arXiv:2602.07583v1 [math.DG] 7 Feb 2026

总商曲率比较

Jiaqi Chen、Yi Fang 和 Jingyang Zhong

摘要。本文建立了若干关于总商曲率的比较定理。具体而言，我们考察泛函随总商曲率变化的行为，并证明背景爱因斯坦度量在总商曲率上达到一个尖锐界。我们证明，若商曲率相对于爱因斯坦度量满足逐点下界（或上界），则相应的积分不等式成立。此外，我们还刻画了等号情形。我们的结果推广了标量曲率的体积比较定理以及关于 σ_k-曲率的刚性结果。

1. 引言

曲率约束与黎曼流形整体拓扑之间的相互作用，仍是几何分析中最活跃的前沿领域之一。经典的 Bishop–Gromov 体积比较定理为研究具有里奇曲率下界的流形提供了基本框架。近几十年来，舒滕张量已成为一个重要的研究对象，尤其是在共形几何中 [11]。它的特殊不变量—— σ_k-曲率，构成了一系列自然的几何条件，衔接了标量曲率与截面曲率。尽管 σ_k-Yamabe 问题和空间形式的刚性已得到广泛研究，但针对这些全非线性不变量的比较定理，特别是涉及体积和总曲率泛函的比较定理，研究仍不够充分[5, 12]。

近期的研究进展主要聚焦于典范度量附近的局部稳定性结果。在此背景下，变分技巧已被证明能够有效地确立拓扑意义下接近爱因斯坦度量的度量的刚性。本文将这一研究思路拓展至商曲率 $\frac{\sigma_k}{\sigma_{k-1}}$。这些商曲率在分析上尤为重要，因为在蒙日-安培型方程的背景下，它们对应于海森矩阵特征值的初等对称函数，并自然出现在保持凸性的几何流中 [4, 15]。

设（M^n, g）是一个维数为 $n \geq 3$ 的光滑闭黎曼流形。我们将黎曼曲率张量记为 Rm_g，将里奇曲率张量记为 Ric_g，将标量曲率记为 R_g，并将 Schouten 曲率张量记为

$$S_g = \mathrm{Ric}_g - \frac{R_g}{2(n-1)} g.$$

关键词和短语。比较定理，总商曲率，爱因斯坦度量，舒滕张量，稳定的爱因斯坦流形。Jiaqi Chen 部分受厦门理工学院科研基金（编号：YKJ23009R）及福建省中青年教师科研基金（编号：JAT231105）资助。Yi Fang 部分受国家自然科学基金（编号：12571065）资助。

设 λ_1，.....，λ_n 是 S_g 的特征值，则对于 $1 \leq k \leq n$， σ_k-曲率定义为这些特征值的 k 阶初等对称多项式，即

$$\sigma_k(g) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k}.$$

特别是，

$$\sigma_1(g) = \mathrm{tr}(S_g) = \frac{n-2}{2(n-1)} R_g,$$

and

$$\sigma_2(g) = \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2(g) - |S_g|^2\right).$$

因此， σ_k-曲率可视为标量曲率的推广。 σ_k-曲率及相关全非线性曲率方程的研究，例如 σ_k-Yamabe 问题 [12] ，在共形几何和偏微分方程领域引起了广泛关注。

商曲率自然地出现在共形几何中，其定义如下：

$$\frac{\sigma_k(g)}{\sigma_l(g)}, \qquad 0 \leq l < k \leq n, \tag{1.1}$$

其中 $\sigma_0(g) = 1$。而 $\frac{\sigma_k(g)}{\sigma_{k-1}(g)}$ 起到了标量曲率全非线性类比的作用，并出现在某些共形不变泛函的欧拉-拉格朗日方程中[10]。在几何流中，商曲率支配着全非线性曲率流，这类流推广了平均曲率流和高斯曲率流；它们具有尺度不变性，且与 Gårding 锥相关的凸性条件得以保持。

经典体积比较定理指出，若

$$\mathrm{Ric}_g \geq (n-1)g,$$

then

$$\mathrm{Vol}_M(g) \leq \mathrm{Vol}_{\mathbb{S}^n}(g_{\mathbb{S}^n}),$$

其中 $\mathbb{S}^n$ 是单位标准球面， $g_{\mathbb{S}^n}$ 是典范度量。

对于闭双曲流形，Schoen [23] 提出了以下猜想。

猜想 1.1. 设 $(M^n, \bar{g})$ 是任意一个维数为 $n \geq 3$ 的闭双曲流形。那么，对于其上的任意度量 g ，若满足 M^n

$$R_g \geq R_{\bar{g}},$$

则有如下体积比较：

$$\mathrm{Vol}_M(g) \geq \mathrm{Vol}_M(\bar{g}).$$

Hamilton [13] 和 Perelman [19, 20]的研究证明了 Schoen 猜想在三维情形下成立。对于更高维的情形，Besson、Courtois 和 Gallot [2, 3] 证明了该猜想对满足 $||g - \bar{g}||_{C^2(M^n, \bar{g})} < \varepsilon_0$ 的度量 g 成立，其中常数$\varepsilon_0 > 0$足够小；也就是说， g 与 $\bar{g}$的距离小于 C^2。他们还表明，若将标量曲率的假设替换为里奇曲率，则无需假设C^2-接近性，结论仍然成立。

如果 g 与某个稳定爱因斯坦度量 $\bar{g}$ 在 C^2 意义下接近（见定义 ??），Yuan [25] 证明了以下关于标量曲率的体积比较定理。

定理 m 1.2 ([25])。 设$(M^n, \bar{g})$ 是一个严格稳定爱因斯坦流形，且

$$\mathrm{Ric}_{\bar{g}} = (n-1)\lambda \bar{g}.$$

则存在常数 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于满足以下条件的 M^n 上的任意度量 g，

$$R_g \geq R_{\bar{g}}, \quad ||g - \bar{g}||_{C^2(M^n,\bar{g})} < \varepsilon_0,$$

以下体积比较成立：

(1)若 $\lambda > 0$，则 $\mathrm{Vol}_M(g) \leq \mathrm{Vol}_M(\bar{g})$；

(2)若 $\lambda < 0$，则 $\mathrm{Vol}_M(g) \geq \mathrm{Vol}_M(\bar{g})$，

w两种情况下等号成立当且仅当 g 与 $\bar{g}$等距。

在该体积比较定理之后，Lin 和 Yuan [16, 17] 证明了在 Q-曲率情形下的类似结果。随后，Andrade 等人[1] 和 Chen 等人 [6] 分别研究了 σ_2-曲率和 σ_k-曲率（$k \geq 2$）情形。

受这些关于标量型曲率体积比较定理的结果启发，本文研究总商曲率的比较定理。

M主要定理 A。设 $(M^n, \bar{g})$ 是一个严格稳定爱因斯坦流形，且

$$\mathrm{Ric}_{\bar{g}} = (n-1)\lambda \bar{g},$$

其中 $\lambda > 0$ 是常数。给定正整数 $1 \leq l < k \leq n$ 和 $1 \leq q \leq p \leq n$，存在常数 $\varepsilon_0 > 0$，使得对 M^n 上满足下列条件的任意度量 g

$$\|g - \bar{g}\|_{C^2(M^n,\bar{g})} < \varepsilon_0,$$

若下列假设之一成立，

$$(1)\ \frac{\sigma_k(g)}{\sigma_l(g)} \geq \frac{\sigma_k(\bar{g})}{\sigma_l(\bar{g})},\ 2(p-q) < n; \quad (2)\ \frac{\sigma_k(g)}{\sigma_l(g)} \leq \frac{\sigma_k(\bar{g})}{\sigma_l(\bar{g})},\ 2(p-q) \geq n + 2(k-l),$$

则有总商曲率比较

$$\int_M \frac{\sigma_p(g)}{\sigma_q(g)}\, dv_g \leq \int_M \frac{\sigma_p(\bar{g})}{\sigma_q(\bar{g})}\, dv_{\bar{g}}.$$

此外，当且仅当 g 与 $\bar{g}$ 等距时，等号成立。

注1.3. 主定理 A 是若干比较结果的推广。情形$p = q$ 对应于体积比较定理。注意，如果 $\sigma_0(g) = 1$，那么对于特定的选择 $l = p = q = 0$，它可化为 [6], 中关于 σ_k-曲率的体积比较定理；进一步，当 $k = 1$ [25]时，它可化为关于标量曲率的体积比较定理。此外，情形 $l = q = 0$ 给出了在 σ_k 下界条件下对总σ_p-曲率的比较，这一结果在 [7]中得到断言。

注记 1.4。 指标 p 和 q 的可容许性条件取决于维数 n的奇偶性，尤其是在对背景曲率的约束最少时，即 $k - l = 1$。若 n 为偶数，由于根据我们在方程 (3.1) 中定义的关键泛函， $p - q \neq n/2$，因此假设 (1) 和 (2) 涵盖了 $p-q$的所有可能取值。然而，若 n为奇数，假设 (1) 和 (2) 无法涵盖 $p - q = \frac{n+1}{2}$这一情形，因为关键泛函的二阶变分会改变符号。

推论 1.5. 设 $(M^n, \bar{g})$ 为一个严格稳定爱因斯坦流形，且

$$\mathrm{Ric}_{\bar{g}} = (n-1)\lambda \bar{g},$$

其中 $\lambda > 0$ 是一个常数。给定正整数 $1 \le l < k \le n$ 和 $1 \le q \le p \le n$，存在一个常数 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于满足以下条件的 M^n 上的任意度量 g

$$\|g - \bar{g}\|_{C^2(M^n,\, \bar{g})} < \varepsilon_0,$$

如果以下假设之一成立，

$$(1')\ \ \frac{\sigma_k(g)}{\sigma_{k-1}(g)} \ge \frac{\sigma_k(\bar{g})}{\sigma_{k-1}(\bar{g})},\ \ 2(p-q) < n; \quad (2')\ \ \frac{\sigma_k(g)}{\sigma_{k-1}(g)} \le \frac{\sigma_k(\bar{g})}{\sigma_{k-1}(\bar{g})},\ \ 2(p-q) \ge n+2,$$

