从拓扑视角看 Helly 型问题

PAVEL PATAK 与 ZUZANA PATAKOVA

Abstract. 我们讨论拓扑 Helly 型定理及其变体的最新进展。我们概述两种不同的证明方法，一种基于神经引理，另一种基于不可嵌入性。

arXiv:2602.07552v1 [cs.CG] 7 Feb 2026

1. Introduction

Helly 定理距今已约 100 年，是凸几何的基石之一，至今仍备受关注，并不断引出有趣的未解问题 [BK22] ，且已应用于不同领域；参见 [DLGMM19,ALS17]等近期综述。

定理 1 （Helly 定理 [Hel23]）。 给定一个有限族 $\mathcal{F}$，其中诸集为 $\mathbb{R}^d$ 中的凸集，要么 $\bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing$，要么可以找到一个子族 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$，其至多有 $d+1$ 个元素且满足$\bigcap \mathcal{G} = \varnothing$。

人们很容易发现，这一性质并不局限于凸集，因为它在底层空间的任意同胚下都保持不变。在这篇综述中，我们研究 Helly 定理中的凸性在多大程度上可以由拓扑条件取代。更确切地说，我们聚焦于证明拓扑 Helly 型结果的两种不同方法。具体而言，第 2 节概述了借助神经引理或其变体证明的 Helly 型定理。第 3 节总结了类似方法如何被用于证明 Helly 定理的彩色变体和分数变体。第 4 节从不可嵌入性论证的角度探讨 Helly 型结果。鉴于近几年这一方向取得了显著进展，本节将作更详细的介绍，并说明各种思想如何相互结合，从而得出这些更新、更一般的结果。第 5节列出一些相关的开放问题。

为了简洁地介绍这一主题，我们先给出几个定义，以便更优雅地表述 Helly 定理及相关结果。

定义 2 (Helly 数 [DGK63])。 设 $\mathcal{C}$ 是一个集合族。我们将其 *Helly* 数 $h(\mathcal{C})$ 定义为满足以下性质的最小自然数 h：对于 $\mathcal{F}$中的每个有限子族 $\mathcal{C}$，若 $\bigcap \mathcal{F} = \varnothing$，则存在 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$，使得 $\bigcap \mathcal{G} = \varnothing$ 且 $|\mathcal{G}| \leq h$。如果不存在这样的数，则令 $h(\mathcal{C}) := +\infty$。

根据这一界定，Helly 定理指出， $\mathbb{R}^d$ 中的凸集的 Helly 数至多为 $d+1$。此外，这一界是紧的，考虑处于一般位置的超平面即可轻易看出这一点。

给定一个正整数 h，我们希望找出 $\mathcal{C}$ 的哪些性质能够保证 $h(\mathcal{C}) \leq h$。如前所述，我们在第2 节和第4节研究这个问题。在第2节中，我们考察基于所谓神经引理及其变体的结果。这种方法的优点是，所得的界通常是紧的。其缺点在于

˘ 两位作者均获得捷克科学基金会项目 25-16847S 的资助。1

这些集合需要满足神经引理的假设，通常要求它们全部是开集或全部是闭集，并且它们的同调在某些维数上必须是平凡的。

在第 4 节中，我们将探讨由不可嵌入性结果推导出的拓扑 Helly 型定理。这种方法的优点是可以去除神经引理中的额外假设。因此，即使对于既非开集也非闭集、且具有非平凡同调群的集合，也能对 Helly 数给出上界。缺点是，如果允许存在非平凡同调，所得的 Helly 数上界会迅速变得极大，而且很可能远非最优。

现在 介绍另一个定义，以及 Helly 定理的相关改写 .

定义 3（集合族的神经 [Ale28]）。给定一个集合 $\mathcal{C}$，其神经 $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ 定义为由 $\mathcal{H}$ 的所有有限子族 $\mathcal{C}$ 组成，满足 $\bigcap \mathcal{H} \neq \varnothing$。形式化地说，

$$\mathcal{N}(\mathcal{C}) := \left\{ \mathcal{H} \subseteq \mathcal{C} \mid \bigcap \mathcal{H} \neq \varnothing, \mathcal{H} \text{ finite} \right\}.$$

在这个定义 义，我们认为 $\bigcap \varnothing$ 始终非空，即 $\varnothing$ 始终属于 $\mathcal{N}(\mathcal{C}$).

显然， $\mathcal{N}(\mathcal{C})$是一个抽象单纯复形，也就是说，它是有限集的一个集合，并且若 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ 且 $\mathcal{Y} \in \mathcal{N}(\mathcal{C})$，则 $\mathcal{X} \in \mathcal{C}$亦然。

定义 4（缺失面）。若 K 是一个抽象单纯复形，且 $H \notin K$ 是满足 $|H| = k + 1$ 的有限集，使得 H 的每个真子集 S 都属于 K，则称 S 是 K的一个缺失 k面。

利用这一定义，可将 Helly 定理改述为如下形式。若 $\mathcal{C}$ 表示 $\mathbb{R}^d$中所有凸集构成的族，则 $\mathcal{N}(\mathcal{C})$不含任何带有$k > d$的缺失 k-面。

在第3 节中，我们研究 $\mathcal{N}(\mathcal{C})$的拓扑性质、 $\mathcal{C}$ 的 Helly 数以及其他相关参数（如分数 Helly 数或彩色 Helly 数）之间的相互作用。

记号与预备知识。我们用 $\bigcap \mathcal{F}$作为 $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$的简写。按照惯例，我们认为 $\bigcap \varnothing$ 始终非空。类似地， $\bigcup \mathcal{G}$表示 $\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$和 $\bigcup \varnothing = \varnothing$。对于欧几里得空间中的集合 S，conv S 表示其凸包。

全文中我们使用代数拓扑的标准术语：符号Δ_n表示以 e_1、e_2、.....、e_{n+1}为顶点的标准 n维单形。若 K是一个单纯复形， $K^{(k)}$ 表示它的 k骨架，也就是其所有维数至多为 k的面的并集。符号 $\mathbb{Z}_2$ 表示 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，即模二整数环。若 S是拓扑空间 X的子集，∂S 表示它的边界。拓扑空间 X 的第 i个同调群（系数取环 R ）记为 $H_i(X; R)$，其约化版本记为 $\widetilde{H}_i(X; R)$。最常见的选择是 $R = \mathbb{Z}$、 $R = \mathbb{Z}_2$或 $R = \mathbb{Q}$。若 R 是一个域，则 $\widetilde{H}_i(X; R)$作为 R 上的向量空间的维数称为第 i个约化贝蒂数，记为 $\tilde{\beta}_i(X; R)$。根据同伦群的定义，如果每个连续映射 $f\colon \partial\Delta_{k+1} \to X$ 都能延拓为连续映射 $f\colon \Delta_{k+1} \to X$，那么 X 的k阶同伦群 $\pi_k(X)$就是平凡的。若拓扑空间 X 满足对所有 $k \leq d$， $\pi_k(X)$均为平凡群，则称其为 d连通的。若 X 是 d连通的，则对于所有 $i \leq d$ 及所有环 R，都有 $\widetilde{H}_i(X; R) = 0$ 。

如需进一步了解代数拓扑，可参阅经典著作 [Hat02，Mun84]。

2. Topological Helly-type theorems from the nerve lemma

第一个基于拓扑假设的 Helly 型定理由 Helly 本人提出。

定理 5. [Hel30]设 $\mathcal{C}$ 为开集族，位于 $\mathbb{R}^d$，使得任意子族的交集要么可缩[1]，要么为空，则 $h(\mathcal{C}) \leq d+1$。

这可以很容易地看作神经定理的直接推论。

定理 6. [Ler45, Bor48, Wei52, McC67] 设 $\mathcal{C}$ 是豪斯多夫拓扑空间中的一族开集，使得任意非空有限子族 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ 的交集要么为空，要么可缩，则 $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ 与 $\bigcup \mathcal{C}$同伦等价。

我们注意到，Leray [Ler45] 与 Borsuk [Bor48] 最初的神经定理考虑的是闭集。开集后来在 Weil [Wei52] 或 McCord [McC67]的工作中才被考虑。关于神经定理更详细的历史概述，我们参阅 [BKRR23]。

定理 5 由定理 6的证明。 若缺少一个 k-面 S 属于 $\mathcal{N}(\mathcal{C})$，则神经定理表明，来自 S 的集合之并具有非平凡的 $(k-1)$ 阶同调，因为同伦等价的空间具有同构的同调群。然而，对于任意开集 G 属于 $\mathbb{R}^d$，$H_i(G;\mathbb{Z}) = 0$ 对于 $i \geq d$成立。这表明 $k-1 \leq d-1$，如所需。 □

