arXiv:2602.07587v1 [math.CO] 7 Feb 2026

有限循环群的 SGB图的某些拓扑指数及谱性质

SHRABANI D AS、AHMAD ERFANIAN 和 RAJAT KANTI N ATH*

Abstract. 设 $L(G)$为群 G的所有子群构成的集合。定义在 G 上的子群生成二分图 $\mathcal{B}(G)$是一个二部图，其顶点集为两个集合 $G\times G$和 $L(G)$的并；若顶点$(a,b)\in G\times G$与 $H\in L(G)$满足 H由 a和 b生成，则它们相邻。本文给出了阶为 pq、p^2q 和 p^2q^2的循环群的 $\mathcal{B}(G)$的结构，其中 p 和 q 为素数，且 $p\neq q$。我们还推导了这些图的第一和第二 Zagreb 指数的表达式，并验证 Hansen-Vukičević 猜想 [Hansen, P. 和 Vukičević, D. Comparing the Zagreb indices,*Croatica Chemica Acta*, 80(2), 165-168, 2007]的有效性。我们还计算了这些图的其他一些基于度的拓扑指标的表达式。此外，当 G 是阶为 p^n、pq、p^2q 和 p^2q^2的任意循环群时，我们计算了 $\mathcal{B}(G)$的各种谱及其对应的能量，其中 p 和 q 是两个不同素数，且 $n\geq 1$。最后，我们证明对于这些群， $\mathcal{B}(G)$满足 E-LE 猜想 [Gutman, I., Abreu, N. M. M., Vinagre, C. T. M., Bonifacioa, A. S. 和 Radenkovic, S. Relation between energy and Laplacian energy, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 59, 343–354, 2008]。

1. Introduction

近年来，定义有限群上的图并研究其性质，以刻画有限群或图，一直是一个活跃的研究领域。Cayley图、生成图、幂图、交换图、B superA图等（见 [5, 4]）都是这类图的例子，其顶点集由群的元素构成。人们还研究了其他定义在群上的图类，其顶点是元素的阶或共轭类的阶（见 [30, 26]）。此外，还有一些图是通过将群的子群集合作为顶点集而定义在群上的。交图 [6], 、包含图 [15] 和可置换图 [35] 就是这类图的例子。最近，有人利用群的自同构群在群上定义了一种二部图[31]。设 G 是一个有限群，且 $L(G):=\{H:H$ 是 $G\}$的一个子群。在 [7], 中，我们引入了子群生成二分图（简称SGB图，记作 $\mathcal{B}(G)$），其顶点集$V(\mathcal{B}(G))$是两个集合 $G\times G$和 $L(G)$的并；若a、 b满足 $\in G\times G$且 $H\in L(G)$，则这两个顶点相邻，其中 $H=\langle a$、 $b\rangle$是由 a 和 b生成的子群。研究SGB图的目标之一，是探讨它与有限群相关的各种概率之间的联系，例如生成给定子群的概率 [16], 、交换概率 [10], 、循环度 [34], 、幂零度 [17], 和可解度 [18] 。在 [7], 中，我们还建立了 $\mathcal{B}(G)$与 G 的生成图之间的联系，并讨论了 $\mathcal{B}(G)$的各种图参数，如独立数、支配数、围长、直径等。随后，我们分别在 [8] 和 [9] 中求得了某些二面体群和二循环群的SGB图的Zagreb指数及各种能量。

在第 2 节中，当 G 是阶为 pq 的循环群、p^2q 且 p^2q^2 为任意两个不同素数 p 和 q 时，我们刻画了 $\mathcal{B}(G)$ 的结构。在第 3 节中，我们求出了这些图的 $\mathcal{B}(G)$ 的第一 Zagreb 指数和第二 Zagreb 指数，并检验了 Hansen-Vukičević 猜想 [25] 的有效性。在计算 $\mathcal{B}(G)$ 的 Zagreb 指数时，我们求出了上述群对应的所有 $H\in L(G)$ 的 $\deg^{\mathcal{B}(G)}(H)$。利用这些信息，在第 4 节中，我们还计算了 $\mathcal{B}(G)$ 的 Randić连通性指数、原子-键连通指数、几何-算术指数、调和指数和和连通性指数。在第 5 节中，对于第 2 节中所考虑的群以及阶为 p^n 的循环群（其中 p 为任意素数，且 $n\geq 1$），我们求出了 $\mathcal{B}(G)$ 的谱、拉普拉斯谱、无符号拉普拉斯谱、公共邻域谱及其对应的能量。我们还证明了 $\mathcal{B}(G)$ 是次能量的，但

2020 *Mathematics Subject Classification.* 20D60, 05C25, 05C09.*Key words and phrases.* 二部图，拓扑指数，Zagreb指数，图能量。

*通讯作者。

若 G 是这些群之一，则它既不是超能量、L-超能量、Q-超能量，也不是 CN-超能量。最后，我们证明对于这些群， $\mathcal{B}(G)$ 满足 E-LE 猜想 [21]。

