arXiv:2602.07556v1 [math.RA] 7 Feb 2026

# M11 轴代数及相关代数的全自同构群

T.M.Mudziiri Shumba*,
和 S. Shpectorov†

2026年2月10日

**摘要**

本文作为 [10], 的延续，计算了 $M_{11}$对应的 286 维代数、其子代数以及其他相关代数的全自同构群。其中尤其包括 $L_2$(11)对应的 101 维代数，以及 $A_6$对应的 76 维代数。

较小的代数可以采用 [10], 中完全自动化的精细方法处理，而上述较大的代数则需要结合计算与人工证明的混合方法。

## 1 引言

轴代数于 [11, 12] 中引入，是由轴生成的交换非结合代数；轴是满足特定融合律的（本原）幂等元，该融合律列出了轴的伴随作用的性质。关于轴代数范式及已知的轴代数类别，参见综述 [20]。特别地，Monster 型代数这一类由表 3 中的融合律 $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$ 定义，它以自然的方式推广了 Monster 零星单群的 Griess代数中发现的融合律 $\mathcal{M}(\frac{1}{4}, 32)$（见表 2）。我们将后者称为*Monster*融合律，本文将聚焦于具有这一特定融合律的代数。注意，此融合律是分次的，因此所有这类代数都具有相当大的自同构群。此外，根据 [10], ，具有 Monster融合律的有限维代数具有有限自同构群。这也解释了我们为何总是将有限群与我们的代数联系起来。

大量具有 Monster融合律 的代数是通过扩展算法 [18, 14, 17] 以及较早的算法 [25, 22]计算得出的。这些代数中有许多（但并非全部）是 Griess代数 的子代数。因此，理解这些代数对于研究 Griess代数 十分重要，也与顶点算子代数领域相关。

在 [10]中，我们开启了对 Monster 型轴代数自同构群的研究，并引入了新的理论与计算方法来完成这项

*Sobolev 数学研究所，俄罗斯新西伯利亚，电子邮箱：tendshumba@gmail.com
†伯明翰大学数学学院，英国伯明翰埃德巴斯顿，邮编 B15 2TT，电子邮箱：s.shpectorov@bham.ac.uk

| $A$ | $G$ | $G_0$ | axet | dim | 形状 | new | Aut($A$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_{17}$ | $2{\cdot}S_4$ | $S_4$ | $1+12^*$ | 17 | $4B6A$ | yes | $2\times S_4$ |
| $A_{36}$ | $S_5$ | $S_5$ | $15+10^*$ | 36 | $4B$ | no | $S_5$ |
| $A_{24}$ | | $S_3\wr 2$ | $9+(6+6)^*$ | 24 | $4B$ | yes | $U_3(2){:}2$ |
| $A_{18}$ | $U_3(2){:}2$ | $S_3^2$ | $9+(3+3)^*$ | 18 | $6A6A$ | no | $S_3\wr 2$ |
| $A_{12}$ | | $3^2:2$ | 9 | 12 | $3A3A3A3A$ | yes | $AGL(2,3)$ |
| $A_{101}$ | $L_2(11)$ | $L_2(11)$ | 55 | 101 | $6A5A$ | no | Aut($L_2(11)$) |
| $A_{76}$ | $M_{10}$ | $A_6$ | 45 | 76 | $4B3A3A$ | no | Aut($A_6$) |
| $A_{286}$ | $M_{11}$ | $M_{11}$ | 165 | 286 | $4B$ | no | $M_{11}$ |

表1：本文研究的代数

任务。这个项目最初的动机是，我们观察到所构造代数的维数往往会重复。对此现象的一种可能解释是，这些代数中或许有一些彼此同构，尽管它们源自不同的群和轴集。[1] 这并非异想天开：轴代数宇宙中已经出现过类似情形。例如，半型 Jordan 的二生成轴代数在保持轴集的自同构意义下有无穷多个，但若忽略轴集结构，也就是说，若按一般的代数同构来考察，则只有有限多个同构类型。

解决这一同构问题的一种方法是计算代数的全自同构群。事实上，如果两个分别来自群 $G$ 和 $H$的轴代数同构，那么 $G$ 和 $H$ 都应当是这些代数的全自同构群的子群，而该全自同构群应当比 $G$ 和/或 $H$更大。等价地说，这两个代数中应当存在额外的轴，它们不包含在我们最初的轴集之中。

我们能够计算其自同构群的最大代数是 [10] 中的 Aut $S_6$对应的151维代数。在本文中，我们显著改进了 [10] 的方法，从而能够计算迄今为止构造出的最大代数 $A_{286}$ 的自同构群。该代数的维数为286，并且其宫本群是最小的 Mathieu 散在单群 $M_{11}$。（这意味着，我们的方法现在已经足够强大，能够处理目前可以构造的轴代数。）此外，我们还确定了一些相关代数的全自同构群，例如 $A_{286}$ 的子代数中与 $M_{11}$的极大子群相对应的那些子代数，包括对于 $L_2(11)$的代数 $A_{101}$ 和对于 $M_{10}=A_6.2$的代数 $A_{76}$，以及其他一些自然相关的代数。

我们的结果汇总于表1中。表中列出了本文采用的代数记号 $A$，该记号根据代数的维数确定（幸运的是，这些代数 $A$的维数各不相同）；构造代数 $A$所依据的群 $G$；$A$的宫本群 $G_0$；轴集的大小及组成；代数 $A$ 的形状及其维数；该代数是已知代数还是本项目中的新发现；以及该代数的全自同构群。轴集的组成展示了轴集如何在宫本群 $G_0$的作用下分解为若干轨道。星号表示轴集中的相应轨道或轨道集已经能够生成该代数。这意味着，同一个代数 $A$ 也可以用更小的轴集来考察，只包含带星号的轨道，不过此时代数的形状会发生变化。

对于其中若干个代数 $A$，其全自同构群最终发现比预期的群更大，也就是说，比 $M_{11}$ 中 $A$ 的稳定子更大。虽然代数 $A_{17}$ 是

[1]文献 [19] 中引入的术语“轴集”指一个封闭的轴集合，即在相应宫本群作用下不变的轴集合。确切定义见第2节。

由 $M_{11}$的极大子群 $G \cong 2 \cdot S_4$ 构造而成，但$G$ 的中心对合 $z$ 在 $A_{17}$ 上的作用是单位元，因此在此情形下，宫本群 $G_0$ 是 $G$的商群$S_4$ 。然而，对应于 $z$ 的轴包含在 $A_{17}$ 中，并且在其中是一个 Jordan 轴，这使得 $A_{17}$ 出现了一个额外的对合自同构，它在 Aut($A_{17}$) 中作为直因子。代数 $A_{24}$ 也是 $A_{286}$ 的子代数，对应于 $M_{11}$的极大子群 $U_3$(2) : 2。这个代数没有新的自同构。然而，它的子代数 $A_{18}$ 和 $A_{12}$是由 $A_{24}$的轴集中的自然子轴集构造而成，具有额外的对称性。 $A_{18}$ 的全自同构群是我们在 $M_{11}$中找到的群的两倍，而 Aut($A_{12}$) 比它在 $M_{11}$ 中的稳定子大 24 倍。这些代数十分有趣，它们嵌入 $A_{24}$ 的方式表明，或许可以用 $A_{18}$ 和 $A_{12}$ 作为构造单元来构造更大的代数。此外，对于分别由极大子群$L_2$(11)和 $M_{10}$构造的代数 $A_{101}$ 和 $A_{76}$，最终得到的全自同构群都大了 2 倍。

还需指出，扩张算法目前无法完成代数 $A_{36}$ 和 $A_{24}$的形状。我们现在知道这两种情况都非空，而这些情况的复杂性可能表明，每种情况中要么还存在第二个代数，要么已知代数可能存在一个更大的覆盖。

我们还在其中一些代数中发现了有趣的额外幂等元。例如， $A_{76}$由 30 个几乎 Monster 型 $\mathcal{AM}\left(\frac{1}{2}、\ \frac{1}{8}\right)$的本原轴生成。这一融合律与 Monster 型融合律（见表 3）相同，唯有 $\alpha * \alpha = \{1, 0, \alpha\}$不同。在这一融合律下， $A_{76}$ 的宫本群为 $S_6$。

本文结构如下。第 2 节介绍轴代数的背景知识，包括重要定义和结果。特别是，我们详细解释了形状这一概念，并给出若干示例。本节还回顾了在研究轴代数自同构群时开发的计算功能。第 3 节讨论具有 $M_{11}$较小极大子群的代数，即 $2.S_4$、 $S_5$ 和 $U_3$(2):2。这些代数是通过纯计算工具研究的。本文其余部分考察具有极大子群 $M_{10}$ 和 $L_2$(11) 的较大代数，以及 $M_{11}$ 本身。具体而言，第 4 节中，我们补全代数 $A_{76}$ ，它具有 $M_{10}$ ，且宫本群为 $A_6$。第 5 节研究对应于 $L_2$(11) 的代数 $A_{101}$ 。最后，第 6 节确定 $M_{11}$ 对应的最大代数 $A_{286}$ 的全自同构群。

除一项外，所有计算均在一台搭载 AMD Ryzen 处理器、运行 Arch Linux 且配备 16GB 内存的笔记本电脑上完成。这些计算使用了第 2.4 小节中所述的一组 MAGMA [2] 程序。我们的计算程序和日志文件可在 GitHub [21] 上获取。耗时最长的一项计算（找出一个 18 维子代数中所有指定长度的幂等元）最初由 E.A. O'Brien 完成，之后我们也在 D.A. Craven 管理的伯明翰大学 Unix 服务器上独立验证了这一结果。

**致谢：**作者衷心感谢阿卡杰姆戈罗多克数学中心在俄罗斯联邦科学与高等教育部协议编号 075-15-2019-1675 和 075-15-2022-281 项下提供的部分资助。

| $*$ | $1$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{32}$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{32}$ |
| $0$ | | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{32}$ |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $1,0$ | $\frac{1}{32}$ |
| $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{32}$ | $1,0,\frac{1}{4}$ |

表 2：Monster 融合律 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(1_{4}, -1_{32})$

# 2 预备知识

本节将介绍轴代数的一般背景信息，以及本文研究的具体实例。我们还将回顾为自同构项目 [10] 开发的计算工具。全文采用有限群的记号，例如见 [5]。

## 2.1 轴代数

本文研究的代数是在轴代数这一框架下发现的，因此我们先介绍其基础知识。更详细的讨论请参见例如 [20]。

**定义 2.1.** 一个融合律是一个二元组 $(\mathcal{F}, *)$，其中 $\mathcal{F}$ 是一个集合，$*$ 是 $\mathcal{F}$ 上的一个二元运算，其取值属于 $\mathcal{F}$ 的幂集。

本文所关注的特定融合律见表 2。这里 $\mathcal{F} = \mathcal{M} = \{1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{32}\}$，而对应于 $\lambda$ 和 $\mu$ 的表格单元列出了 $\lambda * \mu$ 的元素。例如，$1 * 1 = \{1\}$、$0 * 1 = \emptyset$、$\frac{1}{4} * \frac{1}{4} = \{1, 0\}$，等等。

设 $A$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的交换非结合代数。对于元素 $a \in A$，我们将由 $u \mapsto au$ 给出的伴随映射 $A \to A$ 记为 $\mathsf{ad}_a$。对于 $\lambda \in \mathbb{F}$，$\mathsf{ad}_a$ 的 $\lambda$-特征子空间记为 $A_\lambda(a)$。也就是说，

$$A_\lambda(a) = \{u \in A \mid au = \lambda u\}.$$

对于 $\Lambda \subseteq \mathbb{F}$,

$$A_\Lambda(a) = \oplus_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda(a).$$

现在设 $(\mathcal{F}, *)$ 是一个融合律，其中 $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{F}$。

**定义 2.2.** 非零幂等元 $a \in A$ 称为一个（$\mathcal{F}$-）轴，若

(a) $A = A_{\mathcal{F}}(a)$；并且

(a) $A_\lambda(a) A_\mu(a) \subseteq A_{\lambda * \mu}(a)$ for all $\lambda, \mu \in \mathcal{F}$.

条件 (a) 意味着 $\mathsf{ad}_a$ 可对角化，且其谱完全包含于 $\mathcal{F}$ 中；而条件 (b) 意味着融合律限制了代数乘积在 $\mathsf{ad}_a$ 的特征向量上的取值。

容易看出 $a \in A_1(a)$，因此 $1 \in \mathcal{F}$。

| $*$ | $1$ | $0$ | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | | $\alpha$ | $\beta$ |
| $0$ | | $0$ | $\alpha$ | $\beta$ |
| $\alpha$ | $\alpha$ | $\alpha$ | $1, 0$ | $\beta$ |
| $\beta$ | $\beta$ | $\beta$ | $\beta$ | $1, 0, \alpha$ |

表 3：Monster 型融合律 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\alpha, \beta)$

**定义 2.3.** 轴 $a \in A$ 是本原 的，当且仅当 $A_1(a) = \mathbb{F}a$，也就是说，$A_1(a)$ 是由 $a$ 张成的一维空间。

现在我们可以给出关键定义。

定义 2.4. </style}代数 $A$ 若由一组（本原）轴生成，则称为（本原）($\mathcal{F}$-)轴代数。

融合律的以下性质对代数的结构有重要影响。

**定义 2.5.** 若 $\mathcal{F}$是一个融合律且 $0 \in \mathcal{F}$，则称 $\mathcal{F}$为$Seress$，如果对于所有 $\lambda \in \mathcal{F}$，$0 * \lambda \subseteq \{\lambda\}$均成立，即在 $\mathcal{F}$中，0 的作用方式与 1 相同。

当融合律 $\mathcal{F}$ 是 Seress 型时，首先，对每个轴 $a$，特征子空间 $A_0(a)$ 是 $A$ 的子代数。此外，$A_{\{1,0\}}(a) = A_1(a) \oplus A_0(a)$ 也是一个子代数。其次，这一性质保证每个特征子空间 $A_\lambda(a)$ 都是这两个代数的模，即 $A_{\{1,0\}}(a)A_\lambda(a) \subseteq A_\lambda(a)$。Seress 性质还蕴含了 $A$ 中的部分结合性，但这对本文并不重要。

轴代数通常具有自然的双线性型。

**定义 2.6.** 设 $A$ 是一个轴代数。$A$ 上的非零双线性型称为 *Frobenius* 型，如果

$$(uv, w) = (u, vw)$$

对所有 $u$、$v$、$w \in A$ 均
成立。

Frobenius 型的非零标量倍仍是 Frobenius 型。通常，在可能的情况下，会对 Frobenius 型进行标量缩放，使轴的（平方）长度为 1。

由上文可知，融合律可用于定义一类轴代数。我们特别感兴趣的是（本原）Monster 型代数这一类，它由表 3 中的 Monster 型融合律 $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$ 定义。该融合律与表 2 中的 Monster 融合律相似，但用任意两个互不相同的 $\alpha, \beta \in \mathbb{F} \setminus \{1, 0\}$分别替代 $1\ 4$ 和$_1\ 32$。Monster 型代数这一类最早出现于 [23, 24]，其动机示例是 Monster 零星单群的 Griess代数；当且仅当 $(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{32}\right)$时，该代数才出现。这解释了人们为何对这一特定融合律感兴趣。 - —

| $*$ | 1 | 0 | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | $\alpha$ | $\beta$ |
| 0 | | 0 | $\alpha$ | $\beta$ |
| $\alpha$ | $\alpha$ | $\alpha$ | 1, 0, $\alpha$ | $\beta$ |
| $\beta$ | $\beta$ | $\beta$ | $\beta$ | 1, 0, $\alpha$ |

表4：几乎 Monster 型融合律 $\mathcal{AM}(\alpha,\ \beta)$

具有 Monster 融合律的代数中，这一类很可能是研究得最为广泛的。具体而言，人们利用扩张算法 [18]构造了近两百个与各种小有限群相对应的此类代数。（另见 [25] 和[22]。）本文将重点讨论其中的几个代数。

在研究轴代数的子代数时，人们发现了一类本质上属于 Monster 型的融合律。具体而言，若融合律 $\mathcal{F}$ 与 Monster融合律 $\mathcal{M}(\alpha,\ \beta)$ 仅在$\alpha * \alpha = \{1, 0, \alpha\}$ 方面有所不同（见表4），则称其为几乎 *Monster* 型（$\alpha,\ \beta$），记作 $\mathcal{AM}(\alpha,\ \beta)$。