通过考虑神经定理的更强形式，人们得到了 Helly 型结果的若干推广。沿着这一方向，最一般的表述可能要归功于 Montejano。

定理 7 ([Mon14])。 设 X 是一个具有如下性质的（旁紧 *Hausdorff*）拓扑空间： $\widetilde{H}_t(U;\mathbb{Z}) = 0$ 对 $t \geq d$ 成立，且对每个开子集 U 属于 X 也成立。则 $\mathcal{F}$ 中一个由开集组成的有限族 X 具有非空交集，若对任意 $1 \leq j \leq d+1$ 以及任意F_1、.....、 $F_j \in \mathcal{F}$，

$$\widetilde{H}_{d-j}\left(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_j;\mathbb{Z}\right) = 0.$$

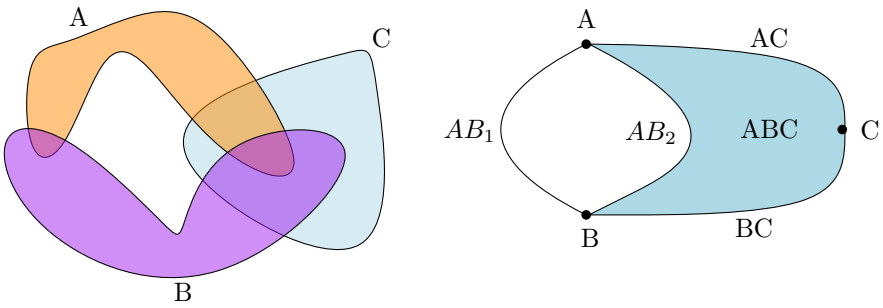
(这里注意，根据定义 $\widetilde{H}_{-1}(G;\ \mathbb{Z}) = 0$ 意味着 G 非空。)

我们注意到，在 Montejano 发表这一结果之前，该结果本身就已为人所知。例如，它可由定理 10推出，该定理证明于 [CGG14], ，其首个版本比 Montejano 的结果早了数年。新颖之处在于 Montejano 的方法：他没有直接使用神经定理，而是利用 Mayer-Vietoris 长正合列和归纳法计算同调，从而给出了一个简单得多的证明。

到目前为止，我们介绍的定理只涉及相关同调~群为平凡群的族。在下一个定理中 H_0，该群可以非零。遵循 [CGG14], 的作者们的做法，我们先介绍一个更易读、但未达到完全一般性的结果版本。

定理 8 （[CGG14]）。 设 X 是局部弧连通[2] 拓扑空间，且 d是最小的整数，使得对所有 $j \geq d$ 每个开集 $G \subseteq X$ 均满足 $\widetilde{H}_j$（G；$\mathbb{Q}$） $= 0$。

[1]如果一个集合可以通过连续变形收缩到一个点，那么它就是可缩的。[2]如果集合 U中的任意两点 u, $v \in U$之间都存在连续映射 $\gamma\colon[0,1] \to U$，满足 $\gamma(0) = u$ 和 $\gamma(1) = v$，且 γ 是从 $[0,1]$ 到其像的同胚，那么该集合就是弧连通的。如果对于拓扑空间X 中的每个点 $p \in X$ 和每个开集 $U \ni x$，都存在一个弧连通的开集 V满足 $p \in V \subseteq U$，那么该空间称为局部弧连通。



三个集合的集合（左侧）及其对应的多重神经（右侧）。由于 A 与 B 的交集由两个连通分支组成，因此有两条边 AB_1和 AB_2 连接点 A 和 B。交集 $A \cap B \cap C$ 只包含 $A \cap B$的一个连通分支。因此，在多重神经中，只有一个由边 AB_2、 AC 和 BC围成的三角形ABC 。

FIGURE 1. 多重神经的一个例子

假设 $\mathcal{F}$ 是 X的开子集族，并且对于每个非空的 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$，$\bigcap \mathcal{G}$至多有 r个连通分支，且满足 $\widetilde{H}_i(\bigcap \mathcal{G};\ \mathbb{Q}) = 0$对所有 $i \geq 1$均成立。那么$h(\mathcal{F}) \leq r(d+1)$。

为了完整地陈述该定理，我们引入以下概念。

定义 9 ([CGG14])。 设 $\mathcal{F}$ 是局部弧连通拓扑空间中的一族开集。我们称 是具有松弛量的无环族 s ，如果对每个非空子族$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$,

$$\widetilde{H}_i(\bigcap \mathcal{G}; \mathbb{Q}) = 0 \qquad \text{for all } i \geq \max(1, s - |\mathcal{G}|).$$

定理 10 ([CGG14])。 设 X 是一个局部弧连通拓扑空间，且 d是满足以下条件的最小整数：对于所有 $j \geq d$ 以及所有开集 $G \subseteq X$， $\widetilde{H}_j(G;\ \mathbb{Q}) = 0$。

假设 $\mathcal{F}$ 是 X 中一个带有松弛量 s的无环开集族，使得对于其中每个至少包含 t 个集合的子族 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$， $\bigcap \mathcal{G}$ 的连通分支数至多为 r ，那么

$$h(\mathcal{F}) \leq r \cdot (\max(d, s, t) + 1)\,.$$

为了证明这些定理，作者引入了多重神经 $\mathcal{M}(\mathcal{F})$。多重神经与神经相似，但有一个关键的额外性质：如果 $\bigcap \mathcal{G}$ 有 k个连通分支，那么多重神经中的交集并非由一个单形表示，而是由 k 个不同的单形表示。因此，在多重神经中，不同单形可能具有相同的顶点集；图1对此作了说明。因此，多重神经不再是单纯复形，而是一个单纯偏序集。有关技术细节和恰当的定义，请参阅 [CGG14]。

对于这种构造，存在一个神经引理的变体。

定理 11 (多重神经定理 [CGG14])。 设 X 是一个局部弧连通的拓扑空间，且 $\mathcal{F}$ 是 X的一个开子集族。若 $\mathcal{F}$ 是具有松弛量 s的无环$\widetilde{H}_j(\mathcal{M}(\mathcal{F})) \cong \widetilde{H}_j(\bigcup \mathcal{F})$ 对 $j = 0$ 以及所有 $j \geq s$都成立。

定理 10 的证明使用一个谱序列，它联系了 $\mathcal{N}(\mathcal{F})$的同调与 $\mathcal{M}(\mathcal{F})$的同调。

人生中一如既往，没有什么是万能的，目前已知的神经引理也不例外。最后，我们讨论本节所介绍方法的局限性。

为了将多重神经定理置于更广阔的背景中，可以将多重神经的构造和多重神经定理视为同伦余极限的一个特例。给定拓扑空间 $\mathcal{F}$中的一个集合族 X，同伦余极限是一种构造，它建立一个良好的拓扑空间 T，该空间与 $\bigcup \mathcal{F}$ 仅根据交集的同伦类型构造的空间相似$\bigcap \mathcal{G}$，其中 $\mathcal{G}$遍历 $\mathcal{F}$的所有非空子族。详情请参见 [BKRR23]。随后，同伦余极限 T通过谱序列与神经 $\mathcal{N}(\mathcal{F})$相关联。遗憾的是，在一般情形下，这个谱序列很难全面分析。迄今为止，只有在相关同调群平凡时才完成了分析，由此得到了定理10。

3. Topological properties of the nerve

本部分综述将探讨与 Helly 数以及神经的各种拓扑条件相关的多种性质，这些条件可以推出这些性质。

定义 12 (d-可塌缩性 [Weg75])。设 K 是一个单纯复形。设 σ 是 K 的一个维数为 $< d$ 的面，且它包含于唯一一个极大面[3] 之中。设 K。令 L 为从 K 中移除 σ 及所有包含它的面后得到的复形。则称 L可由 K 经一次初等 d-塌缩得到。

若复形 K 是 d-可塌缩的，则存在一系列初等 d-塌缩，可将其缩减为一个点。

若 K 是 d-可塌缩的，则 K 的任意诱导子复形也都是 d-可塌缩的。这是因为 K 的塌缩序列也会导出该诱导子复形的塌缩序列。因此，若 $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ 是 d-可塌缩的，则 $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ 中不存在满足$k > d$的缺失 k-面。由此，任何具有 d-可塌缩神经的族 $\mathcal{F}$，其 Helly 数至多为$d+1$。结合 Wegner [Weg75] 的结果——任意凸集有限族在 $\mathbb{R}^d$ 中的神经都是 d-可塌缩的——我们便得到 Helly 定理（定理 1）的又一个证明。遗憾的是，检验 d-可塌缩性是一个 NP 完全问题，即使在 $d \geq 4$的情形下也是如此，参见 [Tan10]。