那么我们得到总商曲率比较

$$\int_M \frac{\sigma_p(g)}{\sigma_q(g)}\, dv_g \le \int_M \frac{\sigma_p(\bar{g})}{\sigma_q(\bar{g})}\, dv_{\bar{g}}.$$

此外，当且仅当 g 与 $\bar{g}$等距时，等号成立。

值得注意的是，即使仅考虑体积情形，我们的结果也提供了更精确的定量控制。例如，考虑情形 $k = 1$ （其中假设为 $R_g \ge R_{\bar{g}}$），并对指标 $p = 1$， $q = 0$应用比较，我们得到

$$\int_M R_g\, dv_g \le \int_M R_{\bar{g}}\, dv_{\bar{g}}.$$

如果进一步假设 R_g 是一个常数，则此不等式意味着

$$R_g \mathrm{Vol}_M(g) \le R_{\bar{g}} \mathrm{Vol}_M(\bar{g}),$$

从而得到明确的比值界：

$$\frac{\mathrm{Vol}_M(g)}{\mathrm{Vol}_M(\bar{g})} \le \frac{R_{\bar{g}}}{R_g}.$$

由于 $R_g \ge R_{\bar{g}}$，当标量曲率严格递增时，这一估计严格强于定理 1.2 给出的标准体积比较 $\mathrm{Vol}_M(g) \le \mathrm{Vol}_M(\bar{g})$。

本文的组织如下。在第 2 节中，我们介绍全文将使用的一些必要记号和预备知识。在第 3 节中，我们计算商曲率泛函的一阶和二阶变分公式。在第 4 节中，我们证明主要定理。

致谢。 作者感谢 Wei Yuan 教授提出这个问题，并感谢审稿人提出的宝贵意见。

2. 预备知识

2.1. 记号。 给定一个黎曼流形 $(M^n,\ g)$，我们对黎曼曲率张量和里奇曲率张量采用如下约定

$$\mathrm{Rm}(X, Y, Z, W) = R(X, Y)Z \cdot W,$$

其中

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

并且在局部坐标系中，对于 $1 \leq i,j,k,l \leq n$，我们将黎曼曲率张量和里奇曲率张量记为

$$R_{ijkl} = \mathrm{Rm}(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = g_{ml} R^m_{ijk},$$
$$R_{jk} = g^{il} R_{ijkl},$$

舒滕张量记为

$$S_{ij} = R_{ij} - \frac{R_g}{2(n-1)} g_{ij},$$

爱因斯坦算子记为

$$\Delta^g_E = \Delta_g + 2\mathrm{Rm}_g$$

其中 Δ_g 是拉普拉斯-贝尔特拉米算子。

2.2. **稳定爱因斯坦度量**。令 $S_2(M^n, \bar{g})$ 表示 $(M^n, \bar{g})$ 上对称二阶张量的空间，简记为 $S_2(M)$，则

$$S^{TT}_{2,\bar{g}}(M) := \{h \in S_2(M) | \delta_{\bar{g}} h = 0, tr_{\bar{g}} h = 0\}$$

称为 $(M^n, \bar{g})$ 上横向无迹对称二阶张量的空间。这里 $\delta_{\bar{g}}$ 是由下式定义的散度算子

$$(\delta_{\bar{g}} h)_i := \nabla^j_{\bar{g}} h_{ij}.$$

定义 2.1。对于 $n \geq 3$，设 $(M^n, \bar{g})$ 是一个闭爱因斯坦流形，且

$$\mathrm{Ric}_{\bar{g}} = (n-1)\lambda \bar{g}.$$

Then $\bar{g}$ 称为稳定的，如果 Δ^g_E 在 $S^{TT}_{2\,\bar{g}}(M) \setminus \{0\}$ 上是一个非正算子，即 e.

$$\inf_{h \in S^{TT}_{2,\bar{g}}(M)\setminus\{0\}} \frac{-\int_M h \cdot \Delta^{\bar{g}}_E h dv_{\bar{g}}}{\int_M |h|^2 dv_{\bar{g}}} \geq 0.$$

此外，如果 Δ^g_E 在 $S^{TT}_{2\,\bar{g}}(M) \setminus \{0\}$ 上是一个严格负算子，则称 $\bar{g}$ 严格稳定，即

$$\inf_{h \in S^{TT}_{2,\bar{g}}(M)\setminus\{0\}} \frac{-\int_M h \cdot \Delta^{\bar{g}}_E h dv_{\bar{g}}}{\int_M |h|^2 dv_{\bar{g}}} > 0.$$

2.3. **σ_k-曲率**。为了紧凑地表示 σ_k-曲率，我们首先引入广义克罗内克δ，其定义沿用 Reilly 在 [21, 22] 中的计算。

定义 2.2。广义克罗内克δ记作

$$\delta^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_k} = \begin{cases} 1, \text{ if } j_1\cdots j_k \text{ are distinct integers with even permutation of } i_1\cdots i_k; \\ -1, \text{ if } j_1\cdots j_k \text{ are distinct integers with odd permutation of } i_1\cdots i_k; \\ 0, \text{ in other cases.} \end{cases}$$

广义克罗内克δ的缩并规则为

$$\delta^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p} \delta^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_k} = p! \frac{(n-k+p)!}{(n-k)!} \delta^{j_{p+1}\cdots j_k}_{i_{p+1}\cdots i_k},$$

其中 $1 \leq p \leq k-1$ 且 $2 \leq k \leq n$。对于特殊情形 $p=1$，我们有

$$\delta^{i_1}_{j_1} \delta^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_k} = (n-k+1)\delta^{j_2\cdots j_k}_{i_2\cdots i_k}.$$

根据归纳论证，有

$$\delta^{i_1}_{j_1}\cdots\delta^{i_p}_{j_p}\delta^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_k}=(n-k+1)\cdots(n-k+p)\delta^{j_{p+1}\cdots j_k}_{i_{p+1}\cdots i_k}=\frac{(n-k+p)!}{(n-k)!}\delta^{j_{p+1}\cdots j_k}_{i_{p+1}\cdots i_k}.$$

现在，我们给出 σ_k-曲率的一个等价定义如下。

定义 2.3. σ_k-曲率定义为

$$\sigma_k(g)=\frac{1}{k!}\delta^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_k}S^{i_1}_{j_1}\cdots S^{i_k}_{j_k}.$$

若（$M^n,\quad \bar{g}$）是一个 n 维爱因斯坦流形，且 $\mathrm{Ric}_{\bar{g}}=(n-1)\lambda\bar{g}$，则有

$$S_{\bar{g}}=\frac{n-2}{2}\lambda\bar{g},\qquad \sigma_k(\bar{g})=\left(\frac{n-2}{2}\lambda\right)^k\binom{n}{k},$$

其中 $\binom{n}{k}=\frac{n}{\underline{n-k}!\ ()!k!}$（$1\le k\le n$）是组合数。

2.4. 基本变分公式。我们将计算体积、标量曲率和 σ_k-曲率的一阶与二阶变分，这些结果将在后续章节中使用。本文中，我们始终假设（$M^n,\bar{g}$）是一个闭的 n 维爱因斯坦流形，满足 $\mathrm{Ric}_{\bar{g}}=(n-1)\lambda\bar{g}$ 且 $\lambda>0$。在这些假设下，我们推导出沿 h 方向在 $\bar{g}$ 处的以下基本变分公式。

第一个 和二阶变分分别记为

$$(\mathrm{Vol})'(\bar{g}):=D\mathrm{Vol}(\bar{g})\cdot h=\frac{1}{2}\int_M tr_{\bar{g}}h\ dv_{\bar{g}} \tag{2.1}$$

and

$$(\mathrm{Vol})''(\bar{g}):=D^2\mathrm{Vol}(\bar{g})(h,h)=\frac{n-2}{4n}\int_M(tr_{\bar{g}}h)^2dv_{\bar{g}}-\frac{1}{2}\int_M|\mathring{h}|^2dv_{\bar{g}}, \tag{2.2}$$

其中 $\mathring{h}=h-\frac{tr_{\bar{g}}h}{n}\bar{g}$。标量曲率的一阶变分为

$$R'_{\bar{g}}:=DR(\bar{g})\cdot h=-\Delta_{\bar{g}}(tr_{\bar{g}}h)+\delta^2_{\bar{g}}h-(n-1)\lambda tr_{\bar{g}}h. \tag{2.3}$$

σ_k-曲率的一阶和二阶变分为

$$\sigma'_k(\bar{g}):=D\sigma_k(\bar{g})\cdot h=\frac{k}{n(n-1)\lambda}\binom{n}{k}\left(\frac{n-2}{2}\lambda\right)^k R'_{\bar{g}}=\frac{k}{n(n-1)\lambda}\sigma_k(\bar{g})R'_{\bar{g}} \tag{2.4}$$

and

$$\begin{aligned}\sigma_k{}''(\bar{g})=\frac{2k}{n(n-2)\lambda}\sigma_k(\bar{g})\Bigg[&tr_{\bar{g}}S''_{\bar{g}}-\frac{2(k-1)}{(n-1)(n-2)\lambda}|S'_{\bar{g}}|^2-\frac{2(n-k)}{n-1}h^{ij}S'_{ij}(\bar{g})\\&+\frac{(k-1)(n-2)}{2(n-1)^3\lambda}(R'_{\bar{g}})^2+\frac{(2n-k-1)(n-2)}{2(n-1)}\lambda|h|^2\Bigg].\end{aligned} \tag{2.5}$$