## 2.2 宫本群

接下来，我们按照 [6] 的方法定义分次融合律。给定一个群 $T$，可以引入群融合律 $(T,\ *)$，其中对所有 $t,\ s \in T,\ t * s = \{ts\}$。融合律 $(\mathcal{F},\ *)$ 与 $(\mathcal{H},\ *)$ 之间的态射 是一个映射 $\phi$: $\mathcal{F} \to \mathcal{H}$，满足

$$\phi(\lambda * \mu) \subseteq \phi(\lambda) * \phi(\mu),$$

对所有 $\lambda, \mu \in \mathcal{F}$。

我们现在已准备好引入主要概念。

**定义2.7.** 设 $\mathcal{F}$ 是一个融合律，且 $T$ 是一个群。 $\mathcal{F}$ 的 $T$-分次是从 $\mathcal{F}$ 到 $T$的群融合律的一个态射。

就我们的目的而言， $T$ 将始终是阿贝尔的且较小。若 $T = \langle\phi(\mathcal{F})\rangle$，则称分次 $\phi$为适当。该条件保证分次是由 $T$ 本身给出的，而不是由 $T$的真子群给出的。

融合律 $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$与 $\mathcal{AM}(\alpha, \beta)$由二阶群 $T = C_2 =\{\pm 1\}$分次。具体而言，分次映射将1、0和 $\alpha$ 映到1，并将 $\beta$ 映到 $-1$。显然，该分次是适当的，因为它是满射。

从现在起，我们考虑经由分次$\phi$由阿贝尔群 $T$ 分次的融合律 $\mathcal{F}$。设 $T^*$ 为 $T$的（线性）特征的集合，即从 $T$ 到域 $\mathcal{F}$的乘法群的所有同态的集合。

**定义 2.8.** 设 $(A, X)$ 是一个 $\mathcal{F}$-轴代数， $a \in X$ 是一个轴，且 $\chi \in T^*$。与 $a$ 和 $\chi$ 对应的 $A$ 的*Miyamoto*自同构 $\tau_a(\chi)$ 是线性映射 $A \to A$，它对每个 $\lambda \in \mathcal{F}$ 在 $A_\lambda(a)$ 上作用为标量 $\chi(\phi(\lambda))$。

| Type | 基 | 乘积与形式 |
|---|---|---|
| 2A | $a_0$, $a_1$, $a_\rho$ | $a_0 \cdot a_1 = \frac{1}{8}(a_0 + a_1 - a_\rho)$<br>$a_0 \cdot a_\rho = \frac{1}{8}(a_0 + a_\rho - a_1)$<br>$(a_0, a_1) = (a_0, a_\rho) = (a_1, a_\rho) = \frac{1}{8}$ |
| 2B | $a_0$, $a_1$ | $a_0 \cdot a_1 = 0$<br>$(a_0, a_1) = 0$ |
| 3A | $a_{-1}$, $a_0$, $a_1$, $u_\rho$ | $a_0 \cdot a_1 = \frac{1}{2^{15}}(2a_0 + 2a_1 + a_{-1}) - \frac{3^3 \cdot 5}{2^{11}} u_\rho$<br>$a_0 \cdot u_\rho = \frac{1}{3^{12}}(2a_0 - a_1 - a_{-1}) + \frac{5}{2^5} u_\rho$<br>$u_\rho \cdot u_\rho = u_\rho, (a_0, a_1) = \frac{13}{2^8}$<br>$(a_0, u_\rho) = \frac{1}{4}, (u_\rho, u_\rho) = \frac{2^3}{5}$ |
| 3C | $a_{-1}$, $a_0$, $a_1$ | $a_0 \cdot a_1 = \frac{1}{2^{16}}(a_0 + a_1 - a_{-1})$<br>$(a_0, a_1) = \frac{1}{2^6}$ |
| 4A | $a_{-1}$, $a_0$, $a_1$, $a_2$, $v_\rho$ | $a_0 \cdot a_1 = \frac{1}{2^{16}}(3a_0 + 3a_1 + a_{-1} + a_2 - 3v_\rho)$<br>$a_0 \cdot v_\rho = \frac{1}{2^{14}}(5a_0 - 2a_1 - a_2 - 2a_{-1} + 3v_\rho)$<br>$a_0 \cdot a_2 = 0$, $v_\rho \cdot v_\rho = v_\rho$<br>$(a_0, a_1) = \frac{1}{2^{15}}, (a_0, a_2) = 0$<br>$(a_0, v_\rho) = \frac{3}{2^{13}}, (v_\rho, v_\rho) = 2$ |
| 4B | $a_{-1}$, $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_{\rho^2}$ | $a_0 \cdot a_1 = \frac{1}{2^{16}}(a_0 + a_1 - a_{-1} - a_2 + a_{\rho^2})$<br>$a_0 \cdot a_2 = \frac{1}{2^{13}}(a_0 + a_2 - a_{\rho^2})$<br>$a_0 \cdot a_{\rho^2} = \frac{1}{2^{13}}(a_0 + a_{\rho^2} - a_2)$, $a_{\rho^2} \cdot a_{\rho^2} = a_{\rho^2}$<br>$(a_0, a_1) = \frac{1}{2^{16}}$, $(a_0, a_2) = (a_0, a_{\rho^2}) = \frac{1}{2^{13}}, (a_{\rho^2}, a_{\rho^2}) = 1$ |
| 5A | $a_{-2}$, $a_{-1}$, $a_0$, $a_1$, $a_2$, $w_\rho$ | $a_0 \cdot a_1 = \frac{1}{2^{17}}(3a_0 + 3a_1 - a_2 - a_{-1} - a_{-2}) + w_\rho$<br>$a_0 \cdot a_2 = \frac{1}{2^{17}}(3a_0 + 3a_2 - a_1 - a_{-1} - a_{-2}) - w_\rho$<br>$a_0 \cdot w_\rho = \frac{7}{2^{7+12}}(a_1 + a_{-1} - a_2 - a_{-2}) + \frac{7}{2^5} w_\rho$<br>$w_\rho \cdot w_\rho = \frac{5^2 \cdot 7}{2^{19}}(a_{-2} + a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2)$<br>$(a_0, a_1) = (a_0, a_2) = \frac{3}{2^7}, (a_0, w_\rho) = 0, (w_\rho w_\rho) = \frac{5^3 \cdot 7}{2^{19}}$ |
| 6A | $a_{-2}$, $a_{-1}$, $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_{\rho^3}$, $u_{\rho^2}$ | $a_0 \cdot a_1 = \frac{1}{2^{16}}(a_0 + a_1 - a_{-2} - a_{-1} - a_2 - a_3 + a_{\rho^3}) + \frac{3^2 \cdot 5}{2^{11}} u_{\rho^2}$<br>$a_0 \cdot a_2 = \frac{1}{2^{15}}(2a_0 + 2a_2 + a_{-2}) - \frac{3^3 \cdot 5}{2^{11}} u_{\rho^2}$<br>$a_0 \cdot u_{\rho^2} = \frac{1}{3^{12}}(2a_0 - a_2 - a_{-2}) + \frac{5}{2} u_{\rho^2}$, $u_{\rho^2} \cdot u_{\rho^2} = u_{\rho^2}$<br>$a_0 \cdot a_3 = \frac{1}{2^{13}}(a_0 + a_3 - a_{\rho^3})$, $a_{\rho^3} \cdot a_{\rho^3} = a_{\rho^3}$, $a_{\rho^3} \cdot u_{\rho^2} = 0$<br>$(a_0, a_1) = \frac{5}{2^8}, (a_0, a_2) = \frac{13}{2^8}, (a_0, u_{\rho^2}) = \frac{1}{4}, (u_{\rho^2}, u_{\rho^2}) = \frac{2^3}{5}$<br>$(a_0, a_3) = (a_0, a_{\rho^3}) = \frac{1}{2^8}$, $(a_{\rho^3}, a_{\rho^3}) = 1$, $(a_{\rho^3}, u_{\rho^2}) = 0$ |

表5：Norton-Sakuma 代数

容易看出， $\tau_a(\chi)$ 确实是 $A$ 的一个自同构。此外，对于固定的轴 $a$ ，映射 $\tau_a$ 是从 $T^*$ 到 $A$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}(A)$ 的同态。 $\tau_a$ 的像称为与 $a$ 对应的轴子群 。

| $*$ | $1$ | $0$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | | $\alpha$ |
| $0$ | | $0$ | $\alpha$ |
| $\alpha$ | $\alpha$ | $\alpha$ | $1, 0$ |

表6： $\mathcal{J}(\alpha)$ 的 Jordan 型融合律

**定义2.9**。 由所有生成轴 $a \in X$对应的轴子群生成的 Aut($A$) 的子群，称为 $A$ 的宫本群 Miy($A$)。换言之，

$$\mathrm{Miy}(A) = \langle \tau_a(\chi) \mid a \in X, \chi \in T^* \rangle.$$

由于本文关注的是由 2 阶群 $T = \{\pm 1\}$分级的融合律，因此我们可以简化这种特定情形下的记号。请注意，在这种情形下，我们必须假设 $\mathbb{F}$ 的特征不为 2，否则分级无法成立。（事实上，稍后我们将在零特征下进行讨论。）因此，特征群 $T^*$ 包含唯一的非平凡特征，从而对每个给定的轴 $a$，都有唯一的非恒等 Miyamoto自同构。我们将这个唯一的非恒等自同构记为 $\tau_a$ ，并称其为对应于 $a$的宫本对合 。事实上，容易看出 $\tau_a$的平方是单位元，因此它通常是一个对合。

请注意，对于不同的轴 $a$，对合 $\tau_a$ 不一定彼此不同。

**定义2.10**。 若轴 $a$ 和 $b, a \neq b$ 满足 $\tau_a = \tau_b$，则称它们为孪生轴 。

虽然 $\tau_a$ 通常是一个对合，但当 $A_\beta(a) = 0$ 时（或者更一般地，当所有满足 $\phi(\lambda) = -1$ 的特征子空间 $A_\lambda(a)$ 都是平凡的时），它也可以是单位元。

**定义2.11**。 若 Monster 型（$\alpha$， $\beta$）的轴 $a$ 满足 $A_\beta(a) = 0$，则称其为***Jordan*** 轴 。

这一术语的由来是，此时 $a$ 满足一种更弱的 Jordan 型律（见表6）。在这种情况下，正如我们已经提到的， $\tau_a$ 是单位元。然而，Jordan 型律自身也带有由二阶群给出的分次。具体而言，该分次将 1 和 0 映到 1，并将 $\alpha$ 映到 $-1$。这会产生一个额外的对合自同构 $\sigma_a$ ，它可能属于也可能不属于 $A$ 的宫本群。

我们将在下文的代数中遇到孪生轴和Jordan 轴。

对于 $A$的自同构 $\phi$ ，若 $a$ 是一条轴，则显然， $\phi(a)$也是一条a xis.

**定义2.12.** 设$(A, X)$是一个具有分次融合律的轴代数。生成轴集合 $X$ 的¯闭包 $X$ 定义为

$$\bar{X} = \{\phi(a) \mid a \in X, \phi \in \mathrm{Miy}(A)\}.$$

¯称集合 $X$ 为闭的 ，若 $X = X$。

¯注意到， $X$ 也由生成 $A$的轴组成，因此现在我们可以将 $A$ 视为具有更大生成集的轴代数。 [18] 已证明，$A$ 的宫本群不受生成元集合这一变化的影响，因此， $X$ 的闭包¯ ¯ ¯仍为 $X$，也就是说， $X$ 是闭的。闭生成集的优点在于

宫本群在其上作用，且该作用是忠实的。下文中，我们通常假设集合 $X$ 是闭的。

根据 [19], ，轴集是一个集合，它带有一个群在其上的作用，以及一个从该集合到该群的τ映射，并满足一些自然公理，这些公理也涉及分次融合律。具有分次融合律的代数中，每个封闭的轴集都构成一个轴集。我们不需要精确的定义，但使用“轴集”这一简短术语来指代封闭的轴集很方便，正如我们在引言中所做的那样，并将在全文中继续这样做。

最后，下面描述代数时还会用到另一个概念。若一个轴代数（$A$， $X$）具有封闭的 $X$，则称其为 $k$-封闭，如果 $A$ 由来自 $X$ 、因子数至多为 $k$ 的轴的乘积张成。例如，若 $X$ 张成$A$，则该代数是1-封闭的。

## 2.3 形状

文献 [7] 证明，每个2生成的（即具有 $|X| = 2$，其中 $X$ 不一定封闭）Monster 型代数都同构于某个Norton-Sakuma 代数；这些代数最初由Norton作为Griess代数的子代数发现。表5列出了这些代数的基本信息，其中 $a_0$ 和 $a_1$ 是两个生成轴。注意，所有 Norton-Sakuma 代数都具有一个Frobenius 型，其标量倍选取为使所有轴的长度均为1。因此，表5也列出了该Frobenius 型的取值。表格第1列列出了这些代数的名称；这些名称源自Monster群的共轭类名称，而这些共轭类以一种自然的方式与相应的 Norton-Sakuma 代数对应。

Norton-Sakuma 代数 $B$ 都是含单位元的，也就是说，它们都包含一个单位元$\mathbb{1}_B$。在表 7 中，我们提供了有关 $\mathbb{1}_B$ 在 Norton-Sakuma

| 类型 $B$ | 2A | 2B | 3A | 3C | 4A | 4B | 5A | 6A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(\mathbb{1}_B,\ \mathbb{1}_B)$ | $\frac{12}{5}$ | 2 | $\frac{116}{35}$ | $\frac{32}{11}$ | 4 | $\frac{19}{5}$ | $\frac{32}{7}$ | $\frac{51}{10}$ |

表 7：单位元长度

代数中的长度的信息。这是区分这些代数的一个方便参数。

与已知的 Norton-Sakuma 代数列表相关，我们有一个重要概念，即 Monster 型代数的形状。Ivanov 首先在 Majorana代数的语境中引入了这一概念（例如，见[13]），随后将其推广到所有轴代数。我们将在 Monster 型代数的语境中给出这一定义。

假设 $(A, X)$ 是 Monster 型轴代数，且 $X$ 是闭的。令 $\binom{X}{2}$ 为来自 $X$ 的所有轴的无序对集合。我们将 $\binom{X}{2}$ 视为一个偏序集，其中 $(a, b) \leq (c, d)$ 当且仅当 $a$ 和 $b$ 包含在 $\{c, d\}$ 的闭包 $\{c, d\} = c^{\mathrm{Miy}(B)} \cup d^{\mathrm{Miy}(B)}$ 中。这里 $B = \langle\langle c, d\rangle\rangle$。特别地，这意味着 $\langle\langle a, b\rangle\rangle \subseteq \langle\langle c, d\rangle\rangle$。

**定义 2.13**。 $A$ 的形状 是一个映射，它将每个 $(a, b) \in \binom{X}{2}$ 对应到子代数 $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ of $A$ 的类型。

形状是一种方便的不变量，可用于区分具有相同宫本群的不同 Monster 型代数。注意，$\langle\langle a,b\rangle\rangle$ 的 Norton-Sakuma 类型中的第一个符号（数字）总是与 $\{a,b\}$的大小相同。因此，形状中唯一可选择的是类型中的字母，即那些无法由对应数字唯一确定的字母。也就是说，$2A$ 或 $2B$、$3A$ 或 $3C$，以及 $4A$ 或 $4B$。

请记住，我们将 $\binom{X}{2}$ 视为一个偏序集。如果 $(a,b) \leq (c,d)$，那么，正如我们已经指出的，$\langle\langle a,b\rangle\rangle$ 是 $\langle\langle c,d\rangle\rangle$的一个子代数，这意味着 $\langle\langle c,d\rangle\rangle$的类型决定了 $\langle\langle a,b\rangle\rangle$的类型。因此，形状必须在这一意义上与 $\binom{X}{2}$上的偏序保持一致。