与 d-可塌缩性密切相关的是 d-Leray性这一概念。

定义 13. 设 K 为一个单纯复形，R 为一个系数环。若对每个诱导子复形 L 以及每个 $i \geq d$，均有 $\widetilde{H}_i(L; R) = 0$，则称$K$ 在 R上是 d-*Leray* 的。

由于初等 d-塌缩不会改变同调群 $\widetilde{H}_i(L; R)$（其中 $i \geq d$），我们立即得到，任何 d-可塌缩复形都是 d-Leray的。显然，若 K 是 d-Leray的，则在 K中不存在缺失的 k-面（其中 $k > d$）。因此，$\mathcal{N}(\mathcal{F})$是 d-Leray的条件，比 $h(\mathcal{F}) \leq d+1$更强。

事实证明，许多最初针对凸集证明、随后推广到具有 d-可塌缩神经的族的命题，在较弱的假设下也成立，即神经是 d-Leray的；参见定理15 和17。

当与以下定理8的变体结合时，这非常有用：

定理 14 ([CGG14])。设 X 是一个局部弧连通拓扑空间，且 d是最小整数，使得对于所有 $j \geq d$ 以及所有开集 G，我们有 $\widetilde{H}_j(G; \mathbb{Q}) = 0$。

[3]极大面是 K在包含关系下的极大面。

假设 $\mathcal{F}$ 是 X 中的一个开集族，其松弛度为 s，并且对于每个至少包含 t 个集合的子族$\mathcal{G} \subseteq F$，$\bigcap \mathcal{G}$至多有 r 个连通分支，那么 $\mathcal{N}(\mathcal{F})$是 k-*Leray*，对于 $k = r \cdot$(最大值(d, s, t) + 1) − 1。

一个最初针对凸集证明、随后被推广到 d-Leray 复形的定理的首个例子，是分数 Helly 定理；该定理最初由 Katchalski 与 Liu 针对凸集证明 [KL79]。这些界后来由 Kalai [Kal84] 改进至最优，最终该定理被证明对所有其神经为 d-Leray 的族成立。

定理 *15*（关于 d-*Leray* 复形的分数 *Helly* 定理 [*AKMM02*，定理 12]）。对每个正整数 d，下列结论成立。若一个具有 v 个顶点的 d-*Leray* 单纯复形 K 至少包含 $\alpha \cdot \binom{v}{d+1}$ 个维数为 d 的面，$\alpha \in (0, 1)$，则 K 包含一个具有 $\beta_d(\alpha) \cdot v$ 个顶点的面，其中 $\beta_d(\alpha) = 1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{d+1}}$。

一般位置的超平面表明，即使在凸集的情形下，数量 $d + 1$ 也不能再降低。

在完整陈述下一个定理之前，我们先回顾一个关于凸集的初步版本，它比较容易理解。

定理16 (彩色海利定理 [Lov74])。设 $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{d+1}$ 是 $d + 1$ 中的有限凸集族 $\mathbb{R}^d$。若对每一种选取 $C_1 \in \mathcal{C}_1, C_2 \in \mathcal{C}_2, \ldots, C_{d+1} \in \mathcal{C}_{d+1}$, $C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_{d+1} \neq \varnothing$，则存在某个 $i, \bigcap \mathcal{C}_i \neq \varnothing$。

定理17 (针对 d-Leray 单纯复形的彩色海利定理 [KM05])。设 K 是一个 d-*Leray* 单纯复形，其顶点集为 V。设 M 是 V 上的拟阵复形，满足$M \subseteq K$。设 ρ 是 M的秩函数。那么存在某个单形 $\sigma \in K$ 使得$\rho(V \setminus \sigma) \leq d$。

虽然乍看之下并不明显，但该定理推广了定理16。事实上，设 K为 $\bigcup \mathcal{C}_i$的神经。由 [Weg75]，该复形是 d-可塌缩的，因而也是 d-Leray的。我们通过规定 $\rho(S)$为使得 $S \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_i$成立的最小 $|I|$ 来定义M。（换言之，$\rho(S)$计算的是 S中所用颜色类 $\mathcal{C}_i$ 的个数。）条件 $M \subseteq K$ 对应于如下条件：对每一个选择 $C_1 \in \mathcal{C}_1$、$C_2 \in \mathcal{C}_2$、……、$C_{d+1} \in \mathcal{C}_{d+1}$、$C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_{d+1} \neq \varnothing$以及 $\rho(V \setminus \sigma)$，$\leq d$ 表明 σ 包含一个完整的颜色类 $\mathcal{C}_i$（因而 $\bigcap \mathcal{C}_i \neq \varnothing$ 如同 $\sigma \in K$）。

定理 17 已在组合几何与图论中得到应用；参见例如 [Hol20、HK17、AHJ19、KL22]。Kalai与Meshulam进一步将定理 17细化到相对情形 [KM21]。

以下定理是一个例外：大多数最初针对 $\mathbb{R}^d$ 中凸集的神经证明的定理，都可以推广到 d-Leray 复形。目前为止，这个定理仅对 d-可塌缩复形得到证明。

定理18 (针对 d-可塌缩复形的最优彩色分数 Helly 定理[BGT21])。设 K 是一个有限的 d-可塌缩单纯复形，并假设其每个顶点都恰好被赋予以下K种颜色之一：$d+1$种颜色{1, 2, …, $d+1$}。设 N_i表示颜色为 i的顶点集，且 n_i 表示 N_i的基数。称面 σ 为彩色的，如果它的所有顶点颜色互不相同。

若对于某个 $\alpha \in (0, 1]$，K，包含至少 $\alpha n_1 n_2 \cdots n_{d+1}$ 个彩色 d-面，则对于某些 $i = 1, \ldots, d + 1$，K，包含一个维数至少为 $\left(1 - (1 - \alpha)^{1/(d+1)}\right) n_i$ 的面，其所有顶点的颜色均为 i。

4. Helly type theorems from non-embeddability

证明 Helly 型定理的另一种方法，是将其与不可嵌入性结果联系起来。这种方法可追溯至 Radon；他运用 Radon 引理来证明 Helly 定理 [Rad21]。

我们将引理表述为一种能够将其与本节中的其他定理联系起来的形式 .

引理19 （Radon 引理 [Rad21]）。 对于每个线性映射 f 从 Δ_{d+1} 到 $\mathbb{R}^d$，存在两个不相交的面 τ，σ 它们属于 Δ_{d+1}，使得 $f(\tau) \cap f(\sigma) \neq \varnothing$。

注意，如果 f将 σ的顶点映射到 v_1、……、v_k，那么根据 f的线性性， $f(\sigma)$ 等于 conv{v_1、……、 v_k}。

Helly 定理是该引理的直接推论。

由 Radon 引理证明 Helly 定理（定理 1）。用反证法，假设 $\mathbb{R}^d$ 中凸集的 Helly 数大于 $d+1$。因此，存在 $n > d+1$ 个凸集 G_1、 G_2、 ……、 G_n，使得 $G_1 \cap \cdots \cap G_n = \varnothing$，并且对所有 $i = 1$、……、 n、 $\bigcap_{j\neq i} G_j \neq \varnothing$。因此，对每个 $i = 1$、……、 n，我们可以选取一点 p_i，它位于 $\bigcap_{j\neq i} G_j$ 中。设 $f\colon \Delta_{n-1} \to \mathbb{R}^d$ 为将 Δ_{n-1} 的顶点 e_i 映到点 p_i、 $i = 1$、……、 n 的线性映射。则对 Δ_{n-1} f 的每个非空面 σ $(\sigma) \subseteq \bigcap_{e_j\notin\sigma} G_j$。由于 $n \geq d+2$，Radon 引理给出 Δ_{n-1} 的两个不相交的面 σ、τ，使得 $f(\sigma) \cap f(\tau) \neq \varnothing$。但这样一来，该交集包含于 $G_1 \cap \cdots \cap G_n$ 中，故 $G_1 \cap \cdots \cap G_n$ 非空，矛盾。□

利用拓扑 Radon 引理，可以弱化 Helly 定理中的假设。

引理20 (拓扑 Radon 引理 [BB79])。 对于任意连续映射 f 从$(d+1)$-单形到 $\mathbb{R}^d$，存在两个不相交的面 τ， σ 它们的像相交。

由此立即得到以下 Helly 型定理:

定理21。 [Mat97] 设 $\mathcal{F}$是 $\mathbb{R}^d$中的有限集合族，且 $\bigcap \mathcal{F}'$对每个非空 d 都是 $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$-连通的。那么 $\bigcap \mathcal{F} = \varnothing$当且仅当至多有 $d+1$个集合F_1， F_2，……， $F_{d+1} \in \mathcal{F}$使得 $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{d+1} = \varnothing$。

证明。 首先，像前一个证明中那样选取集合 G_1，……， G_n，然后导出矛盾。唯一的区别在于，映射 f 并非由点 p_i确定，而必须逐步构造。首先，对每个 $i \neq j$，在$\bigcap_{k\neq i,j} G_k$内选取一条连接 p_i 与 p_j的路径。（由于 d-连通性，这样的路径存在。）然后，当所有连接 p_i 与 p_j、 $i \neq j$ 的路径都选定后，需要确定如何映射每个三角形，使其边界与映射中已指定的部分一致。（同样，由于 d-连通性，这是可行的。）继续这样填充，直到得到从 n-单形的$(d+1)$-骨架到 $\mathbb{R}^d$的映射。其余部分与之前相同，最后利用拓扑 Radon 定理完成。□

该定理显然推广了Helly原始结果。然而，若仅限于开集，则它被定理7和10所涵盖。不可嵌入性证明的优势在于其更大的可变性以及有趣权衡的可能性。我们现在说明这一现象：我们不使用拓扑Radon定理，而使用其变体van Kampen-Flores定理，并以 $h(\mathcal{F})$上稍差的界为代价弱化拓扑假设。

定理 22 ([vK32])。 对每一个连续映射 f，从 d-骨架（即$(2d+2)$维单形的骨架）映入 $\mathbb{R}^d$，存在两个不相交的面 σ， τ， 它们的像相交。

定理 23 ([GPP+17, Mat97])。 设 $\mathcal{F}$是 $\mathbb{R}^d$ 中的有限集合族，满足 $\bigcap\mathcal{F}'$对于每个非空 $\mathcal{F}'\subseteq\mathcal{F}$都是 $\bigcap\mathcal{F}'(\lceil d/2\rceil-1)$-连通的。则 $\bigcap\mathcal{F}=\varnothing$当且仅当存在至多 $d+2$个集合 F_1， F_2，……， $F_{d+2}\in\mathcal{F}$使得 $F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_{d+2}=\varnothing$。

定理 21 和 23 的一个主要缺点是，根据 Adian–Rabin 定理 [Rab58] 以及 [Hat02，命题 1，26] 无法通过算法判定给定空间是否是拓扑 d-连通的。甚至无法判定 $\pi_1(X)$是否是平凡的。利用 Radon 引理的同调版本（引理 25），我们可以用同调条件取代 d-连通性的同伦假设，而这些条件可以通过算法验证。[4]

为了表述这些结果，我们引入几个定义。增广链群之间的链映射$\varphi\colon\widetilde{C}_\bullet(\Delta_n;\mathbb{Z}_2)\to\widetilde{C}_\bullet(\mathbb{R}^d;\mathbb{Z}_2)$是一族线性映射 $\varphi_k\colon\widetilde{C}_k(\Delta_n;\mathbb{Z}_2)\to\widetilde{C}_k(\mathbb{R}^d;\mathbb{Z}_2)$，$k=-1,0,1,\ldots$，它们保持边界算子不变，即满足 $\partial\varphi_k=\varphi_{k-1}\partial$，对所有 $k\geq 0$均成立。这里要注意，左侧的链群是复形 Δ_n的单纯链群，而右侧使用的是 $\mathbb{R}^d$的奇异链群。

定义 24。 若 φ_{-1} 是同构，即 φ_0 将每个点映射为由奇数个非零系数组成的点链，则该链映射是非平凡的。

若 $z=\sum_{i\in I}a_i\sigma_i$ 和 $z'=\sum_{i\in I}b_i\sigma_i$ 是 $\widetilde{C}_k(\mathbb{R}^d;\mathbb{Z}_2)$中的两条链，当存在某些 i和 j, $a_i\neq 0$, $b_j\neq 0$及[5]使得 $\operatorname{Im}\sigma_i\cap\operatorname{Im}\sigma_j\neq\varnothing$时，我们称它们重叠。若不存在这样的指标对，则称 z 和 z'是不重叠的。

引理 25 (同调 Radon 引理 [GPP+17])。 对于每个非平凡链映射 φ从单纯链 $\widetilde{C}_\bullet(\Delta_{d+1};\mathbb{Z}_2)$到奇异链 $\widetilde{C}_\bullet(\mathbb{R}^d;\mathbb{Z}_2)$ 存在两个不相交的面 σ,τ 属于 Δ_{d+1}，使得 $\varphi(\sigma)$ 与 $\varphi(\tau)$ 重叠。

这可以转化为以下 Helly 型结果。

定理 26. [GPP+17] 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个有限集合族，满足

$$\widetilde{H}_i\Big(\bigcap\mathcal{F}';\mathbb{Z}_2\Big)=0\ \textit{for every non-empty}\ \mathcal{F}'\subseteq\mathcal{F}$$

并且每个 $i=0$、1、……、$d-1$。那么 $\bigcap\mathcal{F}=\varnothing$当且仅当存在 $d+1$个（不一定互不相同的）集合 F_1、F_2、……、$F_{d+1}\in\mathcal{F}$，使得 $F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_{d+1}=\varnothing$。

证明。 证明思路与前面相同。唯一的区别在于，交集不再要求拓扑连通，但关于同调的假设使我们能够归纳地构造所需的非平凡链映射。□

类似地，van-Kampen–Flores 定理也有一个同调版本

定理 27 ([GPP+17])。 对于每个非平凡链映射 φ，从单纯链$\widetilde{C}_\bullet(\Delta^{(d)}_{2d+2};\ \mathbb{Z}_2)$到奇异链 $\widetilde{C}_\bullet(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{Z}_2)$，存在两个不相交单形 σ， τ属于 $\Delta^{(d)}_{2d+2}$，使得 $\varphi(\sigma)$ 与 $\varphi(\tau)$ 重叠。

[4]前提是输入为机器可读格式。[5]注意， σ_i 是一个奇异的 k-链，即一个从 Δ_k 到 $\mathbb{R}^d$的连续映射。因此，讨论它的像是有意义的。

由此可得以下 Helly 型结果。

定理 28 ([GPP+17])。 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个有限集合族，满足 $\widetilde{H}_i\left(\bigcap \mathcal{F}';\ \mathbb{Z}_2\right) = 0$对所有 $i = 0$、1、.....、$\lceil d/2\rceil - 1$ 以及所有非空 $\mathcal{F}$⊆ $\mathcal{F}$均成立。则 $\bigcap \mathcal{F} = \varnothing$ 当且仅当存在至多 $d + 2$ 个集合 F_1、F_2、.....、$F_{d+2} \in \mathcal{F}$，使得 $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{d+2} = \varnothing$。

与基于神经引理的方法不同，不可嵌入性证明也能处理交集不连通的情况。Matoušek 给出了这一方向上的首批结果之一 [Mat97]。

定理 *29.* [*Mat*97] 对于所有非负整数 b 和 d，存在一个函数 $f(b, d)$，使得以下结论成立。若 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的有限集合族，且对于所有非空子族 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$，$\bigcap \mathcal{G}$ 至多有 b 个道路连通分支，每个分支在（拓扑意义上）都是 $(\lceil d/2\rceil - 1)$-连通的，则 $h(\mathcal{F}) \le f(b, d)$。

Matoušek 对 $f(b, d)$ 给出的原始界非常大，因为他的证明将 $f(b, d)$ 上界限定为超图 Ramsey 数 $R_{b+1}(2d + 3 + \binom{2d+3}{2})(b - 1); \binom{b+1}{2})$，也就是说，限定为这样一个数 N：对于一个含有 N 个元素的集合，对其 $(b + 1)$ 元组进行 $\binom{b+1}{2}$ 种颜色的任意着色，总能找到一个大小为 $2d + 3 + \binom{2d+3}{2})(b - 1)$ 的单色集。众所周知，这个数 N 大约按高度为 b 的塔函数增长，见 [GRS13]。

