arXiv:2602.07576v1 [cs.SC] 7 Feb 2026

动力序列：封闭性质与自动恒等式证明

JASON P. BELL 与 YUXUAN SUN

ABSTRACT. 给定一个代数闭域 K，K 上的 *dynamical sequence* 是形如 $a(n) := f(\varphi^n(x_0))$ 的 K值数列，其中 $\varphi\colon X \dashrightarrow X$与 $f\colon X \dashrightarrow \mathbb{A}^1$ 是定义在 K上的有理映射，且 $x_0 \in X$ 是一点，其正向轨道避开 φ 与 f的不定点集。来自数论与代数组合学的许多经典数列都属于这一动力框架，我们证明动力序列类具有诸多封闭性质，并涵盖所有椭圆整除数列、所有 Somos 序列，以及由 Jim´enez-Pastor、Nuspl 与 Pillwein 定义的、对一切 $n \geq 1$ 的全部 C^n-有限数列与 D^n-有限数列。我们还给出一个证明两个动力序列相同的算法，并通过展示如何借助该方法证明若干经典组合恒等式来说明这一算法的用法。

CONTENTS

1. 引言 1
2. 闭包性质 3
3. 动力序列的若干重要类别 5
4. 自动恒等式检验 8
5. 开放问题 18
参考文献 20

1. INTRODUCTION

一个有理动力系统是一个二元组（X，φ），其中 X 是定义在域 K 上的拟射影簇，而 $\varphi\colon X \dashrightarrow X$ 是一个有理映射。点 $x_0 \in X$ 的正向 φ 轨道定义为

$$O_\varphi(x_0) := \{x_0, \varphi(x_0), \varphi^2(x_0), \ldots\}$$

只要该轨道有定义（即对于每个 $n \geq 0$，x_0 都在 φ^n 的不确定点集之外）。这里，φ^n 表示 n 重复复合 $\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi$。在 K 上的动力序列是形如 $f \circ \varphi^n(x_0)$ 的数列，其中 (X, φ) 是一个有理动力系统，$f : X \dashrightarrow \mathbb{A}^1$ 是一个有理映射，且 $x_0 \in X$；我们假设，对于每个 n，x_0 的轨道都在 φ^n 的不确定点集之外，并且对于每个 n，$\varphi^n(x_0)$ 都在 f 的不确定点集之外。于是，我们称 (X, φ, x_0, f) 为生成数列 $a(n) = f \circ \varphi^n(x_0)$ 的几何数据。例如，若 $X = \mathbb{A}^2$, $\varphi\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ 是映射 $\varphi(x, y) = (x + 1, yx)$，$x_0 = (1, 1)$，且 $f(x, y) = y$，那么很容易验证，对于所有 $n \geq 0$，都有 $\varphi^n(1, 1) = (n+1, n!)$（其中 φ^0 是

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14E05, 68Q40, 03B35.*Key words and phrases.* 动力序列、自动恒等式证明、代数动力学、D-有限数列。

取为恒等映射），因此，与数据 $(X,\ \varphi,\ x_0,\ f)$ 相关联的数列是 $a(n) = n!$ 这个例子说明，阶乘等经典数列如何自然地由简单的代数动力系统产生。

在此前的几项研究中 [BGS21、BHS20、BCH21], 作者研究了以这种方式生成的数列类，并证明许多数论和代数组合学中的经典数列都属于这一框架。特别地，动力序列类包含所有生成函数为 D-有限的数列；也就是说，这些数列的生成函数满足系数为有理函数的齐次线性微分方程。这是一类重要的幂级数，因为它广泛出现于代数、组合学和数论中。特别地，这一类包含：

- 所有超几何级数（例如，参见 [Gar09、WZ92]）；
- 许多类格点游走的生成函数 [DHRS18];
- 多元有理函数的对角线 [Lip88];
- 代数函数的幂级数展开 [Sta99，第 6]章;
- 许多有限表示群的余生长生成级数 [G P17];

事实证明，动力序列这一类远比 D-有限数列这一类更广泛。本文将证明，动力序列这一类包含以下各类：

- 所有 C^n- 和 D^n-有限数列（定义见 Jim´enez-Pastor、Nuspl 和 Pillwein [J-PNP23]）对每个 $n \geq 1$ （见命题 3.3）；
- 仅有有限个零值的 Somos 序列（见命题 3.4）；
- 仅有有限个零值的椭圆整除数列（见命题 3.5）；

- 所有形如 $f(d^n)$的数列，其中 d 是一个非负整数，且 $f : \mathbb{N} \to K$ 是域 K 上的一个满足线性递推关系的数列（见命题3.8(i)）；

- 所有形如 $f(P(n))$的数列，其中 $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 是一个将 $\mathbb{N}$ 映射到 $\mathbb{N}$的多项式（见命题3.8(ii)）。

这些数列类别的定义见第3节。

我们还能够证明，动力序列具有许多封闭性。

定理 1.1。 设 K 是一个代数闭域。则以下结论成立：

(1)（对求和封闭）若 $a(n)$ $b(n)$ 是 K 上的动力序列，则 $a(n) + b(n)$ 也是；*(2)*（对乘积封闭）若 $a(n)$ $b(n)$ 是 K 上的动力序列，则 $a(n) \cdot b(n)$ 也是；*(3)*（对取部分和封闭）若 $a(n)$ 是 K 上的动力序列，则数列 $a(0) + \cdots + a(n)$ 也是；*(4)*（对取部分乘积封闭）若 $a(n)$ 是 K 上的动力序列，则数列 $a(0) \cdots a(n)$ 也是；*(5)*（对平移封闭）若 $a(n)$ 是 K 上的动力序列，则对每个 $i \geq 0$，数列 $\{a(n+i)\}_{n\geq 0}$ 也是；*(6)*（对初值修改封闭）若 $a(n)$ 是 K 上的动力序列，且存在某个 N 和某个 $j \leq N$，使得对所有 $n \geq N$， $b(n) = a(n-j)$，则 $b(n)$ 也是动力序列；

(7)（对沿等差数列取子数列封闭）若 $d \geq 1$ 且 $a(n)$ 是 K 上的动力序列，则数列 $a(dn+i)$（$i=0, \ldots, d-1$）也是；*(8)*（对指标取整封闭）若 $d \geq 1$ 且 $a(n)$ 是 K 上的动力序列，则数列 $a(\lfloor n/d \rfloor)$ 也是；*(9)*（对交错封闭）若 $a_0(n), \ldots, a_{s-1}(n)$ 是 K 上的动力序列，则数列 $c(sn+i) := a_i(n)$（$i=0, \ldots, s-1$ 且 $n \geq 0$）也是。

由于常数数列是动力序列，因此我们可以看出，域 K 上的动力序列集合在逐点运算下构成一个 K-代数。值得注意的是，我们无法证明动力序列在卷积运算下封闭。我们将此作为一个开放问题留待解决（见问题1）。

最后，我们指出，Wilf 和 Zeilberger [WZ92] 研究了这样一个问题：对于两个数列 $a(n)$ 和 $b(n)$，若它们的生成函数是 D-有限的，那么何时有 $a(n)=b(n)$ 对所有 $n \geq 0$都成立。事实证明，许多有趣的组合恒等式都可以用这一框架来表述；Wilf 和 Zeilberger 还表明，在许多情况下，只需检验两个数列在某个界限以内相等，就能“自动”验证这些恒等式。我们研究动力序列的类似问题，并给出一种算法，用于判定对于两个取值于 $a(n)=b(n)$ 的动力序列，是否对所有 $n \geq 0$ 都有 K。具体而言，我们证明如下结果。

定理 1.2。给定域 K上的两个动力序列 $a(n)$ 和 $b(n)$，存在一个算法，该算法经过有限步后终止，并确定恒等式 $a(n)=b(n)$ 是否对所有 $n \in \mathbb{N}$成立。

事实上，可以根据与数列$a(n)$ 和 $b(n)$ 相关的几何数据，给出算法终止所需步数的明确上界（见备注 4.2），但在实践中，算法的终止速度远快于这些最坏情形下的上界；我们还给出了几个例子，说明如何运用该算法证明两个动力序列相等。