在表 8 中，我们列出了两个 Norton-Sakuma 代数之间所有可能的包含关系。W e

| 代数 | 子代数 |
|---|---|
| 4A | 2B |
| 4B | 2A |
| 6A | 2A,3A |

表 8：Norton-Sakuma 代数之间的包含关系

从这张表可以看出，二生成子代数的类型之间存在双向依赖关系。也就是说，如果 $(a,\ b) \leq (c,\ d)$，那么不仅 $\langle\langle c,\ d\rangle\rangle$ 的类型决定 $\langle\langle a,\ b\rangle\rangle$的类型，$\langle\langle a,\ b\rangle\rangle$ 的类型也决定 $\langle\langle c,\ d\rangle\rangle$的类型。

当然，集合 $\binom{X}{2}$ 可能非常庞大，因此形状中包含大量重复信息。也就是说，如果 $(a,\ b)$ 和 $(c,\ d)$ 来自 $\binom{X}{2}$，且在 Miy($A$) 的某个元素作用下共轭，那么 $\langle\langle a,\ b\rangle\rangle$ 和 $\langle\langle c,\ d\rangle\rangle$ 共轭，因而同构。这意味着我们可以按照 Miy($A$) 的作用对形状进行折叠，而不会丢失任何信息。

在文本中，我们将（折叠后的）形状简单表示为该形状中的 Norton-Sakuma 类型序列。虽然这种表示并不完美，但足以区分各个代数，而且在大多数情况下不会产生歧义。此外，形状映射各值之间的依赖关系使我们能够进一步缩短形状表示，只标明必要的类型选择。下文将形状记录为一个项目符号，后接 Norton-Sakuma 类型的必要选择列表。我们在形状开头加上项目符号，是因为有时完全没有可选项，此时仅用项目符号表示。

最后关于形状再作一点说明：当映射 $a \mapsto \tau_a$ 在 $X$ 上的每个 Miy($A$) 轨道上都是单射时，$\{a,b\}$ 的大小与阶 $|\tau_a\tau_b|$ 相同，因此这是一种更简单的方式，可以确定 $\langle\langle a$ 的类型中的数值。$b\rangle\rangle$。请注意，在本文研究的代数中，始终满足这一轨道单射条件。

我们将通过以下示例说明形状这一概念。

**例 2.14.** 设 $A = A_{286}$ 是散在单群 $G = M_{11}$ 的一个带有 Monster 融合律的 286 维代数。该代数最初由 Seress[25] 构造，之后也通过扩张算法得到了验证。该代数中的轴闭集 $X$ 包含 165 个轴。注意，$G$ 恰好包含 165 个对合，它们构成一个共轭类 $C$，因此映射 $a \mapsto \tau_a$ 是 $X$ 与 $C$ 之间的自然双射也就不足为奇了。这意味着我们可以将 $X$ 与 $C$ 等同起来，从而通过考察 $G$ 在 $C$ 上的作用，导出 $A$ 的形状。

群 $G$ 作用于大小为 13 530 的 $\binom{C}{2}$，其有六个轨道，长度分别为 660、990、1980、1980、3960 和 3960。因此，$\binom{C}{2}$ 的折叠版本只有六个节点，如图所示

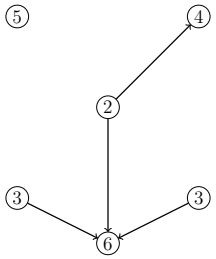


图 1： $A_{286}$的折叠形状图

图 1。图中的每个节点都包含阶数 $|ab|$，其中有序对 $(a,\ b) \in \binom{C}{2}$表示与该节点对应的轨道。这是 $(a,\ b)$ 的 Norton-Sakuma 类型中的数值。

观察节点类型之间的依赖关系，由于底部节点显然必须是 Norton-Sakuma 型 $6A$，相邻节点的类型必须是 $3A$、 $2A$和$3A$。（见表 8。）此外，位于 $2A$上方且与之相邻的节点必须是 $4B$。最后，孤立节点显然是 $5A$。因此我们没有任何选择，代数 $A$具有唯一的空形状 $\bullet$。

接下来的两个例子讨论 $M_{11}$ 代数的子代数。

**例 2.15.** 这里考虑的第一个子代数对应于 $G = M_{11}$的子群 $H \cong L_2(11)$。这个维数为 101 的子代数 $A_{101}$由对应于 $H$中所含对合的 55 个轴生成。显然， $H$ 是$A_{101}$的宫本群。它在对合对集合上有六个轨道，其折叠偏序集如图 2 所示。这里，形状 $\bullet$ 同样是唯一的，因为所有节点，我们可以

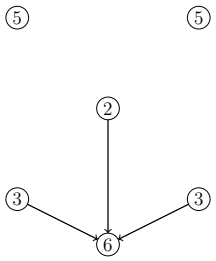


图 2： $A_{101}$的折叠形状图

有一些选择，它们与标有数字 6 的底部节点相邻。因此它必定是 $6A$，从而相邻节点分别为 $3A$、 $2A$ 和 $3A$。两个孤立节点均为 $5A$。

注意，在这个第二个例子中，无论$A_{101}$ 嵌入到 $A_{286}$的方式如何，该形状都是唯一的。最后一个例子的情况则不同。

**例 2.16**。这里我们考察与 $G = M_{11}$的子群$K = M_{10}$ 相对应的子代数 $A_{76}$ 。这个 76 维子代数由对应于 $K$中对合的 45 个轴生成。注意， $A_{76}$ 的宫本群并非 $K$，而是 $K$ 的一个指数 2 子群，它同构于六阶交错群。这是因为 $K$ 并非由其对合生成。

群 $K$ 在其作用于由 45 个对合构成的集合的无序对时有七个轨道，如图 3 所示。标记为 2 的两个轨道都与标记为

4 的轨道相邻，因此，如果 $4X$ 轨道的 Norton-Sakuma 型为 $4A$，那么 $2X$ 轨道都为 $2B$；同样，如果 $4X$ 的 Norton-Sakuma 型为 $4B$，那么我们也有 $2A$ 。编号为 3 的轨道可以是 $3A$ 或 $3C$，而 先验地，我们没有更多信息来区分这两种情况。对于选择 $4A$ 还是 $4B$，情况也一样。因此，在不知道 $A_{76}$ 嵌入 $A_{286}$ 的情况下，形状有八种可能，即 $\bullet 3A3A4A$, $\bullet 3A3A4B$, $\bullet 3A3C4A$, $\bullet 3A3C4B$, $\bullet 3C3A4A$, $\bullet 3C3A4B$, $\bullet 3C3C4A$ 和 $\bullet 3C3C4B$。因此，该图给出了一些合理的选择，这意味着

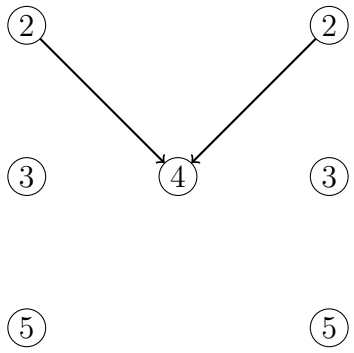


图 3： $A_{76}$ 的折叠形状图

可能存在具有相同轴集和 Miyamoto 群但形状不同的代数——事实上，它们确实存在。

对于我们的代数 $A_{76}$，已知它是 $A_{286}$ 的子代数，且 $A_{286}$ 的形状中不包含 $3C$和 $4A$ ，由此可以推断， $A_{76}$ 的实际形状是 $\bullet 3A3A4B$。

## 2.4 自同构项目

本节回顾我们在自同构项目 [10] 中采用的方法以及开发的计算工具。这些工具通过 MAGMA [2] 实现。我们的所有代数都实现为通用 MAGMA 代数，不过我们必须自行实现子代数函数，因为 MAGMA 中的函数存在错误，导致对非结合代数的计算结果不正确。

我们的程序的完整说明和代码可在 GitHub [21] 上获取。因此，我们这里只介绍下文需要提及的主要功能。

首先，对于较小的代数，我们使用了所谓的精细算法。该算法完全自动化，能够确定维数适中的 Monster 型代数（$_{14}$，$_{132}$）的全自同构群。（该算法成功完成计算的最大代数维数为 36。）我们强调，该算法专为 Monster 融合律设计，因为它利用了有关 Norton-Sakuma 代数的详细信息。有关精细算法的详情，请参见 [10]。

我们寻找较大轴代数 $A$ 的全自同构群的方法如下。首先，我们尝试在 $A$ 中寻找额外的轴：作为已知轴的孪生轴、作为 Jordan 轴，以及作为对应于已知群中其他对合的轴。对于这三种情况，我们都有高效的函数，不过必须指出，这种高效性很大程度上源于融合律属于 Monster 型这一假设。还要注意，由于 Jordan 轴会带来额外自同构，我们最终可能得到更大的自同构群，因此应在搜索 Jordan 轴之后，再分析对应于已知对合的轴。

我们还有一个高效程序，用于检查已知自同构群中的哪些自同构也作用于 $A$；这也可能使已知自同构群增大。

一旦我们确信很可能已经知道全自同构群，就转而证明这一结论。具体而言，我们选取一个小的 2-群 $E$，并旨在通过计算确定 $E$ 在 $A$ 的全自同构群中的正规化子。实际上，我们旨在证明该正规化子与已知自同构群中的正规化子一致。

计算 $E$ 的正规化子的主要策略，是相对于与 $E$ 中的对合相对应的轴集合 $Y = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，将代数 $A$ 分解为联合特征空间的直和

$$A_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)}(Y) = A_{\lambda_1}(a_1) \cap A_{\lambda_2}(a_2) \cap \ldots \cap A_{\lambda_m}(a_m)$$

这些轴的伴随算子所对应的联合特征空间，其中 $\lambda_1$、$\lambda_2$、.....、$\lambda_m$ 遍历融合律中的所有特征值组合；在我们的情形中，它们取自 $\{1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{32}\}$。我们有一个用于计算该分解的函数。根据 $Y$ 中各轴之间的关系，所有联合特征空间的和可能是 $A_0$ 在 $A$ 中的真子空间，在这种情况下，我们用一个附加项将其补足，该附加项定义为关于 Frobenius 型 $A$ 的正交补 $A_0^{\perp}$。我们注意到，在此处考虑的所有代数中，Frobenius 型都是正定的，因此 $A_0^{\perp}$ 确实是 $A_0$ 的补空间。

分解中的一个部分，即联合 0-特征子空间 $U = A_{(0,0,\ldots,0)}(Y)$，总是一个子代数，其余部分则是这个子代数的模。类似地，我们可以取由 $Y$ 自身的轴生成的分解部分（或若干部分的组合），它同样是一个作用于其他直和项上的子代数。我们提供了用于构造和分析这些作用的函数。

这个分解在 $E$的全正规化子作用下保持不变，但其各直和项可能发生置换。因此，我们也提供了逐步构造自同构的函数：将自同构从 $U$ 扩展到分解中适当的其他部分，并将这些部分视为 $U$的模。一旦将一个候选自同构扩展到生成 $A$的子空间，我们就使用专用函数，计算该自同构在整个 $A$上的作用。

这种方法中困难且耗时的部分是起始步骤，即求出 $U$的全自同构群。当然，$U$ 比 $A$小得多。在可行的情况下，我们通过求解线性与二次方程组，找出 $U$ 中长度适当的所有幂等元。如果这些幂等元生成 $U$，那么 $U$ 的自同构群便忠实地作用于这组幂等元，因此可以据此识别该群。这一论证依赖于 $U$的自同构保持可用的 Frobenius 型这一事实。我们提供了一个函数，用于计算给定代数上所有 Frobenius 型构成的空间。当这个空间为 1 维时，该型在标量倍意义下保持不变；此时若存在单位元这样的特殊元素，便可得出结论：Frobenius 型确实保持不变。

当 $U$ 较大时，寻找给定长度的幂等元可能会过于困难，甚至根本不可能。此时，我们只需确定 $U$ 的一个较小不变子代数 $U_0$，然后从 $U_0$ 开始逐步构造自同构，并将其扩展到 $U$ 中 $U_0$ 的正交补，从而求出 Aut($U$)。

这一方法在我们尝试过的所有情形中都行之有效，使我们能够计算 $E$ 在 Aut($A$) 中的正规化子。事实上，在所有情形中，这个正规化子都与已知自同构群中的 $E$ 的正规化子一致。此时，我们转而采用

手工构造的群论论证，分析有限群 Aut($A$) 可能具有的结构，从而推导出它与已知自同构群一致。这些证明对所有代数 $A$都遵循相同的思路，着重考察 Aut($A$) 的极小正规子群 $Q$，并试图利用 Monster 型代数中宫本对合的 6-对合性质（例如，参见 [14] 中的推论 2.10）以及 Aut($A$) 中已知子群的现有表示论，证明 $Q$ 不可能是初等阿贝尔的。一旦确定$Q$ 是非阿贝尔的，我们便将问题化归为单群情形，然后利用 Aut($A$) 的已知 Sylow 2-子群（该子群位于 $E$ 的正规化子中），确定 $Q$ 和 Aut($A$)。

总而言之，对于较大的代数 $A$，我们采用一种混合方法：先在 MAGMA 中计算 $E$ 的正规化子，再证明 Aut($A$) 与已知的自同构群一致。我们尚未遇到 $E$ 的正规化子大于已知自同构群的情况；如果确实遇到这种情况，我们就会在此阶段构造额外自同构，从而得到更大的已知群，并在此之后重复我们的过程。还需要指出，这种方法中的计算部分并非完全自动化，因为我们需要在多个环节决定如何进行：要寻找哪些幂等元长度、将分解的哪些部分继续扩展，等等。

虽然这种混合方法与我们在 [10], 中采用的方法相似，但为了能够处理规模大得多的代数 $A_{286}$，我们还必须进一步改进它。具体而言，在 $A_{286}$ 的情形下，我们关注的是非阿贝尔群 $P \cong D_8$，而不是在 [10] 中使用、并在 $A_{76}$ 和 $A_{101}$ 中采用的 $E \cong 2^2$。关于 Aut($A_{286}$) 中 $P$ 的正规化子已知这一点的计算证明，其总体思路仍与较小情形相似，但这里的分解部分规模大得多，因此我们提出了重要的新方法，进一步分解联合零子代数 $U$。这种进一步的分解也使我们的方法较少依赖子代数上 Frobenius 型的唯一性，以及对所有给定长度的幂等元进行大量计算。最后，关于 $A_{286}$ 的证明中，群论部分要复杂得多，并引入了新的计算方法，使我们能够排除 $Q$ 上可能的模结构；当 $Q$ 为初等阿贝尔时，其中一些结构无法用 [10] 中较直接的方法排除。

# 3 极大子群 $2 \cdot S_4$、 $S_5$ 和 $U_3(2){:}2$

本节介绍由 $M_{11}$ 的较小极大子群产生的代数。所有这些代数均已由 [10] 的精细算法处理。

## 3.1 $2{\cdot}S_4$

极大子群 $H \cong 2{\cdot}S_4$ 包含两类对合，其长度分别为 1 和 12。由对应于第二个轨道中对合的 12 个轴生成的子代数维数为 17，因此下文将其记为 $A_{17}$.[2] 很容易看出，群 $H$ 在该轴集上的形状图是连通的，且包含一个 $6A$ 节点。因此，形状 • 是唯一的，如图 4 所示。

代数 $A_{17}$ 恰好也包含与 $H$ 的中心对合 $z$ 相对应的轴 $j$。注意， $z$ 固定全部十二个生成轴，因此它在 $A_{17}$

[2]据我们所知，这是该代数首次出现在印刷出版物中；不过，J. McInroy 早先已通过应用扩张算法发现了它。 [17]

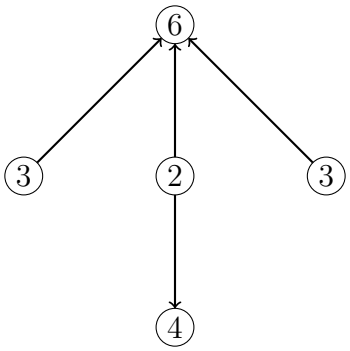


图4： $A_{17}$ 在12个轴上的形状图

上平凡作用。因此，宫本群就是 $H/\langle z\rangle \cong S_4$。这也意味着 $j$ 是 $A_{17}$ 中的一个 Jordan 轴，因此它为 Miy($A_{17}$) $\cong S_4$ 提供了一个额外的、与之对易的 2 阶自同构。利用精细算法，我们验证了所得群 $2\times S_4$ 是 $A_{17}$ 的全自同构群。我们还通过计算验证了 $A_{17}$ 是 2-闭的，并且它存在一个在标量倍意义下唯一的 Frobenius 型。显然，这就是从 $A_{286}$ 继承而来的型；特别地，它是正定的。