然而，正如近期所示 [Pat25], Matoušek 的证明技巧可以得到简化，界也可以得到改进，即使是在同调框架中。

定理 30。 [Pat25] 对于所有非负整数 b和 d，以下结论成立。若 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的有限集合族，且对所有非空子族 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$，$\bigcap \mathcal{G}$ 至多有b个道路连通分支，并且对所有 $\widetilde{H}_i(\bigcap \mathcal{G}; \mathbb{Z}_2) = 0$，$i = 1\,2$，.....，$\lceil d/2\rceil - 1$，则

$$h(\mathcal{F}) \le b \cdot \sum_{j=0}^{d+1} \binom{b+1}{2}^j = O(b^{2d+3}).$$

在 [GPP+17] 中，定理29 的证明技巧和结果已推广为以下形式。

定理 *31*（[*GPP*+17]）。对于所有正整数 b 和 d，存在一个正整数 h（b，d），使其具有以下性质。设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的有限集合族，满足对所有非空子族 $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ 以及所有 $i = 0$，*1*，.....，$\lceil d/2\rceil - 1$，均有 $\tilde{\beta}_i$（$\bigcap \mathcal{F}'$；$\mathbb{Z}_2$）$\le b$。那么 h（$\mathcal{F}$）$\le h$（b，d）。

该证明提出了若干新颖思路：同调不可嵌入性、受约束链映射、巧妙运用重心细分，以及反复应用 Ramsey 定理。另一个契机是，Pat´akov´a 意识到，定理 31 的证明实际上结合了两种论证 [Pat24]：一是 Radon 型结果的证明，二是 Levi 的经典论证，即 Radon 数有界意味着 Helly 数有界 [Lev51]。事实证明，Radon 数有界具有更广泛的普适性，因为与 Helly 数有界不同，它意味着分数 Helly 数有界 [HL21], 、Tverberg 数有界 [JW81, Buk10, P´a21], 、彩色 Helly 数有界 [HL21], 、弱 ε-网以及 (p, q)- 定理有界 [AKMM02, HL21]。目前尚不清楚能否将 [Pat25]and [GPP+17, Pat24] 的技术结合起来。

4.1. 广义凸性。 在介绍受约束链映射的技术之前，我们先引入广义凸性的一个有用概念。

给定拓扑空间 X 的一个子集族 $\mathcal{C}$ 和一个集合 $S \subseteq X$，我们定义

$$\operatorname{conv}_{\mathcal{C}}(S) := \bigcap_{S \subseteq F \in \mathcal{C}} F.$$

如果不存在满足 $S \subseteq F$ 的集合 $F \in \mathcal{C}$，我们令 $\operatorname{conv}_{\mathcal{C}}(S) := X$。

不难看出，$\operatorname{conv}_{\mathcal{C}}$ 是一个闭包算子（参见 [vdV93]），即一个从 X 的子集到 X 的子集的映射，并且具有以下性质：

扩张性： $S \subseteq \operatorname{conv}_{\mathcal{C}} S$ 对所有 $S \subseteq X$ 均成立，**单调性：** $S \subseteq T \subseteq X$ 蕴含 $\operatorname{conv}_{\mathcal{C}} S \subseteq \operatorname{conv}_{\mathcal{C}} T$，并且**幂等性：** $\operatorname{conv}_{\mathcal{C}}(\operatorname{conv}_{\mathcal{C}} S) = \operatorname{conv}_{\mathcal{C}} S$ 对所有 $S \subseteq X$ 均成立。

满足 $\operatorname{conv}_{\mathcal{C}} S = S$ 的集合称为 $\mathcal{C}$-闭集。例如，如果 $\mathcal{C}$ 是所有凸集构成的集合，那么 $\mathcal{C}$-闭集恰好就是通常意义上的凸集。

定理 32。 [Pat24] 存在一个数 $r(b, d)$，具有如下性质。设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个集合族，使得对于每个有限集 $S \subseteq \mathbb{R}^d$，

$$\tilde{\beta}_i(\operatorname{conv}_{\mathcal{F}} S; \mathbb{Z}_2) \leq b \quad \text{for all } i < \lceil d/2 \rceil.$$

那么，在每个含有 $r(b$ 个 $d)$ 点的集合中，都存在两个不相交子集 A 和 $B \subseteq P$，使得 $\operatorname{conv}_{\mathcal{F}} A \cap \operatorname{conv}_{\mathcal{F}} B \neq 0$。

定义 33。 [Lev51, Pat24] 设 $\mathcal{F}$ 是 X 的子集族。$\mathcal{F}$ 的 Radon 数 $r(\mathcal{F})$ 是满足以下条件的最小整数 r：在任意一个基数为 r 的集合 $P \subseteq X$ 中，都能找到两个不相交子集 P_1 和 $P_2 \subseteq P$，满足 $\operatorname{conv}_{\mathcal{F}}(P_1) \cap \operatorname{conv}_{\mathcal{F}}(P_2) \neq \varnothing$。如果不存在这样的 r，则令 $r(\mathcal{F}) = \infty$。

正如我们在本节开头所见，Radon 引理（引理 19）表明，$\mathcal{F}$ 中任意凸集族的 Radon 数 $\mathbb{R}^d$ 至多为 $d + 2$。通过考察 $d + 1$ 中的仿射无关点，可以很容易看出这个界是紧的 $\mathbb{R}^d$。Radon 利用该引理证明了 Helly结果。后来，Levi [Lev51] 表明，该证明在更广泛的情形下同样成立：任意一个 $\mathcal{F}$ Radon 数为 $k + 1$ 的集合族，其 Helly 数至多为 k。

由于定理 32 表明，任何满足给定假设的族 $\mathcal{F}$ 都满足$r(\mathcal{F}) \leq r(b, d)$，Levi 的结果立即推出，任何这样的族都满足 $h(\mathcal{F}) <r(b, d)$，这正是定理 31的陈述。关于该结果的直接推导，参见[Pat24，注释 4]。

现在我们来介绍证明定理 32所用的主要技巧：受约束链映射方法和同调子式（第 4.2 节）；以及关于闭包算子的 Ramsey 型结果（第 4.3 节）。其中一些思想已出现在定理 21、23 和 26的证明中。这两种技巧各自都很有意义，即使在 Helly 型定理领域之外也可能有应用。

4.2. **受约束链映射与同调子式。** 设$\mathbf{R}$为一个拓扑空间，K 为一个有限单纯复形，$\gamma_\bullet : \widetilde{C}_\bullet(K, \mathbb{Z}_2) \to \widetilde{C}_\bullet(\mathbf{R}\ \mathbb{Z}_2)$ 是从 K 的单纯链到$\mathbf{R}$的奇异链的链映射。回忆一下，链映射 $\gamma_\bullet$ 是非平凡的，如果 K 中每个顶点的像都是$\mathbf{R}$ 中的有限点集，且其基数为奇数，参见定义24。

定义 34。 [Wag11] 若单纯复形 K 是R的**同调子式**，则称之为 $\gamma_\bullet\colon \widetilde{C}_\bullet(K,\mathbb{Z}_2) \to \widetilde{C}_\bullet(\mathbf{R}\ \mathbb{Z}_2)$ 这样的非平凡链映射满足：不相交单形映射为互不重叠的链。如果不存在这样的链映射，我们称 K 是R的**禁同调小子**。

定义 35. [Pat24] 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbf{R}$ 中的一个集合族，且 P 是 $\mathbf{R}$中的一个点集。若存在映射 $\gamma_\bullet : \widetilde{C}_\bullet(K,\mathbb{Z}_2) \to \widetilde{C}_\bullet(\mathbf{R}\ \mathbb{Z}_2)$，使得链映射受 $(\mathcal{F}, P)$ 约束，则称其为受约束链映射 $\Phi : K \to 2^P$：[6]

(1) $\Phi(\sigma \cap \tau) = \Phi(\sigma) \cap \Phi(\tau)$ 对任意 $\sigma, \tau \in K$ 均成立，且 $\Phi(\varnothing) = \varnothing$；(2) 对任意单形 $\sigma \in K$， $\gamma_\bullet(\sigma)$ 的支撑包含于 $\mathrm{conv}_{\mathcal{F}}\Phi(\sigma)$。

受约束链映射具有以下重要性质 [Pat24，引理 3.5]：若非平凡链映射 $\gamma_\bullet$ 受 $(\mathcal{F}, P)$ 约束，则要么 K 是 R 的一个同调子式，要么 P 中存在两个不相交子集 A, B，满足 $\mathrm{conv}_{\mathcal{F}} A \cap \mathrm{conv}_{\mathcal{F}} B \neq \varnothing$。因此，要证明 $r(\mathcal{F}) \leq r$，只需对每个基数为 r 的 $P \subset \mathbf{R}$，构造一个非平凡链映射 $\gamma_\bullet : \widetilde{C}_\bullet(K,\mathbb{Z}_2) \to \widetilde{C}_\bullet(\mathbf{R}\ \mathbb{Z}_2)$，其中 K 是 R 的一个禁同调小子，且 $\gamma_\bullet$ 受 $(\mathcal{F}, P)$ 约束。以下命题说明了满足某些附加假设的 $\mathcal{F}$ 所对应的此类链映射的存在性。

