}}$ 并充分增大 C，得到

$$\begin{aligned}
&e^{-(C+\frac{1}{1-\kappa})(t-s)^{-\sigma}}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-t,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}-e^{-(C+\frac{1}{1-\kappa}+\frac{1}{\kappa})(t-s)^{-\sigma}}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}\\
&\le C\int_s^t\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

令

$$\mathfrak{C}=C+\frac{1}{1-\kappa},\qquad q=1+\frac{1}{\kappa\mathfrak{C}}>1.$$

于是,

$$\begin{aligned}
&e^{-\mathfrak{C}(t-s)^{-\sigma}}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-t,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}-e^{-q\mathfrak{C}(t-s)^{-\sigma}}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-s,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}\\
&\le\mathfrak{C}\int_s^t\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

对于 $p=q^{\frac{1}{-\sigma}}<1,$我们考虑由 $\mathfrak{b}$ 定义的 $[\delta T,T]$ 中元素的递减序列 $\{t_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y:

$$t_m=\delta T+(1-\delta)p^mT,\qquad m\in\mathbb{N}.$$

然后，取 $t=t_m$ 和 $s=t_{m+1}$，我们得到:

$$\begin{aligned}
&e^{-\mathfrak{C}(t_m-t_{m+1})^{-\sigma}}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-t_m,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}-e^{-\mathfrak{C}(t_{m+1}-t_{m+2})^{-\sigma}}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(T-t_{m+1},\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}\\
&\le\mathfrak{C}\int_{t_{m+1}}^{t_m}\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

将最后一个不等式对 $\mathbb{N}$求和，可得:

$$\begin{aligned}
e^{-\mathfrak{C}(T-t_1)^{-\sigma}}\|\mathbb{E}(I_{t,T}^{1-\alpha}z(0,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^2(G)}&\le\mathfrak{C}\sum_{m=0}^{\infty}\int_{t_{m+1}}^{t_m}\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}\mathrm{d}\tau\\
&=\mathfrak{C}\int_{\delta T}^{T}\|\mathbb{E}(z(T-\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}\mathrm{d}\tau\\
&=\mathfrak{C}\int_{0}^{(1-\delta)T}\|\mathbb{E}(z(\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}\mathrm{d}\tau\\
&\le\mathfrak{C}\int_{0}^{T}\|\mathbb{E}(z(\tau,\cdot;\xi;z_T))\|_{L^1(G_0)}\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}$$

由此得到可观测性不等式（2.20）。 □

正如引言所述，通过观察到分数阶双调和扩散方程的动力学可解释为扩散率由拉ademacher随机变量决定的分数阶薛定谔方程的平均，可得出该方程的零可控性。

Co推论 5.5. 设 $\alpha \in (0,1)$。则，分数阶双调和扩散方程

$$\begin{cases} \partial_{0,t}^{\alpha}\tilde{y} + \Delta^2\tilde{y} = \mathbb{1}_{G_0}u, & on\ Q_T, \\ \Delta\tilde{y} = \tilde{y} = 0, & on\ \Sigma_T, \\ \tilde{y}(0,\cdot) = y_0, & in\ G, \end{cases}$$

在任意时刻 $T > 0$ 都是零可控的；也就是说，对于任意 $y_0 \in L^2(G)$，存在 $u \in L^\infty((0,T) \times G)$ 使得 $\tilde{y}(T,\cdot) = 0$。

这将关于双调和热方程的 [17] 零可控性结果推广到了分数阶情形。

6. 结论

在这项工作中，我们研究了时间分数阶薛定谔方程的平均可控性，其中量子扩散率被建模为服从一般概率分布的随机变量。我们首先证明，同时零可控性仅可能对随机扩散率的一组可数实现成立。随后，我们证明，对于所有绝对连续随机变量，无论控制时间如何，精确平均可控性均不成立。此外，对于一大类随机变量，我们证明系统在任意时刻都具有零平均可控性，且控制区域可以是空间区域中任意具有正测度的子集；所用的开环控制不依赖于随机性。