为简便起见，我们记

$$A_{kl}:=\frac{\sigma_k(\bar{g})}{\sigma_l(\bar{g})}=\frac{\left(\frac{n-2}{2}\lambda\right)^k\binom{n}{k}}{\left(\frac{n-2}{2}\lambda\right)^l\binom{n}{l}}=\left(\frac{n-2}{2}\lambda\right)^{k-l}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{l}}, \tag{2.6}$$

$$\left(\frac{\sigma_k}{\sigma_l}\right)'(\bar{g}):=D\left(\frac{\sigma_k}{\sigma_l}\right)(\bar{g})\cdot h, \tag{2.7}$$

$$\left(\frac{\sigma_k}{\sigma_l}\right)''(\bar{g}) := D^2\left(\frac{\sigma_k}{\sigma_l}\right)(\bar{g})(h,h). \tag{2.8}$$

采用这些记号，商曲率的一阶和二阶变分可推导如下。

命题 2.4. 设 $(M^n,\bar{g})$ 是一个闭的 n 维爱因斯坦流形，满足 $\mathrm{Ric}_{\bar{g}}=(n-1)\lambda\bar{g}$。商曲率 σ_k/σ_l 在 $g=\bar{g}$ 沿对称二阶张量 h 方向的一阶变分为

$$\left(\frac{\sigma_k}{\sigma_l}\right)'(\bar{g}) = \frac{k-l}{n(n-1)\lambda}A_{kl}R'_{\bar{g}}. \tag{2.9}$$

证明。 直接计算可得

$$\left(\frac{\sigma_k}{\sigma_l}\right)'(\bar{g}) = \frac{{\sigma_k}'(\bar{g})\sigma_l(\bar{g})-\sigma_k(\bar{g}){\sigma_l}'(\bar{g})}{\sigma_l^2(\bar{g})} = \frac{k-l}{n(n-1)\lambda}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{l}}\left(\frac{n-2}{2}\lambda\right)^{k-l}R'_{\bar{g}}.$$

结合 A_{kl} 的记号，即得所述结果。 □

命题 2.5. 设 $(M^n,\bar{g})$ 是一个闭的 n 维爱因斯坦流形，满足 $\mathrm{Ric}_{\bar{g}}=(n-1)\lambda\bar{g}$。商曲率 $\frac{\sigma_k(g)}{\sigma_l(g)}$ 在 $g=\bar{g}$ 沿对称二阶张量 h 方向的二阶变分满足 ——

(2.10)

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{2A_{kl}(k-l)}{n(n-2)\lambda}\right]^{-1}\left(\frac{\sigma_k}{\sigma_l}\right)''(\bar{g})\\
=&tr_{\bar{g}}S''_{\bar{g}} - \frac{2(k+l-1)}{(n-1)(n-2)\lambda}|S'_{\bar{g}}|^2 - \frac{2(n-k-l)}{n-1}h^{ij}S'_{ij}(\bar{g}) + \frac{(n-2)\left[n(k-l)-(n-2l)\right]}{2n(n-1)^3\lambda}(R'_{\bar{g}})^2\\
&+\frac{(n-2)(2n-k-l-1)}{2(n-1)}\lambda|h|^2,
\end{aligned}$$

其中 $S'_{\bar{g}}$ 和 $S''_{\bar{g}}$ 分别表示舒滕张量 S 的一阶和二阶变分。

证明。 简单计算可得

$$\left(\frac{\sigma_k}{\sigma_l}\right)''(\bar{g}) = \frac{{\sigma_k}''(\bar{g})}{\sigma_l(\bar{g})} - A_{kl}\frac{{\sigma_l}''(\bar{g})}{\sigma_l(\bar{g})} - \frac{2{\sigma_l}'(\bar{g}){\sigma_k}'(\bar{g})}{\sigma_l^2(\bar{g})} + \frac{2\left({\sigma_l}'(\bar{g})\right)^2\sigma_k(\bar{g})}{\sigma_l^3(\bar{g})}. \tag{2.11}$$

由 2.5 可知，上述公式右侧的前两项满足

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{2A_{kl}(k-l)}{n(n-2)\lambda}\right]^{-1}\left[\frac{{\sigma_k}''(\bar{g})}{\sigma_l(\bar{g})} - A_{kl}\frac{{\sigma_l}''(\bar{g})}{\sigma_l(\bar{g})}\right]\\
=&tr_{\bar{g}}S''_{\bar{g}} - \frac{2(k+l-1)}{(n-1)(n-2)\lambda}|S'_{\bar{g}}|^2 - \frac{2(n-k-l)}{n-1}h^{ij}S'_{ij}(\bar{g}) + \frac{(n-2)(k+l-1)}{2(n-1)^3\lambda}(R'_{\bar{g}})^2\\
&+\frac{(n-2)(2n-k-l-1)}{2(n-1)}\lambda|h|^2,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

且最后两项满足

$$\left[\frac{2A_{kl}(k-l)}{n(n-2)\lambda}\right]^{-1}\left[-\frac{2{\sigma_l}'(\bar{g}){\sigma_k}'(\bar{g})}{\sigma_l^2(\bar{g})} + \frac{2({\sigma_l}'(\bar{g}))^2\sigma_k(\bar{g})}{\sigma_l^3(\bar{g})}\right] = -\frac{(n-2)l}{n(n-1)^2\lambda}(R'_{\bar{g}})^2. \tag{2.13}$$

证明至此完成。 □

3. 关键泛函及相应的变分

在本节中，我们假设 $(M^n, \bar{g})$ 是一个满足以下条件的闭爱因斯坦流形

$$\mathrm{Ric}_{\bar{g}} = (n-1)\lambda \bar{g},$$

并将关键泛函定义为

$$\mathcal{H}_{\bar{g}}(g) = \left[\int_M \frac{\sigma_p(g)}{\sigma_q(g)} dv_g\right]^{2(k-l)} \left[\int_M \frac{\sigma_k(g)}{\sigma_l(g)} dv_{\bar{g}}\right]^{n-2(p-q)}, \tag{3.1}$$

其中 $1 \le l < k \le n$ 和 $1 \le p \le q \le n$。我们将推导 $\mathcal{H}_{\bar{g}}(g)$ 在 $g = \bar{g}$ 处的一阶和二阶变分公式。此前，Fisher-Marsden [9] 和 Yuan [16, 17] 研究了固定背景体积形式 $dv_{\bar{g}}$ 下的泛函，涉及标量曲率和 Q-曲率的刚性，以及相关的体积比较定理。

若记

$$\alpha = 2(k-l) \quad \text{and} \quad \beta = n - 2(p-q), \tag{3.2}$$

则可将关键泛函改写为

$$\mathcal{H}_{\bar{g}}(g) = \left[\int_M \frac{\sigma_p(g)}{\sigma_q(g)} dv_g\right]^{\alpha} \left[\int_M \frac{\sigma_k(g)}{\sigma_l(g)} dv_{\bar{g}}\right]^{\beta}. \tag{3.3}$$

并且我们还有

$$\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g}) = A_{pq}^{\alpha} A_{kl}^{\beta} \mathrm{Vol}_{\bar{g}}^{\alpha+\beta}. \tag{3.4}$$

3.1. 一阶变分公式。 现在我们转而关注泛函 $\mathcal{H}_{\bar{g}}(g)$ 的基本性质。首先自然要探究它在基本变换下的行为，以及确定其临界点。在本小节中，我们考察背景爱因斯坦度量 $\bar{g}$ 附近的变分公式。

命题 3.1。 $\mathcal{H}_{\bar{g}}(g)$ 关于度量 g 缩放不变，即

$$\mathcal{H}_{\bar{g}}(c^2 g) = \mathcal{H}_{\bar{g}}(g)$$

对任意非零常数 c均成立。

证明。 回顾一下，在度量缩放 $g \mapsto c^2 g$ 下，舒滕张量特征值的第 k 个初等对称函数变换如下:

$$\sigma_k(c^2 g) = c^{-2k} \sigma_k(g),$$

而体积形式缩放如下:

$$dv_{c^2 g} = c^n dv_g,$$

其中， n 是流形 M的维数。于是

$$\left[\int_M \frac{\sigma_p(c^2 g)}{\sigma_q(c^2 g)} dv_{c^2 g}\right]^{\alpha} = \left[c^{\beta} \int_M \frac{\sigma_p(g)}{\sigma_q(g)} dv_g\right]^{\alpha} \quad \text{and} \quad \left[\int_M \frac{\sigma_k(c^2 g)}{\sigma_l(c^2 g)} dv_{\bar{g}}\right]^{\beta} = \left[c^{-\alpha} \int_M \frac{\sigma_k(g)}{\sigma_l(g)} dv_{\bar{g}}\right]^{\beta}.$$

因此，结论得证。 □

这一性质意味着，关键泛函 $\mathcal{H}_{\bar{g}}$ 的临界点应由其变分保持某些几何尺度的度量取得，尤其是那些与曲率相关的几何尺度。要分析这些临界点，就必须理解商曲率如何响应度量的无穷小变化。下面的命题通过计算爱因斯坦度量处商曲率的线性化，给出了这一分析。这个变分完全用标量曲率的线性化表示，体现了爱因斯坦流形上几何变形所具有的约束性质。

接下来，我们建立背景度量的变分刻画。以下命题表明，爱因斯坦度量 $\bar{g}$ 是泛函 $\mathcal{H}_{\bar{g}}$ 的临界点。此结果由一阶变分公式推出，并利用了这样一个事实：在爱因斯坦流形上，线性化标量曲率的积分与度量扰动的迹的积分成正比。