命题 36。 [Pat24，命题 3.6 和 3。7] 设 K 是 $\mathbf{R}$ 的禁同调小子，且 b 是一个非负整数。则存在常数 r，它取决于 K 和 b，使得以下结论成立。对于 $\mathcal{F}$ 中的任意集合族 $\mathbf{R}$，满足

$$\tilde{\beta}_i(\mathrm{conv}_{\mathcal{F}} S;\mathbb{Z}_2) \leq b \quad \textit{for all } i < \dim K \quad \textit{and any finite set } S,$$

以及任意基数为 r 的 $P \subset \mathbf{R}$，都存在非平凡链映射 $\gamma_\bullet : \widetilde{C}_\bullet(K,\mathbb{Z}_2) \to \widetilde{C}_\bullet(\mathbf{R}\ \mathbb{Z}_2)$，该映射受$(\mathcal{F}, P)$约束。

定理 32 由命题 36 和定理 27 推出，定理 27 表明 $K = \Delta^{(d)}_{2d+2}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的禁同调小子。

4.3. **Ramsey**。 此处的阐述经过压缩，详情及示例请参阅 [Pat24，第3节。3]。固定一个集合 X 和正整数 k，c。对于每个 $V \subseteq X$，令$\rho_V\colon \binom{V}{k} \to [c]$为 k 元子集的一个着色 V。若 $|V| < k$，按定义，着色 ρ_V是空映射。

设 $Y \subseteq X$, m 为正整数， $M : \binom{Y}{m} \to 2^{X\setminus Y}$，并令 $\widehat{Z} := M(Z)$。若每个 Y 的 m 元子集 Z 在着色 $\rho_{Z\cup\widehat{Z}} :\binom{Z\cup\widehat{Z}}{k} \to [c]$下都是单色的，即 Z 的所有 k 元子集在着色 $\rho_{Z\cup\widehat{Z}}$ 下颜色相同，则称映射 $M\colon \binom{Y}{m} \to 2^{X\setminus Y}$ 为 k- 单色映射。

若对于任意 $Z \neq Z'$，都有 $M(Z) \cap M(Z') = \varnothing$，则称映射 $M : \binom{Y}{m} \to 2^{X\setminus Y}$ 为强单射。

命题*37*。 [*Pat24*，命题*3*。9] 对任意正整数 k, m, n, c，存在一个常数$N_k = N_k(n; m; c)$，使得以下结论成立。设 X 是一个集合，并且对于每个 $V \subseteq X$，令$\rho_V\colon \binom{V}{k} \to [c]$ 为 V 的 k 元子集的一种着色。如果 $|X| \geq N_k$，那么总存在一个 n 元子集 $Y \subseteq X$ 以及一个强单射的 k-单色映射$M : \binom{Y}{m} \to 2^{X\setminus Y}$。

[6] As 如 [Pat25] 只需假设 $\sigma \cap \tau = \varnothing \Rightarrow \Phi(\sigma) \cap \Phi(\tau) = \varnothing$ 在点（1）

4.4. 命题 36 的证明概要。我们将提供一个扩展概述，并说明如何将 Ramsey 型结果与受约束链映射方法结合起来。详情请参见 [Pat24]。所需的链映射 $\gamma_\bullet\colon \widetilde{C}_\bullet(K,\mathbb{Z}_2) \to \widetilde{C}_\bullet(\mathbf{R},\mathbb{Z}_2)$ 通过对 $\dim K$ 进行归纳法构造。若 $\dim K$ 是零维的，那么 K 是一个由顶点组成的集合，它们很容易映射到 P 中的点。请注意，这对 P 的基数提出了条件：它必须至少与 K 的顶点数一样大。在归纳步骤中，我们按如下方式进行。令 t 表示 K 的维数。为了构造所需的映射 $\gamma_\bullet\colon \widetilde{C}_\bullet(K;\mathbb{Z}_2) \to \widetilde{C}_\bullet(\mathbf{R};\mathbb{Z}_2)$，我们希望找到

$$\text{a constrained chain map } \chi_\bullet\colon \widetilde{C}_\bullet\big(K^{(t-1)};\mathbb{Z}_2\big) \to \widetilde{C}_\bullet\big(\mathbf{R};\mathbb{Z}_2\big) \text{ such that}$$
$$\text{for each } t\text{-dimensional simplex } \sigma \text{ of } K,$$

(♣) $\chi_{t-1}(\partial\sigma)$ 属于 $\widetilde{H}_{t-1}(\mathrm{conv}_{\mathcal{F}}\,\Phi(\sigma))$ 中的平凡同调类。

有了这样的映射，将其扩展到 $\gamma_\bullet\colon \widetilde{C}_\bullet(K;\mathbb{Z}_2) \to \widetilde{C}_\bullet(\mathbf{R};\mathbb{Z}_2)$ 是直接的。事实上，由于 $\chi_{t-1}(\partial\sigma)$ 在 $\mathrm{conv}_{\mathcal{F}}\,\Phi(\sigma)$ 中具有平凡同调，它是一个边界，即存在一个链 $\gamma_\sigma \in \widetilde{C}(\mathrm{conv}_{\mathcal{F}}\,\Phi(\sigma))$，使得 $\partial\gamma_\sigma = \chi_{t-1}(\partial\sigma)$，因此我们可以对所有 $k \le t-1$ 设置 $\gamma_k = \chi_k$，并通过设置 $\gamma_t(\sigma) = \gamma_\sigma$ 将其扩展到整个复形 K。

下面仍需描述（♣）的构造。令 $\mathrm{sd}\,K$ 表示 K的重心细分。然后，映射 $\chi_\bullet$ 由以下复合映射得到

$$\widetilde{C}_\bullet\big(K^{(t-1)};\mathbb{Z}_2\big) \xrightarrow[\textit{subdivision}]{\alpha} \widetilde{C}_\bullet\Big((\mathrm{sd}\,K)^{(t-1)};\mathbb{Z}_2\Big) \xrightarrow[\textit{Ramsey}]{\beta} \widetilde{C}_\bullet\big(L;\mathbb{Z}_2\big) \xrightarrow[\textit{induction}]{\gamma'} \widetilde{C}_\bullet\big(\mathbf{R};\mathbb{Z}_2\big),$$

其中，α 将每个 ℓ 维单形 σ 映射为 $\mathrm{sd}\,\sigma$ 中的 ℓ 维单形之和，而 L 是一个由足够多顶点构成的单形的 $(t-1)$ 维骨架，因此我们可以使用 Ramsey 定理（详情稍后说明）。令 $V(L)$ 表示 L的顶点集。由于 L 的维数为 $t-1$，根据归纳法可知，当 P充分大时，存在一个受（$\mathcal{F}, P$）约束的非平凡链映射 γ'。令 $\Psi_0\colon L \to 2^P$见证这些约束。随后，以自然的方式将映射 Ψ_0 扩展到 $\Psi\colon 2^{V(L)} \to 2^P$，详情见 [Pat24]。

我们要求 L 至少有 $N_{t+1}(n,m,c)$ 个顶点，其中 $N_{t+1}(\cdot,\cdot,\cdot)$ 由命题 37 给出，n 是 K 的重心细分的顶点数，m 是一个 t 维单形的重心细分的顶点数，而 c 是 S 有限时，$\widetilde{H}_t(\mathrm{conv}_{\mathcal{F}}\,S,\mathbb{Z}_2)$ 中元素个数的最大值。根据我们的假设，$c \le 2^b$。