1.1. 约定。在全文中，$\mathbb{N} := \{0,1,2,3,\ldots\}$ 和 K 均表示代数闭域。

1.2. **结构**。在第 2节中，我们证明定理1.1所述的封闭性质。第 3节探讨动力序列的例子，说明该类序列包含若干经典数列族。在第4节中，我们建立定理 1.2 ，并通过若干具体情形展示恒等式证明算法。最后，我们在第 5节提出一些关于动力序列的开放问题。

致谢。J. P. Bell 获得了加拿大自然科学与工程研究理事会项目 RGPIN-2022- 02951 的资助。Y. Sun 的部分资助来自 NSERC CGS M 奖学金，该奖学金用于支持他的数学硕士论文，而这篇论文促成了本项目部分内容的完成。

2. Closure properties

本节中，我们证明定理1.1。

定理 1.1 的证明。我们首先证明对求和与积封闭。设$a(n)$与 $b(n)$分别为 K 上由几何数据(X, ϕ, x_0, f)与(Y, ψ, y_0, g)生成的动力序列；即 $a(n)=f(\phi^n(x_0))$且 $b(n)=g(\psi^n(y_0))$，对于

所有 $n \geq 0$。考虑有理映射 $\phi \times \psi\colon\ X \times Y \dashrightarrow X \times Y$，并定义有理映射 $h_1, h_2\colon$ $X \times Y \dashrightarrow \mathbb{A}^1$ 如下

$$h_1(x,y) = f(x)g(y) \quad \text{and} \quad h_2(x,y) = f(x) + g(y).$$

于是 $h_1((\phi \times \psi)^n(x_0,\ y_0)) = a(n)b(n)$，且 $h_2((\phi \times \psi)^n(x_0,\ y_0)) = a(n) + b(n)$，从而证明了条目 (1) 和 (2)。

为证明对部分和与乘积封闭，假设 $(X,\ \phi,\ x_0,\ f)$ 生成$a(n)$。令 $Z = X \times \mathbb{A}^1$，并定义有理映射 $\chi\colon\ Z \to Z$，使得 $\chi(x,\ p) = (\phi(x)\ p + f(x))$。令 $z_0 = (x_0,\ 0)$。于是根据归纳法，

$$\chi^n(z_0) = (\phi^n(x_0), a(0) + \cdots + a(n-1)).$$

定义 $h\colon\ Z \to \mathbb{A}^1$，使得 $h(x,\ p) = f(x) + p$。于是

$$h(\chi^n(z_0)) = a(0) + \cdots + a(n),$$

证明 (3)。对部分乘积封闭性的证明方法相同，但其中 w e 取 $\chi(x,\ p) = (\phi(x)\ p \cdot f(x))$、$z_0 = (x_0,\ 1)$ 和 $h(x,\ p) = f(x) \cdot p$。

向前移位下的封闭性是显然的：如果（$X,\ \phi,\ x_0,\ f$）生成 $a(n)$，则 n （$X,\ \phi,\ \phi^i(x_0)\ f$）生成 $a(n+i)$，从而验证了（5）。

为证明初值修改下的封闭性，假设对于所有 $n \geq N,\ j \leq N$ 和$b(n) = a($ $n-j)$，并且（$X,\ \phi,\ x_0,\ f$）生成 $a(n)$。考虑不交并 $W := \bigsqcup_{i=0}^{N} X_i$，其中每个 X_i 都是 X 的一个副本。定义有理映射 $\Psi\colon\ W \to W$，如下：

$$\Psi|_{X_i}(x) = \begin{cases} x \in X_{i+1} & \text{if } 0 \leq i < N, \\ \phi(x) \in X_N & \text{if } i = N. \end{cases}$$

定义有理函数 $g\colon\ W \dashrightarrow \mathbb{A}^1$，令 $g|_{X_i}$ 为常函数$b(i)$，其中 $i < N$和 $g|_{X_N} = f$。然后，几何数据（$W,\ \Psi,\ \phi^{N-j}(x_0)\ g$）生成$b(n)$，从而证明了（6）。

我们可以快速证明 (7)：如果 $a(n)$ 由数据 $(X,\ \phi,\ x_0,\ f)$ 生成，那么 $(X,\ \phi^d,\ \phi^i(x_0)\ f)$ 就生成 $a(dn+i)$。

为证明在指标取整下封闭，设 $d \geq 1$，并假设 $(X,\ \phi,\ x_0,\ f)$ 生成 $a(n)$。令 $U = X^d$，并定义 $u_0 = (x_0,\ \ldots\ldots,\ x_0) \in U$。定义有理映射 $\mu\colon\ U \to U$，使得

$$\mu(u_1, \ldots, u_d) = (\phi(u_d), u_1, \ldots, u_{d-1}).$$

由归纳法，对所有 $n \geq 0$ 和 $0 \leq i < d$，我们有

$$\mu^{dn+i}(u_0) = (\phi^{n+1}(x_0), \ldots, \phi^{n+1}(x_0), \phi^n(x_0), \ldots, \phi^n(x_0)),$$

其前 i 个坐标等于 $\phi^{n+1}(x_0)$。定义 $e\colon\ U \to \mathbb{A}^1$，使得 $e(u_1,\ \ldots\ldots,\ u_d) = f(u_d)$。于是 $e(\mu^n(u_0)) = a(\lfloor n/d \rfloor)$，从而证明了 (8)。

为证明在交错序列下封闭，我们采用 [J-PNP23，定理 5.1(6)] 中的方法。令 $a_0(n)$ $\ldots\ldots,\ a_{s-1}(n)$ 为动力序列。对每个 i，数列 $a_i(\lfloor n/s \rfloor)$ 根据 (8) 是动力序列。定义

$$c_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \equiv i \pmod{s}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

每个 $c_i(n)$都满足线性递推关系，因此是一个动力序列。于是

$$b(n) = \sum_{i=0}^{s-1} c_i(n) \cdot a_i\left(\left\lfloor \frac{n}{s} \right\rfloor\right)$$

根据对求和和乘积封闭性，它是一个动力序列，由此证明了 (9)。 □

3. Some notable classes of dynamical sequences

本节简要概述组合学和数论中的几个著名数列族，它们都属于动力序列这一类。我们的主要结果如下定理所述。

定理 3.1。 以下数列都是动力序列：

(1) D-有限数列，更一般地，对每个 n， D^n-有限数列；(2) *Somos* 序列；(3) 椭圆整除数列；(4) 形如 $f(P(n))$的数列，其中 $f\colon \mathbb{N}\to K$ 是线性递推数列，且 $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$ 在 $\mathbb{N}$ 上取非负值；(5) 形如 $f(a^n)$的数列，其中 $f\colon \mathbb{N}\to K$ 是线性递推数列，且 $a\geq 1$ 为正整数。

前三类的定义和构造将在下面的小节中介绍。定理3.1 的证明依赖于以下命题，该命题允许我们利用此前已知的动力序列构造新的动力序列。

命题 3.2. 设 K 是一个域，且 $c_1(n)\ldots,c_s(n)$ 是取值于 K的动力序列。假设 $f\colon \mathbb{N}\to K$ 满足如下形式的递推关系

$$f(n)=R(c_1(n),\ldots,c_s(n),f(n-1),\ldots,f(n-d))$$

对所有 $n\geq d$均成立，其中 $R(y_1,\ldots,y_s,x_1,\ldots,x_d)\in K(y_1,\ldots,y_s,x_1,\ldots,x_d)$ 是一个在每个相应 n的取值点处正则的有理函数。那么 $f(n)$ 是一个动力序列。

证明。 对于数列 $c_1(n)\ldots,c_s(n)$，设 $(X_i,\phi_i,x_0^{(i)},f_i)$ 是对应于 $i=1,\ldots,s$ 的几何数据。定义代数簇

$$Y:=X_1\times\cdots\times X_s\times\mathbb{A}^d,$$

并定义有理映射 $\Psi\colon Y\to Y$，其定义如下

$$\begin{aligned}&\Psi(p_1,\ldots,p_s,a_1,\ldots,a_d)\\&=(\phi_1(p_1),\ldots,\phi_s(p_s),a_2,\ldots,a_d,R(f_1(p_1),\ldots,f_s(p_s),a_1,\ldots,a_d))\,.\end{aligned}$$