命题 3.2。 爱因斯坦度量 $\bar{g}$ 是 $\mathcal{H}_{\bar{g}}$的临界点，即

$$D\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})\cdot h=0.$$

对任意 $h\in S_2(M)$,

证明。 设 $g_t=\bar{g}+th$，其中 $h\in S_2(M)$， $t\in(-\varepsilon,\ \varepsilon)$，且 $\varepsilon>0$足够小。则泛函 $\mathcal{H}_{\bar{g}}$ 在 $g=\bar{g}$ 处的线性化为

$$\begin{aligned} D\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})\cdot h =&\alpha\left[\int_M\frac{\sigma_p(\bar{g})}{\sigma_q(\bar{g})}dv_{\bar{g}}\right]^{\alpha-1}\left[\int_M\frac{\sigma_k(\bar{g})}{\sigma_l(\bar{g})}dv_{\bar{g}}\right]^{\beta}D\left[\int_M\frac{\sigma_p(g)}{\sigma_q(g)}dv_g\right](\bar{g})\cdot h\\ &+\beta\left[\int_M\frac{\sigma_p(\bar{g})}{\sigma_q(\bar{g})}dv_{\bar{g}}\right]^{\alpha}\left[\int_M\frac{\sigma_k(\bar{g})}{\sigma_l(\bar{g})}dv_{\bar{g}}\right]^{\beta-1}D\left[\int_M\frac{\sigma_k(g)}{\sigma_l(g)}dv_{\bar{g}}\right](\bar{g})\cdot h \end{aligned}\tag{3.5}$$

注意，对任意 $k(1\le k\le n)$，都有

$$\sigma_k(\bar{g})=\left(\frac{n-2}{2}\lambda\right)^k\binom{n}{k},\quad {\sigma_k}'(\bar{g})=\frac{k}{n(n-1)\lambda}\sigma_k(\bar{g})R'_{\bar{g}},$$

分部积分可得

$$\int_M R'_{\bar{g}}dv_{\bar{g}}=\int_M[-\Delta_{\bar{g}}tr_{\bar{g}}h+\delta^2_{\bar{g}}h-(n-1)\lambda tr_{\bar{g}}h]dv_{\bar{g}}=-(n-1)\lambda\int_M tr_{\bar{g}}hdv_{\bar{g}}.$$

结合这一点与定理 2.4，可得

$$D\left[\int_M\frac{\sigma_k(g)}{\sigma_l(g)}dv_{\bar{g}}\right](\bar{g})\cdot h=\frac{A_{kl}(k-l)}{n(n-1)\lambda}\int_M R'_{\bar{g}}dv_{\bar{g}}=-\frac{A_{kl}(k-l)}{n}\int_M tr_{\bar{g}}hdv_{\bar{g}},\tag{3.6}$$

and

$$\begin{aligned} D\left[\int_M\frac{\sigma_p(g)}{\sigma_q(g)}dv_g\right](\bar{g})\cdot h&=-\frac{A_{pq}(p-q)}{n}\int_M tr_{\bar{g}}hdv_{\bar{g}}+\frac{A_{pq}}{2}\int_M tr_{\bar{g}}hdv_{\bar{g}}\\ &=\frac{A_{pq}\left[n-2(p-q)\right]}{2n}\int_M tr_{\bar{g}}hdv_{\bar{g}}. \end{aligned}\tag{3.7}$$

因此， $D\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})\cdot h=0$，即 $\bar{g}$ 是 $\mathcal{H}_{\bar{g}}$的临界点。 □

3.2. 二阶变分公式。本小节中，我们推导商曲率泛函的二阶变分公式。为便于计算谱，我们采用对称二阶张量 h 分解为无迹横向（TT）部分和纯迹部分的标准分解。具体而言，我们假设对称二阶张量 h 具有 TT规范分解：

$$h = \overset{\circ}{h} + \frac{1}{n}(tr_{\bar{g}}h)\bar{g} \in S^{TT}_{2,\bar{g}}(M) \oplus (C^{\infty}(M)\cdot\bar{g}) \tag{3.8}$$

。 。 。其中 $h \in S^{TT}_{2\,\bar{g}},(M)$ 满足 $tr_{\bar{g}}h = 0$和 $\delta_{\bar{g}}h = 0$。在此分解下， h 的散度满足

$$\delta_{\bar{g}}(h) = -\frac{1}{n}\nabla_{\bar{g}}(tr_{\bar{g}}h). \tag{3.9}$$

并且我们还有如下公式

$$\int_M |h|^2 dv_{\bar{g}} = \int_M |\overset{\circ}{h}|^2 dv_{\bar{g}} + \frac{1}{n}\int_M (tr_{\bar{g}}h)^2 dv_{\bar{g}} \tag{3.10}$$

用于积分分解。我们回顾如下关于爱因斯坦流形上舒滕张量的积分恒等式，其推导见 [6]。

命题3.3. 设 $(M^n, \bar{g})$ 为闭的 n 维爱因斯坦流形，且 $\mathrm{Ric}_{\bar{g}} = (n-1)\lambda\bar{g}$，则我们有如下积分公式：

$$\begin{aligned}
\int_M tr_{\bar{g}}S''_{\bar{g}}dv_{\bar{g}} =& -\frac{3n-2}{4(n-1)}\int_M \overset{\circ}{h}\cdot\Delta_E^{\bar{g}}\overset{\circ}{h}dv_{\bar{g}} + \frac{n-2}{2}\lambda\int_M |\overset{\circ}{h}|^2 dv_{\bar{g}} - \frac{(n-2)^2}{4n^2}\int_M |\nabla_{\bar{g}}tr_{\bar{g}}h|^2 dv_{\bar{g}};\\
\int_M |S'_{\bar{g}}|^2 dv_{\bar{g}} =& \frac{1}{4}\int_M |\Delta_E^{\bar{g}}\overset{\circ}{h}|^2 dv_{\bar{g}} - \frac{n-2}{2}\lambda\int_M \overset{\circ}{h}\cdot\Delta_E^{\bar{g}}\overset{\circ}{h}dv_{\bar{g}} + \frac{(n-2)^2}{4}\lambda^2\int_M |\overset{\circ}{h}|^2 dv_{\bar{g}}\\
&+ \frac{(n-2)^2}{4n^2}\int_M (\Delta_{\bar{g}}tr_{\bar{g}}h)^2 dv_{\bar{g}} - \frac{(n-1)(n-2)^2}{4n^2}\lambda\int_M |\nabla_{\bar{g}}tr_{\bar{g}}h|^2 dv_{\bar{g}};\\
\int_M h^{ij}S'_{ij}(\bar{g})dv_{\bar{g}} =& -\frac{1}{2}\int_M \overset{\circ}{h}\cdot\Delta_E^{\bar{g}}\overset{\circ}{h}dv_{\bar{g}} + \frac{n-2}{2}\lambda\int_M |\overset{\circ}{h}|^2 dv_{\bar{g}} + \frac{n-2}{2n^2}\int_M |\nabla_{\bar{g}}tr_{\bar{g}}h|^2 dv_{\bar{g}};\\
\int_M (R'_{\bar{g}})^2 dv_{\bar{g}} =& (n-1)^2\left[\frac{1}{n^2}\int_M (\Delta_{\bar{g}}tr_{\bar{g}}h)^2 dv_{\bar{g}} - \frac{2}{n}\lambda\int_M |\nabla_{\bar{g}}tr_{\bar{g}}h|^2 dv_{\bar{g}} + \lambda^2\int_M (tr_{\bar{g}}h)^2 dv_{\bar{g}}\right];
\end{aligned}$$

其中 $\Delta_E^{\bar{g}} = \Delta_{\bar{g}} + 2Rm_{\bar{g}}$ 表示作用于对称二阶张量的爱因斯坦算子 .

结合定理2.5和3.3，我们得到泛函 $\mathcal{H}_{\bar{g}}$ 的二阶变分公式。

命题3.4。 设 $(M^n,\ \bar{g})$ 是一个闭的 n 维爱因斯坦流形，满足 $\mathrm{Ric}_{\bar{g}} = (n-1)\lambda\bar{g}$，且

$$h = \overset{\circ}{h} + \frac{tr_{\bar{g}}h}{n}\bar{g} \in S^{TT}_{2,\bar{g}}(M) \oplus (C^{\infty}(M)\cdot\bar{g}),$$

则 $\mathcal{H}_{\bar{g}}$ 在 $\bar{g}$ 处的二阶变分公式为

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})]^{-1}\operatorname{Vol}_{\bar{g}} D^2\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})(h,h)\\
=&-\frac{\alpha\left[\beta(k+l)+2(p^2-q^2)-n\right]}{2n(n-1)(n-2)^2\lambda^2}\int_M|\Delta_E^{\bar{g}}\overset{\circ}{h}|^2dv_{\bar{g}}+\frac{\alpha}{4(n-1)\lambda}\int_M\overset{\circ}{h}\cdot\Delta_E^{\bar{g}}\overset{\circ}{h}dv_{\bar{g}}\\
&-\frac{\alpha\left[2(p-q)(q-l)+nl\right]}{n^4\lambda^2}\int_M\left[(\Delta_{\bar{g}}tr_{\bar{g}}h)^2-n\lambda|\nabla_{\bar{g}}tr_{\bar{g}}h|^2\right]dv_{\bar{g}}\\
&-\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{4n^3\lambda}\int_M\left[|\nabla_{\bar{g}}tr_{\bar{g}}h|^2-n\lambda\left(tr_{\bar{g}}h-\overline{tr_{\bar{g}}h}\right)^2\right]dv_{\bar{g}},
\end{aligned}
$$

其中 $\underline{tr_{\bar{g}}h}:=\operatorname{Vol}_{\bar{g}}^{-1}\int_M tr_{\bar{g}}hdv_{\bar{g}}$ 表示 $tr_{\bar{g}}h$ 在 M^n上的平均值，而 $\alpha=2(k-l)$, $\beta=n-2(p-q)$。