在此过程中，我们严格证明了与时间分数阶薛定谔方程相关的伴随系统中，平均可控性与平均可观测性之间的对偶关系。据我们所知，现有文献尚未严格证明这一对偶关系，即使在具有确定性扩散的分数阶方程这一特殊情形下也是如此。此外，我们引入了一个双参数分数阶特征函数，它推广了经典特征函数，并且对概率学和统计学领域也具有独立的研究价值。

我们的方法也适用于具有类似谱性质的抽象时间分数阶薛定谔方程，即其自伴算子具有紧预解式并满足谱不等式。这包括例如其他边界条件（如动态型边界条件 [30]）以及退化方程（参见例如 [3]）。

此外，我们的理论结果自然导出了一个数值算法，用于计算与时间分数阶薛定谔方程相关的最小 L^2-范数平均控制（HUM控制）；整数阶情形参见 [5] $\alpha = 1$。然而，要高效处理时间分数阶薛定谔方程，还需要进行详细的数值分析，这超出了本文的范围。我们将在后续论文中对此进行研究。

资助

J.A.B.P 获得了由巴斯克政府资助的 IT1615-22 项目支持。

利益冲突声明

作者声明，他们没有可能影响本文所报告研究的已知竞争性利益。

数据可用性

本文所述研究未使用任何数据。

参考文献

[1] Abdelli, M., & Castro, C. (2021). 未知传播速度波动方程的平均可控性数值近似。*ESAIM*：控制、优化与变分法, 27, 64.[2] Achar, B. N. N., Yale, B. T., & Hanneken, J. W. (2013). 重新审视时间分数阶薛定谔方程。数学物理进展, 2013(1), 290216.[3] Alahyane, M., Chrifi, A., & Echarroudi, Y. (2025). 关于内点集退化薛定谔方程的可控性。数学新闻, 298(2), 644–676.[4] Apraiz, J., Escauriaza, L., Wang, G., & Zhang, C. (2014). 可观测性不等式与可测集。欧洲数学学会杂志 , 16(11), 2433–2475.[5] Bárcena-Petisco, J. A., & Et-Tahri, F. (2025). 扩散率服从绝对连续分布的随机薛定谔方程的平均可控性。*SIAM* 控制与优化杂志, 已接收。[6] Bárcena-Petisco, J. A., & Zuazua, E. (2021). 随机扩散热方程的平均动力学与控制。*Systems & Control Letters*, 158, 105055.[7] Biccari, U., & Hernández-Santamaría, V. (2019). 一维分数阶热方程的可控性：理论与数值方面。*IMA* 数学控制与信息杂志, 36(4), 1199–1235.[8] Biccari, U., Warma, M., & Zuazua, E. (2025). 分数阶热方程和波动方程的边界观测与控制。*arXiv*预印本 arXiv:2504.17413.[9] Borwein, P., & Erdélyi, T. (1996). $C[0,1]$ 和 $L_1[0,1]$中的完整的闵茨定理。伦敦数学学会杂志, 54(1), 102–110.[10] Boutaayamou, I., Et-Tahri, F., & Maniar, L. (2025). 不确定参数下有限维线性分数阶系统的可控性。*arXiv*预印本 arXiv:2508.02420.[11] Chorfi, S. E., Et-Tahri, F., Maniar, L., & Yamamoto, M. (2025). 抽象时间分数阶薛定谔方程的正问题与反问题。*arXiv*预印本 arXiv:2510.03600.[12] Chorfi, S. E., Et-Tahri, F., Maniar, L., & Yamamoto, M. (2025). 时间分数阶薛定谔方程的反问题。*arXiv*预印本 arXiv:2511.08701.[13] Coulson, J., Gharesifard, B., & Mansouri, A.-R. (2019). 任意分布扩散率下随机热方程的平均可控性。*Automatica*, 103, 46–52.[14] Fujishiro, K., & Yamamoto, M. (2014). 通过内部控制实现分数阶扩散方程的近似可控性。应用分析, 93(9), 1793–1810.[15] Garrappa, R., Gerhold, S., Popolizio, M., & Simon, T. (2025). 关于复平面中双参数 Mittag-Leffler 函数的一些不等式。数学分析及其应用杂志, 129588.[16] Gorenflo, R., Kilbas, A. A., Mainardi, F., Rogosin, S. V., & others. (2020).*Mittag-Leffler* 函数、相关主题及应用. Springer。