令 $y_0=(x_0^{(1)},\ldots,x_0^{(s)},f(0)\ldots,f(d-1))$. 由归纳法可得

$$\Psi^n(y_0)=(\phi_1^n(x_0^{(1)}),\ldots,\phi_s^n(x_0^{(s)}),f(n),\ldots,f(n+d-1)).$$

将 $g:Y\to\mathbb{A}^1$ 定义为投影到 $\mathbb{A}^d$ 因子的第一个坐标，我们得到 $f(n)=g(\Psi^n(y_0))$，从而证明 $f(n)$ 是一个动力序列。□

现在，我们将这一结果应用于几个具体的感兴趣的序列示例。

3.1. **D^n-有限数列**。 的概念 D-有限数列（即满足多项式系数线性递推的数列）是组合学和符号计算中的核心概念。JimD^n-有限数列这一概念由´enez-Pastor、Nuspl 和 Pillwein [J-PNP23], 推广而来，其中$n\geq 2$ 一个 D^n-有限数列满足一个系数为 D^{n-1}-有限的递推关系，而D^1-有限数列则是全纯的（或者等价地，其生成级数是 D-有限的）。类似地，作者还定义了 C^n-有限数列，

其中递推系数是 C^{n-1}-有限的， C^1 表示线性递推数列。

因此， C^n-有限数列包含于 D^n-有限数列类中，而D^n-有限数列包含于 C^{n+1}-有限数列类中。这些层级涵盖了全纯类之外的数列。例如， $a(n) = F_{n^2}$，其中 F_n 是第n个斐波那契数，是 D^2-有限但非 D-有限数列 [J-PNP23，例 2。2]。

命题 3.3。 对任意 $n \geq 1$，动力序列类包含所有 C^n-有限和 D^n-有限数列。

证明。 只需证明 D^n-有限数列的情形。我们对 n使用归纳法。对于 $n = 1$， D^1-有限数列是全纯的，而全纯数列是动力序列（见[BCH21，§6]）。假设结论对 $n = m$ 成立，并设 $f(n)$是 D^{m+1}-有限的。于是存在 $s \geq 1$和 D^m-有限数列 $a_0(n) \ldots, a_s(n)$，使得

$$a_0(n)f(n) = a_1(n)f(n-1) + \cdots + a_s(n)f(n-s), \quad \text{for all } n \geq s,$$

在此定义域上满足 $a_0(n) \neq 0$。定义

$$R(x_0, x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_s) = \frac{x_1y_1 + \cdots + x_sy_s}{x_0},$$

并应用命题 3.2 得出 $f(n)$ 是一个动力序列。 □

3.2. **Somos 序列**。 Somos 序列由 Somos 引入（参见 Gal e [Gal91]）。这些数列 $a(n)$ 满足如下形式的双线性递推关系

$$a(n)a(n-k) = \sum_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} a(n-i)a(n-k+i), \tag{1}$$

其中某个固定的 k 适用于所有 $n \geq k$。要根据此递推关系计算 $a(n)$，对于所有相关指标，都需要$a(i) \neq 0$。

命题 3.4。 设 $a(n)$ 是一个仅有限次取值为零的 *Somos* 序列。那么 $a(n)$ 是一个动力序列。

证明。 令 N 足够大，使得对所有 $n \geq N$， $a(n) \neq 0$。令 k 为递推阶数。定义 $X = \mathbb{A}^k$，并设

$$\phi(x_1, \ldots, x_k) = \left(x_2, \ldots, x_k, \left(\sum_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} x_{k+1-i}x_{1+i} \right) x_1^{-1} \right).$$

于是，由递推关系可得

$$\phi(a(n-k), \ldots, a(n-1)) = (a(n-k+1), \ldots, a(n)) \quad \text{for all } n \geq N+k.$$

令 $p_0 = (a(N) \ldots, a(N+k-1))$，并令 f为到最后一个坐标的投影。于是 $a(n+N) = f(\phi^n(p_0))$，而平移闭包（定理 1.1(5)）蕴含 $a(n)$ 是一个动力序列。 □

3.3. **椭圆整除数列**。 椭圆整除数列（EDS）源于对椭圆曲线上点的研究，并推广了斐波那契数等经典整除数列。关于全面论述，参见 [EvdPSW03] 和 [War48]。椭圆整除数列满足如下形式的递推关系：

$$W_{n+2}W_{n-2}W_1^2 = W_{n+1}W_{n-1}W_2^2 - W_3W_1W_n^2, \quad \text{for all } n > 2.$$

命题 3.5. 设 $a(n)$ 是一个椭圆整除数列。若 $a(n)$ 只有有限项为零，则 $a(n)$ 是一个动力序列。

证明. 此证明采用了与命题3.4的证明相同的策略。只要对除有限多个 $a(n) \neq 0$ 而言，递推关系都可以编码为一个有理映射 n。 □

注 3.6. 我们注意到，Mazur 的一个深刻结果 [Maz77]关于椭圆曲线的有理挠点，可推得一个推论：有理椭圆除子序列 $a(n)$ 满足 $a(i)$ 对 $i \in \{2,3,\ldots,12\} \setminus \{11\}$ 均非零，则 $a(n) \neq 0$ 对 $n \geq 1$ (参见 Gezer[Gez，第 3]节)。

3.4. **线性递推数列的子数列**。 现在我们考虑数列 $f(n)$ 的某些子数列，该数列满足一个在 K 上的线性递推关系。

引理 3.7. 设 $\lambda \in K$。则以下结论成立：

(i) 若 d 是正整数，则 $a(n)=\lambda^{d^n}$ 是 K 上的动力序列；(ii) 若 $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 是一个多项式，且具有如下性质： $P(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$，则 $b(n) =\lambda^{P(n)}$ 是 K 上的动力序列。

证明。 为证明 (i)，令 ψ： $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ 为映射 $\psi(x) = x^d$，则 $\psi^m(\lambda) = \lambda^{d^m}$，因此若与恒等映射作后合成，我们可知 λ^{d^m} 也是一个动力序列。

为证明 (ii)，我们注意到，根据关于整值多项式的二项式系数展开的经典结果（参见 P´olya 和 Szeg˝o [PS98，第 129] 页，问题 85），在自然数处取非负整数值的多项式可以表示为 $P(x) = \sum_{i=0}^{d} c_i \binom{x}{i}$，其中 c_0、...、c_d 为非负整数。现在令 $\lambda \in \bar{K}$，并利用映射 ϕ： $\mathbb{A}^d \to \mathbb{A}^d$ 按如下方式构造一个动力序列： $\phi(a_1, \ldots, a_d) = (\lambda a_1, a_2 a_1, \ldots, a_d a_{d-1})$。从 $x_0 = (1, 1, \ldots, 1)$ 开始，我们断言

$$\phi^n(x_0) = \left(\lambda^n, \lambda^{\binom{n}{2}}, \ldots, \lambda^{\binom{n}{d}}\right).$$

我们通过对 n 使用归纳法来证明这一点，其中 $n = 0$ 时的基本情形显然成立。接着注意，如果该结论在 $n = m$ 时成立，那么

$$\begin{aligned}
\phi^{m+1}(x_0) &= \phi(\phi^m(x_0)) \\
&= \phi\left(\lambda^m, \lambda^{\binom{m}{2}}, \ldots, \lambda^{\binom{m}{d}}\right) \\
&= \left(\lambda^{m+1}, \lambda^{\binom{m}{2}+m}, \ldots, \lambda^{\binom{m}{d}+\binom{m}{d-1}}\right) \\
&= \left(\lambda^{m+1}, \lambda^{\binom{m+1}{2}}, \ldots, \lambda^{\binom{m+1}{d}}\right).
\end{aligned}$$

现在令 f： $\mathbb{A}^d \to \mathbb{A}^1$ 为映射 $f(u_1, \ldots..., u_d) = \lambda^{c_0} u_1^{c_1} \cdots u_d^{c_d}$。那么

$$f(\phi^n(x_0)) = \lambda^{P(n)}.$$

□

利用前面的引理，我们可以迅速证明以下结果。

命题 3.8。 设 $f(n)$ 是一个取值于 K 的数列，满足关于 K 的线性递推。则有以下结论：

(i) 若 d 是非负整数，则 $a(n) = f(d^n)$ 是一个定义在K上的动力序列；(ii) 若 $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 是一个多项式，且满足 $P(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$，那么 $b(n) =f(P(n))$ 是一个定义在 K上的动力序列。