证明。根据我们在公式（3.5）中推导的一阶变分公式，泛函 $\mathcal{H}_{\bar{g}}$ 的二阶变分为

$$
\begin{aligned}
&D^2\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})(h,h)\\
=&\alpha(\alpha-1)\left[\int_M\frac{\sigma_p(\bar{g})}{\sigma_q(\bar{g})}dv_{\bar{g}}\right]^{\alpha-2}\left[\int_M\frac{\sigma_k(\bar{g})}{\sigma_l(\bar{g})}dv_{\bar{g}}\right]^{\beta}\left\{D\left[\int_M\frac{\sigma_p(g)}{\sigma_q(g)}dv_g\right](\bar{g})\cdot h\right\}^2\\
&+2\alpha\beta\left[\int_M\frac{\sigma_p(\bar{g})}{\sigma_q(\bar{g})}dv_{\bar{g}}\right]^{\alpha-1}\left[\int_M\frac{\sigma_k(\bar{g})}{\sigma_l(\bar{g})}dv_{\bar{g}}\right]^{\beta-1}\\
&\times\left\{D\left[\int_M\frac{\sigma_p(g)}{\sigma_q(g)}dv_g\right](\bar{g})\cdot h\right\}\left\{D\left[\int_M\frac{\sigma_k(g)}{\sigma_l(g)}dv_{\bar{g}}\right](\bar{g})\cdot h\right\}\\
&+\alpha\left[\int_M\frac{\sigma_p(\bar{g})}{\sigma_q(\bar{g})}dv_{\bar{g}}\right]^{\alpha-1}\left[\int_M\frac{\sigma_k(\bar{g})}{\sigma_l(\bar{g})}dv_{\bar{g}}\right]^{\beta}D^2\left[\int_M\frac{\sigma_p(g)}{\sigma_q(g)}dv_g\right](\bar{g})(h,h)\\
&+\beta(\beta-1)\left[\int_M\frac{\sigma_p(\bar{g})}{\sigma_q(\bar{g})}dv_{\bar{g}}\right]^{\alpha}\left[\int_M\frac{\sigma_k(\bar{g})}{\sigma_l(\bar{g})}dv_{\bar{g}}\right]^{\beta-2}\left\{D\left[\int_M\frac{\sigma_k(g)}{\sigma_l(g)}dv_{\bar{g}}\right](\bar{g})\cdot h\right\}^2\\
&+\beta\left[\int_M\frac{\sigma_p(\bar{g})}{\sigma_q(\bar{g})}dv_{\bar{g}}\right]^{\alpha}\left[\int_M\frac{\sigma_k(\bar{g})}{\sigma_l(\bar{g})}dv_{\bar{g}}\right]^{\beta-1}D^2\left[\int_M\frac{\sigma_k(g)}{\sigma_l(g)}dv_{\bar{g}}\right](\bar{g})(h,h)\\
=:&J_1+J_2+J_3+J_4+J_5.
\end{aligned}
$$

将上述公式与公式（3.6）和（3.7）结合，可得

$$
\begin{aligned}
J_1&=\frac{\alpha(\alpha-1)\beta^2}{4n^2}\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})\operatorname{Vol}_{\bar{g}}^{-2}\left[\int_M tr_{\bar{g}}hdv_{\bar{g}}\right]^2;\\
J_2&=-\frac{\alpha^2\beta^2}{2n^2}\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})\operatorname{Vol}_{\bar{g}}^{-2}\left[\int_M tr_{\bar{g}}hdv_{\bar{g}}\right]^2;\\
J_4&=\frac{\alpha^2\beta(\beta-1)}{4n^2}\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})\operatorname{Vol}_{\bar{g}}^{-2}\left[\int_M tr_{\bar{g}}hdv_{\bar{g}}\right]^2,
\end{aligned}
$$

and

$$
[\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})]^{-1}\operatorname{Vol}_{\bar{g}}\left[J_1+J_2+J_4\right]=-\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{4n^2}\operatorname{Vol}_{\bar{g}}^{-1}\left[\int_M tr_{\bar{g}}hdv_{\bar{g}}\right]^2.
$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
J_3 &= \alpha\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})\left[A_{pq}\mathrm{Vol}_{\bar{g}}\right]^{-1} D^2\left[\int_M \frac{\sigma_p(g)}{\sigma_q(g)}dv_g\right](\bar{g})(h,h)\\
&= \alpha\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})\left[A_{pq}\mathrm{Vol}_{\bar{g}}\right]^{-1}\left\{\int_M\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_q}\right)''(\bar{g})dv_{\bar{g}} + 2\int_M\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_q}\right)'(\bar{g})(dv)'(\bar{g})\right\}\\
&\quad + \alpha\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})\left[A_{pq}\mathrm{Vol}_{\bar{g}}\right]^{-1}\frac{\sigma_p(\bar{g})}{\sigma_q(\bar{g})}\int_M (dv)''(\bar{g})\\
&= \alpha\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})\left[A_{pq}\mathrm{Vol}_{\bar{g}}\right]^{-1}\left\{\int_M\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_q}\right)''(\bar{g})dv_{\bar{g}} + \int_M\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_q}\right)'(\bar{g})tr_{\bar{g}}hdv_{\bar{g}} + A_{pq}(\mathrm{Vol})''(\bar{g})\right\}
\end{aligned}$$

and

$$J_5 = \beta\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})\left[A_{kl}\mathrm{Vol}_{\bar{g}}\right]^{-1}\int_M\left(\frac{\sigma_k}{\sigma_l}\right)''(\bar{g})dv_{\bar{g}},$$

因此,

$$\begin{aligned}
\left[\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})\right]^{-1}\mathrm{Vol}_{\bar{g}}\left[J_3+J_5\right] =& \alpha A_{pq}^{-1}\int_M\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_q}\right)''(\bar{g})dv_{\bar{g}} + \beta A_{kl}^{-1}\int_M\left(\frac{\sigma_k}{\sigma_l}\right)''(\bar{g})dv_{\bar{g}}\\
&+ \alpha A_{pq}^{-1}\int_M\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_q}\right)'(\bar{g})tr_{\bar{g}}hdv_{\bar{g}} + \alpha(\mathrm{Vol})''(\bar{g}).
\end{aligned}$$

对于前两项，根据定理 2.5，有

$$\begin{aligned}
&\alpha A_{pq}^{-1}\int_M\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_q}\right)''(\bar{g})dv_{\bar{g}} + \beta A_{kl}^{-1}\int_M\left(\frac{\sigma_k}{\sigma_l}\right)''(\bar{g})dv_{\bar{g}}\\
=& C_1\int_M tr_{\bar{g}}S''_{\bar{g}}dv_{\bar{g}} + C_2\int_M |S'_{\bar{g}}|^2dv_{\bar{g}} + C_3\int_M h^{ij}S'_{ij}(\bar{g})dv_{\bar{g}} + C_4\int_M (R'_{\bar{g}})^2dv_{\bar{g}} + C_5\int_M |h|^2dv_{\bar{g}}
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\alpha}{(n-2)\lambda};\\
C_2 &= \frac{2\alpha}{n(n-1)(n-2)^2\lambda^2}\left[2(p-q)(k+l-p-q) - n(k+l-1)\right];\\
C_3 &= -\frac{2\alpha}{n(n-1)(n-2)\lambda}\left[2(p-q)(k+l-p-q) + n(n-k-l)\right];\\
C_4 &= \frac{\alpha(p-q)}{n^2(n-1)^3\lambda^2}\left[n(p-q-k+l) + 2(q-l)\right] + \frac{\alpha}{2n(n-1)^3\lambda^2}\left[n(k-l) - (n-2l)\right];\\
C_5 &= \frac{\alpha(p-q)}{n(n-1)}\left[k+l-p-q\right] + \frac{(n-k-l)\alpha}{2(n-1)} + \frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

对于第三项，分部积分表明

$$\begin{aligned}
&\alpha A_{pq}^{-1}\int_M\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_q}\right)'(\bar{g})tr_{\bar{g}}hdv_{\bar{g}}\\
=&\frac{\alpha(p-q)}{n(n-1)\lambda}\int_M[-\Delta_{\bar{g}}tr_{\bar{g}}h\cdot tr_{\bar{g}}h+\delta_{\bar{g}}^2h\cdot tr_{\bar{g}}h-(n-1)\lambda(tr_{\bar{g}}h)^2]dv_{\bar{g}}\\
=&\frac{\alpha(p-q)}{n^2\lambda}\int_M|\nabla_{\bar{g}}tr_{\bar{g}}h|^2dv_{\bar{g}}-\frac{\alpha(p-q)}{n}\int_M(tr_{\bar{g}}h)^2dv_{\bar{g}}.
\end{aligned}$$

对于最后一项，经过直接计算可得

$$\alpha(\mathrm{Vol})''(\bar{g})=\frac{\alpha}{4}\int_M(tr_{\bar{g}}h)^2dv_{\bar{g}}-\frac{\alpha}{2}\int_M|h|^2dv_{\bar{g}}.$$

综合以上所有结果，最终得到

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})]^{-1}\,\mathrm{Vol}_{\bar{g}}D^2\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})(h,h)\\
=&-\frac{\alpha\left[\beta(k+l)+2(p^2-q^2)-n\right]}{2n(n-1)(n-2)^2\lambda^2}\int_M|\Delta_E^{\bar{g}}\mathring{h}|^2dv_{\bar{g}}+\frac{\alpha}{4(n-1)\lambda}\int_M\mathring{h}\cdot\Delta_E^{\bar{g}}\mathring{h}dv_{\bar{g}}\\
&-\frac{\alpha\left[2(p-q)(q-l)+nl\right]}{n^4\lambda^2}\int_M\left[(\Delta_{\bar{g}}tr_{\bar{g}}h)^2-n\lambda|\nabla_{\bar{g}}tr_{\bar{g}}h|^2\right]dv_{\bar{g}}\\
&-\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{4n^3\lambda}\int_M\left[|\nabla_{\bar{g}}tr_{\bar{g}}h|^2-n\lambda\left(tr_{\bar{g}}h-\overline{tr_{\bar{g}}h}\right)^2\right]dv_{\bar{g}},
\end{aligned}$$

其中

$$\overline{tr_{\bar{g}}h}:=\mathrm{Vol}_{\bar{g}}^{-1}\int_M tr_{\bar{g}}hdv_{\bar{g}}$$