$A_{17}$ 的有趣之处在于，它包含孪生轴，但这些孪生轴属于同一个由12个轴组成的轨道。这是首个此类例子。由 $j$ 诱导的对合会成对交换孪生轴。

## 3.2 $S_5$

极大子群 $H \cong S_5$ 包含两个对合轨道，长度分别为10和15。前一个轨道生成一个维数为36的子代数 $A_{36}$ ，而这个子代数也包含长度为15的轨道。

代数 $A_{36}$ 并非新代数，文献 [25, 18]中曾提及它。其全自同构群在文献 [10], 中被确定；该文使用精细算法证明，Aut($M_{36}$) =Miy($A_{36}$) $\cong S_5$。

注意， $S_5$ 的形状图不连通（见图5），且有两种可能的形状。 $A_{36}$ 在轴集 $10+15$ 上的形状为 $\bullet 4B$，而在轴集10.[3] 上则为 $\bullet 3A2A$ 。代数 $A_{36}$ 相对于 $10+15$ 个轴是2-闭的，相对于10个轴是3-闭的。除标量倍外，它存在唯一的（正定）Frobenius 型。

长度为 15 的轨道生成一个形状为 $\bullet 3A2A$ 的 26 维子代数 $A_{26}$。宫本群 Miy($A_{26}$) 同构于 $A_5$。代数 $A_{26}$ 也并非新的。它已在 [25, 18], 中出现，而 Aut($A_{26}$) 则在 [10], 中得到确定，即 Aut($A_{26}$) $\cong S_5$。

为求完整，我们提及轴集 $10+15$ 上 $S_5$ 的剩余形状 $\bullet 4A$。这补全了唯一的 61 维代数，其全自同构群$2\times S_5$（由一个 Jordan 轴诱导的因子 2）已在 [10]中得到确定。

## 3.3 $U_3$(2):2

最后，设 $H \cong U_3$(2):2。则 $H$ 包含 $21 = 9+12$ 个对合。所有这些对合生成 $H$中指数 2 的真子群 $H_0 \cong S_3 \wr 2$。在 $H_0$的作用下，我们有三条长度分别为 6、6 和 9 的轨道。

[3]根据 [18], ，这一情形仍未解决，也就是说，尚不清楚对于大小为 10 的轴集以及这种形状， $A_{36}$ 是否是$S_5$ 的唯一代数。

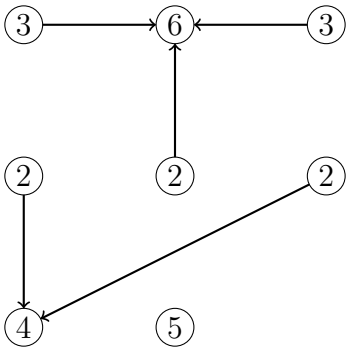


图 5： $A_{36}$ 在 $10+15$ 个轴上的形状图

现在我们报告由轴上相应轨道的各种组合所生成的子代数。两条长度为 6 的轨道生成维数为 18 的同构子代数 $A_{18}$和 $A'_{18}$。 $A_{18}$ 和 $A'_{18}$ 都包含长度为 9 的轨道。此外，子代数 $A_{12}=A_{18}\cap A'_{18}$ 由该轨道生成。最后，维数为 $18+18-12=24$ 的子空间 $A_{24}=A_{18}+A'_{18}$实际上是一个子代数，并且它显然是由两条长度为 6 的轨道以及全部 $21=6+6+9$ 条轴所生成的子代数。（见图 6。）

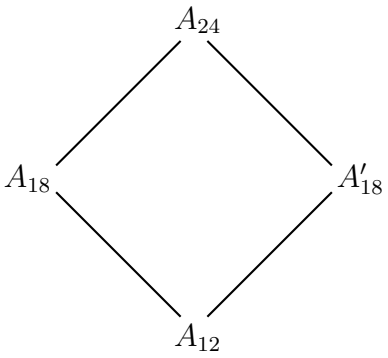


图 6： $A_{24}$中代数包含关系的哈斯图

代数 $A_{24}$ 和 $A_{12}$ 是新的。代数 $A_{18}$ 此前未曾发表过，但它包含在 J. McInroy 的数据库 [17] 中，该数据库收录了使用扩张算法构造的代数。

现在我们依次讨论这三个代数。

我们上文提到 Miy($A_{24}$) $=H_0\cong S_3\wr 2$。应用精细算法可知 Aut($A_{24}$) $=H$，特别是，$A_{24}$ 不包含任何新的轴。相对于轴集 $6+6+9$， $A_{24}$ 的形状图如图 7 所示，它有两个连通分支，其中一个分支的节点大小为 6。

这意味着该分支中只有一种选择。第二个分支给出了两种可能的形状选择： $\bullet 4A$ 和 $\bullet 4B$，而代数 $A_{24}$ 的形状为
$\bullet 4B$。为完整起见，我们提及，具有相同轴集和形状 $\bullet 4A$的代数已知维数为 45（见数据库 [17]）。其全自同构群目前尚不清楚，不过它比 $H_0$ 更大，因为该代数包含唯一一个 Jordan 轴。此外，由这个 Jordan 轴诱导的对合可知，$6+6$ 中的两个轨道都有孪生轨道 $6'+6'$，因此该代数中的轴总数至少为$1+6+6+6'+6'+9=34$ 个。这个代数很有意思，但我们没有将其纳入

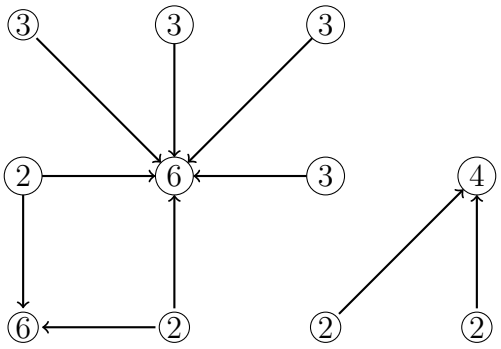


图 7： $A_{24}$ 在 21 条轴上的形状图

当前项目，因为它与 $A_{286}$ 和 $M_{11}$没有直接关系。不过，我们确实尝试对这个代数应用精细算法，但没有成功。

如果改为考虑较小的轴集 $6+6$，那么图 8 所示的形状图有三个分量，每个分量各有两种选择。

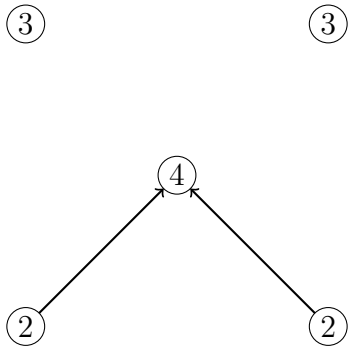


图 8： $A_{24}$ 在 $6+6$ 条轴上的形状图

因此，总共有八种可能的形状，但若按同构分类，则只有六种。 $A_{24}$ 在 $6+6$ 上的形状为 $\bullet 4B3A3A$。代数 $A_{24}$ 对于轴集 $6+6+9$ 是 2-闭的，对于 $6+6$是 3-闭的。最后， $A_{24}$ 在相差一个标量倍的意义下，存在唯一的（正定）Frobenius 型。

目前尚不清楚 $A_{24}$ 是否是具有其轴集且形状为 $\bullet 4B3A3A$ 的唯一代数。此外，目前无法通过扩张算法补全形状 $\bullet 4A3A3A$，因此我们不知道是否存在任何具有这种形状的代数。其余四种形状，

$\bullet 4A3A3C$、 $\bullet 4A3C3C$、 $\bullet 4B3A3C$ 和 $\bullet 4B3C3C$ 都会坍缩，因此不存在这些形状的代数。

代数 $A_{18}$ 仅在 $H_0$下保持不变；然而，它的宫本群更小，即 $K = \mathrm{Miy}(A_{18})$ $\cong S_3 \times S_3$。在该群的作用下，轨道6分裂为$3+3$，而轨道9仍是单个轨道。 $3+3+9$ 上的形状图见图9。它允许四种形状。 $A_{18}$ 的形状为 $\bullet 3A2A$ ，且它是唯一具有这种形状的代数。在其余三种形状中， $\bullet 3C2A$ 和 $\bullet 3C2B$ 合并，而 $\bullet 3A2B$ 对应一个唯一的25维代数。这些代数均已在 [18]中出现。两者 $A_{18}$ 和25维代数的全自同构群已在 [10] 中通过精细算法确定。特别地，$\mathrm{Aut}(A_{18}) = H_0 \cong S_3 \wr 2$。同样， $A_{18}$ 上的Frobenius 型正定，且除标量倍外唯一。

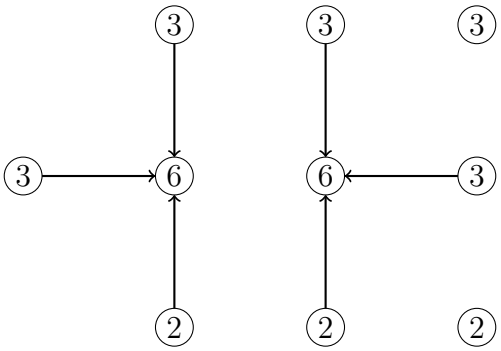


图9： $A_{18}$ 上的 $3+3+9$ 个轴的形状图

如果我们再次去掉轨道9，并考虑 $A_{18}$ 的轴集 $3+3$ ，那么形状图如图10所示，这表明有八种可能的形状。然而，若按同构分类， $3+3$上只有六种可能的形状。代数 $A_{18}$ 的形状为 $\bullet 3A3A2A$




图10： $A_{18}$ 上的 $3+3$ 个轴的形状图

而且尚不清楚它是否是唯一具有这种形状的情形。形状 $\bullet 3A3C2A$ 和 $\bullet 3C3C2A$ 退化。涉及 $2B$的三种形状分别是 $\bullet 3A3A2B$、 $\bullet 3A3C2B$和 $\bullet 3C3C2B$ 都对应于直和代数： $3A \oplus 3A$ （8维）、 $3A \oplus 3C$ （7维）和 $3C \oplus 3C$ （6维），这些代数都已得到充分理解。

最后，由轨道9生成的代数 $A_{12}$的宫本群为 $L = 3^2{:}2$。图11展示了相应轴集的形状图。这里我们有四个二元




图11： $A_{12}$ 在9个轴上的形状图

有多个选择，因此共有16种形状，但在同构意义下只有五种： $\bullet 3A3A3A3A$, $\bullet 3A3A3A3C$, $\bullet 3A3A3C3C$, $\bullet 3A3C3C3C$, 和 $\bullet 3C3C3C3C$。（注意，轴集的自同构群为 $AGL(2,3)$。）代数 $A_{12}$ 的形状为 $\bullet 3A3A3A3A$ ，其全自同构群由精细算法求得，为 $AGL(2,3)$。这里 $L = \mathrm{Miy}(A_{12})$ 在全自同构群中的指数为24，这是迄今已知的此类最大指数。目前尚不清楚 $A_{12}$ 是否是具有其轴集和形状的唯一代数。

形状 $\bullet 3A3A3A3C$ 退化了。我们没有关于该形状的更多信息 $\bullet 3A3A3C3C$。形状 $\bullet 3A3C3C3C$ 补全为一个12维代数，不同于 $A_{12}$ ，且出现在数据库 [17], 中；而 $\bullet 3C3C3C3C$ 则补全为一个9维代数，显然是 Jordan 型 $_1{}_{32}$ 的代数，也就是 3-换位群 $L \cong 3^2{:}2$ 的 Matsuo代数。

对于形状为 $\bullet 3A3C3C3C$ 的 12维代数，精细算法未发现更多轴，这意味着其自同构群忠实地作用于轴集 9，且宫本群为 $L \cong 3^2{:}2$。因此，该代数的全自同构群与形状在 $\mathrm{Aut}(3^2{:}2) \cong AGL(3,2)$ 中的稳定子一致，故它是 $L$ 对 $S_3$ 的延拓，整体结构为 $3.S_3^2$。对于 $L$ 的 9维 Matsuo代数，也使用精细算法进行了类似检查，结果表明该

代数不包含更多轴。因此，该代数的全自同构群就是 $AGL(3,2)$，因为形状 $\bullet 3C3C3C3C$ 受整个群稳定。

代数 $A_{24}$、$A_{18}$ 和 $A_{12}$ 的相关信息汇总于表1

# 4 $A_6$ 的 $\bullet 4B3A3A$ 形状的76维代数

本节确定与 $M_{11}$ 的极大子群 $G_0 \cong M_{10}$ 对应的 76 维代数 $A = A_{76}$ 的全自同构群。注意，$G_0$ 在 $A$ 上诱导一个自同构群，不过 $A$ 的宫本群仅为 $G_0$ 中指数为 2 的 $M \cong A_6$。$A$ 中已知的轴集 $X$ 包含 45 个轴。代数 $A$ 是 2-闭的，并且存在唯一的（相差一个标量倍）正定弗罗贝尼乌斯型，它是较大代数 $A_{286}$ 的弗罗贝尼乌斯型在 $A$ 上的限制。设 $T \cong D_8$ 是 $M$ 的一个 Sylow 2- 子群，且 $E \cong 2^2$ 是 $T$ 的一个子群。令 $a_1$、$a_2$ 和 $a_3$ 为其宫本对合属于 $E$ 的轴。设 $Y = \{a_1, a_2, a_3\}.$。$Y$ 中的轴张成一个子代数 $V = \langle Y \rangle \cong 2A$。我们记录代数 $A$ 的一些基本事实，以及关于 $Y$ 的联合特征空间分解。

**计算 4.1**。(a) $A$ 中的代数不具有 *Jordan* 轴；

(b) $X$ 中的45个轴没有孪生轴；以及

(c) $G := \mathrm{Aut}(M)$ 作用于 $A$。

因此，$A$ 的已知自同构群为 $G = \mathrm{Aut}(A_6) \cong A_6.2^2$，其阶是 $G_0$的两倍。群 $G$ 有三个对合类，其大小分别为 45、30 和 36。我们检验 $G \setminus M$ 中的对合（最后两个类）是否并非由轴诱导。

**计算 4.2**。$G \setminus M$ 中的对合不对应于 *Monster* 型$\mathcal{M}$ $\left(\frac{1}{4}\right.$的轴，$\left.\frac{1}{32}\right)$ 位于 $A$中。

现在我们将根据 $Y$对 $A$ 进行分解。

**计算 4.3.** 对应于 $Y$ 的 $A$ 的联合特征空间分解具有如下分量：

(a) $U := A_{(0,0,0)}(Y)$ 的维数为15；

(b) 其余非零直和项$A_{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}(Y)$ 为：

(i) $A_{\left(\frac{1}{4},\frac{1}{32},\frac{1}{32}\right)}(Y)$, $A_{\left(\frac{1}{32},\frac{1}{4},\frac{1}{32}\right)}(Y)$, *and* $A_{\left(\frac{1}{32},\frac{1}{32},\frac{1}{4}\right)}(Y)$, *of dimension* 5 *each and;*

(ii) $A_{\left(0,\frac{1}{32},\frac{1}{32}\right)}(Y)$, $A_{\left(\frac{1}{32},0,\frac{1}{32}\right)}(Y)$, *and* $A_{\left(\frac{1}{32},\frac{1}{32},0\right)}(Y)$, *each of dimension* 11.

