arXiv:2602.07551v1 [math.DG] 7 Feb 2026

# 有限全曲率带 puncture 的球面上的完备极小曲面，其全分歧值数大于2

JUN MATSUMOTO

Abstract. 受 Osserman 关于完备极小曲面高斯映射的遗漏值个数问题的启发，这类曲面具有有限全曲率，并定义在 $\boldsymbol{R}^3$中。其全分歧值数 $\nu_g$（本文简称为 *total weight of totally ramified values*）引起了广泛关注。 $\nu_g$ 的数值比单纯的遗漏值个数提供了更详细的信息。2006年，Kawakami 首先发现，由 Miyaoka 和 Sato 构造的、定义在三 puncture 黎曼球面上的极小曲面满足 $D_g = 2$ 和 $\nu_g = 2.5 > 2$。随后，2024年，Kawakami 和 Watanabe 给出了另一个定义在四 puncture 黎曼球面上的极小曲面，它也满足 $D_g = 2$ 和 $\nu_g = 2.5$。迄今为止，这仍是仅有的两个已知满足 $\nu_g > 2$的此类曲面例子。

本文系统地构造了满足 $\nu_g > 2$的穿孔黎曼球面上的亚纯函数。由此，我们针对已知例子所涉及拓扑类型中满足 $\nu_g = 2.5$ 的有限总曲率完备极小曲面，得到以下结果：(1) 对于三穿孔球面，我们证明了 Miyaoka–Sato 例子的唯一性。(2) 对于四穿孔球面，我们完全确定了满足 $D_g = 2$ 和 $\nu_g = 2.5$的曲面，其中包括 Kawakami–Watanabe 例子以外的其他例子。(3) 此外，我们在四穿孔球面上构造了一个满足 $D_g = 1$ 和 $\nu_g = 2.5$的新例子。

## 1. Introduction

在经典极小曲面理论中，研究欧几里得三维空间中的完备极小曲面 $\boldsymbol{R}^3$ 的高斯映射所遗漏值的个数，一直是一个核心课题。针对这一问题，Fujimoto [Fuj 88] 运用值分布理论方法，得出了一个重要结果：非平坦完备极小曲面在 $\boldsymbol{R}^3$ 中的高斯映射至多可以遗漏黎曼球面 $\boldsymbol{C} := \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ 上的 4 个值。此外，该结果是最优的，因为经典 Scherk 曲面的高斯映射在 $\boldsymbol{C}$ 中恰好遗漏 4 个值。Osserman [Oss64] 还证明，若 $\boldsymbol{R}^3$ 中的非平坦完备极小曲面具有有限全曲率，则其高斯映射至多可以遗漏 $\boldsymbol{C}$ 中的 3 个值–（见事实 2.3）。然而，由于目前尚不清楚是否存在高斯映射遗漏 3 个值的此类极小曲面，Osserman 的结果是否最优仍是一个悬而未决的问题。

*Date*：2026年2月10日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主类 53A10；次类 53A05。
*Key words and phrases.* 极小曲面、高斯映射、遗漏值、全分歧值的总权重。

在这一背景下，高斯映射的全分歧值数在 21 世纪初引起了人们的关注并得到研究。下面回顾亚纯函数的全分歧值数这一概念。

**定义 1.1** (参见 [Nev70], [Kaw06])。设 $g\colon \Sigma \to \boldsymbol{C} \coloneqq \overline{\boldsymbol{C}} \cup \{\infty\}$ 是黎曼曲面 $\Sigma$上的一个非恒定亚纯函数。

- $\boldsymbol{C} \setminus g(\Sigma)$中的一个值称为 $g$的被省略值。本文用 $D_g$ 表示 $g$ 的被省略值的个数。

- 设 $p \in \Sigma$。取以 $p$ 和 $g(p)$为中心的局部坐标 $z$ 和 $w$，使得函数 $g$ 在局部可表示为 $w = z^{e_p}$。于是，我们分别称整数 $e_p \in \boldsymbol{Z}_{\geq 1}$ 为 $p$处的重数，称 $e_p - 1$ 为 $p$ 处 $g$的分歧阶。此外，若 $e_p \geq 2$，则称点 $p$ 为一个分歧点。

- 若值 $\alpha \in \boldsymbol{C}$ 是 $g$ 的被省略值，或者原像 $g^{-1}(\alpha)$中的所有点都是 $g$的分歧点，则称该值为 $g$ 的全分歧值；换言之，方程 $g - \alpha = 0$ 的所有解都是重根。

- 令 $\mathcal{TR}_g \coloneqq \{a_1, \ldots, a_{D_g}, b_1, \ldots, b_{R_g}\} \subset \boldsymbol{C}$为 $g$的全分歧值集合，其中 $a_k$ ($k = 1, \ldots, D_g$) 和 $b_j$ ($j = 1, \ldots, R_g$) 分别表示被省略值，以及除被省略值以外的全分歧值。我们还定义映射 $\nu\colon \mathcal{TR}_g \to \boldsymbol{Z}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ 如下：

$$\nu(\alpha) \coloneqq \begin{cases} \infty & (\alpha = a_k), \\ \min\{e_p \in \boldsymbol{Z}_{\geq 2}; p \in g^{-1}(b_j)\} \ (\geq 2) & (\alpha = b_j), \end{cases} \tag{1.1}$$

并称值 $\nu(\alpha)$为 $\alpha$处全分歧值的阶 。我们将由下式定义的 $\nu_g$称为

$$\nu_g \coloneqq \sum_{\alpha \in \mathcal{TR}_g} \left(1 - \frac{1}{\nu(\alpha)}\right) = D_g + \sum_{j=1}^{R_g} \left(1 - \frac{1}{\nu(b_j)}\right) \in \boldsymbol{Q}_{\geq 0} \tag{1.2}$$

全分歧值数或 $g$的全分歧值总权重。

**注 1.2.** 下面就本文的符号和术语作几点说明。

- 此后，依照 Robinson [Rob39], 以及 Kawakami 和 Watanabe [KW24]，我们将全分歧值数称为“全分歧值总权重”。这是因为值 $1 - 1/\nu(\alpha)$称为亚纯函数 $g$ 在 $\alpha \in \mathcal{TR}_g$处的权重，而且这样可以避免将“全分歧值数”与“全分歧值的个数”混淆。我们用 $R_g$表示除被省略值以外的全分歧值的个数。

- “例外值”一词也常被用来代替“被省略值”，且含义相同。在 Nevanlinna理论中，将被省略值视为全分歧值是很自然的（参见 [Rob39], [Nev70], [Fuj93], [Kob03], [NW14], [Ru21], [Ru23]）。事实上，若 $\alpha$ 是 $g$的一个被省略值，则方程 $g = \alpha$ 没有任何重数的解，这可以解释为其重数为无穷。
- 从 Nevanlinna理论的角度来看，亚纯函数的全分歧值总权重可以自然地加以解释。事实上，关于 Nevanlinna亏量的亏量关系（[Nev25]）蕴含

$$D_g \leq \nu_g \leq 2$$

对于任意非常数亚纯函数 $g\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$。

Fujimoto 隐含地指出，完备极小曲面的高斯映射 $g$ 的全分歧值总权重 $\nu_g$ 比数量 $D_g$提供了更详细的信息。也就是说， [Fuj92] 给出

$$D_g \leq \nu_g \leq 4 \tag{1.3}$$

对于完备极小曲面（不一定具有有限全曲率），这是可能达到的最佳界。另一方面，目前尚无已知的有限全曲率完备极小曲面满足 $D_g = 3$ 的例子，而 Miyaoka 和 Sato [MS94] 得到了许多满足 $D_g = 2$ 的例子，涵盖几乎所有拓扑类型。因此，与 Fujimoto 的研究情形一样，人们普遍认为，Osserman 问题的最佳上界是 2，高斯映射的全分歧值总权重的最佳上界也为 2。

然而，2006年，Kawakami [Kaw06] 证明，Miyaoka 和 Sato 给出的全曲率为 $-8\pi$ 的完备极小曲面$\boldsymbol{C} \setminus \{3 \text{ 点}\} \to \boldsymbol{R}^3$ 满足$D_g = 2$ 和 $\nu_g = 2.5$，且该值严格大于 2。这一发现促使人们研究高斯映射的全分歧值总权重。通过改进 Osserman 的论证，Kawakami、Kobayashi 和 Miyaoka [KKM08] 证明，在假设全曲率有限的情况下，

$$D_g \leq \nu_g < 4, \tag{1.4}$$

这与 Fujimoto 的情形 (1.3) 不同（精确表述见事实 2.6）。此外，Kawakami 和 Watanabe [KW24] 发现了第二族全曲率为 $-16\pi$的完备极小曲面，其 $\boldsymbol{C} \setminus \{4 \text{ 点}\} \to \boldsymbol{R}^3$ 满足$D_g = 2$ 和 $\nu_g = 2.5$。对于 Miyaoka–Sato 和 Kawakami–Watanabe 的例子所具有的拓扑类型，值 $\nu_g = 2.5$ 是最优的。然而，在二十年间，人们只发现了这两个 $\nu_g = 2.5$ ——因而严格大于 2——的例子，其唯一性仍是未知的。

本文旨在回答以下问题。

**问题 1.3.** (1) 是否存在其他全曲率为 $-8\pi$ 、满足 $\nu_g = 2.5$且有 $\boldsymbol{C} \setminus \{3 \text{ 个点的完备极小浸入}$? (2) 是否存在其他全曲率为 $-16\pi$ 、满足 $\nu_g = 2.5$且有 $\boldsymbol{C} \setminus \{4 \text{ 个点的完备极小浸入}$?

对于（1），答案是否定的，也就是说，我们可以证明 Miyaoka–Sato 情形的唯一性。然而，对于（2），答案是肯定的，也就是说，除了 Kawakami–Watanabe 的例子之外，还存在其他例子。特别是，我们可以找到一个包含他们所举例子的族。本文还致力于提供一种构造满足 $\nu_g > 2$ 的有限全曲率完备极小曲面的方法。

本文组织如下。第2节简要回顾 n维欧氏空间中的经典极小曲面理论基础，并介绍 Osserman 问题（问题 2.4）。特别地，我们说明了 Miyaoka–Sato 和 Kawakami–Watanabe 的例子（例 2.5 和 2.7），这些例子正是问题 1.3 的动机。第3节回顾定义在带 punctures 的紧黎曼曲面上的亚纯函数的值分布。利用关于全分歧值阶数和 (1.1) 的初等估计（命题 3.1），我们得到关于 $\nu_g$ 的估计（推论 3.5和3.6）。特别是，推论 3.6 立即给出了问题 1.3 中 (1) 的答案（推论3.7）。第4节，我们完全确定了所有具有 $D_g = 2$ 和 $\nu_g = 2.5$、总曲率为 $-16\pi$ 的 $\boldsymbol{C} \setminus \{4 \text{ 点完备极小浸入}$，这对应于 Kawakami–Watanabe 情形。

通过系统地构造定义在具有 $D_g = 2$ 和 $\nu_g = 2.5$ 的 $\boldsymbol{C} \setminus \{4$ 点 $\}$上的亚纯函数，我们知道，除了 Kawakami–Watanabe 的例子外，还存在此类曲面的例子（定理 4.6）。我们还发现，存在一个具有 $D_g = 1$ 和 $\nu_g = 2.5$、总曲率为 $-16\pi$ 的 $\boldsymbol{C} \setminus \{4$ 点 $\} \to \boldsymbol{R}^3$ 完备极小浸入。最后，我们针对有限全曲率的 n 维欧氏空间中完备极小曲面的高斯映射的全分歧值总权重提出了一些开放问题（问题 4.10）。

**致谢**。 作者谨向 Yu Kawakami 和 Kotaro Yamada 致以诚挚谢意，感谢他们对本研究提出的宝贵建议和意见。作者还感谢 Mototsugu Watanabe 分享了本研究中的宝贵想法。本研究得到日本 JST SPRING 项目资助，项目编号为 JPMJSP2180。

## 2. Preliminaries

**2.1. 有限全曲率的完备极小浸入 $\boldsymbol{R}^3$ 及其高斯映射。** 下面简要回顾极小曲面理论的基本概念（参见 [Oss69], [LM99] 和 [AFL21]）。设 $\Sigma$ 为一个连通可定向二维流形， $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ 为一个浸入。我们将 $\Sigma$ 上由 $f$ 从 $\boldsymbol{R}^3$诱导的度量记为 $ds^2$ 。可以将 $\Sigma$ 视为一个黎曼曲面，其复坐标关于诱导度量 $ds^2$是等温的。因此，在下文中，我们可以假设 $\Sigma$ 是一个黎曼曲面，且 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$是一个共形浸入。若共形浸入 $f$ 满足以下条件，则称其为极小浸入

$$\Delta_{ds^2} f \equiv 0,$$

其中 $\Delta_{ds^2}$ 表示相对于 $ds^2$的拉普拉斯算子，即 $f$的每个分量都是 $\Sigma$上的调和函数。作为极小曲面理论中的一个经典结果，下面的魏尔斯特拉斯表示广为人知。

**事实 2.1.** 设 $\Sigma$ 是一个黎曼曲面，亚纯函数 $g$ 与其上的全纯 1-形式 $\omega$ 组成的一对$(g,\omega)$满足

**(1)**（正则性条件）

$$ds^2 \coloneqq (1+|g|^2)^2 |\omega|^2 \tag{2.1}$$

在 $\Sigma$上定义一个黎曼度量。

**(2)**（周期条件）

$$\mathrm{Re} \int_c (1-g^2, i(1+g^2), 2g)\omega = 0 \tag{2.2}$$

对 $\Sigma$中的任意闭曲线 $c$均成立。

于是，由下式定义映射 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$

$$f \coloneqq \mathrm{Re} \int (1-g^2, i(1+g^2), 2g)\omega \tag{2.3}$$

给出一个极小浸入，其诱导度量与 $ds^2$ 在 (2.1) 中的度量一致。反过来，任意极小浸入 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ 都有表达式 (2.3)，其中 $\Sigma$ 上的复坐标相对于其诱导度量是等温的。