表示 $tr_{\bar{g}}h$在 M 上的平均值，并且

$$\int_M(tr_{\bar{g}}h-\overline{tr_{\bar{g}}h})^2dv_{\bar{g}}=\int_M(tr_{\bar{g}}h)^2dv_{\bar{g}}-\mathrm{Vol}_{\bar{g}}^{-1}\left(\int_M tr_{\bar{g}}hdv_{\bar{g}}\right)^2.$$

□

在进入下一节之前，我们先分析二阶变分中出现的系数。首先注意到，量 $2(p-q)(q-l)+nl$ 非负，因为$1\le q\le p\le n$ 且 $l\ge 1$。现在聚焦于第一项的系数，我们给出以下引理。

引理 3.5。 设 n,k,l,p,q 为满足 $1\le l<k\le n$ 和 $1\le q\le p\le n$的整数，则

$$\beta(k+l)+2(p^2-q^2)-n\ge 0.$$

证明。 令 $x=p-q$ 和 $y=p+q$，则 $\beta=n-2(p-q)=n-2x$，并且

$$\beta(k+l)+2(p^2-q^2)-n=(n-2x)(k+l)+2xy-n.$$

情况 1： 假设 $n-2x\ge 0$。由于 $k+l\ge 3, y\ge 2, x\ge 0$，我们有

$$\begin{aligned}
(n-2x)(k+l)+2xy-n&\ge 2(n-x)+2x(y-2)\\
&\ge 2x+2x(y-2)=2x(y-1)\ge 0.
\end{aligned}$$

Case 2： 假设 $n-2x<0$。由于 $k+l\le 2n-1$, $y>x$ 和 $x\le n-1$，因此

$$\begin{aligned}(n-2x)(k+l)+2xy-n &\ge (n-2x)(2n-1)+2x^2-n\\ &= 2(n-x)(n-1-x)\ge 0.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

4. 总商曲率比较

在第 3 节推导出泛函$\mathcal{H}_{\bar g}$ 的一阶和二阶变分的显式公式后，我们现在可以建立总商曲率的比较结果。命题3.4中的变分公式将总商曲率比较问题归结为研究对称二阶张量空间上一个二次型的符号。

本节中，我们分析二阶变分中出现的具体项。通过分解——

。将扰动 h 分解为迹部分 $u=tr_{\bar g}h$ 和无迹部分 h，我们运用严格稳定爱因斯坦条件来控制横向无迹分量，同时利用博赫纳技巧和Lichnerowicz-Obata 定理估计迹分量。这一谱分析最终导出定理 A 的证明。

引理4.1。 设$(M^n,\bar g)$ 是一个闭的n维爱因斯坦流形，且$\mathrm{Ric}_{\bar g}=(n-1)\lambda\bar g$，则有

$$\int_M \left[(\Delta_{\bar g}tr_{\bar g}h)^2-n\lambda|\nabla_{\bar g}tr_{\bar g}h|^2\right]dv_{\bar g}\ge 0. \tag{4.1}$$

证明。 由博赫纳公式，对于任意函数 $u\in C^\infty(M^n)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_{\bar g}(|\nabla_{\bar g}u|^2) &= |\nabla^2_{\bar g}u|^2+\langle\nabla_{\bar g}u,\nabla_{\bar g}\Delta_{\bar g}u\rangle+Ric(\nabla_{\bar g}u,\nabla_{\bar g}u)\\ &= |\nabla^2_{\bar g}u|^2+\langle\nabla_{\bar g}u,\nabla_{\bar g}\Delta_{\bar g}u\rangle+(n-1)\lambda|\nabla_{\bar g}u|^2.\end{aligned}$$

然后在 M^n 上积分可得

$$\begin{aligned}0&=\frac{1}{2}\int_M\Delta_{\bar g}(|\nabla_{\bar g}u|^2)dv_{\bar g}\\ &=\int_M|\nabla^2_{\bar g}u|^2dv_{\bar g}-\int_M(\Delta_{\bar g}u)^2dv_{\bar g}+(n-1)\lambda\int_M|\nabla_{\bar g}u|^2dv_{\bar g}\\ &\ge\frac{1}{n}\int_M(\Delta_{\bar g}u)^2dv_{\bar g}-\int_M(\Delta_{\bar g}u)^2dv_{\bar g}+(n-1)\lambda\int_M|\nabla_{\bar g}u|^2dv_{\bar g}\\ &=-\frac{n-1}{n}\int_M\left[(\Delta_{\bar g}u)^2-n\lambda|\nabla_{\bar g}u|^2\right]dv_{\bar g},\end{aligned}$$

其中上述不等式由施瓦茨不等式得出

$$|\nabla^2_{\bar g}u|^2\ge\frac{1}{n}(\Delta_{\bar g}u)^2.$$

因此，如果我们令 $u=tr_{\bar g}h$，那么

$$\int_M\left[(\Delta_{\bar g}tr_{\bar g}h)^2-n\lambda|\nabla_{\bar g}tr_{\bar g}h|^2\right]dv_{\bar g}\ge 0.$$

□

类似地，定理 3.4 中二阶变分公式的第四项比较了迹的狄利克雷能量与其方差。为了控制这一项，我们需要拉普拉斯-贝尔特拉米算子 $\Delta_{\bar{g}}$ 的第一个非零特征值的下界。我们回顾经典的 Lichnerowicz-Obata 定理，它为具有正 Ricci 曲率的流形给出了尖锐的谱隙估计。关于这一结果的详细阐述，请读者参阅[14, 18]。

引理 4.2 (L ichnerowicz-Obata)。 设 $(M^n, \bar{g})$ 是一个闭 n 维流形， h

$$\mathrm{Ric}_{\bar{g}} \geq (n-1)\lambda \bar{g},$$

其中 $\lambda > 0$ 是常数。那么，对于任意不恒为常数的函数 $u \in C^\infty(M^n)$ ，有 $\bar{u}$ =体积 $^{-1}_{\bar{g}} \int_M u dv_{\bar{g}}$,

$$\int_M |\nabla_{\bar{g}} u|^2 dv_{\bar{g}} \geq n\lambda \int_M (u-\bar{u})^2 dv_{\bar{g}},$$

其中等号成立当且仅当$(M^n, \bar{g})$ 与半径为$r = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ 的标准球面 $\mathbb{S}^n(r)$ 等距，且 u 是拉普拉斯-贝尔特拉米算子 $\Delta_{\bar{g}}$ 的第一特征函数。

将定理 4.1 和定理 4.2 应用于定理 3.4，我们立即得到 $\mathcal{H}_{\bar{g}}(\cdot)$ 在爱因斯坦度量 $\bar{g}$ 处的二阶变分非正定，并得出：

命题 4.3。 设 $(M^n, \bar{g})$ 是一个里奇曲率张量为

$$\mathrm{Ric}_{\bar{g}} = (n-1)\lambda \bar{g},$$

其中 $\lambda > 0$ 是常数，则 $\bar{g}$ 是 $\mathcal{H}_{\bar{g}}(\cdot)$ 的临界点，并且

$$D^2\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})(h,h) \leq 0$$

对于任意 $h = \mathring{h} + \frac{1}{n}(tr_{\bar{g}}h)\bar{g} \in S^{TT}_{2\,\bar{g}}(M) \oplus (C^\infty(M) \cdot \bar{g})$，只要指标 $1 \leq q \leq p \leq n$ 满足 $2(p-q) \leq n$ 或 $2(p-q) \geq n+2(k-l)$。此外，当且仅当

- $h \in \mathbb{R} \cdot \bar{g}$，且 $(M^n, \bar{g})$ 在度量缩放意义下不等距于标准球面。
- $h \in E_{n\lambda} \cdot \bar{g}$，且 $(M^n, \bar{g})$ 等距于标准球面 $(\mathbb{S}^n(1/\sqrt{\lambda}), g_0)$，其中 $-$

$$E_{n\lambda} = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{S}^n(1/\sqrt{\lambda})) | \Delta_{g_0} u + n\lambda u = 0 \right\}$$

是球面度量 g_0 的第一特征函数空间。

证明。根据定理 3.4 中的二阶变分公式，并结合定理 3.5、4.1 和 4.2， $D^2\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})(h,h)$是非正定的。此外，当$D^2\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})(h,h) = 0$时，我们有

$$-\frac{\alpha\left[\beta(k+l)+2(p^2-q^2)-n\right]}{2n(n-1)(n-2)^2\lambda^2}\int_M |\Delta_E^{\bar{g}} \mathring{h}|^2 dv_{\bar{g}} + \frac{\alpha}{4(n-1)\lambda}\int_M \mathring{h} \cdot \Delta_E^{\bar{g}} \mathring{h} dv_{\bar{g}} = 0,$$

$$\int_M \left[|\nabla_{\bar{g}} tr_{\bar{g}} h|^2 - n\lambda (tr_{\bar{g}} h - \overline{tr_{\bar{g}} h})^2 \right] dv_{\bar{g}} = 0$$

and

$$\int_M \left[(\Delta_{\bar{g}} tr_{\bar{g}} h)^2 - n\lambda \left|\nabla_{\bar{g}} tr_{\bar{g}} h\right|^2\right] dv_{\bar{g}} = 0.$$

°第一个方程表明 $h = 0$，因为爱因斯坦度量 $\bar{g}$ 是严格稳定的。对于第二和第三个方程，由引理 4.2，我们有

- 若（$M^n, \bar{g}$）与标准球面不等距，则 $tr_{\bar{g}} h = tr_{\bar{g}} h$，因此 $tr_{\bar{g}} h$ 为常数，且 $h = \frac{tr_{\bar{g}} h}{n} \bar{g} \in \mathbb{R} \cdot \bar{g}$。
- 若（$M^n, \bar{g}$）与标准球面等距，则 $tr_{\bar{g}} h \in E_{n\lambda}$，故 $h = \frac{tr_{\bar{g}} h}{n} \bar{g} \in E_{n\lambda} \cdot \bar{g}$。——