注意，所有这些联合特征空间之和并非整个 $A$，这在我们相对于子代数 $2A$ 分解一个大代数时是正常的（参见 [10]）。

我们首先确定 $\mathrm{Aut}(U)$。由于 $U$ 的维数不够小，凭借我们现有的计算工具，想要找出 $U$ 中的所有幂等元是不可能的。因此，我们将探索如何在 $U$ 中找到长度特定的幂等元，这样便能快速找出它们。令 $N \cong 2 \times S_4$ 为 $G$ 中 $E$ 的正规化子，并考虑 $U$中 $N$ 的不动子代数 $U_N$。这个子代数的维数为 5，我们可以轻松找出其中所有的幂等元。结果表明，$U_N$ 有 24 个平方长度各不相同的幂等元。特别地，$U_N$中存在唯一一个长度为 2 的幂等元 $d$。

**计算 4.4**。(a) 在相差一个标量倍的意义下，$U$ 存在唯一的 *Frobenius* 型；

(b) 幂等元 $d$是 $U$ 中唯一长度为2的幂等元；(c) $\mathrm{ad_d}$ 在 $A$中的特征值1、0、$_{1\ 2}$ 和$_{1\ 8}$ 的维数分别为1、34、9 和32；而在 $U$中分别为1、7、3 和4 ；(d) $d$在 $U$中满足几乎 *Monster* 融合律 $\mathcal{AM}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$，且 $A$。

**注 4.5.** 我们注意到，几乎 Monster 融合律是 $C_2$-分次的，因此有一个与 $d$对应的宫本对合 $z := \tau_d$。此对合 $z$ 包含于$G \setminus M$中，属于大小为 30 的共轭类。此外，$A = \langle\langle d^G \rangle\rangle$，因此我们可以将 $A$ 视为一个具有宫本群 $S_6$的轴代数，其轴集大小为 30，并满足几乎 Monster $\mathcal{AM}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$融合律。

另请注意，由于 $N$ 固定了 $d$，因此它与 $z$交换，这意味着 $z$ 是来自 $N$的中心对合。

我们将使用 $d$ 分解 $U$，以帮助我们确定 $U$的全自同构群。我们从 $U' = U_0(d)$ 开始。首先，我们建立以下计算事实。

**计算 4.6**。 (a) 在标量倍意义下，$U'$ 存在唯一的 *Frobenius* 型；

(b) 子代数 $U'$ 恰好有三个长度为 $^1$的幂等元：$v_1$、$v_2$ 和 $v_3$；

(c) $\langle\langle v_1, v_2, v_3 \rangle\rangle = U'$；

(d) $v_i$ 的伴随算子的特征值为1、0、$_{1\ 10}$、$_{13\ 30}$、$_{1\ 20}$ 和$_{7\ 20}$，其对应的重数分别为1、2、1、1、1和1；并且

(e) 幂等元 $v_i$ 在 $U$ 上满足一个 $C_2$-分次融合律，其

$$U'_+(v_i) = \bigoplus_{\lambda \in \left\{1, 0, \frac{1}{10}, \frac{13}{30}\right\}} U'_\lambda(v_i)$$

*and*

$$U'_-(v_i) = \bigoplus_{\lambda \in \left\{\frac{1}{20}, \frac{7}{20}\right\}} U'_\lambda(v_i).$$

此外，$\langle \tau_{v_i} \mid i = 1, 2, 3 \rangle \cong S_3$ 作用于 $U'$上。

由此得到以下引理。

**引理 4.7**。 $U'$的全自同构群$\mathrm{Aut}(U')$同构于 $S_3$。

证明。 根据计算 4.6(c)，任意自同构 $\phi \in$ Aut($U'$)完全由其对 $v_1$、$v_2$ 和 $v_3$的作用决定，因为它们生成 $U'$。部分 (e)表明，τ映射$\tau_{v_i}$在 $\{v_1, v_2, v_3\}$上诱导 $S_3$，因此也在 $U'$上诱导 $S_3$。

$U'$的每个自同构都会保留集合 $\{v_1, v_2, v_3\}$，因为根据计算 4.6(a)，它会保留长度；而根据部分 (b)，$v_i$ 是 $U'$ 中长度为$_{17\ 5}$ 的唯一幂等元。由于 $\tau_{v_i}$在 $\{v_1, v_2, v_3\}$上诱导出完整的对称群，Aut($U'$) $= \langle \tau_{v_i} \mid i =$1，2，3⟩。 □

注意，Aut($U$) 固定 $d$，因此它作用于 $U'$。

**计算 4.8**。令 $W = U_{\frac{1}{8}}(d)$。则下述结论成立。

(a) $\langle\langle W\rangle\rangle = U$；(b) $U'$ 上的恒等自同构在 $W$ 上延拓为一个维数为 1 的扩张空间；并且

(c) 对于某个非零元素 $w \in W$ 和某个非零 $u' \in U'$，$(w^2, u') \neq 0$。

**引理 4.9.** 作用于 $U'$ 的 $\mathrm{Aut}(U)$ 的核是 $\langle\tau_d\rangle \cong C_2$。

证明. 假设 $\phi \in \mathrm{Aut}(U)$ 在 $U'$ 上作用为单位元。根据计算 4.8 (b)，$\phi_{|W} = \lambda \mathrm{id}_W$，其中 $\lambda$ 是某个标量。第 (c) 部分由此给出 $0 \neq (w^2, u')$，因此 $0 \neq (w^2, u') = ((w^2)^\phi, u'^\phi) = ((w^\phi)^2, u') = ((\lambda w)^2, u') = \lambda^2(w^2, u')$。由此可得 $\lambda^2 = 1$ 和 $\lambda = \pm 1$。这表明，作用于 $U'$ 的 $\mathrm{Aut}(U)$ 的核的阶至多为 2。另一方面，$\tau_d$ 属于此核，因此结论成立。 □

我们需要以下进一步的计算事实来确定 $\mathrm{Aut}(U)$。

**计算 4.10**。(a) $U$ 恰有三个长度为 $7\,5$ 的幂等元：$u_1$、$u_2$ 和 $u_3$；

(b) $u_i$ 的伴随算子具有 1、0、$3\,10$ 和 $1\,20$ 这些特征值，其重数分别为 1、6、3 和 $d$ 5；

(c) $u_i$ 在 $U$ 中满足几乎 *Monster* 融合律 $\mathcal{AM}\left(\frac{3}{10}, \frac{1}{20}\right)$；以及

(d) $\langle\tau_{u_i} \mid i = 1,2,3\rangle \cong S_3$.

这给出了以下引理。

**引理 4.11**。$\mathrm{Aut}(U) \cong 2 \times S_3$。

证明。根据计算 4.10(d)，$\langle\tau_{u_i} \mid i = 1, 2, 3\rangle$。由于 $d$ 在 $U$ 中长度为 $\tau_d$ 的对象是唯一的，$\tau_d$ 是 $\mathrm{Aut}(U)$ 的中心的，从而得到 $\mathrm{Aut}(U)$ 的一个子群 $2 \times S_3$。另一方面，根据引理 4.7 和引理 4.9，$\mathrm{Aut}(U)$ 的阶不超过 12，因此结论成立。 □

**注记 4.12**。或者，我们也可以不采用上述证明，而是简单地将 $U'$ 的已知自同构延拓到 $W$，从而证明它们中的每一个恰好有两个延拓。

现在考虑一个在 $U$ 上平凡作用的自同构 $\phi$，我们希望确定它如何延拓到整个 $A$。重点将放在 11 维的分量 $W_1 = A_{(0, \frac{1}{32}, \frac{1}{32})}(Y)$、$W_2 = A_{(1\,32,\ 0,\ 1\,32)}(Y)$ 和 $W_3 = A_{(1\,32,\ 1\,32,\ 0)}(Y)$ 上。我们首先证明每个延拓 $\phi$ 都使它们保持不变。

回想一下，每个 $W_i$ 都是 $U$ 的一个模。

**计算 4.13**。在对 $v_1$、$v_2$ 和 $v_3$ 重新排序后，我们有：$v_i$ 作用于 $W_i$ 时，其特征值为 $1\,5$、$3\,10$、$1\,20$、$9\,20$、$\overline{1}\,9\,20$、$\overline{1\,30}$ 和 $\overline{2\,3\,60}$，重数分别为 1、2、4、1、1、1 和 1；作用于另外两个 $W_j$、$v_i$ 时，其特征值为 $1\,32$、$3\,7\,160$、$5\,3\,160$、$\overline{11\,7\,160}$、$\overline{31\,480}$ 和 $\overline{7\,9\,480}$，重数依次为 2、2、4、1、1 和 1。

这意味着幂等元 $v_1$、$v_2$ 和 $v_3$ 与分量 $W_1$、$W_2$ 和 $W_3$ 之间存在自然的匹配。特别地，由于 $\phi$ 固定了 $v_1$、$v_2$ 和 $v_3$，我们有如下结论。

**引理 4.14.** 每个正规化 $E$ 且在 $U$ 上作用为单位元的 $\phi \in \mathrm{Aut}(A)$ 都保持 $W_1$、 $W_2$ 和 $W_3$。

现在我们考察 $\phi$ 如何扩张到这些分量。

**计算 4.15**。 (a) $U$ 上的恒等自同构在每个 $W_i$ 上都存在 1 维的扩张空间;

(b) 对于任意一对 $\{i,j\} \subset \{1,2,3\}$, $\langle\langle W_i, W_j \rangle\rangle = A$;

(c) 对于某些非零元素 $w_i \in W_i$ 和 $u \in U$，有如下结论:

(i) $(w_i^2, u) \neq 0$ 且;

(ii) $(w_1 w_2, w_3) \neq 0$。

现在我们探讨上述计算的结果。根据计算 4.15 ˆ (a), $\phi$ 在 $W_i$ 上作为标量 $\nu_i$ 起作用。令 $N = N_{\mathrm{Aut}(A)}(E)$ 为 Aut($A$) 中 $E$ 的正规化子。上述计算引出如下结论。

ˆ ˆ**引理 4.16.** $U$ 上的 $N$ 作用的核 $K$ 是 $E$。

证明。 设 $\phi \in$ ˆ$K$。由计算 4.15 (c)(i), $0 \neq (w_i^2, u) = ((w_i^2)^\phi, u^\phi) = ((w_i^\phi)^2, u) = ((\nu_i w_i)^2, u) = \nu_i^2 (w_i^2, u)$。由此可得 $\nu_i^2 = 1$，因此 $\nu_i = \pm 1$。

类似地，计算 4.15 (c)(ii) 给出 $0 \neq (w_1 w_2, w_3) = ((w_1 w_2)^\phi, w_3^\phi) = (w_1^\phi w_2^\phi, \nu_3 w_3) = ((\nu_1 w_1)(\nu_2 w_2)\ \nu_3 w_3) = \nu_1 \nu_2 \nu_3 (w_1 w_2, w_3)$，由此我们得出 $\nu_1 \nu_2 \nu_3 = 1$。这意味着，在三元组 $(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ 中，负值以偶数个出现。因此，$(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ 属于集合

$$\{(1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1)\} \cong 2^2.$$

第一个元素对应单位元，第二个对应 $\tau_{a_1}$，第三个对应 $\tau_{a_2}$，第四个对应 $\tau_{a_3}$。因此 $K = E$，如所述。 □

由上述引理可得以下结论。

ˆ**推论 4.17**。 $N = N$.

ˆ ˆ证明。 由于 $K = E$，根据引理 4.16, $N \leq N$ 在 $U$ 上诱导出 $N/E \cong 2 \times S_3$，而它是 $U$ 的全自同构群，因此结论得证。 □

我们将运用群论论证来证明本节的最终定理。

**定理 4.18**。我们有 $\mathrm{Aut}(A_{76}) = G \cong \mathrm{Aut}(A_6)$.

事实上，定理 13.17], 中求得 Aut($A_6$) 的另一个轴代数的自同构群的论证，同样适用（ [10, ）。因此，我们这里只给出概要。作必要的相应修改

Let $\hat{G}$ 与 Aut($A$) 群 我们需要证明 $G$ 与 Aut($A_6$) 重合。根据上述计算，我们知道 $N = N_{\hat{G}}(E) = N_G(E) = N \cong 2 \times S_4$。ˆ第一步是证明 $G$ 和 $G$ 有一个共同的 Sylow 2-子群。这是有限群论中的标准论证。设 $S$ 是 $G$ 的一个 Sylow 2-子群，其中包含一个 Sylow

ˆ 2-子群 $S$，它属于 $G$，且 $E \leq S$。如果 $S < S$，那么 $S < N_{\hat{S}}(S)$也成立，最终这会导致有额外的元素正规化 $E$，从而产生矛盾，因为 $N = N$。

此后，我们首先排除 $Q$ 是初等阿贝尔 $p$-群的可能性。情形 $\hat{p} = 2$ 不可能，因为此时 $S$ 在 $Q$中会有非平凡的中心化子，但 $S$ 是自中心化的，并且在此情形下它与$Q$ 平凡相交。奇数 $p$借助 Miyamoto 对合的 6-对合性质被排除。显然，这立即迫使 $p = 3$ 或 5。对于这两个素数，我们考虑 $Q$ 的一个不可约 $M$-子模，并利用 $M \cong A_6$现有的模特征标表排除所有可能性。我们用如下判据排除所有非平凡模（由于 $S$ 是自中心化的，平凡模不可能）：来自 $M$的两个 Miyamoto 对合，其乘积的阶为 $\{3, 5\} \setminus \{p\}$，不能反演 $Q$的同一个非平凡元素，否则将导致一个 15 阶的乘积。这进而蕴含一个较弱但更简单的条件：可能的不可约模的维数必须是 3 的倍数。对于 $p = 5$，这排除了一切；对于 $p = 3$，简单条件与更精细条件的结合也完成了论证。

此时，我们知道 $Q$ 是同构的非阿贝尔单群的直积。由于 $G$ 包含 $G$ 的 Sylow 2-子群 $S$，我们推得 $M \leq Q$；此外，由于 $S$ 很小，我们还推得 $Q$ 本身是一个单群。最后，我们应用具有二面体 Sylow 2-子群的有限单群分类 [9]，证明 $Q$ 只能是 $L_2(q)$，其中 $q \equiv 7,9 \bmod 16$，或者是 $A_7$；再次利用 6-对换条件及其他可用信息后，我们最终推出 $Q = M$ 和 $G = G_0$。

# 5 $L_2(11)$ 的 101 维代数，形状为 •

该代数 $A = A_{101}$ 是由 $G := PGL(2, 11)$ 中的 55 个对合类构造的，其对应的宫本群为 $G_0 := L_2(11)$。令 $S \cong D_8$ 为 $G$ 的一个阶为 8 的二面体 Sylow 2-子群。则 $S$ 有三个对合类，其中一个是中心的，另外两个的大小均为 2。设中心对合 $\tau_1$ 由轴 $a_1$ 诱导，其中一个类也由轴诱导。令由轴诱导的类为 $\{\tau_2, \tau_3\}$，并令 $a_2$ 和 $a_3$ 为相应的轴。置 $E = \langle \tau_1, \tau_2, \tau_3 \rangle \cong 2^2$。这是 $G_0$ 的一个 Sylow 2-子群。相应的子代数 $V = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ 同构于 $2A$。

我们首先检查是否存在额外的轴，以及 Frobenius 型是否唯一 .