上述事实中的亚纯函数 $g$ 与全纯 1-形式 $\omega$ 组成的有序对 $(g,\omega)$ 称为极小浸入的 *Weierstrass* 数据 。

极小浸入 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ 的高斯曲率 $K_{ds^2}$ 由下式给出

$$K_{ds^2} = \frac{-4}{(1+|g|^2)^4}\left|\frac{dg}{\omega}\right|^2. \tag{2.4}$$

此外，由下式定义的映射 $\mathcal{G}\colon \Sigma \to S^2$

$$\mathcal{G} \coloneqq \left(\frac{2\,\mathrm{Re}(g)}{1+|g|^2}, \frac{2\,\mathrm{Im}(g)}{1+|g|^2}, \frac{-1+|g|^2}{1+|g|^2}\right) = \Pi^{-1}\circ g \tag{2.5}$$

给出了 $f$ 的（经典）高斯映射，其中 $\Pi\colon S^2 \to \boldsymbol{C}$ 是以原点为中心的二维单位球面 $S^2$ 的立体投影。通过上述 $\mathcal{G}$ 与 $g$ 之间的对应，亚纯函数 $g\colon \Sigma \to \boldsymbol{C}$ 也称为（复）高斯映射。此外， $f$ 的全曲率 $C(\Sigma)$ 由下式给出

$$C(\Sigma) \coloneqq \int_\Sigma K_{ds^2}\,dA_{ds^2} = -\int_\Sigma \frac{2i\,dg\wedge d\overline{g}}{(1+|g|^2)^2} = -\int_\Sigma g^*(dA_{S^2}) \in [-\infty, 0], \tag{2.6}$$

其中 $dA_{ds^2}$ 表示相对于 $ds^2$ 的面积元，

$$dA_{S^2} \coloneqq \frac{2i\,dz\wedge d\overline{z}}{(1+|z|^2)^2}$$

是关于 $S^2 = \boldsymbol{C}$ 上 Fubini–Study 度量的面积元，且 $z$ 是 $\boldsymbol{C}\subset\overline{\boldsymbol{C}}$ 的标准坐标。若极小浸入的全曲率满足 $C(\Sigma) > -\infty$，则称其具有有限全曲率。此外，若诱导度量是 $\Sigma$ 上的完备黎曼度量，则称该极小浸入是完备的。

接下来，我们回顾有限全曲率完备极小曲面的基本事实。

**事实 2.2** ([Hub57], [Oss64])**.** 设 $\Sigma$ 是一个黎曼曲面，且 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ 是一个极小浸入。那么，以下两个条件等价:
(1) 极小浸入 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ 是完备的，且具有有限全曲率。(2) 源黎曼曲面 $\Sigma$与 $\Sigma\setminus\{p_1,\dots,p_n\}$双全纯，其中 $\Sigma$是一个紧黎曼曲面， $n \geq 1$ 是一个整数。此外， $\boldsymbol{C}^3$值全纯1-形式 $(1-g^2, i(1+g^2)\ 2g)\omega$ (以及$(g,\omega)$) 在 $\Sigma$上的亚纯延拓至 $\Sigma$。

特别地，若 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ 是有限全曲率的完备极小浸入，则高斯映射 $g\colon \Sigma \to \boldsymbol{C}$ 在 $f$ 上的限制可延拓为全纯映射$g\colon \Sigma \to \boldsymbol{C}$，且全曲率由 $C(\Sigma) = -4\pi\deg(g)$给出，其中$\deg(g)$表示 $g\colon \Sigma \to \boldsymbol{C}$的次数。

## 2.2.Osserman 问题及其与高斯映射全分歧值总权重的关系。

设 $f\colon \Sigma = \Sigma_\gamma\setminus\{p_1,\dots,p_n\} \to \boldsymbol{R}^3$ 是一有限全曲率的完备极小浸入，其中 $\Sigma_\gamma$ 表示亏格为 $\gamma$ 的紧黎曼曲面。Osserman 证明了以下结果，并提出了一个关于高斯映射 $g\colon \Sigma \to \boldsymbol{C}$ 的被省略值数量 $D_g$ 的问题。

**事实 2.3** ([Oss64，定理 3。3])。 $\boldsymbol{R}^3$ 中有限全曲率的非平坦完备极小浸入的高斯映射满足 $D_g \leq 3$。

然而，Osserman 的结果是否最优仍未可知。因此，他在书中提出了以下问题，至今仍未解决。

**问题 2.4** ([Oss69，§9])。 是否存在一个有限全曲率的非平坦完备极小浸入于 $\boldsymbol{R}^3$中，并满足 $D_g = 3$?

如果 Osserman 问题的答案是否定的，那么最佳上界是 2，因为例如悬链面满足 $D_g = 2$。此外，Miyaoka 和 Sato [MS94]证明，几乎所有拓扑类型中都存在具有 $D_g = 2$ 的有限全曲率完备极小曲面。如果存在满足 $D_g = 3$的此类浸入，那么（1） $|C$（$\Sigma$）$| \geq 16\pi$ （[WX87], [Fan93]），（2） $\gamma \geq 1$ 且 deg（$g$） $\geq n \geq 3$ （[Oss64]）成立。

另一方面，如果任何有限全曲率完备极小浸入都满足 $\nu_g < 3$，那么 Osserman 问题的答案是否定的，其中 $\nu_g$ 表示高斯映射的全分歧值总权重。如引言中所述，鉴于 Fujimoto 的结果（[Fuj89]），人们曾预期$D_g \leq \nu_g \leq 2$。然而，Kawakami 发现以下例子满足$\nu_g = 2.5 > 2$。

**例 2.5 (**[MS94, 命题 3.1], [Kaw06, 定理 2.1]**).** 设 $\Sigma = \boldsymbol{C} \setminus \{\pm i, \infty\}$，并定义由亚纯函数 $g$和全纯 1-形式 $\omega$ 构成的一对 $(g, \omega)$，其定义在 $\Sigma$ 上:

$$\begin{cases} g = \sigma \dfrac{z^2 + 1 + a(t-1)}{z^2 + t}, \\ \omega = \dfrac{(z^2+t)^2}{(z+i)^2(z-i)^2} dz, \end{cases} \tag{2.7}$$

其中 $a, t \in \boldsymbol{R} \setminus \{1\}$ 和 $\sigma \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ 满足 $(a-1)(t-1) \neq 0$, $a \neq 0$，并且

$$\sigma^2 = \frac{t+3}{a((t-1)a+4)} < 0.$$

于是，这一对 $(g, \omega)$ 给出一族全曲率为 $-8\pi$ 的完备极小浸入。

这一族中的极小浸入的高斯映射 $g : \Sigma \to \boldsymbol{C}$ 有两个被省略值 $g(\infty) = \sigma$ 和 $g(\pm i) = \sigma a$，以及唯一的 2 阶全分歧值$g(0) = \sigma(1 + a(t-1))/t$。因此，这一族中的每个极小浸入的全分歧值总权重为 $\nu_g = 2 + (1 - 1/2) = 2.5$。

[MS94，定理 2] 指出，所有满足 $C(\Sigma) = -8\pi$ 且 $D_g = 2$ 的完备极小浸入 $\boldsymbol{C} \setminus \{3$ 点 $\} \to \boldsymbol{R}^3$ 均由该族给出。

下述事实是关于高斯映射的例外值个数与全分歧值总权重之间的一个估计。

**事实 2.6** ([KKM08，定理 3。3], [KW24，定理 3。9])。 设 $f : \Sigma := \Sigma_\gamma \setminus \overline{\{p_1, \ldots, p_n\}} \to \boldsymbol{R}^3$ 是一个具有有限总曲率的非平坦完备极小浸入， $g : \Sigma \to \boldsymbol{C}$ 为其高斯映射。那么， $g$ 的被省略值个数 $D_g$ 和全分歧值的总权重 $\nu_g$ 满足

$$D_g \leq \nu_g \leq 2 + \frac{2}{R} < 4 \qquad \left( \frac{1}{R} := \frac{\gamma - 1 + (n/2)}{\deg(g)} = \frac{-\chi(\overline{\Sigma}_\gamma) + n}{2\deg(g)} \right), \tag{2.8}$$

其中 $\chi(\overline{\Sigma_\gamma}) = 2 - 2\gamma$ 是 $\Sigma_\gamma$的欧拉示性数。此外，若 $\overline{\gamma} = 0$，即 $\Sigma_0 = \boldsymbol{C}$，则有

$$D_g \leq \nu_g < 3, \tag{2.9}$$

因此 $D_g \leq 2$.

此外，最近，Kawakami 和 Watanabe 构造了以下同样满足 $\nu_g = 2.5 > 2$ 的例子。

**例 2.7** ([KW24，定理 3.7])。设 $\Sigma = \boldsymbol{C} \setminus \{0, \pm i, \infty\}$，并在 $\Sigma$ 上定义一对 $(g,\ \omega)$，其中亚纯函数 $g$ 和全纯 1-形式 $\omega$ 为

$$\begin{cases} g = \sigma \dfrac{(b-a)z^4 + 4a(b-1)z^2 + 4a(b-1)}{(b-a)z^4 + 4(b-1)z^2 + 4(b-1)}, \\ \omega = \dfrac{((b-a)z^4 + 4(b-1)z^2 + 4(b-1))^2}{z^2(z+i)^2(z-i)^2} dz, \end{cases} \tag{2.10}$$

其中 $a,\ b \in \boldsymbol{R} \setminus \{1\}$ 满足 $a \neq b$，且 $\sigma \in i\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ 满足

$$\sigma^2 = \frac{5a + 11b - 16}{16ab - 11a - 5b} < 0. \tag{2.11}$$

于是，这一对 $(g,\ \omega)$ 给出了一族满足 $C(\Sigma) = -16\pi$ 的完备极小浸入。

这一族极小浸入的高斯映射 $g : \Sigma \to \boldsymbol{C}$ 有两个遗漏值 $g(\infty) = g(\pm i) = \sigma$ 和 $g(0) = \sigma a$，以及一个阶为 2 的唯一全分歧值 $g(\pm\sqrt{2}i) = \sigma b$。因此，这一族中的每个极小浸入的全分歧值总权重为 $\nu_g = 2 + (1 - 1/2) = 2.5$。

迄今为止，仅已知上述两个具有 $\nu_g = 2.5 > 2$ 的有限全曲率完备极小浸入例子。此外，例 2.5 和 2.7 中的各族在 $\gamma = 0,\ n = 3$ 且 $\deg(g) = 2$ 时，以及在 $\gamma = 0,\ n = 4$ 且 $\deg(g) = 4$ 时，对（2.8）给出了精确估计。因此，本文讨论是否存在与这两个例子具有相同拓扑类型的其他例子（见问题 1.3）。

## 3. Some Estimates for orders and total weight of totally ramified values of meromorphic functions on punctured Riemann surfaces

本节讨论穿孔紧黎曼曲面上亚纯函数的全分歧值阶的估计，以便将其应用于亚纯函数的构造。

**命题 3.1.** 设 $\Sigma$ 是一紧黎曼曲面，且 $p_1, \ldots, p_n \in \Sigma (n \in \boldsymbol{Z}_{\geq 0})$。设 $g : \Sigma \setminus \{p_1, \ldots, p_n\} \to \boldsymbol{C}$ 是一亚纯函数。假设函数 $g$ 可亚纯地延拓到 $\Sigma$，即 $g : \Sigma \to \boldsymbol{C}$ 是紧黎曼曲面之间的全纯映射，并设 $d := \deg(g) \geq 2$。令 $\mathcal{TR}_g := \{a_1, \ldots, a_{D_g}, b_1, \ldots, b_{R_g}\} \subset \boldsymbol{C}$ 为 $g$ 的全分歧值集合，其中 $a_k (k = 1, \ldots, D_g)$ 和 $b_j (j = 1, \ldots, R_g)$ 分别表示被省略值以及除被省略值外的全分歧值（见定义

*1.1*）。那么，除被省略值外的全分歧值的阶数和满足

$$2R_g \le S_g \le \left\lfloor \frac{d}{d-1} B_g \right\rfloor, \tag{3.1}$$

其中

$$S_g \coloneqq \sum_{j=1}^{R_g} \nu(b_j), \qquad B_g \coloneqq \sum_{p \in \overline{\Sigma}} (e_p - 1) = -\chi(\overline{\Sigma}) + 2d, \tag{3.2}$$

$e_p$ 是 $g$ 在 $p$处的重数， $\nu(b_j)$ 是 $b_j$(见定义*1.1*)处一个全分歧值的阶，而 $\chi(\Sigma)$ 是 $\Sigma$的欧拉示性数。

在命题 3.1 的记号和假设下，我们来证明以下两个引理。

**引理 3.2**。令 $b \in \mathcal{TR}_g \setminus \{a_1, \dots, a_{D_g}\}$，并设 $\nu_b \coloneqq \nu(b)$。则有

$$\sum_{p \in g^{-1}(b)} (e_p - 1) \ge c(\nu_b) \qquad \left( c(\nu) \coloneqq d - \left\lfloor \frac{d}{\nu} \right\rfloor \ (\nu \in \boldsymbol{Z}_{\ge 2}) \right). \tag{3.3}$$

证明。根据阶 $\nu\colon \mathcal{TR}_g \to \boldsymbol{Z}_{\ge 2} \cup \{\infty\}$的定义，我们有 $e_p \ge \nu_b$。令$m \in \boldsymbol{Z}_{\ge 1}$ 为 $g^{-1}$（$b$）的基数。由于

$$d = \sum_{p \in g^{-1}(b)} e_p \ge \sum_{p \in g^{-1}(b)} \nu_b = m\nu_b,$$

且 $m$ 是一个整数，我们有 $m \le \lfloor d/\nu_b \rfloor$。因此，我们得到

$$\sum_{p \in g^{-1}(b)} (e_p - 1) = d - m \ge d - \left\lfloor \frac{d}{\nu_b} \right\rfloor = c(\nu_b).$$