□

为了研究爱因斯坦度量的局部结构，我们引入以下切片定理 [8, 24]:

定理4.4（Ebin-Palais 切片定理）。设（M^n，$\bar{g}$）是一个闭的 n 维爱因斯坦流形，且 $Ric_{\bar{g}} = (n-1)\lambda\bar{g}$，$\lambda > 0$。令 $\mathcal{M}$ 为 M上所有黎曼度量构成的空间。存在一个经过 $\bar{g}$ 且包含于 $\mathcal{M}$中的切片 $\mathcal{S}_{\bar{g}}$。也就是说，对于固定的实数 $p > n$，可以找到一个常数 $\epsilon > 0$，使得对于满足$||g - \bar{g}||_{W^{2,p}(M,\bar{g})} < \epsilon$的任意度量 $g \in \mathcal{M}$，都存在一个微分同胚 φ，使得 $\varphi^* g \in \mathcal{S}_{\bar{g}}$。此外，对于光滑的局部切片 $\mathcal{S}_{\bar{g}}$，我们有

- $T_{\bar{g}}\mathcal{S}_{\bar{g}} = S^{TT}_{2,\bar{g}}(M) \oplus (C^\infty(M) \cdot \bar{g})$ *when* $(M^n, \bar{g})$ *is not isometric to the round sphere;*
- $T_{\bar{g}}\mathcal{S}_{\bar{g}} = S^{TT}_{2,\bar{g}}(M) \oplus (E^\perp_{n\lambda} \cdot \bar{g})$ *when* $(M^n, \bar{g})$ *is isometric to* $\mathbb{S}^n(1/\sqrt{\lambda})$, *where* $E^\perp_{n\lambda} = \left\{ u \in C^\infty\left(\mathbb{S}^n\left(1/\sqrt{\lambda}\right)\right) \,\middle|\, \int_{\mathbb{S}^n(1/\sqrt{\lambda})} uv dv_{\bar{g}} = 0,\ \forall v \in E_{n\lambda} \right\}$

and

$$S_2(M) = \{\mathcal{L}_{\bar{g}}(X) | X \in \mathfrak{X}(M)\} \oplus T_{\bar{g}}\mathcal{S}_{\bar{g}},$$

其中 $\mathfrak{X}(M)$ 是流形 M 上的光滑向量场空间，而 $\mathcal{L}_{\bar{g}}(X)$ 是度量 $\bar{g}$ 关于向量场 X的李导数。

应用切片定理，我们可以将 $\mathcal{H}_{\bar{g}}$ 限制在局部切片 $\mathcal{S}_{\bar{g}}$上，并将其记为 $\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_{\bar{g}}$。为研究 $\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_{\bar{g}}$的行为，我们需要以下莫尔斯引理 [9]:

引理 4.5（莫尔斯引理）。设 $\mathcal{P}$ 是一个巴拿赫流形，且 $F : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ 是一个 C^2-函数。假设 $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ 是一个满足以下条件的子流形

$$F = 0 \quad and \quad dF = 0 \quad on \quad \mathcal{Q}$$

并且存在 $\mathcal{Q}$ 的一个光滑法丛邻域，使得若 $\mathcal{E}_x$ 是 $T_x\mathcal{P}$中 $T_x\mathcal{Q}$ 的法补空间，则 d^2F（x）在 $\mathcal{E}_x$上弱负定，即

$$d^2F(x)(v, v) \leq 0$$

且仅当 $v = 0$时取等号。设 $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ 是具有光滑联络的弱黎曼结构，并假设 F具有光滑的 $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$-梯度 Y（x）。假设

$$DY(x) : \mathcal{E}_x \to \mathcal{E}_x$$

是 $x \in \mathcal{Q}$ 的同构。因此，存在 $\mathcal{Q}$ 的一个邻域 $\mathcal{U}$，使得 $y \in \mathcal{U}$ 和$F(y) \geq 0$ 意味着 $y \in \mathcal{Q}$。

结合定理 3.4 和定理4.4，我们可以找到一个经过 $\bar{g}$ 的局部切片 $\mathcal{S}_{\bar{g}}$，并且我们将 $\mathcal{Q}_{\bar{g}}$ 视为 $\mathcal{S}_{\bar{g}}$的子流形，其中

$$\mathcal{Q}_{\bar{g}} := \{c^2\bar{g} \in \mathcal{S}_{\bar{g}} | c \neq 0\}.$$

于是我们得到以下刚性结果:

命题 4.6. 假设 $(M^n, \bar{g})$ 是一个里奇曲率为

$$\mathrm{Ric}_{\bar{g}} = (n-1)\lambda\bar{g}$$

其中 $\lambda > 0$ 是一个常数。给定指标 $1 \leq q \leq p \leq n$ 满足 $2(p-q) \leq n$ 或 $2(p-q) \geq n+2(k-l)$, 则存在 $\bar{g}$ 的一个邻域，它位于局部切片 $\mathcal{S}_{\bar{g}}$中，记为 $\mathcal{U}_{\bar{g}}$，使得对于任意满足以下条件的度量 $g \in \mathcal{U}_{\bar{g}}$

$$\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_{\bar{g}}(g) \geq \mathcal{H}^{\mathcal{S}}_{\bar{g}}(\bar{g})$$

可知，对于某个正数常量 c，有 $g = c^2\bar{g}$。

证明。为使 用巴拿赫空间情形下的引理 4.5，我们令 $\mathcal{P} = \mathcal{S}_g$ 并定义 e

$$F = \mathcal{H}^{\mathcal{S}}_{\bar{g}}(g) - \mathcal{H}^{\mathcal{S}}_{\bar{g}}(\bar{g}). \tag{4.2}$$

由于 $\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_{\bar{g}}(g)$ 是尺度不变的，我们有

$$F = 0 \ \text{ and } \ dF = 0 \ \text{ on } \ \mathcal{Q}_{\bar{g}} := \{c^2\bar{g} \in \mathcal{P} | c \neq 0\}.$$

$\mathcal{Q}_{\bar{g}}$ 的切空间为

$$T_{\bar{g}}\mathcal{Q}_{\bar{g}} = \mathbb{R} \cdot \bar{g}$$

其在 $T_{\bar{g}}\mathcal{P}$ 中的 L^2 补空间如下所示:

- 若 $\bar{g}$ 不是球面的，则

$$\mathcal{E}_{\bar{g}} = S^{TT}_{2,\bar{g}}(M) \oplus \left\{ u \cdot \bar{g} \middle| u \in C^\infty(M), \int_M tr_{\bar{g}} u dv_{\bar{g}} = 0 \right\},$$

- 若 $\bar{g}$ 是球面的，则

$$\mathcal{E}_{\bar{g}} = S^{TT}_{2,\bar{g}}(M) \oplus \left\{ u \cdot \bar{g} \middle| u \in E^{\perp}_{n\lambda}, \int_M tr_{\bar{g}} u dv_{\bar{g}} = 0 \right\}.$$

在 $\mathcal{P}$ 上定义一个弱黎曼结构:

$$\langle\langle h, k \rangle\rangle_g := \int_M \left(\langle \nabla_g h, \nabla_g k \rangle_g + \langle h, k \rangle_g \right) dv_g = \int_M \langle (-\Delta_g + 1)h, k \rangle_g \, dv_g$$

对于任意 $g \in \mathcal{P}$和 $h, k \in T_g\mathcal{P}$。我们还定义 $\Gamma^*_{k,\ l,\ g}$为 $D\begin{pmatrix} \sigma_k \\ \sigma_l \end{pmatrix}_{(g)\ g}$的 L^2伴随，并通过关系式 $dv_{\bar{g}} = f_g \, dv_g$定义函数 f。利用这些表达式，回顾公式（3.5）中的一阶变分公式, 我们得到:

$$\begin{aligned} D\mathcal{H}_{\bar{g}}(g)(h) = \mathcal{H}_{\bar{g}}(g) \Bigg\{ & 2(k-l) \left(\int_M \frac{\sigma_p(g)}{\sigma_q(g)} dv_g \right)^{-1} D\left(\int_M \frac{\sigma_p(g)}{\sigma_q(g)} dv_g \right)(h) \\ & + [n - 2(p-q)] \left(\int_M \frac{\sigma_k(g)}{\sigma_l(g)} dv_{\bar{g}} \right)^{-1} D\left(\int_M \frac{\sigma_k(g)}{\sigma_l(g)} dv_{\bar{g}} \right)(h) \Bigg\} \end{aligned}$$

Acc根据 [8], , 它具有光滑联络以及 F 的 $\langle\langle\cdot,\ \cdot\rangle\rangle_g$-梯度 s

$$Y(g)=P_g\left(-\Delta_g+1\right)^{-1}\left\{2(k-l)\mathcal{H}_{\bar{g}}(g)\left(\int_M\frac{\sigma_p(g)}{\sigma_q(g)}dv_g\right)^{-1}\left(\Gamma_{p,q,g}(1)+\frac{1}{2}\frac{\sigma_p(g)}{\sigma_q(g)}g\right)\right.$$
$$\left.+[n-2(p-q)]\mathcal{H}_{\bar{g}}(g)\left(\int_M\frac{\sigma_k(g)}{\sigma_l(g)}dv_{\bar{g}}\right)^{-1}\Gamma_{k,l,g}(f_g)\right\}$$

其中， P_g 是到 $T_g\mathcal{P}$的正交投影。容易看出， $Y(g)$是光滑的，且其在 $\bar{g}$ 处的线性化为

$$DY(\bar{g})\cdot h=P_{\bar{g}}\left(-\Delta_{\bar{g}}+1\right)^{-1}\left(D^2\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})(h,h)\right)$$