**计算 5.1**。 (a) 代数 $A$没有 *Jordan* 轴；

(b) 已知的55个轴没有孪生轴；

(c) $G \setminus G_0$ 中的对合并非由轴诱导；

(d) $A$ 上的正定 *Frobenius* 型在相差一个标量倍的意义下唯一。

设 $N_0 = N_{G_0}(E) \cong A_4$ 和 $N = N_G(E) \cong S_4$。群 $G_0 = L_2(11)$有两个同构于 $A_5$、阶为 60 的子群共轭类。设 $H_1$ 和 $H_2$ 分别是这两个共轭类中包含 $N_0$的（唯一）成员。设 $B_i$ 为由来自 $H_i$的 15 个对合所对应的轴生成的$A$ 的子代数。那么 $B_i$ 的维数为 26。观察 $A_{101}$ 的形状图（见图 2）， $B_i$ 的形状只能是 $\bullet 3A2A$，因此维数信息与 [25, 18]一致。

令 $Y = \{a_1, a_2, a_3\}$。现在我们将相对于 $Y$分解 $A$。

**计算 5.2.** $A$ 相对于 $Y$ 的联合特征空间分解如下:

(a) $U = A_{(0,0,0)}(Y)$ *of dimension* 18*;*

(b) $A_{\left(\frac{1}{4},\frac{1}{32},\frac{1}{32}\right)}(Y), A_{\left(\frac{1}{32},\frac{1}{4},\frac{1}{32}\right)}(Y)$ *and* $A_{\left(\frac{1}{32},\frac{1}{32},\frac{1}{4}\right)}(Y)$*, each of dimension* 5*; and*

(c) $A_{\left(0,\frac{1}{32},\frac{1}{32}\right)}(Y), A_{\left(\frac{1}{32},0,\frac{1}{32}\right)}(Y)$ *and* $A_{\left(\frac{1}{32},\frac{1}{32},0\right)}(Y)$*, each of dimension* 17*.*

照例，我们先确定 Aut($U$)。首先注意， $N = N_G(E)$作用于 $U$ 上，并在其上诱导出群 $N = N/E \cong S_3$的一个商群，因为 $E$ 在 $U$上平凡作用。通过计算很容易验证， $N$ 中的 3 阶元素在$U$ 上非平凡作用，这意味着整个群 $N \cong S_3$ 都诱导在 $U$上。我们旨在证明 Aut($U \cong N$。

令 $b_i := \mathbb{1}_{B_i} - \mathbb{1}_V, i = 1, 2$。根据 $B_i$的定义，我们有 $V \subseteq B_i$，因此 $i = 1, 2$。事实上， $b_i a_j = (\mathbb{1}_{B_i} - \mathbb{1}_V)\, a_j = a_j - a_j = 0$ 对于 $a_j \in Y$。为了确立 $\langle\langle b_1, b_2 \rangle\rangle$ 在正规化 $E$的自同构下的不变性，我们在 $U$中进行如下计算。

**计算 5.3**。 $b_1$ 和 $b_2$ 是 $U$中仅有的两个长度为276 35的幂等元。 —

令 $W = \langle\langle b_1, b_2 \rangle\rangle$。那么 $W$ 是6维的，并且在 $A$ 中正规化 $E$的自同构作用下保持不变。我们注意到，来自 $S \setminus E$ 的对合会置换 $H_1$ 和 $H_2$ ，因此也会置换 $b_1$ 和 $b_2$。

**计算 5.4**。 (a) 特征子空间 $A_1(b_i) = U_1(b_i)$ 是4维的，而 $W' := \cap_i U_1(b_i)$ 是1维的;

(b) $W'$ 中唯一的非零幂等元 $x$ 的长度为20 7 ; —

(c) $\mathrm{ad}_x$ 的谱为1、0、1 14、2–7 和3 7 ，–相应特征子空间的维数依次为1、5、6、2和4。

(d) $x$ 在 $U$中满足*Seress* 非分次融合律；且

(e) $U_1(x) + U_0(x) = W$.

我们利用关于 $x$的分解来求Aut($U$)。设 $T = U_{\frac{1}{14}}(x)$。 —

**计算 5.5.** $U = \langle\langle T \rangle\rangle$.

鉴于计算 5.3、5.4 和 5.5， $U$ 的所有自同构完全由其在 $T$上的作用决定。由于 Aut($U$)使 $W$的生成集 $\{b_1, b_2\}$ 保持不变，而且 $S \setminus E$ 的每个元素都交换 $b_1$ 与 $b_2$，我们得出Aut($U$)在 $W$ 上诱导一个二阶群。剩下的是求出Aut($U$)在 $W$上的作用的核。因此，我们关注 $W$的恒等自同构到 $T$的扩张。

注意，由于 $x$ 满足Seress融合律， $T$ 是 $W$的一个模。

**计算5.6**。 (a) 模 $T$ 允许一个2维空间 $H$ ，其中包含 $W$ 的恒等自同构的扩张;

(b) 一个 $n$ 非单位元 $\phi \in H$ 在 $\mathbb{Q}$ 上有一个不可约二次最小多项式 $f$ 。

˜令 $\mathbb{Q}$ 为与此最小多项式对应的 $\mathbb{Q}$ 的二次扩张。˜ ˜令 $A$ 为视为 $\mathbb{Q}$ 上的代数 $A$，并且我们对 $A$ 的所有子代数和子空间也相应采用带波浪号的记号。

˜**计算 5.7.** (a) 作用于 $T$ 时，非平凡的 $\phi \in H$ 有两个共轭特征值 $\xi_1$ 和 $\xi_2$，相应的特征子空间 $T_i$、 $i = 1$、2在 $\phi$ 中的维数均为 3；

˜(b) $T_1$ 和 $T_2$ 是 $W$ 的模；并且

(c) 每个 $T_i$ 都有一个一维的扩张空间，该空间对应于 ˜$W$ 上恒等自同构的扩张。

注意，尽管 $T_1$ 和 $T_2$ 是根据某个特定的 $\phi \in H$ 定义的，但这些 ˜ 子空间在整个 $H$ 作用下保持不变。因此，我们现在可以再次讨论任意的 $\phi \in H$。

计算 5.7(c) 的一个推论是，任意 $\phi \in H$ 在 $T_i$ 上都作为标量 $\lambda_i$ 作用，，2。

**计算 5.8.** (a) 对于某些 $t_i \in T_i$ 和 $w \in \tilde{W}$，有 $(t_i^3, w) \neq 0$；并且

**(b)** $(t_1 t_2, w) \neq 0$.

现在我们可以证明以下引理。

**引理 5.9.** 作用于 $W$ 上的 $\mathrm{Aut}(U)$ 的核的阶为 3。

˜证明。 由于 $N \leq$ Aut($U$)，我们知道该核的阶至少为 3。因此我们需要证明其阶至多为 3。设 $\psi$ 为该核中的一个元素，并设 $\phi := \psi|_T \in H$。由计算 5.8(a) 可知，

$$0 \neq (t_i^3, w) = ((t_i^3)^\psi, w^\psi) = ((t_i^\phi)^3, w) = ((\lambda_i t_i)^3, w) = \lambda_i^3 (t_i^3, w).$$

由此可得 $\lambda_i^3 = 1$。此外，由部分 (b) 可得，

$$0 \neq (t_1 t_2, w) = ((t_1 t_2)^\psi, w^\psi) = (t_1^\phi t_2^\phi, w) = (\lambda_1 t_1 \lambda_2 t_2, w) = \lambda_1 \lambda_2 (t_1 t_2, w),$$

因此 $\lambda_1 \lambda_2 = 1$，也就是说，$\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$。由此可知，我们只有三种可能的 $\phi := \psi|_T$，因此作用于 $W$ 上的 Aut($U$) 的核中至多有三个元素 $\psi$。 □

因此，我们现在得到了所需的结论。

˜**推论 5.10**。 自同构群 $Aut(U) \cong N \cong S_3$。

显然，由引理 5.9 可知，Aut($U$) 的阶至多为 6，因此 Aut($U$) 的确˜与由 $N = N_G(E)$ 诱导的群 $N \cong S_3$ 重合。

现在我们试图将 $U$ 的自同构扩张到整个代数 $A$。鉴于以下计算事实，我们将重点放在 17维直和项 $W_1 := {}^{A}(0, \frac{1}{32}, \frac{1}{32})(Y)$、 $W_2 := A(\,{}_{132}, 0, {}_{132})(Y)$ 和 $W_3 := A(\,{}_{132}, {}_{132}, 0)(Y)$ 上。照例，这些直和项是 $U$˜的模。 − −

**计算 5.11.** (a) 这些加项 $W_i$ 生成 $A$，即 $A = \langle\langle W_1, W_2, W_3 \rangle\rangle$；事实上，其中任意一对都生成 $A$；

(b) 每个 $W_i$，$i = 1$、2、3，都具有 $U$ 的恒等自同构的 1 维扩张空间；

(c) 对于某些 $w_i \in W_i$ 和 $u \in U$，我们有

(i) $(w_i^2, u) \neq 0$ 且；
(ii) $(w_1 w_2, w_3) \neq 0$。

ˆ 现在我们能够确定作用在 $U$上的 $N := N_{\mathrm{Aut}(A)}(E)$ 的核 $K$。

**引理 5.12**。我们有 $K = E$。

证明。根据计算 5.11 (a)，$A$ 的任何稳定 $Y$ 的自同构，都完全由其在分量 $W_i$ 上的作用决定。令 $\phi \in K$。根据部分 (b)，$\phi$ 在每个 $W_i$ 上都以标量 $\mu_i$ 作用。根据 (c)(i)，$\mu_i^2 = 1$，因为 $0 \neq (w_i^2, u) = ((w_i^2)^\phi, u^\phi) = ((w_i^\phi)^2, u) = ((\mu_i w_i)^2, u) = \mu_i^2 (w_i^2, u)$。因此 $\mu_i = \pm 1$。同理，(c)(ii) 得出 $\mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1$。由此得到三元组 $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ 的以下可能性：

$$\{(1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1-1), (-1,-1,1)\}.$$

显然，其中第一个由恒等自同构实现，其余三个分别由 $a_1$、$a_2$ 和 $a_3$ 的 Miyamoto 对合 $\tau_1$、$\tau_2$ 和 $\tau_3$ 实现。结论得证。

□

因此，我们知道 $E$ 在 Aut($A$) 中的完整正规化子。

ˆ**推论 5.13.** 我们有 $N = N_{\mathrm{Aut}(A)}(E) = N$.

ˆ 确实，推论 5.10 和引理 5.12 表明 $|N| = 24 = |N|$，因此它们必定相等。

我们现在使用群论论证来证明 Aut($A$) $= PGL(2, 11)$。根据 [10, ˆ 推论 3.4] , , 我们有 $G$:=Aut($A$) 是有限的。我们采用的方法与先前处理的情形类似。设 $Q$ 是 $G$ 的一个极小正规子群。首先，我们证明 ˆ $G$ 的可解根平凡。反设 $Q$ 是某个素数 $p$ 的初等阿贝尔 $p$-群。那么，$Q$ 可视为 $\mathbb{F}_p$ 上的向量空间，也可视为一个 $G$-模。回忆一下，$G_0 = L_2(11)$ 在 $G$ 中的指数为 2，且 $G_0 \geq E$。令 $R$ 为 $Q$ 中一个在 $G_0$ 作用下不变的极小非平凡子群。则 $R$ 是一个不可约 $G_0$-模。

**引理 5.14**。我们有 $C_R(E) = 1$。

ˆ证明。由于 $N = N_{\hat{G}}(E) = N \cong S_4$，我们有 $E$ 是自中心化的。若 $C_R(E)$ 非平凡，则 $1 \neq E \cap R \leq G_0 \cap Q$，这与 $G_0 \cap Q \trianglelefteq G_0$ 和 $G_0$ 是非阿贝尔单群相矛盾。

□

这立即得到：

**推论 5.15**。我们有 $p \neq 2$。

证明。若 $p = 2$，则 $R$ 和 $E$ 都是 2-群，因此 $C_R(E) \neq 1$，这与之矛盾。 □

回顾一下，Monster 型轴代数中的 Miyamoto 对合 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{32}\right)$ 构成一个 6-换位类。这使我们能够进一步限制 $p$。

**引理 5.16**。 素数 $p$ 属于 $\{3,5\}$。

证明。 反证，假设 $p>7$。令 $1\neq e\in E$。根据 $E$、$e=\tau_i=\tau_{a_i}$的选取，对于某个 $i\in\{1,2,3\}$。由此可知， $e$属于一个 6-换位类。特别地，由于 $p\geq 7$，它不可能将 $R$ 中的元素取逆。因此， $e$ 在 $R$ 上平凡作用；对所有 $e\in E$均如此，这与引理 5.14 矛盾。 □

我们分别考察 $p=3$ 和 $p=5$ 的情形，并利用已知的 $L_2$(11) 的布劳尔特征标表（例如可在 GAP [8]中找到）在每种情形下得到矛盾。以下观察适用于这两种情形。

**引理 5.17**。 $R$ 的维数 $n$ 是 3 的倍数。也就是说，对于某个 $k\in\mathbb{N}$， $n=3k$ 。此外，每个 $1\neq e\in E$ 的特征值均为 1，重数为 $k$；以及 $-1$，重数为 $2k$。

这本质上就是 [10, 引理 10。12], 因此我们只概述论证。由于 $E$ 是阿贝尔的， $R$ 具有一个基，使得所有 $e\in E$ 相对于该基对角地作用。由引理 5.14， $E$ 中的两个元素反演该基的每个元素，而最后一个元素中心化该基。由于 $E$ 的三个非平凡元素彼此共轭，因而它们都中心化相同数目 $k$ 的基元素，结论随之成立。

**引理 5.18**。我们有 $p\neq 3$。

证明。 由引理 5.17， $R$ 的维数是 3 的倍数。 $G_0$ 的不可约 3-模特征标的维数为 1、10 和 12。由此可知，四个维数为 12 的模是候选对象。然而，该维数的不可约特征标在对合类上取值为 0，这意味着 1 与$-1$的重数相等。因此它们都不合适，结论随之成立。 □

接下来我们证明， $p$ 不可能等于 5。

**引理 5.19**。 我们有 $p\neq 5$。

证明。 在特征 5 下， $L_2$(11) 的特征标表具有次数为 1、10 和 11 的不可约特征标。但根据引理 5.17， $3|\dim(R)$，因此不存在合适的模。 □

由于我们已经排除了素数 $p$ 的所有可能取值，因此我们证明了关于极小正规子群 $Q$ 为阿贝尔的假设不能成立。

**ˆ推论 5.20**。 $G$ 的极小正规子群 $Q$ 是非阿贝尔的。

因此，$Q\cong L\times L\times\ldots\times L$ 对于非阿贝尔单群 $L$。我们的目标是证明 $Q=L$ 是单的。

**ˆ引理 5.21.** $S\cong D_8\geq E$ 中的 *Sylow* 2-子群是 $G$ 的 *Sylow* 2-子群。

ˆˆˆ证明. 设 $S$ 是 $G$ 的一个包含 $S$ 的 Sylow 2-子群。若 $S$ 真包含 $S$，则 $N_{\hat{S}}$（$S$）也真包含 $S$。选取 $t\in N_{\hat{S}}$（$S$）。根据计算 5.1 (c)，$S\setminus E$ 中的对合并不对应于轴。因此， $E$ 中的对合不可能与 $S\setminus E$ 中的对合共轭ˆ。由此可知， $t$ 必须正规化 $E$，即 $t\in N=N\cong S_4$，这与 $S$ 在 $N$ 中自正规化矛盾。 □

众所周知（显然这一结论归功于 Burnside），非阿贝尔有限单群的 Sylow 2-子群的阶不能为 2。

**推论 5.22.** $Q$ 的极小正规子群是单的，且 $G_0 \leq Q$ .

证明。 由引理 5.21, $2^3$ 是 $|G|$ 的 2-部分，因此 $Q$ 确实必须是单的 . □

我们现在可以证明本节的最终结果。

**命题 5.23.** 我们有 $\mathrm{Aut}(A) = G \cong PGL(2,11)$

证明。显然， $Q$ 是 $G$ 的唯一极小正规子群。我们已经看到， $S \setminus E$ 中的对合不对应于任何轴，因此它们在 $G$ 中不与 $E$ 中的对合共轭。Thompson 转移引理 [15, 定理 12.1.1] 蕴含 $G$ 有一个指数为 2 的子群 $G_0$ ，它包含 $E$ 但不包含 $S$。由于 $E \subseteq G_0 \cap Q$, 我们必有 $Q \subseteq G_0$。因此， $E$ 是 $Q$ 的一个 Sylow 2-子群。也就是说， $Q$ 是一个非阿贝尔单群，具有阶为 4 的初等阿贝尔 Sylow 2-子群。由 Walter 对具有阿贝尔 Sylow 2-子群的有限群的刻画 [26], $Q \cong L_2(q)$, 其中 $q \equiv 3$, 模 8 余 5, $q > 3$。我们利用 6-对合性质来界定 $q$。对于奇数 $q$， $L_2(q)$ 中的对合使大小为 $\frac{q-1}{2}$ 和 $\frac{q+1}{2}$ 的环面取逆。6- 对合性质蕴含 $\frac{q+1}{2} \leq 6$, 从而 $q \leq 11$。这就只剩下 $q = 11$ 和 $Q = G_0$ 这两种可能。由于 $G$ 有唯一的非阿贝尔极小正规子群 $Q$, 我们有 $Q = F^*(G)$, 即 $G$ 的广义 Fitting 子群。于是 $G$ 必同构于 $\mathrm{Aut}(Q) \cong PGL(2, 11)$ 的一个子群，因此 $G = G \cong PGL(2, 11)$。 □