对于每个 $\tau \subseteq V(L)$，我们考虑着色 ρ_τ，它为 $t+1$ 个顶点上的每个 $\sigma \subseteq \tau$ 指定一个位于 $\mathrm{conv}_{\mathcal{F}}(\Psi(\tau))$ 内的 $\gamma'(\partial\sigma)$ 的奇异同调类。也就是说，L 的顶点在 Ramsey 情形中扮演 X 的角色。命题37为我们给出 n 元子集 Y，它是 $V(L)$ 的子集，以及一个强单射的 $(t+1)$ 单色映射。令 β 为由包含映射 $V(\mathrm{sd}\,K)$ 到 Y 所诱导的映射。基于 Ψ，我们可以定义 $\Phi : K \to 2^P$，并且可以证明，强单射性使 Φ 满足定义 35 中的条件 (1)。选择 Ψ 则确保满足同一定义中的条件 (2)；详情见 [Pat24]。换言之，链映射 $\chi_\bullet$ 受（$\mathcal{F}$，P）约束。$(t+1)$ 单色性意味着，若取 K 中的一个 t 维单形 τ，则对于所有 t 维单形 $\rho \in \mathrm{sd}\,\tau$，$\gamma'\beta(\partial\rho)$ 在 $\widetilde{H}_{t-1}(\mathrm{conv}_{\mathcal{F}}\,\Phi(\tau))$ 内的奇异同调类都相同。由于这类 ρ 的数量为偶数，且我们使用 $\mathbb{Z}_2$ 系数，它们的和是一个同调平凡的圈，正如 (♣) 中所要求的。最后，所构造的链映射 $\chi_\bullet$ 非平凡，因为 γ' 非平凡。

最优性。由于我们在定理 32 的证明中迭代使用 Ramsey 型论证，因此不能指望常数 $r(b,\ d)$ 的界是最优的。不过，从所有 $\tilde{\beta}_i,\ 0 \le i < \lceil \frac{d}{2} \rceil$ 都必须有界这一意义上说，该结果是最优的，见 [Pat24，例 5。1]。定理 32 中目前已知的 Radon 数界仅适用于 $b = 0$；在这种情况下，Radon 数至多为 $d+3$，且此界是紧的 [Pat24，定理 5。2]。

我们注意到，定理 32 保留了定理 7的某些特点。更具体地说，为了得到定理 i阶同调 $\bigcap \mathcal{G}$，对于某个 $\mathcal{G}$具有某种大小的 i，我们只需加以控制，而该大小取决于。类似地，从定理32 的证明可以推出，在同调群平凡的情况下，该定理可以加强为以下形式。

定理 38。设 $b = 0$，且 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个集合族。如果对于每个 $i = 0$、1、.....、$\lceil d/2 \rceil - 1$，$\tilde{\beta}_i(\mathrm{conv}_{\mathcal{F}} S;\ \mathbb{Z}_2) \le b$，对于所有基数为 $i+2$ 的集合 S 都成立，那么 $r(\mathcal{F}) \le d+2$。

该表述也可以推广到 $b > 0$，不过，$|S|$的基数对 i 的依赖会变得更加复杂。

进一步的结果。定理32是针对欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$表述的；然而，正如我们上文所见，受约束链映射方法适用于任何具有禁同调小子的拓扑空间。我们将其表述为一个定理。

定理 39。存在一个数 $r_K(b)$，使得以下性质成立。设 K 是一个有限单纯复形，$\mathbf{R}$是一个拓扑空间，且 K 是$\mathbf{R}$的一个禁同调小子。设 $\mathcal{F}$ 是$\mathbf{R}$ 中的一个集合族，使得对每个有限集合 $S \subseteq \mathbf{R}$，

$$\tilde{\beta}_i(\mathrm{conv}_{\mathcal{F}} S; \mathbb{Z}_2) \le b \quad \textit{for all } i < \dim K.$$

那么 $\mathcal{F}$ 的 *Radon* 数至多为 $r_K(b)$。

证明见 [Pat24，命题 3.6 和 3。7] 以及上文。

请注意，只要我们知道流形具有禁同调小子，上述定理就适用于流形。对于每个实流形是否都存在禁同调小子，仍是一个开放问题。同样，该结论也适用于（有限）k维单纯复形，因为这些复形都可嵌入 $\mathbb{R}^{2k+1}$。

相关结果的另一个方向来自 Holmsen 和 Lee 的一个优美结果 [HL21]：该结果指出，只要我们有一个带有闭包算子 conv$_{\mathcal{C}}$ 和 Radon 数 r的空间 X，那么 $\mathcal{C}$ 的分数 Helly 数就有一个上界，即某个较大的常数 $f(r)$；该常数只取决于 r，而与 $\mathcal{C}$ 本身无关。为此，我们注意到，若存在一个整数 m和一个函数$\beta : (0,1] \to (0,1]$ 满足以下条件，则一个族$\mathcal{C}$ 具有阶数为 m的分数 Helly 性质：每个包含至少 $\alpha\binom{|\mathcal{G}|}{m}$个相交的 m 元组的有限子族 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}$，都包含一个大小至少为$\beta(\alpha)|\mathcal{G}|$的相交子族。使 $\mathcal{C}$ 满足阶数为m的分数 Helly 性质的最小整数 m，称为 $\mathcal{C}$的分数 Helly 数。关于凸性空间中的 Helly 型问题，更多详情请参阅 Holmsen [Hol24]最近的一篇综述。

根据 Alon、Kalai、Matou˘sek 和 Meshulam 的一种标准方法，[AKMM02]，有界的分数 Helly 数保证存在一个 (p,q)-定理以及 ε-网，另见[HL21]。定理32 基本上说明，在交集的同调满足常数条件的假设下，Radon 数有界；上述定理也可推广到这一情形 [HL21、Pat24]。主要缺点是分数 Helly 数非常大。Pat´akov´a [Pat24]在 $\mathbb{R}^2$ 将其降至关于 b的线性函数

，且 $b = 0$ 的取值达到最优。Goaoc、Holmsen、Pat´akov´a [GHP24] 进一步取得了显著改进，他们着重研究分数 Helly 定理和 (p, q)-定理。事实上，他们证明分数 Helly 数为 $d + 1$，并且在交集具有有界同调的假设下，(p, q)-定理对 $p \geq q \geq d + 1$ 成立。他们的证明相当复杂。他们引入了“同调”条件的一个彩色类比，并证明了弱彩色赫利定理。为了处理彩色类的 m-部结构，他们采用立方复形而非单纯复形，定义了受阶梯凸性启发的链映射，并以子网格引理取代拉姆齐型命题 [GHP24，命题 4，1], 这一结果本身也可能具有独立价值。

此外，以下结果说明了为什么 α 在分数赫利型定理中被假设为固定常数。更准确地说，如果我们有一个 $\mathcal{F}$ 个 n 集合组成的族，使得对于每个子族 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$，其交集要么为空，要么是道路连通的，那么根据前面的讨论， $\mathcal{F}$ 的分数 Helly 数至多为 3，见 [GHP24]。这意味着，如果来自 $\mathcal{F}$ 的集合中有立方数量级的三元组发生交集，则所有集合中有非平凡比例的集合彼此相交。以下定理以一种强形式表明，仅假设三元组之间有平方数量级的交集是不充分的。

定理 40 ([KP20])。 对于任意 $n \geq 6$，存在一个由 $\mathcal{F}$ 个 n 集合组成的族，其中每个子族的交集要么为空，要么是道路连通的，并且满足以下条件： $\mathbb{R}^2$

- 对于任意 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$，若有 $|\mathcal{G}| \geq 4$，则 $\bigcap \mathcal{G} = \varnothing$。
- 至少有 $\binom{n-1}{2} + \frac{1}{3}(n^2 - 6n + 3)$ 个族 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$，满足 $|\mathcal{G}| = 3$ 和 $\bigcap \mathcal{G} \neq \varnothing$。

5. Open problems

我们通过列出一些与本文所述定理密切相关的问题和难题来结束这篇综述。其中一些问题以及更多问题见[BK22、Pat24、GHP24、Kal04、Kal17]。

(1) 在定理 32 中，以 b 和 d 表示的 $r(\mathcal{F})$上界非常大。另一方面，目前已知的最佳下界为$(b + 1)(d + 2) + 1$，这是由[GPP+17的例 2]得出的。请改进 Radon 数的上界和/或下界。(2) 求命题37中常数 N_k 的良好上下界。(3) 定理 39 的应用受到阻碍，因为目前只知道 $\mathbb{R}^d$的禁用同调子式。请为其他拓扑空间寻找禁用同调子式。(4) 假设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个集合族，且对于任意非空有限子族$\mathcal{G}$ 以及每个 $i = 0, 1, \ldots, \lceil d/2 \rceil - 1$, $\tilde{\beta}_i(\bigcap \mathcal{G}; R) \leq p(|\mathcal{G}|)$，其中 p 是某个函数。那么， $\mathcal{F}$ 是否具有某个阶的分数 Helly 性质，且该阶仅取决于p 和 d? [Kal17]中的猜想17预言，对于形式为$\gamma \cdot |\mathcal{G}|^{d+1}$的 $p(|\mathcal{G}|)$，上述结论成立，其中 $\gamma > 0$ 为常数。第一步由 [GHP24],完成，他们证明了当 p 为常数函数时该猜想成立。随后，该结果被推广到增长极其缓慢的情形，见 [Bin24]。