对任意 $h\in\mathcal{E}_{\bar{g}}$。给定的指标 $0\leq q\leq p\leq n$ 满足以下条件之一： $2(p-q)\ \leq n$ ，或$2(p-q)\ \geq n+2(k-l)$，则二阶变分在 $\mathcal{E}_{\bar{g}}$上严格为负。因此，由引理 4.5， $DY(\bar{g})$是 $\mathcal{E}_{\bar{g}}$ 上的同构，并且存在 $\mathcal{Q}$ 的一个邻域 $\mathcal{U}$ ，使得对任意$g\in\mathcal{U}$、 $g\in\mathcal{Q}$，有

$$g=c^2\bar{g}$$

其中 c 为常数，且 $\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_{\bar{g}}(g)\ \geq\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_{\bar{g}}(\bar{g})$。 □

现在我们可以证明主定理 A。

主定理 *A* 的证明。设 $\lambda>0$ 和 g 是 M 上的任意黎曼度量，满足$\|g-\bar{g}\|_{C^2(M,\ \bar{g})}\ <\varepsilon_0$。由命题 4.6，存在一个微分同胚 φ ，使得 $\varphi^*g\in\mathcal{U}_{\bar{g}}\subset\mathcal{S}_{\bar{g}}$。为简单起见，这里将 g 与其拉回 φ^*g 等同，并假设 $g\in\mathcal{U}_{\bar{g}}$。

我们用反证法。假设条件 (1) 或 (2) 中有一个成立，但结论不成立。那么，反向的总曲率比较成立

$$\int_M\frac{\sigma_p(g)}{\sigma_q(g)}\,dv_g\geq\int_M\frac{\sigma_p(\bar{g})}{\sigma_q(\bar{g})}\,dv_{\bar{g}}. \tag{4.3}$$

注意到

$$\mathcal{H}_{\bar{g}}(g)=\left[\int_M\frac{\sigma_p(g)}{\sigma_q(g)}\,dv_g\right]^{\alpha}\left[\int_M\frac{\sigma_k(g)}{\sigma_l(g)}\,dv_{\bar{g}}\right]^{\beta}.$$

且 $\beta=n-2(p\ -q)$、 $\alpha=k-l>0$，那么根据条件 (1) 或 (2)，由 (4.3) 可得 t

$$\mathcal{H}_{\bar{g}}(g)\geq\left[\int_M\frac{\sigma_p(\bar{g})}{\sigma_q(\bar{g})}\,dv_{\bar{g}}\right]^{\alpha}\left[\int_M\frac{\sigma_k(\bar{g})}{\sigma_l(\bar{g})}\,dv_{\bar{g}}\right]^{\beta}=\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g}).$$

这与命题 4.3 矛盾，因此我们有

$$\int_M\frac{\sigma_p(g)}{\sigma_q(g)}\,dv_g\leq\int_M\frac{\sigma_p(\bar{g})}{\sigma_q(\bar{g})}\,dv_{\bar{g}}.$$

此外，若等号成立，根据命题 4.6 中的刚性结果，这意味着 g 必须与 $\bar{g}$ 共形。因此，对于某个正常数 c，有 $g=c^2\bar{g}$ 。

我们断言 $c=1$。在缩放 $g=c^2\bar{g}$ 下，(4.3) 可改写为

$$\int_M\frac{\sigma_p(g)}{\sigma_q(g)}\,dv_g=c^{n-2(p-q)}\int_M\frac{\sigma_p(\bar{g})}{\sigma_q(\bar{g})}\,dv_{\bar{g}}\geq\int_M\frac{\sigma_p(\bar{g})}{\sigma_q(\bar{g})}\,dv_{\bar{g}}>0,$$

这意味着 $c^{n-2(p-q)}\geq1$。因此，

$$c\geq1\ \text{ if }\ 2(p-q)<n;\quad\text{and } c\leq1\ \text{ if }\ 2(p-q)\geq n+2(k-l). \tag{4.4}$$

另一方面，它成立。

$$\frac{\sigma_k(g)}{\sigma_l(g)} = c^{-2(k-l)}\frac{\sigma_k(\bar{g})}{\sigma_l(\bar{g})} > 0.$$

根据假设（1）或（2），我们有

$$c^{-2(k-l)} \geq 1 \ \text{ if } \ 2(p-q) < n; \quad \text{and} \quad c^{-2(k-l)} \leq 1 \ \text{ if } \ 2(p-q) \geq n + 2(k-l).$$

由于 $k > l$，因此可得

$$c \leq 1 \ \text{ if } \ 2(p-q) < n; \quad \text{and} \quad c \geq 1 \ \text{ if } \ 2(p-q) \geq n + 2(k-l). \tag{4.5}$$

因此， $c = 1$ 和 $\varphi^* g = g = \bar{g}$，证明完毕。 □

注 4.7。当 $\lambda < 0$ 时，二阶变分 $D^2\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})(h, h)$ 的定号会变得复杂。在这种情况下，如果 $k - l$ 为偶数， $D^2\mathcal{H}_{\bar{g}}(\bar{g})(h, h)$ 表达式中的首项和末项仍为负，但第二项可能占主导地位，从而破坏整体的负性。相反，如果 $k - l$ 为奇数，第二项为负，但首项和末项可能变为正，从而削弱泛函的负定性。因此，预计在这一范围内不会成立本文所考虑类型的体积比较定理。

参考文献

[1] Maria Andrade、Tiarlos Cruz 和 Almir Silva Santos。紧流形的 σ_2-曲率与体积。*Ann. Mat. Pura Appl.*，202(1):367–395，2023。[2] Gérard Besson、Gilles Courtois 和 Sylvestre Gallot。局部对称空间的体积与最小熵。*Invent. Math.*，103(2):417–445，1991。[3] Gérard Besson、Gilles Courtois 和 Sylvestre Gallot。严格负曲率局部对称空间的熵与刚性。*Geom. Funct. Anal.*，5(5):731–799，1995。[4] Luis A. Caffarelli、Louis. Nirenberg 和 Joel Spruck。非线性二阶椭圆方程的狄利克雷问题。III. 海森矩阵特征值的函数。*Acta Math.*，155(3-4):261–301，1985。[5] Sun-Yung A. Chang、Matthew J. Gursky 和 Paul Yang。四维流形上一个全非线性方程的先验估计。*J. Anal. Math.*，87:151–186，2002。谨以此文纪念 Thomas H. Wolff。[6] Jiaqi Chen、Yi Fang、Yan He 和 Jingyang Zhong。关于 sigma-k 曲率的体积比较定理。*Calc. Var. Partial Differential Equations*，64(3):文章编号 95，20，2025。[7]Jia qi Chen、Yufei Shan 和 Yinghui Ye。总σ_k-曲率的比较。预印本，*arXiv:math.DG/2505.23440v2*，2025。[8] David G. Ebin。黎曼度量流形。载于*Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math.,Vols. XIV, XV, XVI, Berkeley, Calif., 1968)*，第 XIV-XVI 卷*Proc. Sympos. Pure Math.*，第 11–40 页。Amer. Math. Soc.，普罗维登斯，罗得岛，1970。[9]Arthur E. Fischer 和 Jerrold E. Marsden。标量曲率的变形。*Duke Math. J.*，42(3):519–547，1975。[10] Pengfei Guan 和 Junfang Li。 k-凸星形区域的拟曲率积分不等式。*Adv.Math.*，221(5):1725–1732，2009。[11] Pengfei Guan、Jeff A. Viaclovsky 和 Guofang Wang。舒滕张量的若干性质及其在共形几何中的应用。*Trans. Amer. Math. Soc.*，355(3):925–933，2003。[12] Matthew J. Gursky 和 Jeff A. Viaclovsky。体积比较与 σ_k-Yamabe 问题。*Adv.Math.*，187(2):447–487，2004。[13] Richard S. Hamilton。三维流形上里奇流的非奇异解。*Comm. Anal. Geom.*，7(4):695–729，1999。[14] André Lichnerowicz。变换群几何，第 III 卷*Travaux et RecherchesMathématiques*。Dunod，巴黎，1958。

[15] Mi Lin 和 Neil S. Trudinger。指定曲率商方程的狄利克雷问题。*Topol. Methods Nonlinear Anal.*，3(2):307–323，1994。[16] Yueh-Ju Lin 和 Wei Yuan。Q-曲率的变形 I。*Calc. Var. Partial Differential Equations*，55(4):文章编号 101，29，2016。[17] Yueh-Ju Lin 和 Wei Yuan。 *Q*-曲率的变形 II。*Calc. Var. Partial Differential Equations*，61(2):文章编号 74，28，2022。[18] Morio Obata。黎曼流形与球面等距的若干条件。*J. Math.Soc. Japan*，14:333–340，1962。[19]Grisha Perelman。里奇流的熵公式及其几何应用。预印本，*arXiv:math.DG/0211159*，2002。[20] Grisha Perelman。三维流形上的带手术的里奇流。预印本，*arXiv:math.DG/0303109*，2003。[21] Robert C. Reilly。函数的海森矩阵及其图形的曲率。*Michigan Math. J.*，20:373–383，1973。[22] Robert C. Reilly。海森算子在黎曼流形中的应用。*Indiana Univ. Math.J.*，26(3):459–472，1977。[23] Richard M. Schoen。黎曼度量的总标量曲率泛函变分理论及相关课题。载于变分法专题（*Montecatini Terme，1987*），第 1365 卷*LectureNotes in Math.*，第 120–154 页。Springer，柏林，1989。[24] Jeff A. Viaclovsky。黎曼曲率泛函的临界度量。载于几何分析，第 22 卷*IAS/Park City Math. Ser.*，第 197–274 页。Amer. Math. Soc.，普罗维登斯，罗得岛，2016。[25] Wei Yuan。关于标量曲率的体积比较。*Anal. PDE*，16(1):1–34，2023。厦门理工学院电气工程与自动化学院，中华人民共和国福建省厦门市 361024电子邮箱：chenjiaqi@xmut.edu.cn 安徽工业大学数学系，中华人民共和国安徽省马鞍山市 243002电子邮箱：flxy85@163.com 福州大学数学与统计学院，中华人民共和国福建省福州市 350108电子邮箱：jyzhong@fzu.edu.cn