□

**引理 3.3.** 设 $b \in \mathcal{TR}_g \setminus \{a_1, \dots, a_{D_g}\}$，并令 $\nu_b = \nu(b)$。则有

$$\nu_b \le \frac{d}{d-1} c(\nu_b). \tag{3.4}$$

证明。由 $\lfloor d/\nu_b \rfloor \le d/\nu_b$ 和 $c(\nu_b)$的定义可知

$$c(\nu_b) \ge d - \frac{d}{\nu_b} = \frac{d(\nu_b - 1)}{\nu_b},$$

因此

$$\frac{d}{d-1} c(\nu_b) \ge \frac{d^2(\nu_b - 1)}{(d-1)\nu_b}. \tag{3.5}$$

由于 $2 \le \nu_b \le d$，我们有

$$\begin{aligned} d^2(\nu_b - 1) - (d-1)\nu_b^2 = -(\nu_b - d)((d-1)\nu_b - d) &\ge -(\nu_b - d)((d-1)\cdot 2 - d) \\ &= (d - \nu_b)(d-2) \ge 0. \end{aligned}$$

因此，我们知道

$$\frac{d^2(\nu_b - 1)}{(d-1)\nu_b} \ge \nu_b,$$

由（3.5）即可得到结论。 □

命题 *3.1* 的证明。 （3.1）中的第一个不等式由 $\nu(b_j) \geq 2$ 得出。下面证明（3.1）中的第二个不等式。根据引理 3.2,

$$\sum_{j=1}^{R_g} c(\nu(b_j)) \leq \sum_{j=1}^{R_g} \sum_{p \in g^{-1}(b_j)} (e_p - 1) = \sum_{p \in \bigsqcup_{j=1}^{R_g} g^{-1}(b_j)} (e_p - 1) \leq \sum_{p \in \overline{\Sigma}} (e_p - 1) = B_g.$$

由此不等式和引理 3.3 可得

$$S_g = \sum_{j=1}^{R_g} \nu(b_j) \leq \frac{d}{d-1} \sum_{j=1}^{R_g} c(\nu(b_j)) \leq \frac{d}{d-1} B_g,$$

这就推出了结论。 □

作为命题 3.1 的推论，可以很容易地推出以下断言。**推论3.4**。 若 $\Sigma = \boldsymbol{C}$ 满足命题 *3.1* 中的条件，则有

$$2R_g \leq S_g \leq 2d. \tag{3.6}$$

不等式 (3.1)，尤其是 (3.6)，在以下意义下是尖锐的。设亚纯函数 $g$ : $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ 为 $g(z) = z^d$ $(d \geq 2)$，且满足这些不等式。事实上，该 $g$ 有两个全分歧值 0 和 $\infty$，次数为 $d$。因此，我们看到 $\nu(0) + \nu(\infty) = d + d = 2d$。此外，对于亚纯函数的全分歧值总权重，我们得到以下估计。

**推论3.5**。 在与命题 *3.1* 相同的假设和记号下，亚纯函数 $g$ 的全分歧值总权重满足

$$\nu_g \leq D_g + \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{d}{d-1} B_g \right\rfloor. \tag{3.7}$$

证明。 根据 $\nu_g$ 的定义和命题 3.1，我们有

$$\begin{aligned} \nu_g = D_g + R_g - \sum_{j=1}^{R_g} \frac{1}{\nu(b_j)} &\leq D_g + R_g - \frac{R_g^2}{S_g} \leq D_g + \frac{S_g}{4} \\ &\leq D_g + \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{d}{d-1} B_g \right\rfloor. \end{aligned}$$

事实上，第一个不等式由柯西–施瓦茨不等式得出。第二个不等式由 $R_g - R_g^2/S_g \leq S_g/4$ 得到，因为 $0 \leq R_g \leq S_g/2$。□

**推论 3.6**。 在推论*3.5*中，若 $\Sigma = \boldsymbol{C}$ 且 $d \leq 4$，则不存在满足 $\nu_g > 2$的满射亚纯函数$g$（即 $D_g = 0$）。此外，若 $\Sigma = \boldsymbol{C}$ 且$d = 2$，则不存在满足 $\nu_g > 2$且具有 $D_g \leq 1$ 的亚纯函数。

证明。 假设存在这样一个亚纯函数 $g$。那么， $\Sigma = \boldsymbol{C}$， $d \leq 4$， $D_g = 0$和（3.7）可推出

$$\nu_g \leq \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{d}{d-1} \cdot (-2 + 2d) \right\rfloor = \frac{1}{2} d \leq 2,$$

这就产生了矛盾。

接下来，我们证明后半部分。如果存在这样的亚纯函数，那么根据 $d = 2$ 和 $D_g \leq 1$，我们可知

$$\nu_g \leq 1 + \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{2}{2-1} \cdot (-2 + 2 \cdot 2) \right\rfloor = 2,$$

这同样会导致矛盾，由此得出结论。 □

利用该推论的后半部分以及例 2.5 中陈述的事实，我们得到以下推论，它回答了问题 1.3 中的（1）。

**推论3.7.** 具有总曲率 $-8\pi$ 的完备极小浸入 $\boldsymbol{C}\setminus\{3\text{点}\}\to\boldsymbol{R}^3$，其高斯映射的全分歧值总权重满足 $\nu_g=2.5$，由例 *2.5* 中的族给出。

在本节末尾，我们给出一个估计，用于估计定义在挖去有限个点的黎曼曲面上的亚纯函数的全分歧值（被省略值除外）个数 $R_g$。

**推论 3.8.** 在与命题 *3.1* 相同的假设和记号下，亚纯函数 $g$ 的全分歧值（被省略值除外）个数 $R_g$ 满足

$$R_g\le\left\lfloor\frac{B_g}{\lceil d/2\rceil}\right\rfloor. \tag{3.8}$$

证明. 令 $b_j\in\mathcal{TR}_g\setminus\{a_1,\dots,a_{D_g}\}$ $(j=1,\dots R_g)$。由于 (3.3) 中的 $c(\nu)$ 单调递增，且其最小值为 $c(2)=d-\lfloor d/2\rfloor=\lceil d/2\rceil$，由引理 3.2 可得

$$B_g\ge\sum_{j=1}^{R_g}\sum_{p\in g^{-1}(b_j)}(e_p-1)\ge\sum_{j=1}^{R_g}c(\nu(b_j))\ge\sum_{j=1}^{R_g}c(2)=R_g\left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil,$$

这就得出了结论。 □

## 4. Complete minimal surfaces on four-punctured Riemann spheres with $C(\Sigma)=-16\pi$ and $\nu_g=2.5$

本节中，我们考虑总曲率为 $-16\pi$、高斯映射的全分歧值总权重为 $\nu_g=2.5$ 的完备极小浸入 $\boldsymbol{C}\setminus\{4\text{点}\}\to\boldsymbol{R}^3$。

考虑满足这些条件的完备极小浸入 $f\colon\ \Sigma:=\boldsymbol{C}\setminus\{4\text{点}\}\to\boldsymbol{R}^3$。对源黎曼曲面 $\Sigma$作坐标变换后，不妨设$\Sigma=\boldsymbol{C}\setminus\{\infty,\pm i,t\}$ $(t\in\boldsymbol{C}\setminus\{\infty,\pm i\})$。在 $\boldsymbol{R}^3$中作适当旋转后，还可假设 $g$ 在每个端点处都没有极点。此外，由于 $\deg(g)=4$，根据黎曼–赫尔维茨公式可得

$$B_g=6. \tag{4.1}$$

令 $\mathcal{TR}_g=\{a_1,\dots,a_{D_g},b_1,\dots,b_{R_g}\}\subset\overline{\boldsymbol{C}}$为高斯映射 $g$的全分歧值集合，其中 $a_k$ $(k=1,\dots,D_g)$和 $b_j$ $(j=1,\dots,R_g)$分别表示被省略值以及除被省略值外的全分歧值。根据推论3.8，数值 $R_g$ 满足

$$R_g\le 3. \tag{4.2}$$

此外，根据推论3.4，注意到

$$2R_g\le\sum_{j=1}^{R_g}\nu_j\le 8, \tag{4.3}$$

其中 $\nu_j:=\nu(b_j)$ $(j=1,\dots,R_g)$。

**4.1. 当 $D_g = 2$ 时。**在这种情况下，高斯映射的全分歧值的总权重为 $\nu_g$

$$\nu_g = 2 + \sum_{j=1}^{R_g} \left(1 - \frac{1}{\nu(b_j)}\right).$$

若 $R_g \geq 2$，则 $\nu_g$ 满足

$$\nu_g = (2 + R_g) - \sum_{j=1}^{R_g} \frac{1}{\nu(b_j)} \geq (2 + R_g) - \frac{1}{2} R_g = 2 + \frac{1}{2} R_g \geq 3 > 2.5,$$

这是一个矛盾。因此，由于我们看到 $R_g = 1$，令 $\mathcal{TR}_g = \{\sigma, \tau, b\}$，其中$\sigma$，$\tau \in \boldsymbol{C} \setminus \{\infty\} = \boldsymbol{C}$ 为遗漏值，且 $b \in \boldsymbol{C}$ 为唯一全分歧值，它们彼此互异。此外，由于 $\deg(g) = 4$ 且 $\nu_g = 2.5$，我们可以令$g^{-1}(b) = \{q_1, q_2\}$，其中 $q_1$，$q_2 \in \boldsymbol{C}$ 为互异的值，它们满足

$$\operatorname{ord}_{q_l}(g - b) = 2 \qquad (l = 1, 2), \tag{4.4}$$

从而全分歧值 $b$ 的阶为 $\nu(b) = 2$。

这里，令一个M¨obius变换 $\Phi$： $\boldsymbol{C} \to \overline{\boldsymbol{C}}$ 由下式定义

$$\Phi(w) \coloneqq \frac{\tau - b}{\tau - \sigma} \cdot \frac{w - \sigma}{w - b}, \tag{4.5}$$

其满足

$$\Phi(\sigma) = 0, \qquad \Phi(\tau) = 1, \qquad \Phi(b) = \infty.$$

现在，令

$$G \coloneqq \Phi \circ g : \overline{\boldsymbol{C}} \setminus \{\infty, \pm i, t\} \to \overline{\boldsymbol{C}}. \tag{4.6}$$

于是，亚纯函数 $G$ 遗漏值 $\{0, 1\}$，并且有一个全分歧值 $\infty$。由于高斯映射 $g$ 在任一端点处都没有极点，函数 $G$ 在端点处没有极点。此外，由于 $\deg(g) = \deg(G) = 4$ 且 $g^{-1}(b) = \{q_1, q_2\}$ 满足（4.4），我们有

$$G^{-1}(\infty) = \{q_1, q_2\}, \qquad \operatorname{ord}_{q_l} G = -2, \qquad \{q_1, q_2\} \cap \{\infty, \pm i, t\} = \varnothing. \tag{4.7}$$

因此，$G$ 和 $G - 1$ 的所有零点都出现在端点处。

接下来，我们对 $G$ 的被省略值 0 和 1 在各端点处的分配及其重数进行分类。为简便起见，我们记作

$$0 : [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]$$

表示 $G$ 在端点处的 0 的重数分别为 $\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$，以及 $\lambda_4$（无特定顺序）。同样地，

$$1 : [\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4]$$

对于 $G$ 的 1；换言之，每个 $\mu_m (m = 1, 2, 3, 4)$ 都是 $G - 1$ 在某个端点处的零点阶数。我们始终假设 $\lambda_m$，$\mu_m \in \boldsymbol{Z}_{\geq 0}$，于是

$$\sum_{m=1}^{4} \lambda_m = \sum_{m=1}^{4} \mu_m = \deg(G) = 4$$

成立。条目 $\lambda_m = 0$（分别为 $\mu_m = 0$）表示相应的端点不包含在 0（分别为 1）的纤维中，这是由 $G$ 所致；为方便起见，括号记号中省略了零项。此外，记号 $G(p) = q^{(k)}$ 表示 $\operatorname{ord}_p(G - q) = k \in \boldsymbol{Z}_{\geq 1}$，而 $G(p) = \infty^{(k)}$ 表示 $\operatorname{ord}_p G = -k \in \boldsymbol{Z}_{< 0}$。

在这些记号下，我们必须考虑以下四种情形：

$$\textbf{Case 1}\colon\ 0:[4],\quad 1:[2,1,1],\qquad \textbf{Case 2}\colon\ 0:[3,1],\quad 1:[3,1],$$
$$\textbf{Case 3}\colon\ 0:[3,1],\quad 1:[2,2],\qquad \textbf{Case 4}\colon\ 0:[2,2],\quad 1:[2,2].$$

考虑全分歧值后，我们将证明上述情形可归结为仅有三种情形。首先证明，若存在一个亚纯函数满足上述**情形 1** 至**情形 4** 中的某一种，则源黎曼曲面的结构基本上可确定如下。

**引理 4.1.** 设 $E:=\{\infty,\pm i,t\}$，且 $G\colon \Sigma=\boldsymbol{C}\setminus E\to\overline{\boldsymbol{C}}$ 是一个亚纯函数。假设亚纯函数 $G$ 可亚纯地延拓至 $\boldsymbol{C}$，次数 $G=4$，$G(\boldsymbol{C}\setminus E)=\boldsymbol{C}\setminus\{0,1\}$，$\infty$ 是 $G$ 除被省略值 0 和1之外的唯一全分歧值，且满足(4.7)。

*(1)* 若 $G$ 满足**情形 1**的条件，则源黎曼曲面 $\Sigma$与 $\boldsymbol{C}\setminus\{\infty,\pm i,0\}$双全纯。*(2)* 若 $G$ 满足**情形 2**的条件，则 $\Sigma$ 与 $\boldsymbol{C}\setminus\{\infty,\pm i,-17i\}$双全纯。*(3)* 不存在满足**情形 3**条件的亚纯函数 $G$。*(4)* 若 $G$ 满足**情形 4**的条件，则源黎曼曲面 $\Sigma$ 与 $\boldsymbol{C}\setminus\{\infty,\pm i,0\}$双全纯。

—

证明。 注意 $G$ 满足 $B_G=6$。假设这样的亚纯函数 $G$满足每种情形中的条件。 我们将 $z_1,z_2,z_3,z_4\in\boldsymbol{C}$的交比记为

$$[z_1,z_2;z_3,z_4]:=\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\cdot\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}.$$