# 6 $M_{11}$的286维代数

$A = A_{286}$ 的 286 维代数最初由 Seress[25]构造。我们通过扩张算法 [16, 18]从构造所得的库中得到该代数。 $A$ 中的轴集 $X$是由 165 个轴构成的单个 $G$-轨道，这些轴与 $G$ 中的对合一一对应。 $A$的形状为 $\bullet$ （见例 2.14）。下面记录 $X$中的轴在 $A$ 上的伴随作用的基本信息。

**计算 6.1**。 对于一个轴 $a \in X$, 1、0、$_{14}$和$_{132}$特征子空间$\mathrm{ad}_a$的维数分别为1、128、25和132。

代数 $A$具有正定弗罗贝尼乌斯型。[4]

**计算 6.2**。 (a) 代数 $A$没有 *Jordan* 轴；并且

(b) 轴集 $X$ 中的轴没有孪生轴。

这表明我们不应期待出现新的轴，因此目标是证明 $\mathrm{Aut}(A) = G$。自然地，我们将 $G$ 视为 $G := \mathrm{Aut}(A)$ 的一个子群。

设 $S$ 是 $G$ 的 Sylow 2-子群。那么众所周知， $S$ 同构于阶为 16 的半二面体群。因此, $S$ 含有唯一的中心对合 $z$，以及另一类由四个对合组成的共轭类 $C$。 $\{z\} \cup C$ 中的五个对合生成一个同构于阶为 8 的二面体群的子群 $P \lhd S$。在 $P$ 中，共轭类 $C$ 分解为两个共轭类之并，每个共轭类的长度均为二。注意， $P$ 由 $C$ 中任意两个在 $P$ 中不共轭的对合生成。

转而讨论轴，令 $a$ 为对应于 $z$ 的轴，并令 $\{a_1, a_2\}$ 和 $\{a_3, a_4\}$ 为对应于 $P$中其余对合的轴，按 $P$-轨道组织。令

[4] 它很可能在相差一个标量倍的意义下唯一，但由于维数较高，我们的函数无法完成这一情形。幸运的是，我们的证明并不需要这一事实。

$E$ 为由 $a_1$ 和 $a_3$生成的 $A$ 的子代数。那么 $E \cong 4B$ 的维数为 5。它包含上述全部五个轴，而且事实上，$\{a, a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 是 $E$的一组基。此外，$V := \langle a, a_1, a_2 \rangle$ 和 $W := \langle a, a_3, a_4 \rangle$ 是 $E$的两个 $2A$-子代数。令 $z_i := \tau_{a_i} \in C$，其中 $1 \le i \le 4$。

Let $\hat{S}$ 是 $P$ 在 $\hat{S}$ 中的正规化子。显然，$S \le \hat{S}$ 的元素作用于 $P$中两个阶为 4 的初等阿贝尔 2-子群的集合：$\langle z_1, z_2 \rangle$ 和 $\langle z_3, z_4 \rangle$。设 $P$是这两个子群在 $S$中的正规化子。于是 $P \cap S = P$，因此 $S = SP$。这表明，要证明 $S = S$，只需证明 $P = P$。

ˆ任意 $\psi \in S$ 都固定 $z$，因而也固定 $a$，所以它保持 $\mathrm{ad}_a$ 的特征子空间不变。我们通过聚焦于 128 维子代数 $U := A_0(a)$，开始分析 $\psi$ 在 $A$ 上的作用。为了将这个大的子代数分解成较小的部分，我们还需要额外的幂等元。注意，$\psi \in S$ 也保持 $E$ 不变，并固定单位元 $e := \frac{4}{5}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + \frac{3}{5}a$，它属于 $E$。（例如参见 [4]。）因此，$\psi$也保持 $\mathrm{ad}_e$ 的特征子空间不变。

我们注意到 $u := e - a \in U$，因此 $U$ 在 $\mathrm{ad}_u = \mathrm{ad}_e - \mathrm{ad}_a$作用下不变。由于 $\mathrm{ad}_a$ 在 $U$上平凡作用，我们得出 $U$ 是 $\mathrm{ad}_e$-不变的，因此可以根据 $\mathrm{ad}_e$将 $U$ 分解成更小的部分。以下事实已通过计算得到。

**计算 6.3**。(a) $\mathrm{ad}_e|_U = \mathrm{ad}_u|_U$ 的限制具有1、0、$\frac{3}{10}$、$\frac{7}{20}$、$\frac{1}{20}$和$\frac{1}{10}$ 这些特征值，其重数分别为2、26、14、12、50和24；并且

(b) $\mathrm{ad}_e|_U$ 的1-和0-特征子空间都是 $U$的子代数。

ˆ 显然，所有这些特征子空间在 $\psi \in S$作用下都不变。不过，我们还可以进一步分解这些特征子空间。令 $D := U_1(u)$。注意，$v = e - 1_V$和 $w = e - 1_W$都包含在 $D$中。因此，$D$ 由这两个幂等元张成，故完全包含于 $E$中。于是，我们可以轻松地在 $D$ 中进行计算，并得出 $vw = 0$，这意味着 $D \cong \mathbb{F}^2$，且其中恰好包含四个幂等元：0、$v$、$w$和 $u = v + w$。为完整起见，我们还记录这些幂等元的长度：$v$ 和 $w$ 的长度为$\frac{7}{5}$，而 $u$ 的长度为 $\frac{14}{5}$。注意，ˆ$P$ 稳定化 $V$ 和 $W$（因而也稳定化 $v$ 和 $w$），而来自 $S \setminus P$ 的元素会交换 $V$ 与 $W$，以及 $v$ 与 $w$。

$\mathrm{ad}_v|_U$ 与$\mathrm{ad}_w|_U$ 的特征值及其重数可由计算 6.3推出。精确且更详细的陈述如下。

**计算 6.4.** (a) 限制$\mathrm{ad}_v|_U$ 与$\mathrm{ad}_w|_U$ 具有特征值1、0、$\frac{3}{10}$和$\frac{1}{20}$，相应重数分别为1、59、13和55；

(b) $v$ 与 $w$ 是 $U$ 的几乎 *Monster* 型$(\frac{3}{10}, \frac{1}{20})$本原轴；

(c) 对合 $\tau_v$ 与 $z_3|_U = z_4|_U$ 重合，并且对称地与 $\tau_w = z_1|_U = z_2|_U$重合。

注意，$\tau_v$ 与 $\tau_w$ 仅定义在 $U$上。

ˆ ˆ 我们已经提到，来自 $S \setminus P$ 的自同构互换 $v$ 与 $w$，因此这些元素出现如此正则的行为并不意外。此外，由于 $vw = 0$，又由于 $v$ 与 $w$ 服从几乎怪兽型融合律，且该融合律是Seress的，我们断定 $v$ 与 $w$ 在 $U$上结合。

ˆ我们的首要目标是确定 $\psi \in S$ 在 26 维子代数ˆ$J = U_0(e) = U_0(u)$上的作用。理想情况下，我们希望在 $J$ 中找到幂等元，然后考察 $S$

如何作用于这些幂等元。然而，维数 26 太高，我们无法直接这样做。因此，我们找到了 $J$ 的一个较小子代数，它在$\hat{}S$的作用下保持不变。

**计算 6.5.** (a) 群 $P$ 在 $J$ 上作为单位元作用，而 $S$ 在 $J$ 上诱导出一个阶为 2 的群；

(b) 由 $S$ 固定的所有向量所构成的 $J$ 的子代数 $J_0$ 的维数为 14。

子代数 $J_0$ 的维数要好得多。然而，问题在于：为什么 $J_0\hat{}$ 在 $S$ 下不变？为了证明这一点，我们暂时离开 $U$。

**计算 6.6.** (a) 特征子空间 $A_0(u)$ 的维数为 30；

(b) 令 $K$ 为 $A_0(u)$ 中 $J$ 的 4 维正交补，则来自 $K$ 的元素的平方元到 $J$ 的投影张成 $J_0$。

$\hat{}$ 由于 $u$ 被 $S$ 固定，该群使 $J$ 和 $A_0(u)$ 都保持不变，因此 $\hat{}$ 它也保持 $K$。应用计算 6.6 (b)，我们现在推出 $S$ 也保持$J_0$。

虽然计算中并不需要这一点，但我们注意到，$K$ 包含轴 $a$，并且可分解为 $K = \langle a\rangle \perp K_0$，其中 3 维子空间 $K_0$ 在 $S$ 的作用下也保持不变。还可以验证，$K_0 \subseteq A_1(a)$，这意味着，当我们计算来自 $K$ 的元素的平方在 $J$ 上的投影时，只需考虑 $K_0$，因为所有涉及 $a$ 的倍数的乘积在 $J$ 上的投影都为零。此外，$S \setminus P$ 中的某些元素会将 $K_0$ 中的所有元素变号，而其余元素则固定 $K_0$，这意味着 $K_0$ 中元素的平方由 $S$ 固定，因此它们在 $J$ 上的投影必然属于 $J_0$。因此，上述计算中非平凡的部分仅在于证明它们张成了 $J_0$。

因此，我们得出了以下结论。

$\hat{}$**引理 6.7**。子代数 $J_0$ 在 $S$ 的作用下保持不变。

这个子代数仍然太大，无法尝试找出其中的所有幂等元，但我们可以找出具有某个固定长度的幂等元。

**计算 6.8.** (a) 子代数 $J_0$ 在标量倍意义下有唯一的 *Frobenius* 型；

(b) 它有一个长度为 $\frac{26}{5}$ 的唯一幂等元；—

(c) 它还包含一个长度为 $\frac{36}{5}$ 的唯一幂等元；并且—

(d) 上述两个幂等元生成了 $J_0$ 的全部元素。

$\hat{}$ 显然，$S$ 的所有元素都固定这两个幂等元，由此可得以下重要事实。

$\hat{}$**推论 6.9.** $S$ 群在 $J_0$ 上的作用是平凡的。

设 $B$ 是 $J$ 中与 $J_0$ 互补的 12 维补空间。它是 $J_0$ 的一个模。

**计算 6.10.** (a) 将 $J_0$ 上的恒等自同构延拓至 $B$ 的扩张空间为1维，由对 $B$ 的数乘作用构成；

(b) 存在元素 $b \in B$，使得 $b^2$ 在 $J_0$ 上的投影非零。

注意，(b) 中的断言等价于 $B$ 不是一个子代数 .

ˆ我们现在可以确定 $S$ 对 $J$的作用。

ˆ**引理 6.11**。 群 $S$ 在 $J$ 上诱导一个二阶2 群，该群逐个固定 $J_0$ 中的元素，并将补空间 $B$中的所有元素取负。

ˆ证明。 对于 $\psi \in S$，由推论 6.9 可知， $\psi$ 在 $J_0$上作用为单位元。计算 6.10 (a) 告诉我们， $\psi$ 在 $B$ 上的作用是标量 $\lambda$。根据计算 6.10 (b)，存在$b \in B$ ，使得 $b^2$ 在 $J_0$ 上的投影非零。显然，$(b^\psi)^2 = \lambda^2 b^2$ 在 $J_0$ 上的投影与 $b^2$相同，这意味着 $\lambda^2 = 1$。因此，$\psi$只有两种可能的作用。另一方面，我们知道 $S \setminus P$中的元素会将 $B$取负，因此在 $J$上诱导出完整的二阶群。 □

ˆ ˆ 我们知道， $S$ 在 $J$ 上的作用的核在 $S$ 中的指数为 2，且包含 $P$。一个ˆ自然的猜想是，该核与 $P$重合，这正是我们现在要证明的。令 $T := U_{\frac{7}{20}}(e)$。根据计算 6.3 (a)，这是 $U$ 的一个12 维子空间。

**计算 6.12.** 我们有 $\langle\langle T \rangle\rangle = U$。

由于 $\mathrm{ad}_e|_U = \mathrm{ad}_u|_U$，且 $u = v + w$，其中 $v$和 $w$结合，因此很容易看出 $T = T_1 \oplus T_2$，其中 $T_1 = U_{\frac{3}{10}}(v) \cap U_{\frac{1}{20}}(w)$，且 $T_2 = U_{\frac{1}{20}}(v) \cap U_{\frac{3}{10}}(w)$。此外，$T_1$ 和 $T_2$ 的维数均为 6。事实上，来自 $S \setminus P$ 的元素会交换 $v$ 和 $w$，同时保持 $T$不变，因此它们会交换 $T_1$ 和 $T_2$。

令 $S$ 作用于 $U$ 的非平凡自同构的核为 $P$，我们将证明，$U$ 的每个自同构若作用于 $J$时如同 $\rho$，就必然会交换 $T_1$ 和 $T_2$。反设存在一个自同构，其作用于$J$ 时如同 $\rho$，并且同时保持 $T_1$ 和 $T_2$不变。回忆一下， $B$ 是 $J$ 中 $J_0$的正交补，并且 $\rho$ 使 $B$变号。

**计算 6.13**。 (a) 映射 $\rho$ 对每个 $T_i$, $i = 1,2$ 都有一个 1 维的扩张空间；

(b) 存在非零元素 $t_i \in T_i$, $i = 1, 2$，以及 $b \in J_0$，使得 $(t_i^2, b) \neq 0$。

部分 (b) 使我们能够限制自同构 $\phi$ 的可能性；该自同构延拓 $\rho$ 并保留 $T_1$ 和 $T_2$。

**引理 6.14**。 将 $\rho$ 延拓到 $T_1$ 和 $T_2$有四种可能的扩张 $\phi$ 。

证明。 设 $\phi_i$, $i = 1,2$ 是在计算 6.13 (a) 中求得的、将 $\rho$ 延拓到 $T_i$ 的扩张空间的基。于是 $\phi|_{T_i} = \lambda_i \phi_i$，其中 $\lambda_i$的值有待确定。由于 $\phi$是 $U$的自同构，$((t_i)^2, b) = ((t_i^\phi)^2, b^\phi) = ((t_i^{\lambda_i \phi_i})^2, b^\rho) = ((\lambda_i t_i^{\phi_i})^2, b) = \lambda_i^2((t_i^\phi)^2, b)$，因为 $\rho$ 在 $J_0$上是单位元，因此我们得到方程

$$\lambda_i^2 = \frac{(t_i^2, b)}{((t_i^{\phi_i})^2, b)}. \tag{1}$$

右侧可以明确计算，结果是某个 $c_i^2$ 平方 $c_i \in \mathbb{Q}$。因此，由该方程可得 $\lambda_i = \pm c_i$，所以确实有四种可能的扩张 $\phi$ 到 $T = T_1 \oplus T_2$，分别对应于 $(\lambda_1, \lambda_2) \in \{(c_1, c_2), (c_1, -c_2), (-c_1, c_2), (-c_1, -c_2)\}$。

□

注意，对于每个这样的 $\phi$，我们知道它在 $J$ 和 $T$上的作用。根据计算 6.12，$\langle J \oplus T \rangle = U$，因此我们可以尝试将这四个映射扩张到整个 $U$，并检验它们是否确为自同构。结果发现，它们都不是。

**Co计算 6.15.** 所有可能的$(\lambda_1, \lambda_2)$ 都不能导出 $J$ 的自同构 .

这就证明了我们所要证明的结果。

ˆ ˆ**引理 6.16.** $S$ 在 $J$ 上作用的核恰好是 $P$。

ˆ证明. 假设结论不成立。那么 $P$ 不包含于该核中，因此ˆ必定存在一个 $\phi \in P$，它在 $J$ 上的作用不是恒等作用，即它在 $J$ 上诱导出 $\rho$。另一方面，ˆ由于属于 $P$， $\phi$ 固定 $v$ 和 $w$，因而保持 $T_1$ 和 $T_2$。然而，我们已经证明不存在这样的 $\phi$，矛盾由此证明了该结论。 □

ˆ ˆ 现在我们可以证明 $P = P$，从而证明 $S = S$。我们先研究 $P$ 在 $U$ 上诱导的自同构。

**计算 6.17.** $J$ 上的恒等自同构向每个 $T_i$、 $i = 1$ 的扩张空间维数为1， $i = 1$， 2。

显然，这个一维扩张空间由 $T_i$ 上的恒等映射张成。由此得到以下结果。

ˆ**引理 6.18.** 自同构群 $P$ 在 $U$ 上诱导出一个阶为 4 的群，与 $P = \langle z_1$、 $z_3 \rangle$ 所诱导的群相同。