References

[AHJ19] R. Aharoni、R. Holzman 和 Z. Jiang。彩虹分数匹配。*Combinatorica*，39(6):1191–1202，2019。

[AKMM02] N. Alon、G. Kalai、J. Matouˇsek 和 R. Meshulam。几何中出现的超图的横截数。Adv. Appl. Math.，29:79–101，2002。.[Ale28] P. Alexandroff。关于一般维数概念及其与初等几何直观的关系。Math. Ann.，98(1):617–635，1928。[ALS17] N. Amenta、J. A. De Loera 和 P. Sober´on。Helly 定理：新变化与应用。载于《离散数学中的代数与几何方法》，Contemporary Math. 第 685 卷，第 55–95 页。美国数学会，2017年。[BB79] E. G. Bajm´oczy 和 I. B´ar´any。论 Borsuk 定理与 Radon 定理的一个共同推广。Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica，34(3):347–350，1979年9月。[BGT21] D. Bulavka、A. Goodarzi 和 M. Tancer。彩色分数 Helly 定理的最优界。载于第 37 届国际计算几何研讨会，LIPIcs 第 189 卷。Leibniz Int. Proc. Inform.，第 19 号文章，共 14 页。达格施图尔城堡，Leibniz-Zent. Inform.，Wadern，2021年。[Bin24] M. Bin。具有缓慢增长的同调打散函数的集合系统的分数 Helly 定理，2024年。https://arxiv.org/abs/2411.18605。[BK22] I. B´ar´any 和 G. Kalai。Helly 型问题。Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)，59(4):471–502，2022年。[BKRR23] U. Bauer、M. Kerber、F. Roll 和 A. Rolle。函子性神经定理及其变体的统一观点。Expo. Math.，41(4):第 125503 号文章，共 52 页，2023年。[Bor48] K. Borsuk。将紧空间系统嵌入单纯复形。Fund. Math.，35:217–234，1948年。[Buk10] B. Bukh。凸性空间中的 Radon 划分。http://arxiv.org/abs/1009.2384，2010年。[CGG14] ´E. Colin de Verdi`ere、G. Ginot 和 X. Goaoc。无环族的 Helly 数。Advances in Mathematics，253:163–193，2014年。[DGK63] L. Danzer、B. Gr¨unbaum 和 V. Klee。Helly 定理及其相关定理。载于《纯数学研讨会论文集》第 VII 卷，第 101–180 页。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1963年。[DLGMM19] J. A. De Loera、X. Goaoc、F. Meunier 和 N. H. Mustafa。Carath´eodory、Helly、Sperner、Tucker 和 Tverberg 的离散而又无处不在的定理。Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)，56(3):415–511，2019。[GHP24] X. Goaoc、A. F. Holmsen 和 Z. Pat´akov´a。具有禁同调小子的空间中的交模式，2024年。https://arxiv.org/abs/2103.09286。[GPP+17] X. Goaoc、P. Pat´ak、Z. Pat´akov´a、M. Tancer 和 U. Wagner。通过 Betti 数界定 Helly 数。载于《离散数学之旅》，第 407–447 页。Springer，Cham，2017年。[GRS13] R. L. Graham、B. L. Rothschild 和 J. H. Spencer。Ramsey 理论。Wiley 离散数学与优化丛书。John Wiley & Sons, Inc.，新泽西州霍博肯，平装版，2013年。[Hat02] A. Hatcher。《代数拓扑》。剑桥大学出版社，英国剑桥，2002年。.[Hel23] E. Helly。关于具有公共点的凸体集合。Jahresbericht Deutsch. Math. Verein.，32:175–176，1923年。.[Hel30] E. Helly。关于具有公共点的闭集系统。Monaths. Math. und Physik，37:281–302，1930年。[HK17] A. F. Holmsen 和 R. Karasev。强凸性的彩色定理。美国数学会会刊，145(6):2713–2726，2017年。[HL21] A. F. Holmsen 和 D. Lee。Radon 数与分数 Helly 定理。以色列数学杂志，241(1):433–447，2021 年。[Hol20] A. F. Holmsen。具有禁用子结构的超图中的大团。Combinatorica，40(4):527–537，2020年。[Hol24] A. F. Holmsen。凸性空间中的 Helly 型问题，2024年。https://arxiv.org/abs/ 2408.05871。[JW81] R. E. Jamison-Waldner。树与有序集的划分数。Pacific J. Math.，96(1):115–140，1981年。[Kal84] G. Kalai。凸集的交模式。以色列数学杂志，48(2-3):161–174，1984年。

[Kal04] G. Kalai. 来自交换代数的组合期望。载于 I. Peeva 和 V. Welker（编），《组合交换代数》，第 1(3) 卷，第 1729–1734 页。Oberwolfach Reports，2004年。[Kal17] G. Kalai. 献给 Imre B´ar´any 生日的若干问题，2017年。https://gilkalai.wordpress.com/2017/05/23/problems-for-imre-baranys-birthday/.[KL79] M. Katchalski 和 A. Liu. R^n 中的一个几何问题。美国数学会会刊，75(2):284–288，1979年。[KL22] M. Kim 和 A. Lew. 独立数有界的图复形。以色列数学杂志，249(1):83–120，2022年。[KM05] G. Kalai 和 R. Meshulam. 拓扑彩色 Helly 定理。数学进展，191(2):305–311，2005年。[KM21] G. Kalai 和 R. Meshulam. 通过谱序列得到的相对 Leray 数。Mathematika，67(3):730–737，2021年。[KP20] G. Kalai 和 Z. Pat´akov´a. 平面集合的交模式。离散与计算几何，64(2):304–323，2020年。[Ler45] J. Leray. 关于拓扑空间的形状及映射的不动点。J. Math. Pures Appl. (9)，24:95–167，1945年。[Lev51] F. W. Levi. 关于 Helly 定理和凸性公理。印度数学学会杂志，15(0):65–76，1951年。[Lov74] L. Lov´asz. 问题 206。Matematikai Lapok，25(2):181，1974年。[Mat97] J. Matouˇsek. 关于凸集并的 Helly 型定理。离散与计算几何，18:1–12，1997年。[McC67] M. C. McCord. 空间与其开覆盖所关联复形的同伦型比较。美国数学会会刊，18:705–708，1967年。[Mon14] L. Montejano. 一个新的拓扑 Helly 定理及一些横截结果。离散与计算几何，52(2):390–398，2014年。[Mun84] J. R. Munkres.《代数拓扑学基础》。Addison-Wesley，Menlo Park, CA，1984年。[Pat24] Z. Pat´akov´a. 利用 Betti 数界定 Radon 数。《国际数学研究通知》，2024(11):9482–9500，2024年。[Pat25] Pavel Pat´ak. 关于受约束图形绘制的一个更强 Ramsey 定理。《图论杂志》，109(4):401–411，2025年。[P´a21] D. P´alv¨olgyi. Radon 数呈线性增长。离散与计算几何，2021年。[Rab58] M. O. Rabin. 群论问题的递归不可解性。《数学年刊》，67(1):172–194，1958年。[Rad21] J. Radon. 含有共同点的凸体集合。《数学年刊》，83(1):113–115，1921年3月。[Tan10] M. Tancer. d-可塌缩性对于 $d \geq 4$ 是 NP 完全的。《芝加哥理论计算机科学杂志》，第 3 篇文章，32 页，2010年。[vdV93] M. L. J. van de Vel.《凸结构理论》，北荷兰数学文库第 50 卷。North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，1993年。[vK32] E. R. van Kampen. 欧几里得空间中的复形。Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg，9:72–78，1932年。[Wag11] U. Wagner. 随机超图与扩张超图中的子式。载于《计算几何》（SCG'11），第 351–360 页。美国计算机协会，纽约，2011年。[Weg75] G. Wegner. d-塌缩与凸集族的神经。Arch. Math. (Basel)，26:317–321，1975年。[Wei52] A. Weil. 关于 de Rham 定理。《瑞士数学评论》，26:119–145，1952年。

（PavelPat´ak） Faculty of Information Technology, Czech Technical University in Prague, Thákurova 9, 160 00 Praha, Czech Republic电子邮箱地址：patakpav@cvut.cz

Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematics and Physics, Charles Uni-versity, Malostranské náměstí 25, 118 00 Praha, Czech Republic电子邮箱地址: patak@kam.mff.cuni.cz

（ZuzanaPat´akov´a） Department of Algebra, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, Sokolovská 83, 186 75 Praha, Czech Republic电子邮箱地址：patakova@karlin.mff.cuni.cz