(1) 注意 $G^{-1}(0)\subset E$ 由一点组成。设 $\varphi_1:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$ 为满足 $\varphi_1(q_1)=0,\varphi_1(q_2)=\infty$，$\varphi_1(G^{-1}(0))=\{1\}$ 的 M¨obius 变换，并令$\widetilde{G}:=G\circ\varphi_1^{-1}$。则 **情形 1** 中的条件给出

$$\widetilde{G}=C\frac{(z-1)^4}{z^2}\qquad(C\neq 0).$$

~由于方程 $G-1=0$ 在某点 $z_0\neq 0,1,\infty$处有一个二重解以及两个单解，由 $(\widetilde{G}-1)'(z_0)=2C(z_0-1)^3(z_0+1)/z_0^3$，鉴于 $z_0\neq 1$，可见$z_0=-1$。由于 $G(-1)=1$，我们有 $C=1/16$，从而

$$\widetilde{G}=\left(\frac{(z-1)^2}{4z}\right)^2.$$

接下来，我们来确定 $\varphi_1(E)$。通过直接计算可知 $\widetilde{G}^{-1}(1)=\{-1,\lambda,1/\lambda\}$，其中 $\lambda=3+2\sqrt{2}$，因此 $\varphi_1(E)=\{\pm 1,\lambda,1/\lambda\}$。由于$[\lambda,1/\lambda;1,-1]=-1=[\infty,0;i,-i]$，存在一个 Möbius 变换 $\varphi_2:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$，使得 $\varphi_2(\varphi_1(E))=\{\infty,\pm i,0\}$。因此，将映射 $\varphi_2\circ\varphi_1$ 限制到 $\boldsymbol{C}\setminus E$，便得到一个从 $\boldsymbol{C}\setminus E$ 到 $\boldsymbol{C}\setminus\{\infty,\pm i,0\}$ 的双全纯映射。

(2) 令 $G^{-1}(0)=\{r_1,r_2\}\subset E$，并且不妨设 $G(r_1)=0^{(3)}$。取一个莫比乌斯变换 $\varphi_1:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$，使其满足 $\varphi_1(q_1)=0$，$\varphi_1(q_2)=\infty$，$\varphi_1(r_1)=1$，并令 $a:=\varphi_1(r_2)(\neq 0,\ 1,\ \infty)$ 和 $\widetilde{G}=G\circ\varphi_1^{-1}$。于是，我们可以将 $\widetilde{G}$设为

$$\widetilde{G}=C\frac{(z-1)^3(z-a)}{z^2}\qquad(C\neq 0).$$

由于多项式 $C(z-1)^3(z-a)-z^2$，即 $\widetilde{G}-1\widetilde{\quad}\quad\widetilde{\quad}$ 的分子，在某个 $z_0\neq 0$, 1, $a$ 处有一个三重根，因此方程 $(G-1)'=G'=0$ 在 $z_0$ 处有一个二重解。

$$\widetilde{G}'=\frac{2z^2+(1-a)z-2a}{z(z-1)(z-a)}\widetilde{G} \tag{4.8}$$

且 $G(z_0)\neq 0$ 意味着，由于多项式 $2z^2+(1-a)z-2a$ 在 $z_0$ 处有一个二重根，因此有

$$\begin{cases} 1-a=-4z_0, \\ -a=z_0^2, \end{cases}$$

因此可以观察到，$a=-z_0^2$ 和 $z_0$ 满足 $z_0^2+4z_0+1=0$。另一方面，设 $z_1(\neq z_0,0,1,a)$ 是 $C(z-1)^3(z-a)-z^2$ 的一个单根。于是，根据韦达定理，有 $z_0\cdot z_0\cdot z_0\cdot z_1=(Ca)/C=a$，并且我们知道 $z_1=-1/z_0$。因此，有 $\varphi_1(E)=\{1,z_0,-z_0^2,-1/z_0\}$.

利用 $z_0^2+4z_0+1=0$，可知 $[1,-z_0^2;\ z_0,\ -1/z_0]=9=[\infty,i;\ -i,\ -17i]$。因此，存在一个 M¨obius 变换 $\varphi_2\colon\ \boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$，使得 $\varphi_2(\varphi_1(E))=\{\infty,\pm i,-17i\}$，从而将映射 $\varphi_2\circ\varphi_1$ 限制在 $\boldsymbol{C}\setminus E$ 上，便得到 $\boldsymbol{C}\setminus E$ 与 $\boldsymbol{C}\setminus\{\infty,\pm i,-17i\}$之间的双全纯映射。

(3) 我们用 $G^{-1}(0)=\{r_1,r_2\}\subset E$ 表示 $G(r_1)=0^{(3)}$。按照与 (2) 相同的莫比乌斯变换 ¨和记号 $\varphi_1$，我们设 $\widetilde{G}:=G\circ\varphi_1^{-1}$，于是这个 $\widetilde{G}$ 可写为

$$\widetilde{G}=C\frac{(z-1)^3(z-a)}{z^2}\qquad(C\neq 0)。$$

令 $\xi$和 $\eta$表示多项式 $P_1(z):=2z^2+(1-a)z-2a$ 的根（见 (4.8)）。由于它们是 $P_1$ 和 $P_2(z):=C(z-1)^3(z-a)-z^2$ 的二重根，而后者是 $\widetilde{G}$ 的分子，对 $P_2$ 和 $P_1$ 应用韦达定理，分别得到 $\xi+\xi+\eta+\eta=2(\xi+\eta)=a+3$ 和 $\xi+\eta=(1/2)(a-1)$。这两个方程推出 $a-1=a+3$，与假设矛盾，故断言成立。

(4) 令 $G^{-1}(0)=\{p_1,p_2\}\subset E$，它满足 $G(p_1)=G(p_2)=0^{(2)}$。取一个莫比乌斯变换 $\varphi_1\colon\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$，使得 $\varphi_1(q_1)=0$，$\varphi_1(q_2)=\infty$，$\varphi_1(p_1)=r_1$，其中 $r_1\neq 0$，并令 $r_2:=\varphi_1(p_2)$。于是，我们可以写成 $(G\circ\varphi_1^{-1})=H(z)^2$，其中

$$H(z):=\sqrt{C}\ \frac{(z-r_1)(z-r_2)}{z}\qquad(C\neq 0).$$

令 $(G\circ\varphi_1^{-1})^{-1}(1)=\{y_1,y_2\}\subset\varphi_1(E)$，我们知道 $(G\circ\varphi_1^{-1})(y_j)=H(y_j)^2=1$ 且 $(G\circ\varphi_1^{-1})'(y_j)=0$ $(j=1,2)$。由于 $(G\circ\varphi_1^{-1})'(y_j)=2H(y_j)H'(y_j)$，$H(y_j)\neq 0$，且 $H'(z)=\sqrt{c}(z^2-r_1r_2)/z^2$，所以有 $\{y_1,y_2\}=\{\pm\sqrt{r_1r_2}\}$。根据 $H(\pm\sqrt{r_1r_2})=\pm\sqrt{c}(2\sqrt{r_1r_2}\mp(r_1+r_2))$，其中符号一一对应，且 $H(\pm\sqrt{r_1r_2})\in\{\pm 1\}$，可得 $H(\sqrt{r_1r_2})+H(-\sqrt{r_1r_2})=-2\sqrt{c}(r_1+r_2)=0$。因此，可见 $r_2=-r_1$，从而

$$G\circ\varphi_1^{-1}=\left(\sqrt{C}\ \frac{z^2-r_1^2}{z}\right)^2.$$

通过变换坐标 $z=\psi_1(w)=r_1w$，我们设

$$\widetilde{G}(w):=(G\circ\varphi_1^{-1})(\psi_1(w))=K\frac{(w^2-1)^2}{w^2}\qquad(K:=Cr_1^4).$$

多项式 $K(w^2-1)^2-w^2=Kw^4-(2K+1)w^2+K$，即 $G-1$ 的分子，具有两个非零二重根。设 $w^2=X$，则 $KX^2-(2K+1)X+K$ 必须有一个非零二重根。该多项式的判别式 $(2K+1)^2-4K^2=4K+1$ 必须为 0，即 $K=-1/4$. 因此，$G$ 可写为

$$\widetilde{G}=-\frac{(w^2-1)^2}{4w^2},$$

其满足 $\widetilde{G}^{-1}(1)=\{\pm i\}$，因此 $(\psi_1^{-1}\circ\varphi_1)^{-1}(E)=\{\pm 1,\pm i\}$。直接计算得 $[1,-1;\ i,\ -i]=-1=[\infty,0;\ i,\ -i]$，上述论证表明，存在一个双全纯映射 $\rho:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$ 使得 $\rho(E)=\{\infty,\pm i,0\}$，从而得到所述结论。

□

我们考虑**情形 1** 并确定亚纯函数 $G$ 的形式：$\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$。首先，我们准备一个引理。

**引理 4.2**。设 $\{p_0,p_1,s_1,s_2\}\subset\boldsymbol{C}$ 为互异点。假设存在一个亚纯函数 $G:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$，使得 $\deg G=4$，并且满足以下条件：

*(1)* $G^{-1}(0)=\{p_0\}$，且 $G^{-1}(1)=\{p_1,s_1,s_2\}$，*(2)* $G(p_0)=0^{(4)}$，$G(p_1)=1^{(2)}$，且 $G(s_1)=G(s_2)=1^{(1)}$，*(3)* 值 $\infty$ 是唯一全分歧值，且 $G(q_1)=G(q_2)=\infty^{(2)}$，其中 $G^{-1}(\infty)=\{q_1,q_2\}$。

则必有 $[p_0,p_1;\ s_1,\ s_2]=-1$。

证明。设 $\varphi:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$ 为满足 $\varphi(p_0)=\infty$ 与 $\varphi(p_1)=0$ 的 Möbius 变换，并令 $\widetilde{G}:=G\circ\varphi^{-1}$。设 $\widetilde{s}_1:=\varphi(s_1)$ $\widetilde{s}_2:=\varphi(s_2)$ $\alpha:=\varphi(q_1)$, 且 $\beta:=\varphi(q_2)$ ($\alpha\neq\beta$). 我们只需证明 $[p_0,p_1;\ s_1,s_2]=[\infty,0;\ \widetilde{s}_1,\widetilde{s}_2]=-1$，从而可以令

$$\widetilde{G}=\frac{1}{P(z)}\qquad(P(z):=C(z-\alpha)^2(z-\beta)^2,\quad C\neq 0).$$

由于 $(G-1)'(0)=G'(0)=0$，根据

$$P'(z)=\left(\frac{2}{z-\alpha}+\frac{2}{z-\beta}\right)P(z),$$

我们有 $\beta=-\alpha$，且 $\widetilde{G}(0)=1$ 得出 $C=1/\alpha^4$。因此，我们可以设 $P(z)=(kz^2-1)^2$，其中 $k:=1/\alpha^2$。通过求解一个方程 $G=1$，可以观察到 $\{\widetilde{s}_1,\widetilde{s}_2\}=\{\xi,-\xi\}$ 对某个 $\xi\neq 0$ 成立。因此，我们得到 $[\infty,0;\ \widetilde{s}_1,\ \widetilde{s}_2]=-1$，证明完毕。□

我们来构造亚纯函数 $G$。不失一般性，由引理 4.1 中的 (1)，可令 $\Sigma=\boldsymbol{C}\setminus\{\infty,\pm i,0\}$，并假设通过固定集合 $\{\infty,\pm i,0\}$ 的坐标变换，$G(\infty)=0^{(4)}$。那么，其他端点处 $G$ 的可能取值及重数如下：(i) $G(0)=1^{(2)}$，且 $G(i)=G(-i)=1^{(1)}$；或 (ii) $G(i)=1^{(2)}$，且 $G(-i)=G(0)=1^{(1)}$；或 (iii) $G(-i)=1^{(2)}$，且 $G(0)=G(i)=1^{(1)}$。另一方面，分别计算 (i) 至 (iii) 各种情形下的交比，可知 (i) $[\infty,0;\ i,\ -i]=-1$，(ii) $[\infty,i;\ -i,\ 0]=1/2$，以及 (iii) $[\infty,-i;\ 0,\ i]=2$。根据引理 4.2，情形 (ii) 和 (iii) 不可能。因此，我们只需考虑情形 (i)。

回顾 (4.7) 及其中的论证，我们可以设

$$G(z)=\frac{N(z)}{P(z)^2}, \tag{4.9}$$

其中 $N$ 和 $P$ 是多项式函数。记

$$P(z)\coloneqq z^2-s_1z+s_2 \qquad (s_1\coloneqq q_1+q_2,\quad s_2\coloneqq q_1q_2),$$

满足 $P(q_j)=0, P'(q_j)\neq 0\,(j=1,2)$，且 $P''\equiv 2$。接下来，我们将确定 $N, s_1$和 $s_2$。

由于 $G(\infty)=0^{(4)}$，我们可以设

$$G=\frac{\lambda}{P(z)^2} \qquad (\lambda\in \boldsymbol{C}\setminus\{0\}).$$

条件 $(G-1)(0)=(G-1)(\pm i)=0$ 以及 $G(0)=1^{(2)}$ 意味着

$$(G-1)(0)=\frac{\lambda-P(0)^2}{P(0)^2}=0, \qquad (G-1)(\pm i)=\frac{\lambda-P(\pm i)^2}{P(\pm i)^2}=0,$$
$$(G-1)'(0)=-\frac{2\lambda P'(0)}{P(0)^3}=0.$$