证明。对于 (i)，根据 [EvdPSW03，第 1.1 节，6] 存在一个自然数 M 以及 $\lambda_1,\ldots,\lambda_s \in K$，还有常数 $c_{i,j} \in K$，使得 $1 \le i \le s, 0 \le j \le M$，从而

$$f(n) = \sum_{i,j} c_{i,j} \binom{n}{j} \lambda_i^n.$$

现在，$f(d^n) = \sum_{i,j} c_{i,j} \binom{d^n}{j} \lambda_i^{d^n}$。根据引理 3.7，$\lambda_i^{d^n}$ 是关于 K 的动力序列，适用于 $i = 1, \ldots, s$。若 K 具有特征零，则对于固定的 j，数列 $\binom{d^n}{j} = d^n(d^n-1)\cdots(d^n-j+1)/j!$（作为关于 n 的数列）是关于 K 的有限个动力序列的乘积，因此根据定理 1.1(2)，其本身也是动力序列。因此，利用动力序列对求和和乘积封闭这一性质（定理 1.1(1)–(2)），可得 $f(d^n)$ 是动力序列。类似地，若 K 具有特征 $p > 0$，则容易看出，对于固定的 j，$\binom{d^n}{j}$ 模 p 最终是周期的，因此满足线性递推关系，故也是动力序列。因此，$\binom{d^n}{j}$ 是关于 K 的动力序列，适用于 $0 \le j \le M$，于是我们再次利用对和与乘积封闭的性质，得到关于 $f(d^n)$ 的结果。

对于（ii），我们采用类似的论证，得到

$$f(P(n)) = \sum_{i,j} c_{i,j} \binom{P(n)}{j} \cdot \lambda_i^{P(n)},$$

并再次使用引理3.7。 □

3.5. **定理3.1的证明**。现在我们注意到，定理3.1 由合并命题3.3、3.4、3.5和3.8即可得出。

4. Automatic identity checking

Wilf-Zeilberger（WZ）方法 [WZ92] 是一种强大且算法化的工具，可用于证明涉及 D-有限数列（即满足具有多项式系数的线性递推关系的数列）的恒等式。这项技术在超几何求和领域尤为成功，并大大拓展了无需诉诸临时性操作即可严格确立的恒等式范围。我们在此证明，同样可以“自动地”验证两个动力序列 $a(n)$ 和 $b(n)$ 是否对所有 n 都相等，并通过若干关键示例加以说明。

4.1. **算法**。我们描述一种算法，其输入为两个定义在同一代数闭域 K 上的动力序列 $a(n)$ 和 $b(n)$，并判断对于所有 n，$a(n) = b(n)$ 是否成立。值得注意的是，我们将证明该算法总会终止，并且要么验证 $a(n) = b(n)$ 对所有 n 均成立，要么给出某个 n_0，使得 $a(n_0) \ne b(n_0)$。

为描述该算法，我们假设有几何数据 (X, ϕ, x_0, f) 和 (Y, ψ, y_0, g)，它们分别生成动力序列 $a(n)$ 和 $b(n)$。接着，令 (Z, χ, z_0, h) 为由 $Z = X \times Y$，$\chi = \phi \times \psi$，$z_0 = (x_0, y_0)$ 以及 $h(x,y) = f(x) - g(y)$ 对于 $(x,y) \in X \times Y$ 给出的几何数据。于是

$$c(n) := h(\chi^n(z_0)) = f(\phi^n(x_0)) - g(\psi^n(y_0)) = a(n) - b(n),$$

其自身就是一个动力序列，并且要检查对于所有 n，$a(n) = b(n)$，只需检查对于所有 n，$c(n) = 0$。因此，我们现在假设给定了几何数据（Z，χ，z_0，h），其生成动力序列 $c(n)$，下面我们将说明如何检查对于所有 $n \ge 0$，$c(n) = 0$。

为此，我们令 $Z_{-1} = Z$，并且对于步骤 i 中的每个 $i \geq 0$，计算集合 Z_i，该集合定义为以下集合的扎里斯基闭包

$$\{z \in Z : h(z) = h \circ \chi(z) = \cdots = h \circ \chi^i(z) = 0\}. \tag{2}$$

由于我们一般考虑有理映射，这些映射不一定在整个 Z 上都有定义，因此需要取扎里斯基闭包。我们在步骤 n if$Z_n = Z_{n-1}$ 处终止。

我们注意到 $Z_{-1}, Z_0, Z_1, \ldots$ 是扎里斯基闭集，并且根据构造

$$Z_{-1} \supseteq Z_0 \supseteq Z_1 \supseteq \cdots \supseteq Z_n \supseteq \cdots$$

又由于扎里斯基拓扑是诺特的（参见 [Har77, Example 1.4.7, p. 5]），这个链必定终止，因此存在某个 n_0 使得 $Z_{n_0+1} = Z_{n_0}$。所以该过程终止。接下来我们声称，对于所有 n，$z \in Z_{n_0} \iff h \circ \chi^n(z) = 0$。为此，注意到若 $z \notin Z_0$，则根据 Z_{n_0} 的定义，存在某个 $i \leq n_0$ 使得 $h \circ \chi^i(z) \neq 0$，因此一个方向显然成立。现在假设 $z \in Z_{n_0}$。那么我们声称，对于所有 n，$h(\chi^n(z)) = 0$。根据定义，这对所有 $n \leq n_0$ 都成立，因此若结论不成立，则存在最小的 m 使得 $h(\chi^m(z)) \neq 0$ 且 $m > n_0$。等式 $Z_{n_0+1} = Z_{n_0}$ 意味着，如果

$$(h(u) = h \circ \chi(u) = \cdots = h \circ \chi^{n_0}(u) = 0) \implies h \circ \chi^{n_0+1}(u) = 0.$$

但现在，若取 $u = \chi^{m-n_0-1}(z)$，则 $u \in Z_{n_0}$，于是 $h \circ \chi^{n_0+1}(u) = h(\chi^m(z)) = 0$，矛盾。因此得证。于是，在确定 n_0 的值之后，只需验证 $c(n) = 0$ 对所有 $n \leq n_0$ 成立，即可检查 $c(n) = 0$ 是否对所有 n 成立。由此我们证明了以下结论。

定理 4.1. 设(Z, χ, z_0, h)为定义一个动力序列$c(n)$的几何数据。上述过程会终止，并判定 $c(n) = 0$是否对所有$n \in \mathbb{N}$成立。特别地，只需检查有限项，就能判定 $a(n) = b(n)$ 是否对所有 n 成立。

注 4.2. 链 n_0 稳定时的指标 $\{Z_i\}$ 可利用交理论和广义 B´ézout 估计得到有效界。更具体地说，若将代数簇 Z 嵌入射影空间，就可以利用这个嵌入为子簇和映射定义次数。Schmid 的工作[Sch95] 展示了如何根据两个代数簇的不可约分支的次数，界定它们交集的 i维分支的数量；由此可以得到 n_0 的界，而这些界仅取决于映射的次数。更多细节可见第二作者的硕士论文 [Sun22]。然而，在具体应用中，这类界往往远非最优。

为了说明该算法的实际运作，我们从一个简单例子开始，并“手工”完成它。尽管这种手工计算可以说比实际证明更为复杂，但我们这样做是为了说明如何用一个具体例子执行该算法的各个步骤。在随后的例子中，我们将使用 SageMath 来执行该算法。

例 4.3. 恒等式

$$1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$$

可以表述为两个动力序列相等：若令 $X = \mathbb{A}^2\Phi(x, y) = (x+1, y+x)$，且 $f(x, y) = y$，那么不难看出，对于