ˆ证明. 设 $\psi \in P$。由计算 6.17，存在某个 $\lambda_i \in \mathbb{F}, i = 1, 2$，使得 $\psi|_{T_i} = \lambda_i \mathrm{id}_{T_i}$。由计算 6.13 (b)，我们可以选取 $t_i \in T_i$，使得 $(t_i^2, b) \neq 0$，其中 $b \in J$。于是

$$(t_i^2, b) = ((t_i^2)^\psi, b^\psi) = ((t_i^\psi)^2, b^\psi) = ((\lambda_i t_i)^2, b) = \lambda_i^2 (t_i^2, b).$$

因此， $\lambda_i^2 = 1$，从而 $\lambda_i = \pm 1$。于是 $(\lambda_1, \lambda_2)$ 属于

$$\{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\},$$

ˆ因此 $P$ 在 $U$ 上诱导出一个阶至多为 4 的群，因为 $\langle T \rangle = U$。注意，情形 $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, -1)$ 和 $(-1, 1)$ 分别对应于 $\tau_{z_1}$ 和 $\tau_{z_3}$ 在 $U$ 上的限制。ˆ 因此， $P$ 在 $U$ 上诱导出一个阶恰为 4 的群，进而 $P$ 也如此。 □

注意，这里可以用 $z_2$ 替换 $z_1$，反过来也可以用 $z_4$ 替换 $z_3$。

接下来我们重点研究 $K := A_{\frac{1}{32}}(a)$，其维数为 132。我们首先确定在 $U$ 上作用为单位元的、来自 $P$ 的自同构。

**计算6.19**。以下结论成立：

(a) $\langle\langle K \rangle\rangle = A$; (b) 恒等自同构 $\mathrm{id}_U$ 可扩张为 $K$ 上一个1维的映射空间;

(c) 存在 $k \in K$ 和 $u_0 \in U$，使得$(k^2, u_0) \neq 0$。

由此我们可推导出以下结论。

ˆ**引理 6.20**。 作用于 $U$ 的 $P$ 的核与 $\langle z\rangle$ 重合。

ˆ 证明。前述计算的第 (b) 部分表明，将 $\phi \in P$ 限制在 $U$ 上为恒等映射的自同构，其在 $K$ 上的作用是标量 $\lambda \in \mathbb{F}$ 。取第 (c) 部分中的 $k$ 和 $u_0$ ，可得 $\lambda^2(k^2, u_0) = ((\lambda k)^2, u_0) = ((k^\phi)^2, u_0^\phi) = ((k^2)^\phi, u_0^\phi) = (k^2, u_0) \neq 0$。这意味着 $\lambda^2 = 1$，也就是说， $\lambda = \pm 1$。由于根据第 (a) 部分有 $A = \langle\langle K\rangle\rangle$ ， $\phi$ 在 $A$ 上的作用完全由其在 $K$ 上的作用决定。若 $\lambda = 1$ ，那么显然 $\phi$ 是恒等自同构。若 ˆ$\lambda = -1$ ，那么 $\phi = \tau_a = z$。因此， $P$ 作用于 $U$ 的核为 $\langle z\rangle$，如所述。 □

ˆ ˆ 最后，我们可以识别群 $P$ 和 $S$。

ˆ ˆ**推论 6.21.** 我们有 $P = P$ 和 $S = S$。

ˆ ˆ ˆ证明. 由引理 6.18 和 6.20， $|P| = 8 = |P|$，这意味着 $P = P$。由于 $P$在 $S$中的指数为 2，我们也有 $|S| = 16 = |S|$，因此也有 $S = S$。 □

我们还需要以下结果。

ˆ**推论 6.22.** 子群 $P$在 $G = \mathrm{Aut}(A)$中是自中心化的，即 $C_{\hat{}G}(P) = \hat{}Z(P) = \langle z\rangle$。此外， $S$ 在 $G$中是自正规化的，因此 $S$ 是 2-子群 ˆ$G$的 *Sylow* 子群。

证明. 若 $\phi$中心化 $P$，则它固定轴 $a$和 $a_i, i = 1, 2, 3, 4$，因为它中心化相应的宫本对合，并且轴与其宫本对合之间存在双射。特别地， $\phi$ 在整个子代数 $E$上平凡作用。因此， $\phi$ 固定 $v$ 和 $w$，这意味着 $\phi \in P = P$。

对于第二个断言， $N_{\hat{}G}(S)$正规化 $P$，因为 $P$在 $S$中是特征的。（事实上，ˆ$P$由 $S$ 中的所有对合生成。）因此 $N_{\hat{}G}(S) \leq N_{\hat{}G}(P) = S = S$。回想ˆ $G = \mathrm{Aut}(A)$依 [10]是一个有限群。若 $S$ 是 $G$ 的某个Sylow ˆ 2-子群 $T$ 的真子群，则我们将有 $N_T(S) > S$，而由上文ˆ可知并非如此。因此 $S$ 确实是 $G$的一个Sylow 2-子群。 □

我们现在可以用群ˆ论论证来确立本节的主要结果。我们首先证明 $G = \mathrm{Aut}(A)$没有阿贝尔正规ˆ子群。反设 $Q$ 是 $G$的一个阿贝尔极小正规子群。则对某个素数 $p$，它必是一个初等阿贝尔 $p$-子群。因此， $Q$ˆ可视为 $\mathbb{F}_p$上的向量空间，以及一个 $G$-模。设 $R$ 是 $Q$的在 $G$下不变的极小非平凡子群。则 $R$ 是一个不可约 $G$-模。

**引理 6.23.** 我们有 $C_R(P) = 1$。

证明. 如果 $C_R(P) \neq 1$，那么 $P \cap R \neq 1$，因为 $P$是自中心化的。由于 $R \leq Q$ 且 $R \leq G$，我们得出 $G \cap Q \neq 1$，这就产生了矛盾，因为 $G \cong M_{11}$ 是非阿贝尔单群。 □

特别地，该陈述意味着以下结论。

**推论 6.24.** 素数 $p$ 不是2。

证明。 假设 $p = 2$。那么 $C_R(P)$ 不可能是平凡的，因为 $R$ 和 $P$ 都是 2-群。 □

我们得出结论， $p$ 是一个奇素数。现在我们将利用宫本对合构成一个 6-换位类这一事实，从而进一步限制$p$的取值。

**引理 6.25.** 我们有 $p = 3$ 或5。

证明. 根据引理 6.23， $G$非平凡地作用在 $R$ 上，因此 $z$ 非平凡地作用在 $R$ 上。由于 $p \neq 2$, 必存在一个被 $z$取逆的元素 $1 \neq r \in R$ 。然后我们计算得到 $|zz^r| = p \leq 6$，因为 $z$ 属于一个6-换位类。 □

现在我们将利用 $M_{11}$ 在相应域 $\mathbb{F}_p$上的已知不可约模，依次排除情形 $p = 3$ 与 $p = 5$ 。我们的策略是构造半直积 $V \rtimes G$ ，并检验它是否为6-对换群。若否，则可断定作为 $G$-模， $R$ 不同构于 $V$ 。事实上， $RG \cong V \rtimes G$，且 $RG$ 显然是一个6-对换群。若 $V \rtimes G$ 恰好是一个6-对换群，则我们使用额外的论证。

我们首先指出以下观察结果，它适用于 $p$ 的两种可能取值。

**引理 6.26.** 设 $p = 3$ *or* $5$, $n > 1$, 和 $V$ 是 $\mathbb{F}_p$ 上一个 $n$ 维不可约 $G$-模。那么 $V \rtimes G \cong p^n : M_{11}$ 有唯一的对合类。

这是因为 $G$ 包含 $V \rtimes G$ 的一个 Sylow 2-子群，而 $G$ 只有一个对合类。

引理 *6.27. </style}*我们有 $p \neq 3$。

证明。 $G$ 的 3-模 Brauer 特征标表可在 MAGMA [2] 中查到。非平凡模 $V$ 的维数为 5（有两个）、10（有三个）、24 和 45。它们都可以在 MAGMA 中构造，半直积 $V \rtimes G$ 也可以。首先，设 $\dim V = 5$。对于这两个该维数的不可约模，唯一的 $3^2 \times 165 = 1485$ 对合类是 $V \rtimes G$ 的一个 6-换位类。假设 ˆ$RG \cong V \rtimes G$，这给出了 $A$ 中由 1485 个轴组成的集合 $X$ 。此外， $X$ 上可能的 ˆ ˆ 形状相当有限，因为已知与 $G = M_{11}$ 对应的 165 个轴的原始集合 $X \subset X$ 上的形状。此外，一旦形状确定，我们就可以写出集合 $X$ 关于 Frobenius 型的格 Gram 矩阵。这是因为轴 $c$ 和 $d$ 的 $(c, d)$ 值由形状中记录的二生成代数 $\langle\langle c, d\rangle\rangle$ 的类型决定。

事实证明，对于其中一个 5 维模 $V$ 和四种可能形状中的三种，格 Gram 矩阵的秩达到最大值 1485，而第四种形状对应的格 Gram 矩阵秩为 1430。这显然是一个矛盾，因为维数 $A = 286$。对于另一个 5 维模 $V$，有四种可能的形状，对应情形下格 Gram 矩阵的秩分别为 1265 和 1386，其中两种情形的秩达到最大值 1485，这仍然是一个矛盾。

对于所有其他不可约模 $V$，群 $V \rtimes G$ 不是 6-对换群，因此可将它们排除。于是， $p \neq 3$。 □

**引理 6.28**。我们有 $p \neq 5$。

证明。 在特征 5 下， $G$的非平凡不可约模的维数为 10、˜11、16（有两个这样的模）、20、45 和 55。对于所有这些模， $P = V \rtimes G \cong 5^n :$ $M_{11}$ 不是 6-对换群，这就产生了矛盾。因此可以排除 $p = 5$。 □

引理 6.27 和 6.28 中计算的详细过程可在 GitHub[21] 上找到。

ˆ 我们得出结论：每个极小正规子群 $Q$ of $G$ 都是非阿贝尔的，因此是有限个非阿贝尔单群 $L$ 的直积，即 $Q \cong L \times L \ldots \times L$。我们的目标是证明 $Q \cong L$ 是单群。

ˆ**引理 6.29.** *$Q$ of $G$ 的每个极小正规子群都是非阿贝尔单群。此外，$G \leq Q$。*

证明. 回想一下，$S$ 是 ˆ$G$ 的 Sylow 2-子群，且 $|S| = 2^4$。假设 $Q \cong L \times L \cdots \times L$，因子个数为 $k$，并利用 $L$ 的 Sylow 2-子群不可能是循环群这一事实，我们立即得到 $k \leq 2$。此外，若 $k = 2$，则 $L$ 的 Sylow 2-子群的阶为 $2^2$，因此是阿贝尔群。这意味着 $Q \cong L \times L$ 的 Sylow 2-子群是阶为 $2^4$, 的阿贝尔群，这与 $S$ 不是阿贝尔群相矛盾。

因此的西罗子群,由我们有是 $S \cap Q \neq 1$, ˆ 因此$G \cap Q \neq 1$。由于 $G$ 是单的，我们得出 $G \leq Q$。 □

现在我们可以证明本节的最终结果了。

**Pr** ˆ**命题 6.30.** *$A$ 的全自同构群 $G$ 与 $G = M_{11}$一致* .

ˆ证明. 取 $G$的一个极小正规子群 $Q$，由引理 6.29 可知，$Q$ 是单的，且 $G \leq Q$。由于 $S \leq G$ 是 $G$中的西罗子群，因此 $S$ 是 $Q$中的西罗子群，所以$Q$ 是一个有限单群，其半二面体西罗子群的阶为 $2^4$。由 [1]，$Q$是 $M_{11}$、$L_3(q)$ $q \equiv -1$ 模 4 或 $U_3(q)$ $q \equiv 1$ 模 4 之一。$L_3(q)$ 的极大子群（$q$为奇数）已为人所知（例如参见 [3]）；查阅该列表后，我们很容易看出$M_{11}$ 不可能是 $L_3(q)$ 的子群。同样，对任意$q$，$M_{11}$ 无法嵌入 $U_3(q)$ 中，因此我们得出 $Q = M_{11}$。

因此，显然是意味着小正规群的极小正规子群。这说明 $G$ 同构于 Aut($M_{11}$) $\cong M_{11}$ 的一个子群，由此即可得证。

□

# 参考文献

[1] J. Alperin、R. Brauer 和 D. Gorenstein，具有拟二面体和花环式 Sylow 2-子群的有限群，美国数学会汇刊 **151**（1970），1–261。[2] W. Bosma、J. Cannon 和 C. Playoust，Magma 代数系统。I. 用户语言，《符号计算杂志》**24**（1997），235–265。[3] D. M. Bloom，$PSL(3, q)$ 的子群，其中 $q$ 为奇数，美国数学会汇刊 **127**（1）（1967），150–178。[4] A. Castillo-Ramirez，Norton-Sakuma 代数的幂等元，《群论杂志》**16**（3）（2013），419–444。[5] J. H. Conway、R. T. Curtis、S. P. Norton、R. A. Parker 和 R. A. Wilson，《有限群图谱：单群的极大子群与普通特征标》，牛津大学出版社，纽约（1985）。

[6] T. De Medts、S. F. Peacock、S. Shpectorov 和 M. Van Couwenberghe，分解代数与轴代数，《代数杂志》556（2020），287–314。[7] C. Franchi、M. Mainardis 和 S. Shpectorov，Monster 型二生成轴代数，arXiv:2101.10315，22 页，2021年1月。[8] GAP 团队，GAP——群、算法与编程，4.12.2 版；2022年 https://www.gap-system.org。[9] D. Gorenstein 和 J.H. Walter，具有二面体 Sylow 2-子群的有限群的刻画。I、II、III，《代数杂志》2（1965），85–151、218–270、354–393。[10] I.B. Gorshkov、J. McInroy、T.M. Mudziiri Shumba 和 S. Shpectorov，轴代数的自同构群， arXiv 2311.18538，《代数杂志》661（2025），657–712[11] 。[12] J.I. Hall、F. Rehren 和 S. Shpectorov，泛轴代数与 Sakuma 定理，《代数杂志》421（2015），394–424。[12] J.I. Hall、F. Rehren 和 S. Shpectorov，Jordan 型本原轴代数，《代数杂志》437（2015），79–115。[13] A.A. Ivanov、D.V. Pasechnik、 ´A. Seress、S. Shpectorov，4 次对称群的 Majorana 表示，《代数杂志》324（2010），2432–2463。[14] S.M.S. Khasrow、J. McInroy 和 S. Shpectorov，Monster 型三生成轴代数的枚举，《纯粹与应用代数杂志》226（2022），1–21。[15]H. Kurzweil、B. Stellmacher，《有限群理论：导论》，Springer，2004，387 页。[16]J. McInroy，部分轴代数——一个 MAGMA 软件包， https://github.com/JustMaths/AxialAlgebras。[17] J. McInroy，通过扩张算法计算得到的 Monster 型轴代数数据库，私人通信，2024。[18] J. McInroy 和 S. Shpectorov，构造轴代数的扩张算法，《代数杂志》550（2020），379–409。[19] J. McInroy 和 S. Shpectorov，从禁构型到 Monster 型某些轴代数的分类，《代数杂志》627（2023），58–105。[20] J. McInroy 和 S. Shpectorov，Jordan 型与 Monster 型代数，《2022年圣安德鲁斯群论会议论文集》，伦敦数学会讲义系列，496，剑桥大学出版社，2025，246–294。[21] T. M. Mudziiri Shumba https://github.com/tendshumba/m11。[22]M. Pfeiffer 和 M. Whybrow，《构造 Majorana 表示》arXiv:1803.10723。[23] F. Rehren，轴代数，博士论文，伯明翰大学，2015。

[24] F.Rehren，来自 Monster 的广义二面体子代数，美国数学会汇刊**369 (2017)**，6953–6986。[25] ´A. Seress，2-闭 M-表示的构造，*ISSAC* 2012–国际符号与代数计算研讨会第37届，ACM，纽约，2012，311–318。[26] J.H. Walter，阿贝尔 Sylow 2-子群有限群的刻画，数学年刊(2)，**89**(1969)，405—514。