第三个方程给出 $s_1=0.$。反过来，第一个和第二个方程给出 $\lambda=P(0)^2=s_2^2=P(\pm i)^2$。注意，$P(i)=-1+s_2=P(-i)$。因此，$P(0)^2=P(i)^2$给出 $s_2=1/2$ 和 $\lambda=1/4$。据此，我们得到

$$G=\frac{1}{(2z^2+1)^2}. \tag{4.10}$$

接下来，我们用与**情形 2** 相同的方法来研究**情形 1**。

**引理 4.3.** 设 $\{p_3,p_1,s_3,s_1\}\subset \boldsymbol{C}$ 为互异点，并假设亚纯函数 $G\colon \boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$ 满足$\deg G=4$，且满足以下条件:
*(1)* $G^{-1}(0)=\{p_3,p_1\}$，且 $G^{-1}(1)=\{s_3,s_1\}$; *(2)* $G(p_3)=0^{(3)}$，$G(p_1)=0^{(1)}$，$G(s_3)=1^{(3)}$，且 $G(s_1)=1^{(1)}$; *(3)* 值 $\infty$ 是唯一全分歧值，且 $G(q_1)=G(q_2)=\infty^{(2)}$，其中 $G^{-1}(\infty)=\{q_1,q_2\}$。

那么，必有 $[p_3,p_1;\ s_3,s_1]=9$。

证明。设 $\varphi\colon \overline{\boldsymbol{C}}\to\overline{\boldsymbol{C}}$ 为满足 $\varphi(q_1)=0,\varphi(q_2)=\infty$，且 $\varphi(p_3)=1$的莫比乌斯变换，并令 $\widetilde{G}\coloneqq G\circ\varphi^{-1}$。设 $a\coloneqq\varphi(p_1)$ $w_3\coloneqq\varphi(s_3)$,且 $w_1\coloneqq\varphi(s_1)$。由于 $[p_3,p_1;\ s_3,s_1]=[1,a;w_3,w_1]$，我们只需证明 $[1,a;\ w_3,w_1]=9$。根据假设，我们可以设

$$\widetilde{G}=K\frac{(z-1)^3(z-a)}{z^2} \qquad (K\neq 0).$$

条件 $\widetilde{G}(w_3)=1^{(3)}$ 推出 $(\widetilde{G}-1)'(w_3)=\widetilde{G}'(w_3)=0^{(2)}$。由于

$$\widetilde{G}'=\frac{2z^2+(1-a)z-2a}{z(z-1)(z-a)}\,\widetilde{G},$$

点 $w_3$ 是多项式 $2z^2+(1-a)z-2a$ 的二重根，这是由于$\widetilde{G}(w_3)\neq 0$。因此，点 $w_3$和 $a$满足 $(1-a)^2-4\cdot 2\cdot(-2a)=a^2+14a+1=0$以及 $w_3=(a-1)/4$。

此外，对多项式 $K(z-1)^3(z-a)-z^2$应用韦达定理，其中~是 $G-1$的分子，可得 $w_1=(a+15)/4.$。因此，注意到 $a^2=-14a-1$，我们得到如下结论：

$$[p_3,p_1;s_3,s_1]=[1,a;w_3,w_1]=\frac{3(a^2-10a+25)}{3a^2+34a+11}=\frac{72(1-a)}{8(1-a)}=9.$$

□

我们来确定满足**情形 2**中条件的亚纯函数 $G$ 的形式。由引理 4.1 中的 (2)，可令 $\Sigma=\boldsymbol{C}\setminus\{\infty,\pm i,-17i\}$，并假设$G(\infty)=0^{(3)}$。于是，其他端点处 $G$ 可能取的值及其重数有以下 6 种情形：

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && G(i)=0^{(1)}, \quad G(-i)=1^{(3)}, \quad \text{and} \quad G(-17i)=1^{(1)}\\
\text{or }&\text{(ii)} && G(i)=0^{(1)}, \quad G(-17i)=1^{(3)}, \quad \text{and} \quad G(-i)=1^{(1)}\\
\text{or }&\text{(iii)} && G(-i)=0^{(1)}, \quad G(i)=1^{(3)}, \quad \text{and} \quad G(-17i)=1^{(1)}\\
\text{or }&\text{(iv)} && G(-i)=0^{(1)}, \quad G(-17i)=1^{(3)}, \quad \text{and} \quad G(i)=1^{(1)}\\
\text{or }&\text{(v)} && G(-17i)=0^{(1)}, \quad G(i)=1^{(3)}, \quad \text{and} \quad G(-i)=1^{(1)}\\
\text{or }&\text{(vi)} && G(-17i)=0^{(1)}, \quad G(-i)=1^{(3)}, \quad \text{and} \quad G(i)=1^{(1)}.
\end{aligned}$$

(i) 至 (vi) 各情形中的交比分别为 (i) $[\infty,i;-i,-17i]=9$，(ii)$[\infty,i;-17i,-i]=1/9$，(iii) $[\infty,-i;i,-17i]=-8$，(iv) $[\infty,-i;-17i,i]=-1/8$，(v)$[\infty,-17i;i,-i]=8/9$，以及 (vi) $[\infty,-17i;-i,i]=9/8$。由引理 4.3 可知，(ii) 至 (vi) 这些情形不可能成立。因此，我们只需考虑情形 (i)。

我们采用与 (4.9) 相同的记号，并令

$$F(z)\coloneqq N(z)-P(z)^2.$$

由于 $G(\infty)=0^{(3)}$ 且 $G(i)=0^{(1)}$，我们可以设

$$G=\frac{\lambda(z-i)}{P(z)^2}\qquad(\lambda\neq 0).$$

此外，由于 $G(-i)=1^{(3)}$，我们得到 $F(-i)=F'(-i)=F''(-i)=0$，这些等价于

$$P(-i)^2=-2i\lambda,\qquad \lambda=2P(-i)P'(-i),\qquad 2P(-i)=-P'(-i)^2.$$

这些方程意味着

$$\lambda=512i,\qquad s_1=-10i,\qquad s_2=23,$$

因此我们得到

$$G=\frac{512i(z-i)}{(z^2+10iz+23)^2},\tag{4.11}$$

它满足 $G(-17i)=1^{(1)}$。

最后，我们来考虑**情形 4**。

**引理 4.4.** 设 $\{p_1,p_2,s_1,s_2\}\subset\boldsymbol{C}$ 为互异点，并假设亚纯函数 $G:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$ 满足 $\deg G=4$，以及以下条件：

(1) $G^{-1}(0)=\{p_1,p_2\}$，以及 $G^{-1}(1)=\{s_1,s_2\}$，(2) $G(p_1)=G(p_2)=0^{(2)}$，以及 $G(s_1)=G(s_2)=1^{(2)}$，

(3) 值 $\infty$ 是唯一全分歧值，而 $G(q_1) = G(q_2) = \infty^{(2)}$，其中 $G^{-1}(\infty) = \{q_1, q_2\}$。

因此，必有 $[p_1, p_2;\ s_1, s_2] = -1$。

证明。设 $\varphi : \boldsymbol{C}\overline{\to} \boldsymbol{C}$ 为满足 $\varphi(q_1) = 0$，$\varphi(q_2) = \infty$，且 $\varphi(p_1) = 1$ 的 M¨obius 变换，并令 $\widetilde{G} := G \circ \varphi^{-1}$。设 $a := \varphi(p_2)$ $w_1 := \varphi(s_1)$，且 $w_2 := \varphi(s_2)$。由于 $[p_1, p_2; s_1,\ s_2] = [1, a; w_1,\ w_2]$，下面证明 $[1, a; w_1,\ w_2] = -1$。我们可以设

$$\widetilde{G} = K\frac{(z-1)^2(z-a)^2}{z^2} = K\left(\frac{(z-1)(z-a)}{z}\right)^2 \qquad (K \neq 0).$$

由于 $\widetilde{G}(w_j) = 1^{(2)}(j = 1,\ 2)$，因此 $(\widetilde{G} - 1)'(w_j) = \widetilde{G}'(w_j) = 0$，直接计算得到 $\{w_1, w_2\} = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$。¯条件 $\overline{\widetilde{G}}(w_j) = 1$ 推出 $-K(\sqrt{a}-1)^4 = 1$ 和 $K(\sqrt{a}+1)^4 = 1$，故 $a = -1$。因此，我们有 $\{w_1, w_2\} = \{i, -i\}$。于是，结论如下：

$$[1, a; w_1, w_2] = [1, -1; i, -i] = [1, -1; -i, i] = -1.$$

□

因此，根据引理 4.1 中的 (4)，我们可以令 $\Sigma = \boldsymbol{C}\setminus\{\infty, \pm i, 0\}$ 属于**情形 4**，并假设$G(\infty) = 0^{(2)}$。那么，其他端点处 $G$ 的可能取值和重数如下，共有 3 种情形：(i) $G(0) = 0^{(2)}$，且 $G(i) = G(-i) = 1^{(2)}$；或 (ii) $G(i) = 0^{(2)}$，且 $G(-i) = G(0) = 1^{(2)}$；或 (iii) $G(-i) = 0^{(2)}$，且 $G(0) = G(i) = 1^{(2)}$。对于 (i) 至 (iii) 的每种情形，交比可按引理 4.4 所示计算如下：(i) $[\infty, 0;\ i,\ -i] = -1$；(ii) $[\infty, i;\ -i,\ 0] = 1/2$；(iii) $[\infty, -i;\ 0,\ i] = 2$。因此，情形 (ii) 和 (iii) 不可能。

接下来，构造满足条件 (i) 的亚纯函数 $G$。由于 $G(\infty) = G(0) = 0^{(2)}$，采用与 (4.9) 相同的记号，可设

$$G = \frac{\lambda z^2}{P(z)^2} \qquad (\lambda \in \boldsymbol{C}\setminus\{0\}).$$

由 $G(i) = G(-i) = 1^{(2)}$，$h(\pm i) = h'(\pm i) = 0$ 成立，其中 $h(z) := z^2 - P(z)^2,$，从而可得

$$P(i)^2 = -\lambda, \quad P(0)P'(0) = -i\lambda, \quad P(-i)^2 = -\lambda, \quad P(-i)P'(-i) = -i\lambda.$$

注意到 $\lambda \neq 0$，我们有 $\lambda = -4$，$s_1 = 0$，以及 $s_2 = -1$，由此得到

$$G = -\frac{4z^2}{(z^2-1)^2}. \tag{4.12}$$

综上所述，可得以下引理。

**引理4.5**。设 $G$： $\Sigma = \boldsymbol{C}\setminus\overline{\{}\infty, \pm i, t\} \to \boldsymbol{C}$ 是一个亚纯函数。假设它不取0 和 1，有除遗漏值之外的全分歧值 $\infty$，可亚纯延拓至 $\boldsymbol{C}$，且 $\deg G = 4$。那么，其 $G : \Sigma \to \boldsymbol{C}$ 可由定义在 $\boldsymbol{C}\setminus\{\infty, \pm i, 0\}$ 上的 (4.10)、定义在 $\boldsymbol{C}\setminus\{\infty, \pm i, -17i\}$ 上的 (4.11) 或定义在 $\boldsymbol{C}\setminus\overline{\{}\infty, \pm i, 0\}$ 上的 (4.12) 之一确定。

根据目前为止所做的准备，我们得到如下结论：存在定义在四穿孔球面上的完备极小浸入，其 $C(\Sigma) = -16\pi$，$D_g = 2$，且$\nu_g = 2.5$ 不属于 Kawakami–Watanabe 的例子。

**定理 4.6**。 任何全曲率为 $-16\pi$ 、满足 $D_g = 2$且 $\nu_g = 2.5$的完备极小浸入 $\Sigma$ : $= \boldsymbol{C} \setminus \{4$ 个点$\} \to \boldsymbol{R}^3$ , 均由定义在 $\boldsymbol{C} \setminus \{\infty, \pm i, 0\}$上的以下 *Weierstrass* 数据 $(g,$ $\omega)$ 给出: 对于互不相同的值 $\sigma \in \boldsymbol{C}$、 $\tau$、 $b \in \boldsymbol{C}$ 以及一个值 $\theta \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$,

**情形 1**

$$g = \frac{\sigma(b-\tau)(2z^2+1)^2 + b(\tau-\sigma)}{(b-\tau)(2z^2+1)^2 + (\tau-\sigma)}, \tag{4.13}$$

且全纯1形式 $\omega$ 在 $\Sigma$ 上为亚纯函数，给定为以下之一

$$(1) \qquad \omega = \theta \frac{((b-\tau)(2z^2+1)^2 + (\tau-\sigma))^2}{z^2(z-i)^2(z+i)^2} dz, \tag{4.14}$$

*with*

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\big(\theta(b-\sigma)(b(16\sigma\tau - 3\tau^2 - 13) - \sigma(13\tau^2+3) + 16\tau)\big) = 0, \\ \operatorname{Im}\big(\theta(b-\sigma)(b(16\sigma\tau - 3\tau^2 + 13) - \sigma(13\tau^2-3) - 16\tau)\big) = 0, \\ \operatorname{Re}\left(\theta(b-\sigma)(b(8\sigma+5\tau) - \tau(5\sigma+8\tau))\right) = 0 \end{cases} \tag{4.15}$$

(例如 $\tau = 0$、 $b = -(3/13)\sigma$、 $\sigma^3 \in i\boldsymbol{R}$、 $\theta = 1$) 或

$$(2) \qquad \omega = \theta \frac{((b-\tau)(2z^2+1)^2 + (\tau-\sigma))^2}{z^4(z-i)^2(z+i)^2} dz, \tag{4.16}$$

*with*

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\big(\theta(b-\sigma)(b(16\sigma\tau - 5\tau^2 - 11) - \sigma(11\tau^2+5) + 16\tau)\big) = 0, \\ \operatorname{Im}\big(\theta(b-\sigma)(b(16\sigma\tau - 5\tau^2 + 11) - \sigma(11\tau^2-5) - 16\tau)\big) = 0, \\ \operatorname{Re}\left(\theta(b-\sigma)(b(8\sigma+3\tau) - \tau(3\sigma+8\tau))\right) = 0 \end{cases} \tag{4.17}$$

(例如 $\tau = 0$、 $b = -(5/11)\sigma$、 $\sigma^3 \in i\boldsymbol{R}$、 $\theta = 1$)，或

$$(5) \qquad \omega = \theta \frac{((b-\tau)(2z^2+1)^2 + (\tau-\sigma))^2}{z^2(z-i)^3(z+i)^3} dz \tag{4.18}$$

*with*

(4.19)