每次迭代，我们都将 y 值增加 x 的值，然后将x 加 1，因此 $\Phi^n(1,0)=(n+1, 1+2+\cdots+n)$，从而

$$f(\Phi^n(1,0))=\sum_{i=0}^{n} i.$$

另一方面，如果 $Y=\mathbb{A}^1$, $\Psi(t)=t+1$, $g(t)=t(t+1)/2$，那么 $g(\Psi^n(0))=n(n+1)/2$。为检验对所有 n 是否有 $a(n)=b(n)$，我们令

$$Z=\mathbb{A}^3=X\times Y$$

并令 $\chi(x,y,z)=(x+1, y+x, z+1)$，再令 $h(x,y,z)=y-z(z+1)/2$。接着，为使用算法，我们令 $Z_{-1}=Z=\mathbb{A}^3$。然后计算

$$Z_0=\{(x,y,z)\colon h(x,y,z)=0\}.$$

这就是代数簇

$$Z_0:=\{y=z(z+1)/2\}.$$

为计算 Z_1，我们求 $h(x,y,z)$ 的零点集，并且

$$h\circ\chi(x,y,z)=h(x+1,y+x,z+1)=y+x-(z+1)(z+2)/2.$$

Then

$$Z_1=\{(x,y,z)\colon y=z(z+1)/2, x=(z+1)(z+2)/2-z(z+1)/2\}.$$

接下来计算 Z_2，并注意到 $h\circ\chi^2(x,y,z)=h(x+2, y+2x+1, z+2)=y+2x+1-(z+2)(z+3)/2$。我们通过检验 $y+x-(z+1)(z+2)/2$ 在满足 $y=z(z+1)/2$, $x=(z+1)(z+2)/2-z(z+1)/2=(z+1)$ 时恒为零，来确认 Z_1 包含于 $y+2x+1-(z+2)(z+3)/2$ 的零点集中，因为

$$z(z+1)/2+2(z+1)+1=(z+2)(z+3)/2.$$

由此可得 $Z_2=Z_1$，因此，要验证 $1+\cdots+n=n(n+1)/2$，只需验证该恒等式对 $n=0,1$ 成立，而事实确实如此。

前面的例子属于 WZ方法的范畴，但一般而言，也可以验证一些源自非全纯序列的恒等式。下面给出几个例子——以下所有例子都可以在没有计算机辅助的情况下证明，但有些仍不显然；我们选择这些例子来展示该方法如何实现自动验证。在适用的情况下，我们还给出 OEIS（在线整数数列百科全书）中的对应编号。

在实现算法时，我们通过逐步生成 Gr¨obner 基来监控其是否终止，这使我们能够确定计算何时结束。这就是为什么在我们的代码中，看起来仿佛我们事先知道算法何时终止。一般而言，也可以改用 while 循环，让算法自动判断何时终止。

4.2. **A058635：数列** F_{2^n}。我们令 F_m 表示第 m 个斐波那契数。我们考察由几何数据（$\mathbb{A}^1$, Ψ, y_0, f）生成的动力序列，其中 $\Psi\colon\ \mathbb{A}^1\to\mathbb{A}^1$ 是映射 $\Psi(t)=t^2$, $y_0=\rho^2=(3+\sqrt{5})/2$，并且

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(t-\frac{1}{t}\right).$$

那么，对于所有 $n \geq 0$,

$$f(\Psi^n(y_0)) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\rho^{2^{n+1}} - \rho^{-2^{n+1}}\right) = F_{2^{n+1}}.$$

注意，如果我们现在考虑几何数据（$\mathbb{A}^2$，Φ，x_0，g），其中 Φ： $\mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ 是态射

$$\Phi(x, y) = (xy, y^2 - 2),$$

$x_0 =$（1，3）以及 g（x，y）$= x$，那么我们计算得到:

$$g(x_0) = 1, \quad g(\Phi(x_0)) = 3, \quad g(\Phi^2(x_0)) = 21, \ldots.$$

现在我们验证，对于所有 $n \geq 0$， a（n）：$= g$（Φ^n（x_0））等于 $F_{2^{n+1}} = f$（Ψ^n（y_0））。为此，我们取 $Z = \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1$，令 χ（x，y，z）=（xy，$y^2 - 2$，z^2），$z_0 =$（1，3，ρ^2），并令 h（x，y，z）$= x -$（$z - 1/z$）$/\sqrt{5}$。

现在我们使用 SageMath。我们需要在域 $\mathbb{Q}$（$\sqrt{5}$）上进行运算，并且需要对 z 求逆，因此，为了处理 $\mathbb{Q}$（$\sqrt{5}$）$[x, y, z, z^{-1}]$，我们改为使用多项式环 $\mathbb{Q}$（$\sqrt{5}$）$[x, y, z, t]$，并施加关系 $zt - 1 = 0$。以下是我们用来计算并比较由 h， $h \circ \chi$，$h \circ \chi^2$ 以及 h， $h \circ \chi$ 生成的理想的 Gr¨obner 基的代码:

```
# 步骤 1：定义域 Q(sqrt(5)) P.<s> =
PolynomialRing(QQ) K.<r> =NumberField(s^2-
5)

# 步骤 2：定义 K 上以 x、y、z、t 为变量且采用字典序的多项式环    er
R.<x, y, z, t> =多项式环(K, order='lex')

# 步骤 3：定义原始偏差多项式 h h0 = x - (z - t)/r # h(x, y, z)，其
中 t = 1/z

# 步骤 4：将 chi 映射（作用于 x、y、z）定义为代换 def chi(poly):

    return poly.subs({
    x: x * y, y: y^2 - 2,
    z: z^2, t: t^2})


# 步骤 5：计算 h、h(chi)、h(chi^2) h1 =
chi(h0) h2 = chi(h1)

# 步骤 6：通过 g =zt - 1 g = z * t - 1 强加关系 t = 1/z

# 步骤 7：构造两个理想 I1 =
R.ideal([h0, h1, g]) I2 = R.ideal([
h0, h1, h2, g])

# 步骤 8：计算格罗布纳基
```

G1 = I1.groebner_基底()
G2 = I2.groebner_基底()

# 步骤 9：比较两个基
print("第 2 步的 GB 是否相等？", set(G1) == set(G2))
输出如下：
GB 是否相同？ True
因此，只需检查 $a(n) = F_{2^{n+1}}$ for $n = 0,1$（事实确实如此），即可得出该结论对所有 $\mathbb{N}$ 都成立。

4.3. **A000178：超阶乘，即前 n 个阶乘的积**。这是数列 $a(n)$，初始值为

$$a(0) = 1, a(1) = 1, a(2) = 2, a(3) = 12, a(4) = 288, a(5) = 34560, \dots.$$

构造一个生成超阶乘的动力序列相对简单：取几何数据（$\mathbb{A}^3, \Phi, (1,1,1)$ f），其中 $\Phi(x,y,z) = (x+1, xy, xyz)$，且 $f(x,y,z) = z$。注意，直接应用归纳法可得

$$\Phi^n(1,1,1) = \left(n+1, n!, \prod_{i=0}^{n} i!\right),$$

因此

$$f(\Phi^n(1,1,1)) = \prod_{i=0}^{n} i!,$$

第 n个超阶乘。OEIS 页面给出了 Somos 提出的超阶乘递推关系：若 $b(n)$由下式给出

$$b(n+3) = (b(n)b(n+2)^3 + b(n+1)^2 b(n+2)^2)/b(n+1)^3$$

对所有 n，其中 $b(-1) = b(0) = b(1) = 1$，则对所有 n，有 $b(n) = a(n)$。因此，若令 $p = (1,1,1) = (b(-1)\ b(0)\ b(1))$，并令 $\Psi\colon \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$为映射 $\Psi(x,y,z) = (y, z, (xz^3 + y^2z^2)/y^3)$，那么通过归纳法可以验证 $b(n) = g(\Psi^n(1,1,1))$，其中 $g(x,y,z) = y$。接着，我们可以运行算法来验证对所有 n，$a(n) = b(n)$，这里就进行验证。
在这里，我们令 $Z = \mathbb{A}^3 \times \mathbb{A}^3$，令

$$\chi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = (x_1 + 1, x_1y_1, x_1y_1z_1, y_2, z_2, (x_2z_2^3 + y_2^2z_2^2)/y_2^3)$$

并令 h 表示映射 $z_1 - y_2$。我们计算由关系 $h = h \circ \chi = h \circ \chi^2 = 0$ 生成的理想的 Gröbner 基，并将其与由关系 $h = \cdots = h \circ \chi^3 = 0$生成的理想的 Gröbner 基进行比较。为了在 SageMath 中完成此计算，我们必须在中间步骤清除分母，但这不会影响算法终止性论证的有效性，因为我们的轨道避开了这些映射的不定点集。我们使用以下 SageMath 命令：