[17] Guerrero, S., & Kassab, K. (2019). 维数为 $N \geq 2$时四阶抛物型方程的Carleman估计与零可控性。纯粹与应用数学杂志, 121, 135– 161.[18] Hernández-Santamaría, V., Le Balc'h, K., & Peralta, L. (2022). 随机非线性抛物型方程的统计零可控性。随机偏微分方程：分析与计算, 10(1), 190–222.[19] Hernández-Santamaría, V., Le Balc'h, K., & Peralta, L. (2023). 随机半线性抛物型方程的整体零可控性。亨利·庞加莱研究所年刊 C辑, 40(6), 1415–1455.[20] Jin, B. (2021). 分数阶微分方程。Springer, 查姆。[21] Koenig, A. (2020). 分数阶热方程及相关方程缺乏零可控性。SIAM 控制与优化杂志, 58(6), 3130–3160.[22] Laskin, N. (2018). 分数阶量子力学。世界科学出版社。[23] Lazar, M. (2018). 不确定扰动下偏微分方程观测的稳定性。ESAIM：控制、优化与变分法, 24(1), 45–61.[24] Lebeau, G., & Robbiano, L. (1995). 热方程的精确控制。偏微分方程通讯, 20(1-2), 335–356.[25] Lohéac, J., & Zuazua, E. (2016). 从平均可控性到同时可控性。图卢兹科学学院年刊：数学, 25(4), 785–828.[26] Lohéac, J., & Zuazua, E. (2017). 参数依赖保守半群的平均可控性。微分方程杂志, 262(3), 1540–1574.[27] Lü, Q., & Zhang, X. (2021). 随机偏微分方程的数学控制理论。Springer。[28] Lü, Q., & Zhang, X. (2022). 随机偏微分方程控制理论简明导论。数学控制及相关领域, 12(4), 847–954.[29] Lü, Q., & Zuazua, E. (2016). 随机演化偏微分方程的平均可控性。纯粹与应用数学杂志, 105(3), 367–414.[30] Mercado, A., & Morales, R. (2023). 具有动态边界条件的薛定谔方程的精确可控性。SIAM 控制与优化杂志, 61(6), 3501–3525.[31] Micu, S., & Zuazua, E. (2006). 关于分数阶抛物型方程的可控性。SIAM 控制与优化杂志, 44(6), 1950–1972.[32] Miller, L. (2010). 一种用于类热半群可观测性的直接Lebeau–Robbiano策略。离散与连续动力系统B辑, 14, 1465–1485.[33] Naber, M. (2004). 时间分数阶薛定谔方程。数学物理杂志 , 45(8), 3339–3352.[34] Podlubny, I. (1999). 分数阶微分方程。学术出版社。[35] Strichartz, R. S. (1994). 分布理论与傅里叶变换指南。CRC出版社。[36] Tomovski, Ž., Metzler, R., & Gerhold, S. (2022). 分数阶特征函数， 以及一种求随机变量矩的分数阶微积分方法。Fractional Calculus and Applied Analysis, 25(4), 1307–1323。

[37] Torres, L. C. 与 Gal, C. G.（2024）。通过综合Caputo导数策略控制时间分数阶薛定谔方程。*Evolution Equations and Control Theory*，13（5），1311–1331。[38] Xue, R.（2017）。通过内部控制实现分数阶扩散方程的可观测性。*Fractional Calculusand Applied Analysis*，20（2），537–552。[39] Zuazua, E.（2014）。平均控制。*Automatica*，50（12），3077–3087。[40] Zuazua, E.（2016）。偏微分方程加性叠加的稳定观测。*Systems & Control Letters*，93，21–29。