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\big(\theta(b^2(128\sigma^2 - 32\sigma\tau + 15\tau^2 - 111) - 2b(112\sigma^2\tau - \sigma\tau^2 + \sigma - 112\tau) \\ \qquad\qquad +3\sigma^2(37\tau^2 - 5) + 32\tau(\sigma - 4\tau))\big) = 0, \\ \operatorname{Im}\big(\theta(b^2(128\sigma^2 - 32\sigma\tau + 15\tau^2 + 111) + 2b(-112\sigma^2\tau + \sigma\tau^2 + \sigma - 112\tau)) \\ \qquad\qquad +3\sigma^2(37\tau^2 + 5) - 32\tau(\sigma + 4\tau))\big) = 0, \\ \operatorname{Re}\big(\theta(b^2(112\sigma - \tau) + 2b(8\sigma^2 - 127\sigma\tau + 8\tau^2) - \sigma\tau(\sigma - 112\tau))\big) = 0 \end{cases}$$

（例如 $\tau = 0$、 $b = -$（$1/7$）$\sigma$、 $\sigma = \sqrt{13/2}$、 $\theta = 1$）或

$$(8) \qquad \omega = \theta \frac{((b-\tau)(2z^2+1)^2 + (\tau-\sigma))^2}{z^3(z-i)^2(z+i)^2} dz \tag{4.20}$$

*with*

$$\begin{cases} \operatorname{Im}\big(\theta(b-\sigma)(b(4\sigma\tau - \tau^2 - 3) - \sigma(3\tau^2+1) + 4\tau)\big) = 0, \\ \operatorname{Re}\big(\theta(b-\sigma)(b(4\sigma\tau - \tau^2 + 3) - \sigma(3\tau^2-1) - 4\tau)\big) = 0, \\ \operatorname{Im}\left(\theta(b-\sigma)(b(2\sigma+\tau) - \tau(\sigma+2\tau))\right) = 0 \end{cases} \tag{4.21}$$

（例如 $\tau=0$、 $b=-(1/3)\sigma$、 $\sigma^3\in\boldsymbol{R}$、 $\theta=1$）或

**情形 4**

$$g=\frac{\sigma(b-\tau)(z^2-1)^2+4b(\sigma-\tau)z^2}{(b-\tau)(z^2-1)^2+4(\sigma-\tau)z^2} \tag{4.22}$$

且在$\boldsymbol{C}$ 上亚纯的全纯1-形式 $\omega$ 在 $\Sigma$ 上由下列任一形式给出

$$(5)\qquad \omega=\theta\frac{((b-\tau)(z^2-1)^2+4(\sigma-\tau)z^2)^2}{z^2(z-i)^3(z+i)^3}dz \tag{4.23}$$

*with*

$$\begin{cases}\operatorname{Re}\big(\theta(b-\sigma)(b(4\sigma\tau-\tau^2-3)-\sigma(3\tau^2+1)+4\tau)\big)=0,\\ \operatorname{Im}\big(\theta(b-\sigma)(b(4\sigma\tau-\tau^2+3)-3\sigma\tau^2+\sigma-4\tau)\big)=0,\\ \operatorname{Re}\left(\theta(b-\sigma)(b(2\sigma+\tau)-\tau(\sigma+2\tau))\right)=0\end{cases} \tag{4.24}$$

$(e.g.\ \tau=0,\ b=-(1/3)\sigma,\ \sigma^3\in i\boldsymbol{R},\ \theta=1).$

证明。 利用引理4.5中各情形构造的亚纯函数 $G$，可以确定 $g=\Phi^{-1}\circ G$的形式，其中 $\Phi$ 如式（4.5）所示。一般而言（参见 [Oss69]），由正则性条件（2.1），由于 $g$ 在$\boldsymbol{C}\setminus\{\infty,\pm i,t\}$中的点有 4 个简单极点，因此 $\omega$ 在这些点处有 2 阶零点。由于 $g$ 在每个端点处都没有极点， $\omega$ 在这些端点处的极点阶至少为 2，并且它在 $\boldsymbol{C}\setminus\{\infty,\pm i,t\}$中的其他点处全纯。因此，由黎曼–罗赫定理可得

$$\sum_{p\in\omega^{-1}(\infty)}\operatorname{ord}_p\omega=-10,$$

其中 $\omega^{-1}(\infty)$表示 $\omega$ 在 $\boldsymbol{C}$中的极点集合。因此，若将 $g$ 写成 $g=g_2/g_1$，则可如下设定 $\omega$：

(4.25)

$$(1)\ \omega=\theta\frac{g_1(z)^2}{(z-t)^2(z-i)^2(z+i)^2}dz,\qquad (2)\ \omega=\theta\frac{g_1(z)^2}{(z-t)^4(z-i)^2(z+i)^2}dz,$$

$$(3)\ \omega=\theta\frac{g_1(z)^2}{(z-t)^2(z-i)^4(z+i)^2}dz,\qquad (4)\ \omega=\theta\frac{g_1(z)^2}{(z-t)^2(z-i)^2(z+i)^4}dz,$$

$$(5)\ \omega=\theta\frac{g_1(z)^2}{(z-t)^2(z-i)^3(z+i)^3}dz,\qquad (6)\ \omega=\theta\frac{g_1(z)^2}{(z-t)^3(z-i)^3(z+i)^2}dz,$$

$$(7)\ \omega=\theta\frac{g_1(z)^2}{(z-t)^3(z-i)^2(z+i)^3}dz,\qquad (8)\ \omega=\theta\frac{g_1(z)^2}{(z-t)^3(z-i)^2(z+i)^2}dz,$$

$$(9)\ \omega=\theta\frac{g_1(z)^2}{(z-t)^2(z-i)^3(z+i)^2}dz,\qquad (10)\ \omega=\theta\frac{g_1(z)^2}{(z-t)^2(z-i)^2(z+i)^3}dz.$$

这里， $g_1$ 和 $g_2$ 是次数为4的互素多项式，且 $\theta\in\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$。因此，我们将推导出每种情况下的对（$g$, $\omega$）是否满足周期条件（2.2）。由于源黎曼曲面为 $\boldsymbol{C}\setminus\{\infty,\pm i,t\}$，（2.2）等价于

$$\operatorname{Res}(\alpha,p)\in\boldsymbol{R} \tag{4.26}$$

对所有 $p\in\{\pm i,t\}$均成立，其中 $\boldsymbol{C}^3$值亚纯1-形式 $\alpha$ 定义为

$$\alpha\coloneqq(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\coloneqq\frac{1}{2}(1-g^2,i(1+g^2),2g)\omega, \tag{4.27}$$

且 $\operatorname{Res}(\alpha,p)$ 表示 $\alpha$ 在 $p$ 处的留数。

我们先来考察**情形 1**。(4.10) 和 (4.5) 给出

$$g = \frac{\sigma(b-\tau)(2z^2+1)^2 + b(\tau-\sigma)}{(b-\tau)(2z^2+1)^2 + (\tau-\sigma)}.$$

考虑对称性 $z \mapsto -z$ 后，我们只需检验 (4.25) 中除 (4)、(7)、(10) 以外的周期问题。

(1) 亚纯1-形式 $\omega$ 由下式给出

$$\omega = \theta \frac{((b-\tau)(2z^2+1)^2 + (\tau-\sigma))^2}{z^2(z-i)^2(z+i)^2} dz,$$

于是，我们得到

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(\alpha_1, i) &= \frac{i}{8}\theta(b-\sigma)(b(16\sigma\tau - 3\tau^2 - 13) - \sigma(13\tau^2+3) + 16\tau) = -\operatorname{Res}(\alpha_1, -i) \\
\operatorname{Res}(\alpha_2, i) &= \frac{1}{8}\theta(b-\sigma)(b(16\sigma\tau - 3\tau^2 + 13) - \sigma(13\tau^2-3) - 16\tau) = -\operatorname{Res}(\alpha_2, -i) \\
\operatorname{Res}(\alpha_3, i) &= -\frac{i}{4}\theta(b-\sigma)(b(8\sigma+5\tau) - \tau(5\sigma+8\tau)) = -\operatorname{Res}(\alpha_3, -i), \\
\operatorname{Res}(\alpha, 0) &= \mathbf{0},
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{0} := (0,0,0)$。因此，周期条件等价于 (4.15)，并且可以看出，存在满足该条件的 $b, \sigma, \tau$ 和 $\theta$。

(2) 亚纯1-形式 $\omega$ 表示为

$$\omega = \theta \frac{((b-\tau)(2z^2+1)^2 + (\tau-\sigma))^2}{z^4(z-i)^2(z+i)^2} dz.$$

于是，

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(\alpha_1, i) &= \frac{i}{8}\theta(b-\sigma)(b(16\sigma\tau - 5\tau^2 - 11) - \sigma(11\tau^2+5) + 16\tau) = -\operatorname{Res}(\alpha_1, -i), \\
\operatorname{Res}(\alpha_2, i) &= \frac{1}{8}\theta(b-\sigma)(b(16\sigma\tau - 5\tau^2 + 11) - \sigma(11\tau^2-5) - 16\tau) = -\operatorname{Res}(\alpha_2, -i), \\
\operatorname{Res}(\alpha_3, i) &= -\frac{i}{4}\theta(b-\sigma)(b(8\sigma+3\tau) - \tau(3\sigma+8\tau)) = -\operatorname{Res}(\alpha_3, -i), \\
\operatorname{Res}(\alpha, 0) &= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

因此，周期条件等价于 (4.17)，并且可以看出存在$b$，$\sigma$，$\tau$和 $\theta$满足该条件。

(3) 亚纯1-形式 $\omega$ 表示为

$$\omega = \theta \frac{((b-\tau)(2z^2+1)^2 + (\tau-\sigma))^2}{z^2(z-i)^4(z+i)^2} dz. \tag{4.28}$$

于是，

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}(\alpha_1, 0) = -i\theta(b-\sigma)^2(\tau^2-1), \qquad \operatorname{Res}(\alpha_2, 0) = -\theta(b-\sigma)^2(\tau^2+1), \\
&\operatorname{Res}(\alpha_3, 0) = 2i\theta(b-\sigma)^2\tau.
\end{aligned}$$

于是，周期条件 (4.26) 给出

$$(\tau^2-1)U \in i\boldsymbol{R}, \qquad (\tau^2+1)U \in \boldsymbol{R}, \qquad \tau U \in i\boldsymbol{R}, \tag{4.29}$$

其中 $U := \theta(b-\sigma)^2 \neq 0$。若 $\tau^2+1 \neq 0$，则（4.29）中的第一和第二个条件给出

$$\frac{\tau^2-1}{\tau^2+1} \in i\boldsymbol{R}.$$

这等价于 $|\tau|=1$，因此我们可以设 $\tau=e^{i\varphi}$ ($\varphi\not\equiv\pi/2$ 模 $\pi$)。由于$\tau^2+1=2e^{i\varphi}\cos\varphi$，条件（$\tau^2+1$）$U\in\boldsymbol{R}$给出 $e^{i\varphi}U\in\boldsymbol{R}$。另一方面，第三个条件意味着 $e^{i\varphi}U\in i\boldsymbol{R}$。因此，有 $e^{i\varphi}U=0$，这与 $U\neq 0$ 矛盾。

另外，如果 $\tau^2+1=0$，则 (4.29) 中的第一和第三个条件表明 $U\in i\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{R}$，这意味着 $U=0$，从而产生矛盾。

(5) 亚纯1-形式 $\omega$ 表示为

$$\omega=\theta\frac{((b-\tau)(2z^2+1)^2+(\tau-\sigma))^2}{z^2(z-i)^3(z+i)^3}dz. \tag{4.30}$$

于是,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(\alpha_1,i)=-\frac{i}{32}\theta(&b^2(128\sigma^2-32\sigma\tau+15\tau^2-111)-2b(112\sigma^2\tau-\sigma\tau^2+\sigma-112\tau)\\&+3\sigma^2(37\tau^2-5)+32\tau(\sigma-4\tau))=-\operatorname{Res}(\alpha_1,-i),\\ \operatorname{Res}(\alpha_2,\ i)=-\frac{1}{32}\theta\ (&b^2\ (128\sigma^2-32\sigma\tau+15\tau^2+111)\ -2b\ (112\sigma^2\tau-\sigma\tau^2-\sigma+112\tau)\ )\\&+3\sigma^2(37\tau^2+5)-32\tau(\sigma+4\tau))=-\operatorname{Res}(\alpha_2,-i),\\ \operatorname{Res}(\alpha_3,i)=\frac{i}{16}\theta(&b^2(112\sigma-\tau)+2b(8\sigma^2-127\sigma\tau+8\tau^2)-\sigma\tau(\sigma-112\tau))\\=-\operatorname{Res}(&\alpha_3,-i),\qquad \operatorname{Res}(\alpha,0)=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

因此，周期条件等价于 (4.19)，可以看出，存在满足该条件的 $b$，$\sigma$，$\tau$ 和 $\theta$。

(6) 亚纯1-形式 $\omega$ 可表示为

$$\omega=\theta\frac{((b-\tau)(2z^2+1)^2+(\tau-\sigma))^2}{z^3(z-i)^3(z+i)^2}dz. \tag{4.31}$$

于是，我们知道

$$\begin{aligned}32\operatorname{Res}(\alpha_1,-i)+8\operatorname{Res}(\alpha_1,0)&=3i\theta(b-\sigma)^2(\tau^2-1),\\32\operatorname{Res}(\alpha_2,-i)+8\operatorname{Res}(\alpha_2,0)&=3\theta(b-\sigma)^2(\tau^2+1),\\-16\operatorname{Res}(\alpha_3,-i)-4\operatorname{Res}(\alpha_3,0)&=3i\theta(b-\sigma)^2\tau.\end{aligned}$$

周期条件意味着这三个值均属于 $\boldsymbol{R}$，这是一个矛盾（见(4.29)）。

(8) 亚纯1-形式 $\omega$ 可表示为

$$\omega=\theta\frac{((b-\tau)(2z^2+1)^2+(\tau-\sigma))^2}{z^3(z-i)^2(z+i)^2}dz. \tag{4.32}$$