# 多项式环设置
A = 多项式环(QQ, ['x1','y1','z1','x2','y2','z2'], order='degrevlex') x1, y1, z1, x2, y2, z2 = A.gens()

偏差函数 h = z1-y2

```
# 已修正的 chi 映射 def chi(v): x1, y1, z1, x2,
y2, z2 = v return ( x1 + 1, x1 * y1, x1 * y1
* z1, y2, z2, (x2 * z2^3 + y2^2 * z2^2) / y2^3)
```

```
# 已清分母的 h(chi^n) 定义 cleared_h(v): expr =
h.subs(dict(zip((x1, y1, z1, x2, y2, z2), v))) return
expr.numerator() # 生成 h_0 到 h_3v = (x1, y1, z1,x2,y2, z2)
h_多项式 = []for _ in range(4): # 最多到 h(chi^3) h_i =
cleared_h(v) h_polys.append(h_i) v = chi(v) # 计算 G2 和 G3 I
2 = A.ideal(h_polys[:3]) I3 = A.ideal(h_polys[:4]) G2 =
I2.groebner_basis() G3 = I3.groebner_basis()
```

```
# 比较
print("Groebner 基相同吗? ", set(G2) == set(G3))
```

这证实只需验证 $n \le 2$ 的恒等式，而事实确实如此。

4.4. **A006769：与 $y^2+y=x^3-x$ 及点(0，0)的倍点相关的椭圆整除数列**。该数列为 $a(n)$，其初始值（从索引 $n=0$ 开始）为

$$0, 1, 1, -1, 1, 2, -1, -3, -5, 7, -4, -23, 29, 59, 129, -314, \ldots.$$

OEIS 页面给出了该数列的两个递推关系：

$$a(n) = (a(n-1) \cdot a(n-3) + a(n-2)^2)/a(n-4)$$

对所有 $n \ge 5$ 以及

$$a(n) = (-a(n-1) \cdot a(n-4) - a(n-2) \cdot a(n-3))/a(n-5)$$

对所有 $n \ge 6$。我们注意到，根据注记3.6，该数列从不取零值。令 $X = \mathbb{A}^4$ 并为模拟第一个递推关系，令 $\phi\colon\ X \to X$ 为映射

$\phi(x, y, z, w) = (y, z, w, (wy + z^2)/x)$，因此根据构造

$$\phi(a(i), a(i+1), a(i+2), a(i+3)) = (a(i+1), a(i+2), a(i+3), a(i+4))$$

对所有 $i \geq 1$。特别地，若 $f(x, y, z, w) = x$，则 $(X, \phi, (1, 1, -1, 1) f)$ 对所有 $n \geq 0$ 都生成数列 $a(n+1)$。类似地，若 $Y = \mathbb{A}^5$，我们可以通过取 $\psi(x, y, z, w, t) = (y, z, w, t, -(ty + zw)/x)$ 来对第二个递推关系建模；若取 $g(x, y, z, w, t) = x$，则以类似方式可知，$(Y, \psi, (1, 1, -1, 1, 2) g)$ 也生成数列 $a(n+1)$。应用该算法可以验证，这两个递推关系都生成 $a(n+1)$。这里取 $Z = \mathbb{A}^9$，

$$\begin{aligned}&\chi(x_1, y_1, z_1, w_1, x_2, y_2, z_2, w_2, t_2)\\ &= (y_1, z_1, w_1, (w_1 y_1 + z_1^2)/x_1, y_2, z_2, w_2, t_2, -(t_2 y_2 + z_2 w_2)/x_2),\end{aligned}$$

并令 $h = x_1 - x_2$，那么如果我们计算关系 $h = h \circ \chi = \cdots = h \circ \chi^5 = 0$ 的 Gr¨obner 基以及关系 $h = h \circ \chi =$ 的 Gr¨obner 基
$\cdots = h \circ \chi^6 = 0$ 并比较它们。我们发现，得到的 Gr¨obner 基相同。在这种情况下，由于引入了分母，计算前必须清除分母。不过，由于我们的轨道避开了不定点集，这并不影响验证。

我们使用以下 SageMath 命令：

```
# 在 Q 上建立多项式环
一个 = 多项式环(QQ, ['x1','y1','z1','w1','x2','y2','z2','w2','t2']) x1, y1, z1, w1, x2, y2,
z2, w2, t2 = A.gens()

# 定义 h = x1 -x2 h =
x1 - x2

# 定义映射 chi def chi(v): x1, y1, z1, w1, x2,
y2, z2, w2, t2 = v return ( y1, z1, w1, (w1 * y
1 + z1^2) / x1, y2, z2, w2, t2, -(t2 * y2 + z2 *
w2)/ x2 )

# 生成 h（chi^i）的清分母迭代 def cleared_h_iterates(max_iter): v =
(x1,y1,z1,w1,x2, y2, z2, w2, t2) iterates = [v]h_polys = []for_
inrange(max_iter + 1): expr =h.subs(dict(zip(v, iterates[-1]))) cleared =
expr.denominator() * expr # 清除分母
```

h_多项式.append(cleared) 迭代.
append(chi(迭代[-1])) return h_多项式

```
# 计算格罗布纳基 G5 = A.ideal(cleared_h_iterates(5)).groebner_
basis() G6 = A.ideal(cleared_h_iterates(6)).groebner_basis()


# 比较
print("格罗布纳基相同？", set(G5) == set(G6))
```

这会生成以下输出：

GB 相同吗？ True

因此，只需检验该恒等式对 $n \le 5$ 成立即可验证它；而这确实成立。

4.5. **A006720：Somos-4 数列：** $b(0) = b(1) = b(2) = b(3) = 1$，$b(n) = (b(n-1)b(n-3) + b(n-2)^2)/b(n-4)$ **对于** $n \ge 4$。该数列满足与前述椭圆整除数列相同的递推关系，但初始值不同。它的前几项如下：

$$1, 1, 1, 1, 2, 3, 7, 23, 59, 314, 1529, 8209, 83313, 620297, \ldots.$$

OEIS 页面指出（采用略有不同的索引）：

$$b(n) = a(2n-3)(-1)^n \qquad \text{for } n \ge 2.$$

这个恒等式并不显然，但使用我们描述的算法可以轻松验证。为此，我们注意到 $b(n)$的值全为正，并可通过指出 $\phi(b(i)\ b(i+1)\ b(i+2)\ b(i+3)) = (b(i+1)\ b(i+2)\ b(i+3)\ b(i+4))$（当 ϕ 时）来编码递推关系：$\mathbb{A}^4 \to \mathbb{A}^4$ 是映射 $\phi(x, y, z, w) = (y, z, w, (wy+z^2)/x)$。因此，若令 $p_0 = (b(2)\ b(3)\ b(4)\ b(5)) = (1, 1, 2, 3)$，则对所有$n \ge 0$，都有 $f \circ \phi^n(p_0) = b(n+2)$，其中 $f(x, y, z, w) = x$。我们希望证明，对所有 $n \ge 0$，都有 $b(n+2) = (-1)^n a(2n+1)$。数列 $a(n)$满足与 $b(n)$相同的递推关系，并且我们从前一小节得知，对所有 $n \ge 0$，都有 $a(n+1) = f(\phi^n(1, 1, -1, 1))$；这里我们使用的映射 ϕ和 f与生成数列 $b(n+2)$的映射相同。特别地，若令 $\psi = \phi^2$，则 $f(\psi^n(1, 1, -1, 1)) = f(\phi^{2n}(1, 1, -1, 1)) = a(2n+1)$。我们计算

$$\psi(x, y, z, w) = \phi(y, z, w, (wy+z^2)/x) = (z, w, (wy+z^2)/x, (zx^{-1}(wy+z^2)+w^2)y^{-1}).$$

$$f(\psi^n(1, 1, -1, 1)) = f(\phi^{2n}(1, 1, -1, 1)) = a(2n+1)$$

对所有 $n \ge 0$。为了跟踪交替的符号，我们可以添加一个额外的坐标，其值在每一步交替为 1 和 -1：令 $\chi\colon \mathbb{A}^5 \to \mathbb{A}^5$ 由 $\chi(x, y, z, w, t) = (\psi(x, y, z, w)\ -t)$ 给出，并令 $g(x, y, z, w, t) = xt$。那么

$$g(\chi^n(1, 1, -1, 1, 1)) = a(2n+1)(-1)^n.$$

现在，我们可以通过算法验证，对于所有 $n \ge 0$，$g(\chi^n(1, 1, -1, 1, 1)) = f(\phi^n(1, 1, 2, 3))$。这里令 $Z = \mathbb{A}^9$，并令 $\Theta\colon Z \to Z$ 为映射

$$\Theta(x_1, y_1, z_1, w_1, x_2, y_2, z_2, w_2, t)$$
$$= (y_1,\ z_1,\ w_1,\ (w_1y_1 + z_1^2)/x_1,\ z_2,\ w_2,\ (w_2y_2 + z_2^2)/x_2,\ (z_2x_2^{-1}(w_2y_2 + z_2^2) + w_2^2)y_2^{-1},\ -t),$$