于是,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(\alpha_1,i)&=\frac{1}{2}\theta(b-\sigma)(b(4\sigma\tau-\tau^2-3)-\sigma(3\tau^2+1)+4\tau)\\&=\operatorname{Res}(\alpha_1,-i)=-2\operatorname{Res}(\alpha_1,0),\\ \operatorname{Res}(\alpha_2,i)&=-\frac{i}{2}\theta(b-\sigma)(b(4\sigma\tau-\tau^2+3)-\sigma(3\tau^2-1)-4\tau)\\&=\operatorname{Res}(\alpha_2,-i)=-2\operatorname{Res}(\alpha_2,0),\\ \operatorname{Res}(\alpha_3,i)&=-\theta(b-\sigma)(b(2\sigma+\tau)\ -\tau(\sigma+2\tau))\ =\operatorname{Res}(\alpha_3,-i)\ =-2\operatorname{Res}(\alpha_3,0).\end{aligned}$$

因此，周期条件等价于（4.21），并且可以看出存在满足该条件的$b$，$\sigma$，$\tau$和$\theta$。

(9) 亚纯1-形式 $\omega$ 可表示为

$$\omega = \theta\frac{((b-\tau)(2z^2+1)^2+(\tau-\sigma))^2}{z^2(z-i)^3(z+i)^2}dz. \tag{4.33}$$

于是，

$$\mathrm{Res}(\alpha_1,0) = -\frac{1}{2}\theta(b-\sigma)^2(\tau^2-1), \quad \mathrm{Res}(\alpha_2,0) = \frac{i}{2}\theta(b-\sigma)^2(\tau^2+1),$$
$$\mathrm{Res}(\alpha_3,0) = \theta(b-\sigma)^2\tau,$$

这是不可能的（见（4.29））。

接下来，我们考虑**情形 2**。由引理4.5中的（4.11），经过直接计算可得

$$g = \frac{\sigma(b-\tau)(z^2+10iz+23)^2+512ib(\tau-\sigma)(z-i)}{(b-\tau)(z^2+10iz+23)^2+512i(\tau-\sigma)(z-i)}.$$

（1）我们可以设

$$\omega = \theta\frac{((b-\tau)(z^2+10iz+23)^2+512i(\tau-\sigma)(z-i))^2}{(z+17i)^2(z-i)^2(z+i)^2}dz. \tag{4.34}$$

By

$$\mathrm{Res}(\alpha_1,-i) = -64i\theta(b-\sigma)^2(\tau^2-1), \qquad \mathrm{Res}(\alpha_2,-i) = -64\theta(b-\sigma)^2(\tau^2+1),$$
$$\mathrm{Res}(\alpha_3,-i) = 128i\theta\tau(b-\sigma)^2,$$

(4.26) 导致矛盾（见 (4.29)）。

类似地，对于情形 (2) 至 (10)，通过计算 $p\in\{\pm i,-17i\}$ 的 $\mathrm{Res}(\alpha,p)$，可以验证每种情形下的周期条件都化为 (4.29)，这是不可能的。因此，**情形 2** 不会出现。

最后，我们来讨论**情形 4**。考虑对称变换 $z\mapsto -z$ 和 $z\mapsto 1/z$（必要时交换 $\sigma$ 和 $\tau$的角色）。此外，通过考虑保持端点集不变的坐标变换 $z\mapsto i(z+i)/(z-i)$，交换 $\sigma$和 $\tau$的角色，并重新选取 $\theta$，可知情形 (5) 可与情形 (8) 视为相同，因此我们只考虑情形 (5)。所以，只需检验 (4.25) 中情形 (1)、(3)、(5)、(6) 的周期问题。由引理4.5中的 (4.12)，直接计算可得

$$g = \frac{\sigma(b-\tau)(z^2-1)^2+4b(\sigma-\tau)z^2}{(b-\tau)(z^2-1)^2+4(\sigma-\tau)z^2}.$$

情形 (1)、(3) 和 (6) 不可能，因为这些情形会归结为 (4.29)。

对于情形 (5)，我们可以令

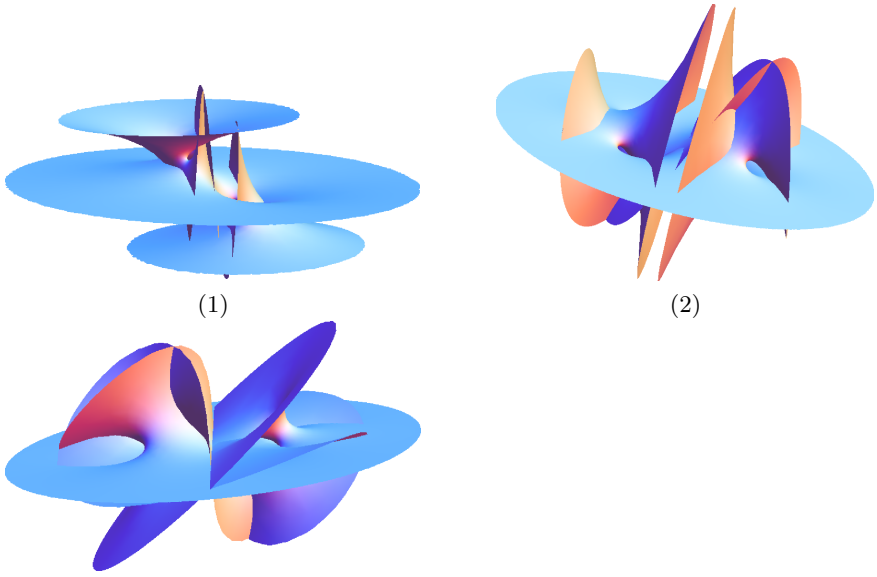
$$\omega = \theta\frac{((b-\tau)(z^2-1)^2+4(\sigma-\tau)z^2)^2}{z^2(z-i)^3(z+i)^3}dz, \tag{4.35}$$

并得到

$$\mathrm{Res}(\alpha_1,i) = -\frac{i}{2}\theta(b-\sigma)(b(4\sigma\tau-\tau^2-3)-\sigma(3\tau^2+1)+4\tau) = -\mathrm{Res}(\alpha_1,-i),$$
$$\mathrm{Res}(\alpha_2,i) = -\frac{1}{2}\theta(b-\sigma)(b(4\sigma\tau-\tau^2+3)-\sigma(3\tau^2-1)-4\tau) = -\mathrm{Res}(\alpha_2,-i),$$
$$\mathrm{Res}(\alpha_3,i) = i\theta(b-\sigma)(b(2\sigma+\tau)-\tau(\sigma+2\tau)) = -\mathrm{Res}(\alpha_3,-i), \quad \mathrm{Res}(\alpha,0) = \mathbf{0}.$$

在这种情况下，可以看出存在 $b, \sigma, \tau$和 $\theta$ 满足周期条件。

□



(1) (2)

(5)

FIGURE 1. 具有 $C(\Sigma) = -16\pi$， $D_g = 2$且在 (1)、(2) 和 (5) 的每个 $\omega$ 中均属于**情形 1** 的完备极小曲面。

**注 4.7**。 我们对定理 4.6 作几点说明。

- **情形 1** 中的 (2) 所给出的族是 Kawakami–Watanabe 所给族的推广。事实上，将 $\tau$ 替换为 $\sigma$、将 $\sigma$ 替换为 $\sigma a$ ($a \in \boldsymbol{R} \setminus \{1\}$) $b$ 替换为$\sigma b$ ($b \in \boldsymbol{R} \setminus \{a, 1\}$)以满足 (2.11)，并作坐标变换 $z \mapsto 1/z$，即可得到例 2.7 中的极小浸入族。
- 在**情形 1**的 (8) 中取 $w = z^2$，并在**情形 4**的 (5) 中取 $w = z - 1/z$，可知它们分别是全曲率为 $-8\pi$ 且具有三个悬链面端的完备极小曲面的二重覆盖；这些曲面由 L´opez [L´op92，定理 3]给出。

4.2. **当 $D_g \leq 1$时**。首先，推论 3.6 直接给出以下断言。

**命题 4.8**。不存在从 $\boldsymbol{C} \setminus \{4\text{点}\}$到 $\boldsymbol{R}^3$ 、全曲率为 $-16\pi$ 且满足 $D_g \neq 0$ （即高斯映射 $g$ 是满射）和 $\nu_g = 2.5$的完备极小浸入。

我们来考虑 $D_g = 1$ 的情形。 $\nu_g$ 的定义给出

$$\nu_g = 1 + \sum_{j=1}^{R_g} \left(1 - \frac{1}{\nu_j}\right).$$

若 $R_g = 1$，则 $\nu_g = 2 - 1/\nu_1 < 2.5$，这也构成矛盾。因此，由 (4.2) 可知，$R_g = 2$ 或 3。

现在假设 $R_g = 2$。令 $\mathcal{TR}_g = \{\sigma, b_1, b_2\}$ 为全分歧值的集合，其中 $\sigma \in \boldsymbol{C}$ 是唯一的被省略值，而 $b_1, b_2 \in \boldsymbol{C} \setminus \{\sigma\}$ $(b_1 \neq b_2)$ 是除被省略值以外的全分歧值。于是，由 $\nu_g = 2.5$ 和 (4.3) 可得 $(\nu_1, \nu_2) = (4,4)$。令 $\Phi_1 \colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ 为一个 Möbius 变换，定义如下：

$$\Phi_1(w) := \frac{\sigma - b_2}{\sigma - b_1} \cdot \frac{w - b_1}{w - b_2},$$

它满足 $\Phi_1(\sigma) = 1, \Phi_1(b_1) = 0, \Phi_1(b_2) = \infty$，并令 $G := \Phi_1 \circ g$。由于 $(\nu_1, \nu_2) = (4,4)$ 且 $\deg(G) = 4$，令 $q_1, q_2 \in \boldsymbol{C} \setminus \{\infty, \pm i, t\}$ $(q_1 \neq q_2)$ 满足

$$g^{-1}(b_1) = G^{-1}(0) = \{q_1\}, \quad g^{-1}(b_2) = G^{-1}(\infty) = \{q_2\}, \quad \operatorname{ord}_{q_1} G = -\operatorname{ord}_{q_2} G = 4.$$

由于 $B_G = 6$、$\deg(G) = 4$，且 1 是 $G$ 唯一的被省略值，我们可知 $G^{-1}(1) = \{\infty, \pm i, t\}$，并且 $G$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上除了 $q_1$ 和 $q_2$ 之外不分支。因此，我们可以设

$$G = \left(\frac{z - q_1}{z - q_2}\right)^4.$$

由条件 $G(\pm i) = G(t) = 1$，我们来确定 $q_1, q_2$ 和 $t$。设 $N(z) := -4(q_1 - q_2)z^3 + 6(q_1^2 - q_2^2)z^2 - 4(q_1^3 - q_2^3)z + q_1^4 - q_2^4$ 是 $G - 1$ 的分子。由于多项式 $N$ 以 $\pm i$ 和 $t$ 为单根，由韦达定理可得

$$i + (-i) + t = t = \frac{3}{2}(q_1 + q_2), \qquad i \cdot (-i) + (-i) \cdot t + t \cdot i = 1 = q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2,$$
$$i \cdot (-i) \cdot t = t = \frac{1}{4}(q_1 + q_2)(q_1^2 + q_2^2).$$

假设 $q_1 + q_2 = 0$。那么，我们有

$$t = 0,$$

因此 $q_1 = \pm 1$ 和 $q_2 = \mp 1$，双重符号顺序相同。由此，不失一般性，我们得到

$$G = \left(\frac{z - 1}{z + 1}\right)^4. \tag{4.36}$$

另一方面，若 $q_1 + q_2 \neq 0$，则通过直接计算可得 (1) $t = 3i$ 和 $\{q_1, q_2\} = \{i + 2, i - 2\}$，或 (2) $t = -3i$ 和 $\{q_1, q_2\} = \{-i + 2, -i - 2\}$。在这两种情况下，分别通过坐标变换 $z \mapsto (z + 3i)/(iz + 1)$ 和 (1) 中的 $z \mapsto -z$，以及坐标变换 $z \mapsto (-iz + 3)/(-z + i)$ 和 (2) 中的 $z \mapsto -z$，我们发现所构造的 $G$ 与 (4.36) 一致。

根据 $g = G \circ \Phi_1^{-1}$，我们可以确定 $g$ 的形式如下：

$$g = \frac{b_2(b_1 - \sigma)(z - 1)^4 + b_1(\sigma - b_2)(z + 1)^4}{(b_2 - \sigma)(z - 1)^4 + (b_1 - \sigma)(z + 1)^4}. \tag{4.37}$$

因此，我们来考察在 (4.25) 的情形 (1) 至 (10) 中，$\boldsymbol{C} \setminus \{\infty, \pm i, 0\}$ 上的每个 $(g, \omega)$ 是否满足关于 (4.37) 中的 $g$ 和各情形中的 $\omega$ 的周期条件 (4.26)。

考虑对称变换 $z \mapsto -z$ 和 $z \mapsto \pm 1/z$ （必要时交换 $b_1$ 和 $b_2$ 的角色），我们只需检查 (4.25) 中情形 (1)、(3)、(5)、(6) 和 (8) 的周期问题。通过考虑坐标变换 $z \mapsto$

$i(z+i)/(z-i)$，它保持端点集不变；交换 $b_1$ 和 $b_2$的角色并重新取$\theta$后，我们发现情形 (5) 可与 (8) 等同，因此只需考虑 (5)。(1) 可以设

$$\omega=\theta\frac{((b_2-\sigma)(z-1)^4+(b_1-\sigma)(z+1)^4)^2}{z^2(z-i)^2(z+i)^2}dz,$$