并令 h 为有理映射 $x_1 - x_2 t$。我们使用以下 SageMath 命令来证明，由 $h \circ \Theta^i$ 生成的、针对 $i \leq 6$ 和针对 $i \leq 7$ 的理想（已清除分母）的 Gr¨obner 基相同：

```
# 含 9 个变量的有理数域上的多项式环 A = PolynomialRing(QQ, ['x1','y1','z1','
w1','x2','y2','z2','w2','t'] ,order='degrevlex')

x1, y1, z1, w1, x2, y2, z2, w2, t = A.gens()

# 偏差函数 h = x1 - x2 * t


# Theta 映射def Theta(v):  x1, y1, z1, w1, x2, y2, z2,
w2, t = v  return (  y1,  z1,  w1,  (w1 * y
1 + z1^2) / x1,  z2,  w2,  (w2 * y2 + z2^2) / x2,
((z2 / x2) * (w2 * y2 + z2^2) + w2^2) / y2,  -t  )




# 消去 h(Theta^n) 的分母 def cleared_h(v): expr =h.subs(dict(zip((x1, y1,
z1, w1, x2, y2, z2, w2, t), v))) return expr.numerator()


# 生成至 h_7v = (x1, y1, z1, w1, x2, y2,
z2, w2, t) h_polys = []for _ in range(8): #
直到 h_7h_i = cleared_h(v) h_
polys.append(h_i) v = Theta(v) # 构造理想
I6 = A.ideal(h_polys[:7]) I7 = A.ideal(h_
polys[:8])



# 计算格罗布纳基 G6 =
I6.groebner_basis() G7 =
I7.groebner_basis()

# 比较
print("GBs 相同吗？", set(G6) == set(G7))
```

有趣的是，在我们考察的所有其他情形中，程序几乎瞬间就终止了；然而在这种情形下，运行约花了三秒，并确认 Gr¨obner 基相等。因此，要验证对于所有 n， $a(n) = b(n)$，只需检查 $n \le 6$ 时 $a(n) = b(n)$，这很简单。

4.6. **恒等式** $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}}) = (x^{2^n}-1)/(x-1)$。虽然这个恒等式不难证明，但我们可以给出一个简单的“自动”证明。对于 $\lambda \in \mathbb{C}$，取 $\lambda \neq 1$，我们可以定义两个动力序列

$$a(n) = (1+\lambda)(1+\lambda^2)\cdots(1+\lambda^{2^{n-1}}) \qquad \text{and} \qquad b(n) = (\lambda^{2^n}-1)/(\lambda-1).$$

要生成 $b(n)$，我们只需对 $\mathbb{A}^1$ 迭代平方映射，因此令 $\Phi(x) = x^2$，并令 $f(x) = (x-1)/(\lambda-1)$。那么，由于 $\Phi^n(\lambda) = \lambda^{2^n}$， $f(\Phi^n(\lambda)) = (\lambda^{2^n}-1)/(\lambda-1) = b(n)$。另一方面，我们可以通过取映射 $\Psi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$（定义为 $\Psi(x, y) = (x^2, (x+1)y)$）来将 $a(n)$ 表示为一个动力序列。然后由归纳法

$$\Psi^n(\lambda, 1) = \left(\lambda^{2^n}, \prod_{i=0}^{n-1}(1+\lambda^{2^i})\right),$$

约定空积等于 1。于是，如果 $g(x, y) = y$，

$$a(n) = g(\Psi^n(\lambda, 1)).$$

现在我们使用算法检查对于所有 n， $a(n) = b(n)$。

我们在域 $\mathbb{Q}(t)$ 上进行运算，并令 $Z = \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1$ 并令 $\chi(x, y, z) = (x^2, (x+1)y, z^2)$，再令 $h(x, y, z) = y - (z-1)/(t-1)$。以下 SageMath 代码验证了由 h、 $h \circ \chi$ 生成的 $\mathbb{Q}(t)[x, y, z]$ 的理想与由 h、 $h \circ \chi$、 $h \circ \chi^2$ 生成的理想的 Gr¨obner 基相同，因此，要验证对于所有 n 恒等式均成立，只需检查其对 $n = 0$、1 成立即可：

```
# 定义基域 R.<t> =
QQ[]

# Q(t) 上的三元多项式环
A.<x, y, z> =Q(R) 的多项式环

# 定义 h
h = y - (z - 1)/(t - 1)

# 将 chi 定义为替换字典 def chi(poly):

    return poly(x^2, (x + 1)*y, z^2)

# 将 h 与 chi 复合
h1 = chi(h) h
2 = chi(h1)

# 生成理想
I1 = 理想([h, h1]) I2 = 理想
([h, h1, h2])

# 计算格罗布纳基 G1 =
I1.groebner_basis() G2 =
I2.groebner_basis()
```

检查第二个理想是否产生了新内容 print("格罗布纳基相
同吗？", set(G1) == set(G2))
运行这段代码会得到以下输出：
GBs 相同吗？ 是
由此，我们重新得到经典恒等式 $(1+t)(1+t^2)\cdots(1+t^{2^{n-1}}) = (t^{2^n}-1)/(t-1)$，其中 $t \neq 1$。

5. Open questions

本节汇集了若干有关动力序列的开放问题。

我们首先重新审视定理1.1中给出的封闭性质。值得注意的是，这份清单中没有卷积封闭性。目前尚不清楚动力序列类在此运算下是否封闭。

问题 1. 设 $a(n)$ 和 $b(n)$ 是域 K 上的动力序列。数列

$$c(n) := \sum_{i=0}^{n} a(i)b(n-i)$$

是否必然是 K 上的动力序列？

我们猜想答案是否。不过，如果答案是肯定的，那么动力序列的生成函数将构成形式幂级数环的一个子环。

动力学 Mordell–Lang 猜想（参见 [BGT16]）断言：若 X 是定义在 K 特征零域 ϕ 上的代数簇，$X \dashrightarrow X$ 是有理映射，$V \subseteq X$ 是子簇，且 $x_0 \in X$ 是一个轨道避开 ϕ的不确定点集的点，那么使得 n 满足 $\phi^n(x_0) \in V$ 成立的所有项构成有限个无限等差数列与一个有限集的并集。

如果我们将 V 视为有理映射 f的零点集，那么这表明，特征零域上的动力序列的零点集应具有类似的形式，从而推广经典的斯科伦–马勒–莱克定理（参见 [EvdPSW03，第 2] 或[Lec53]）。

问题 2。设 $a(n)$ 是特征零域上的一个动力序列。对于哪些 n，$a(n) = 0$ 构成有限个无限等差数列与一个有限集的并（也可能为空）？

我们注意到，在特征 $p > 0$ 下，即使对于线性递推，这一结论也不成立。例如，正如 Lech [Lec53]，所示，设 p 为一个素数，$K = \mathbb{F}_p(t)$，并定义 $\phi(x, y) = (tx, (1+t)y)$ 和 $f(x, y) = y - x - 1$。那么，$f(\phi^n(1, 1)) = 0$ 当且仅当 $n \in \{1, p, p^2, p^3, \ldots\}$。

Skolem 问题询问：是否存在一种算法，能够判定给定的线性递推数列是否在某一项取值为零。值得注意的是，近年来这一问题受到了广泛关注（例如参见 [BL+22]）。我们针对动力序列提出类似的问题。