在端点 $z=\pm i$ 处，$\alpha$ 的留数计算得 $\operatorname{Res}(\alpha_1,\ i)-\operatorname{Res}(\alpha_1,\ -i)=4i\theta(b_1-b_2)^2(\sigma^2-1)$，$\operatorname{Res}(\alpha_2,\ i)-\operatorname{Res}(\alpha_2,\ -i)=4\theta(b_1-b_2)^2(\sigma^2+1)$，以及 $\operatorname{Res}(\alpha_3,\ i)-\operatorname{Res}(\alpha_3,\ -i)=-8i\theta(b_1-b_2)^2\sigma$，而周期条件 (4.26) 得到

$$(\sigma^2-1)U\in i\boldsymbol{R},\qquad(\sigma^2+1)U\in\boldsymbol{R},\qquad\sigma U\in i\boldsymbol{R},\tag{4.38}$$

由此得到矛盾（见 (4.29)）。
(3) 可以设为

$$\omega=\theta\frac{((b_2-\sigma)(z-1)^4+(b_1-\sigma)(z+1)^4)^2}{z^2(z-i)^4(z+i)^2}dz,$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}
&4\left(\frac{8}{5}\operatorname{Res}(\alpha_1,i)-\frac{2}{5}\operatorname{Res}(\alpha_2,i)+4\operatorname{Res}(\alpha_1,0)-\operatorname{Res}(\alpha_2,0)\right)\\
&\quad+\left(\frac{2}{5}\operatorname{Res}(\alpha_1,i)+\frac{8}{5}\operatorname{Res}(\alpha_2,i)+\operatorname{Res}(\alpha_1,0)+4\operatorname{Res}(\alpha_2,0)\right)=-17i(\sigma^2-1)U,\\
&\left(\frac{8}{5}\operatorname{Res}(\alpha_1,i)-\frac{2}{5}\operatorname{Res}(\alpha_2,i)+4\operatorname{Res}(\alpha_1,0)-\operatorname{Res}(\alpha_2,0)\right)\\
&\quad-4\left(\frac{2}{5}\operatorname{Res}(\alpha_1,i)+\frac{8}{5}\operatorname{Res}(\alpha_2,i)+\operatorname{Res}(\alpha_1,0)+4\operatorname{Res}(\alpha_2,0)\right)=17(\sigma^2+1)U,\\
&2\operatorname{Res}(\alpha_3,\ i)+5\operatorname{Res}(\alpha_3,\ 0)=10i\sigma U,
\end{aligned}$$

其中 $U:=\theta(b_1-b_2)$，而周期条件会导致矛盾（见 (4.29)）。(5) 可以设为

$$\omega=\theta\frac{((b_2-\sigma)(z-1)^4+(b_1-\sigma)(z+1)^4)^2}{z^2(z-i)^3(z+i)^3}dz,$$

可以计算 $\alpha$ 在每个端点处的留数，得到

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(\alpha_1,i)&=\frac{i}{2}\theta\left(32\sigma(b_2-\sigma)+13b_2^2(\sigma^2-1)+b_1^2(32b_2^2-32b_2\sigma+13(\sigma^2-1))\right.\\
&\qquad\left.+b_1(32\sigma-32b_2^2\sigma+6b_2(\sigma^2-1))\right)=-\operatorname{Res}(\alpha_1,-i),\\
\text{留数}(\alpha_2,i)&=-\frac{1}{2}\theta\left(32\sigma(b_2-\sigma)-13b_2^2(\sigma^2+1)-b_1^2(32b_2^2-32b_2\sigma+13(\sigma^2+1))\right.\\
&\qquad\left.+b_1(32\sigma+32b_2^2\sigma-6b_2(\sigma^2+1))\right)=\operatorname{Res}(\alpha_2,-i),\\
\text{留数}(\alpha_3,i)&=-i\theta(b_1^2(16b_2-3\sigma)-b_2\sigma(3b_2-16\sigma)+2b_1(8b_2^2-29b_2\sigma+8\sigma^2))\\
&=-\operatorname{Res}(\alpha_3,-i),\\
\operatorname{Res}(\alpha_1,0)&=4\theta(b_1-b_2)(b_1(2b_2\sigma-\sigma^2-1)-b_2(\sigma^2+1)+2\sigma),\\
\operatorname{Res}(\alpha_2,0)&=-4i\theta(b_1-b_2)(b_1(2b_2\sigma-\sigma^2+1)-b_2(\sigma^2-1)-2\sigma),\\
\operatorname{Res}(\alpha_3,\ 0)&=-8\theta(b_1-b_2)(b_1b_2-\sigma^2)。
\end{aligned}$$

可以验证，存在互不相同的数 $\sigma \in \boldsymbol{C}$，$b_1$，$b_2 \in \boldsymbol{C}$，以及满足周期条件的数 $\theta \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$（见命题 4.9）。
(6) 可以设

$$\omega = \theta \frac{((b_2-\sigma)(z-1)^4 + (b_1-\sigma)(z+1)^4)^2}{z^3(z-i)^3(z+i)^2} dz,$$

于是，可以看出

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}(\alpha_1, i) + 2\operatorname{Res}(\alpha_4, -i) + \operatorname{Res}(\alpha_7, 0) = -i(\sigma^2-1)U,\\
&\operatorname{Res}(\alpha_2, i) + 2\operatorname{Res}(\alpha_5, -i) + \operatorname{Res}(\alpha_8, 0) = -(\sigma^2+1)U,\\
&\operatorname{Res}(\alpha_3, i) + 2\operatorname{Res}(\alpha_3, -i) + \operatorname{Res}(\alpha_3, 0) = 2i\sigma U,
\end{aligned}$$

其中 $U = \theta(b_1 - b_2)$，周期条件导致矛盾（见 (4.29)）。综上所述，我们得到以下结果。

**命题 4.9.** 全曲率为 $-16\pi$、满足 $D_g = 1$、$R_g = 2$ 和 $\nu_g = 2.5$ 的完备极小浸入 $\Sigma := \boldsymbol{C} \setminus \{4 \text{ 个点}\} \to \boldsymbol{R}^3$ 由以下定义在 $\Sigma = \boldsymbol{C} \setminus \{\infty, \pm i, 0\}$ 上的 *Weierstrass* 数据 $(g, \omega)$ 给出：对于互不相同的值 $\sigma \in \boldsymbol{C}$、$b_1$、$b_2 \in \boldsymbol{C}$，以及值 $\theta \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$，

$$g = \frac{b_2(b_1-\sigma)(z-1)^4 + b_1(\sigma-b_2)(z+1)^4}{(b_1-\sigma)(z-1)^4 + (\sigma-b_2)(z+1)^4}, \tag{4.39}$$

而在 $\boldsymbol{C}$ 上亚纯的全纯 1-形式 $\omega$ 由下式给出

$$\omega = \theta \frac{((b_2-\sigma)(z-1)^4 + (b_1-\sigma)(z+1)^4)^2}{z^2(z-i)^3(z+i)^3} dz, \tag{4.40}$$

(5)

*with*

$$\begin{cases}
\operatorname{Re}\big(\theta(32\sigma(b_2-\sigma) + 13b_2^2(\sigma^2-1) + b_1^2(32b_2^2 - 32b_2\sigma + 13(\sigma^2-1))\\
\qquad\qquad + b_1(32\sigma - 32b_2^2\sigma + 6b_2(\sigma^2-1))\big) = 0,\\
\operatorname{Im}\big(\theta(32\sigma(b_2-\sigma) - 13b_2^2(\sigma^2+1) - b_1^2(32b_2^2 - 32b_2\sigma + 13(\sigma^2+1))\\
\qquad\qquad + b_1(32\sigma + 32b_2^2\sigma - 6b_2(\sigma^2+1))\big) = 0,\\
\operatorname{Re}\big(\theta(b_1^2(16b_2 - 3\sigma) - b_2\sigma(3b_2 - 16\sigma) + 2b_1(8b_2^2 - 29b_2\sigma + 8\sigma^2))\big) = 0,\\
\operatorname{Im}\big(\theta(b_1-b_2)(b_1(2b_2\sigma - \sigma^2 - 1) - b_2(\sigma^2+1) + 2\sigma)\big) = 0,\\
\operatorname{Re}\big(\theta(b_1-b_2)(b_1(2b_2\sigma - \sigma^2 + 1) - b_2(\sigma^2-1) - 2\sigma)\big) = 0,\\
\operatorname{Im}\big(\theta(b_1-b_2)(b_1b_2 - \sigma^2)\big) = 0
\end{cases} \tag{4.41}$$

(例如 $\sigma = i$、$b_1 = -4\sqrt{10}/13 + 3i/13$、$b_2 = -b_1$、$\theta = 1$)（图2）。

我们不知道是否存在一个完备极小浸入 $\Sigma = \boldsymbol{C} \setminus \{4\text{点}\} \to \boldsymbol{R}^3$，满足 $C(\Sigma) = -16\pi$，$D_g = 1$，$R_g = 3$，以及 $\nu_g = 2.5$。可以观察到，存在一个亚纯函数 $g : \Sigma \to \boldsymbol{C}$ 满足这些条件，但我们不知道如何解决周期问题。

在本文的最后一部分，我们针对有限全曲率的 $\boldsymbol{R}^3$ 中完备极小曲面的高斯映射 $g$ 的总权重 $\nu_g$（总权重）完全分歧值，提出了一些开放问题。

**问题 4.10**。(1) [KKM08，第 1] 是否存在某个 $\kappa \in \boldsymbol{R}$ 满足 $2.5 \le \kappa < 4$，使其成为 $\nu_g$的上界？
(2) 是否存在一类有限全曲率的完备极小浸入，其亏格为正，并且满足 $\nu_g > 2$，且浸入到 $\boldsymbol{R}^3$ 中？(3) 在什么充要条件下，(2.8)中的等号成立？

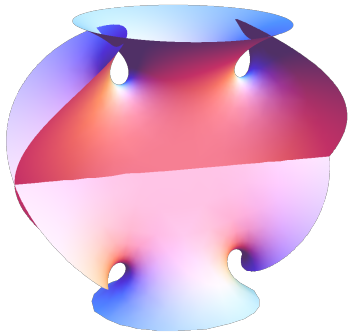


FIGURE 2. 具有 $C(\Sigma) = -16\pi$， $D_g = 1$， $R_g = 2$ 和 $\nu_g = 2.5$的完备极小曲面

(4) 对于浸入到 $\boldsymbol{R}^3$ 中的有限全曲率完备极小浸入，全分歧值的数目 $D_g + R_g$ 的最佳上界是多少？

## REFERENCES

[AFL21] A. Alarc´ón、F. Forstneriˇc 和 F. J. L´opez，《从复分析观点看极小曲面》，数学专著丛书。Springer，沙姆，2021年。[Fan93] Y. Fang，《有限全曲率完备极小曲面的高斯映射》，《印第安纳大学数学杂志》42:1389–1411，1993年。[Fuj88] H. Fujimoto，《关于极小曲面高斯映射的例外值个数》，《日本数学会杂志》40:235–247，1988年。[Fuj89] H. Fujimoto，《极小曲面高斯映射的修正缺陷关系》，《微分几何杂志》29:245–262，1989年。[Fuj92] H. Fujimoto，《关于极小曲面的高斯曲率》，《日本数学会杂志》44:427–439，1992年。[Fuj93] H. Fujimoto，
*Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in* $\mathrm{R}^m$，《数学的若干方面》，E21，Friedr. Vieweg，布伦瑞克，1993年。[Hub57] A. Huber，《关于次调和函数与整体微分几何》，
*Comment.* ，：–。[
*Math. Helv.* **32** 13 72, 1957
Kaw06] Y. Kawakami，《关于极小曲面高斯映射的全分歧值数》，《日本学士院院刊A辑：数学科学》82:1–3，2006年。[KKM08] Y. Kawakami、R. Kobayashi 和 R. Miyaoka，《伪代数极小曲面的高斯映射》，《加拿大数学杂志》67:1055–1069，1994年。[KW24] Y. Kawakami 和 M. Watanabe，《亏格零有限全曲率完备极小曲面的高斯像》，《几何分析杂志》34，第9期，论文编号270，22页，2024年。[Kob03] R. Kobayashi，《迈向作为丢番图逼近几何模型的Nevanlinna理论》，[《数学》48:113–的译文127, 1996]，《数学博览》16:39–79，2003年。[L´op92] F. J. L´opez，《全曲率大于 $-12\pi$的完备极小曲面的分类》，《美国数学会汇刊》334:49–74，1992年。[LM99] F. J. L
´ ´ $^3$，
**43** 341 449, opez 和
1999
F. Martın，《R中的完备极小曲面》，《数学出版物》：–。[MS94] R. Miyaoka 和 K. Sato，《关于高斯映射遗漏两个方向的完备极小曲面》，《数学文献》63:565–576，1994年。[Nev25] R. Nevanlinna，《亚纯函数理论》，《数学学报》46:1–99，1925年。[Nev70] R. Nevanlinna，
*Analytic functions*，由Phillip Emig根据第二版德文版翻译，数学科学基础丛书第162卷，Springer，纽约-柏林，1970年。

[NW14] J. Noguchi 和 J. Winkelmann, *Nevanlinna theory in several complex variables and Diophantine approximation*, 数学科学基础丛书第350卷, Springer, 东京, 2014年。[Rob39] R. M. Robinson, 《皮卡定理及相关定理的推广》, 《杜克数学杂志》**5**, 第1期, 118–132, 1939年。[Ru21] M. Ru, *Nevanlinna theory and its relation to Diophantine approximation*, 第二版, 世界科学出版社, 哈肯萨克, 新泽西州, 2021年。[Ru23] M. Ru, *Minimal surfaces through Nevanlinna theory*, 德古意特数学研究丛书第92卷, 德古意特, 柏林, 2023年。[Oss64] R. Osserman, 《n维欧氏空间和中的极小曲面的整体性质》, 《数学年刊》–。[Oss69] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, 范·诺斯特兰德·莱因霍尔德公司, 纽约-伦敦-墨尔本, 1969年。[WX87] A. Weitsman 和 F. Xavier, 《双曲完备极小曲面高斯映射的一些函数论性质》, 《密歇根数学杂志》**34**:275–283, 1987年。

Department of Mathematics,Institute of Science Tokyo,O-okayama, Meguro, Tokyo, 152-8551, Japan*Email address*: matsumoto.j.d273@m.isct.ac.jp, j.matsumoto.517@gmail.com