问题 3. 设 K 是一个数域，且 $a(n)$ 是一个取值于 K 的动力学数列。对于某个 n，是否可以判定 $a(n) = 0$？

根据对部分乘积的封闭性（定理 1.1(4)），这等价于判定是否对所有充分大的 $a(n) = 0$ 都成立 n。

对于某些椭圆整除数列和 Somos 序列等整数序列而言，从递推关系往往并不能明显看出所有项均为整数。这引出了下面的问题。

问题 4. 设 $a(n)$ 是一个取 $\mathbb{Q}$ 值的动力序列。是否存在一种算法，可判定 $a(n)$ 对所有 n 是否均为整数？

Silverman（见 [Sil93，定理2.2]）已证明，对于有理映射ϕ: $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$，若 $\phi^n(a) \in \mathbb{Z}$ 对所有 n 成立，则 $\phi^2(x)$ 是多项式，因此在这种情况下，可通过计算映射 ϕ^2 来检验该轨道是否取整数值，但一般情况下该问题仍未解决。

对于整数值全纯序列，P´olya–Carlson [Car21]定理表明，若生成函数不是有理的，则它以单位圆为自然边界。这促使我们询问：在适当的增长约束下，有理性的动力类比是否成立。

问题 5. 设 $a(n)$ 是一个整数值动力序列，并假设$|a(n)| = e^{o(n)}$。$a(n)$ 是否必然满足线性递推关系？

Pisot 猜想（由 Zannier 证明；参见 [Zan00]）指出，若 $b(n)$ 是一个非负整数数列，且 $b(n)^d$ 对某个 $d \geq 1$满足线性递推关系，那么 $b(n)$ 本身也必然满足线性递推关系。我们想知道这一结论是否也适用于动力序列。

问题 6. 设 $b(n)$ 是一个非负整数数列，并假设 $b(n)^d$ 对某个 $d \geq 1$ 是一个动力序列。那么 $b(n)$ 是否也必然是一个动力序列？

我们还想知道，能否对 $\mathbb{Q}$ 值动力序列的高度渐近行为进行粗略分类。相关问题参见 [BHS20，BNZ23]。

问题 7. 能否分类所有 $\mathbb{Q}$ 值动力序列可能出现的高度间隙？

即使对于 D-有限数列，这仍然很有挑战性（见 [BNZ23，问题 4。3]），但代数动力系统可能会因其底层几何而产生更为奇特的增长模式。

最后，我们注意到，许多有趣的二进制序列自然地表现为整数值动力序列的符号模式。Silverman 和 Stephens [SS06]已证明，许多 Sturmian 序列可以通过这种方式由椭圆除法数列得到。

问题 8。 设 $a(n)$ 为一个整数值动力序列，并定义 $\epsilon(n) = \mathrm{sgn}(a(n)) \in \{\pm 1\}$。哪些二进制序列可以通过这种方式得到？能否刻画那些无法实现为动力序列符号模式的二进制序列，或给出这类序列的自然类别？

在线性递推的情形下，这就是理解正性集的问题（见 [BG07]）。

References

[BCH21] J. P. Bell、S. Chen 和 E. Hossain，有理动力系统、 S-单位与 D-有限幂级数。 *Algebra Number Theory* **15** (2021)，第 7 期，1699–1728。[BG07] J. P. Bell 和 S. Gerhold，关于线性递 *Israel* 推数列的正性集。*J. Math.* **157** 2007 333 345

( )， – 。[BGS21] J. P. Bell、D. Ghioca 和 M. Satriano, *Dynamical uniform bounds for fibers and a gap conjecture Int. Math. Res. Not. IMRN* 2021 10, 7932 7946 。 ，第 期 – 。[

BGT16] J. P. Bell、D. Ghioca 和 T. Tucker， *The Dynamical Mordell–Lang Conjecture*。《数学调查专著》，第 210 卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2016。[BHS20] J. P. Bell、F. Hu 和 M. Satriano, *Height gap conjectures D-finiteness and weak* ， ， （ ），第 期 - – *dynamical Mordell–Lang. Math. Ann.* **378** 2020 3 4, 971 992 。[BNZ23] J. P. Bell 、 K. D. Nguyen 和 U. Zannier， D- 有限性、有理性与高度 II：正密度集上的下界。 *Adv. Math.* **414** (2023)，论文编号 108859，共 24 页。[BL+22] Y. Bilu、F. Luca、J. Nieuwveld、J. Ouaknine、D. Purser 和 J. Worrell，Skolem 遇上 Schanuel。 *LIPIcs. Leibniz Int. Proc. Inform.*，241，达格施图尔城堡。莱布尼茨信息学中心，瓦德恩，2022，文章编号 20，共 15 页。¨Car[F. Carlson，21]《整数系数幂级数》。 ¨(1921)，第 1–2 期，1–13。 *Math. Z.* **9** DHRS[T. Dreyfus、C. Hardouin、J. Roques 和 M. Singer，关于第一象限游走的生成级数的性质。18] (2018)，第 1 期，139–203。 *Invent. Math.* **213** EvdPSW[G. Everest、A. van der Poorten、I. Shparlinski 和 T. Ward，03] 。《数学调查专著》，第 104 卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2003。 *Recurrence Sequences*Gal[D. Gale，Somos 序列奇特而令人惊讶的传奇。91] ( )，第 期 – 。

Math. Intelligencer Gar[S.

13 1991 1, 40 42

Garoufalidis，09] -函数与多重求和相对于全纯序列。 ( )，第 期 – 。

G *Adv. Math.* GP[S.

220 2009 6, 1945 1955

Garrabrant 和 I. Pak，线性群中的词、随机游走、自动机与17] -递归性。*P*(2017)，127–144。 *J. Comb. Algebra* **1** Gez[B. Gezer，椭圆整除数列、平方数与立方数。] (2013)，第 3 期，481–515。 *Publ. Math. Debrecen* **83** Har[R. Hartshorne，77] 。《数学研究生教材》第 52 卷，施普林格出版社，纽约—海德堡，1977。 *Algebraic Geometry*J-PNP[A. Jim23] enez-Pastor、P. Nuspl 和 V. Pillwein，全纯序列的扩展：′-有限序列。C^2(2023)，400–424。 *J. Symbolic Comput.* **116** Lec[C. Lech，关于递归级数的一则注记。53] (1953)，417–421。 *Ark. Mat.* **2** Lip[L. Lipshitz，88] -有限幂级数的对角线是 D-有限的。 *D*(1988)，第 2 期，373–378。 *J. Algebra* **113** Maz[B. Mazur，模曲线与艾森斯坦理想。77] 第（ ），– 。 *Inst. Hautes Études Sci. Publ.* PS[G. P98] olya

Math. 47 1977 33 186

和 G. Szeg´o，″《数学经典》。施普林格出版社，柏林，1998。

Problems and theorems in analysis II. Sch[J. Schmid，关于仿射贝祖不等式。95] (1995 2，225 232)，第 期 – 。 *Manuscripta Math.* **88** SS[J. H. Silverman 和 N. Stephens，椭圆整除数列的符号。06] ( )，第 期 – 。 *J.*

Ramanujan Math. Soc. **21** 2006 1, 1 17

Sil[J. H. Silverman，整数点、丢番图逼近与有理映射的迭代。93] (1993)，第 3 期，793–829。 *Duke Math. J.* **71** Sta[R. P. Stanley，99] 。《剑桥高等数学研究》第 62 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1999。 *Enumerative Combinatorics. Vol. 2*Sun[Y. Sun，22] 。滑铁卢大学硕士论文。在线网址：uwspace.uwaterloo.ca *On the Dynamical Wilf-Zeilberger Problem*War[M. Ward，《椭圆整除数列回忆录》。48] (1948)，31–74。 *Amer. J. Math.* **70** WZ[H. S. Wilf 和 D. Zeilberger，关于超几何（普通型和 “92] ”型）多重求和/积分恒等式的算法证明理论。*q*(1992)，第 3 期，575–633。

[Zan00] U. Zannier, 《Pisot 的 d 次根猜想的证明》。 *Ann. of Math.* (2) **151** （2000）, 第 1 期, 375–383 页。Department of Pure Mathematics, University of Waterloo, Waterloo, ON N2L3G1, Canada*Email address*: jpbell@uwaterloo.caDepartment of Mathematics, University of Toronto, Toronto, Ontario M5S 2E4,Canada*Email address*: austin.sun@mail.utoronto.ca