2. Structures of $\mathcal{B}(G)$

在 [7, 8], Das 等人获得了 $\mathcal{B}(G)$ 的结构，其中 G 是阶为 $2p$、$2p^2$、$4p$ 和 $4p^2$ 的循环群， p 是奇素数。他们还获得了 $\mathcal{B}(G)$ 的结构，其中 G 是阶为 p^n 的循环群， p 是任意素数且 $n \geq 1$。在本节中，我们获得 $\mathcal{B}(G)$ 的结构，其中 G 是阶为 pq、p^2q 和 p^2q^2 的循环群， p 和 q 是满足 $p \neq q$ 的两个素数。我们用 $\sqcup$ 表示集合或图的不交并，并用 mK_1、$_r$ 表示星图 m 的 K_1 个副本，$_r$。此外，我们用 $\mathrm{Nbd}_G(x)$ 表示 $x \in V(G)$ 的邻域，即所有满足 y 与 x 相邻的 $y \in V(G)$ 所组成的集合。同时， $G[S]$ 表示由 $V(G)$ 的子集 S 诱导的 G 的子图。我们首先回顾以下结果。

定理 2.1。 [8] 若 G 是一个阶为 p^n的循环群，其中 p 是素数且 $n \geq 1$，则 $\mathcal{B}(G) = K_2 \sqcup K_{1,\ p^2-1} \sqcup K_{1,\ p^2(p^2-1)} \sqcup \cdots \sqcup K_{1,\ p^{2n-2}(p^2-1)}$。

我们注意到，在研究阶为 pq 和 p^2q^2的循环群时，可以适当地选择素数 p 和 q，使得 $p < q$，不失一般性。

定理 2.2。 若 G 是一个阶为 pq的循环群，其中 p、 q 是满足 $p < q$的两个素数，则$\mathcal{B}(G) = K_2 \sqcup K_{1,\ p^2-1} \sqcup K_{1,\ q^2-1} \sqcup K_{1,\ p^2q^2-p^2-q^2+1}$。

证明。 设 $G = \langle a \rangle$。由于 G 恰好有四个子群且它们都是循环的，因此 $V(\mathcal{B}(G)) = G \times G \sqcup \{\{1\}, \langle a^q \rangle, \langle a^p \rangle, \langle a \rangle\}$。这里 $|\langle a^q \rangle| = p$， $|\langle a^p \rangle| = q$ 和$|\langle a \rangle| = pq$。因此， $\mathcal{B}(G)[\{\langle a^q \rangle\} \sqcup \mathrm{Nbd}_{\mathcal{B}(G)}(\langle a^q \rangle)] = K_{1,\ p^2-1}$以及 $\mathcal{B}(G)[\{\langle a^p \rangle\} \sqcup \mathrm{Nbd}_{\mathcal{B}(G)}(\langle a^p \rangle)] = K_{1,\ q^2-1}$。于是， $|\mathrm{Nbd}_{\mathcal{B}(G)}(\langle a \rangle)| = p^2q^2 - (p^2 + q^2 - 2 + 1)$ 且 $\mathcal{B}(G)[\{\langle a \rangle\} \sqcup \mathrm{Nbd}_{\mathcal{B}(G)}(\langle a \rangle)] = K_{1,\ p^2q^2-p^2-q^2+1}$。因此，

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(G) &= \bigsqcup_{H \in L(G)} \mathcal{B}(G)[H \sqcup \mathrm{Nbd}_{\mathcal{B}(G)}(H)] \\ &= K_2 \sqcup K_{1,p^2-1} \sqcup K_{1,q^2-1} \sqcup K_{1,p^2q^2-p^2-q^2+1}.\end{aligned}$$

证明完成。 ■

定理 2.3。 如果 G 是一个阶为 p^2q 的循环群，其中 p、 q 是两个不同素数，则 $\mathcal{B}(G) = K_2 \sqcup K_{1,\ p^2-1} \sqcup K_{1,\ p^4-p^2} \sqcup K_{1,\ q^2-1} \sqcup K_{1,\ p^2q^2-p^2-q^2+1} \sqcup K_{1,\ p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2}$。

证明。设 $G = \langle a \rangle$。由于 G恰好有六个子群且它们都是循环的，因此 $V(\mathcal{B}(G)) = G \times G \sqcup \{\{1\}, \langle a^{pq} \rangle, \langle a^q \rangle, \langle a^{p^2} \rangle, \langle a^p \rangle, \langle a \rangle\}$。这里有 $|\langle a^{pq} \rangle| = p$、 $|\langle a^q \rangle| = p^2$、 $|\langle a^{p^2} \rangle| = q$、 $|\langle a^p \rangle| = pq$和 $|\langle a \rangle| = p^2q$。因此， $\mathcal{B}(G)[\{\langle a^{pq} \rangle\} \sqcup \mathrm{Nbd}_{\mathcal{B}(G)}(\langle a^{pq} \rangle)] = K_{1,\ p^2-1}$、 $\mathcal{B}(G)[\{\langle a^q \rangle\} \sqcup \mathrm{Nbd}_{\mathcal{B}(G)}(\langle a^q \rangle)] = K_{1,\ p^4-p^2}$、 $\mathcal{B}(G)[\{\langle a^{p^2} \rangle\} \sqcup \mathrm{Nbd}_{\mathcal{B}(G)}(\langle a^{p^2} \rangle)] = K_{1,\ q^2-1}$ 以及 $\mathcal{B}(G)[\{\langle a^p \rangle\} \sqcup \mathrm{Nbd}_{\mathcal{B}(G)}(\langle a^p \rangle)] = K_{1,\ p^2q^2-p^2-q^2+1}$。因此， $|\mathrm{Nbd}_{\mathcal{B}(G)}(\langle a \rangle)| = p^4q^2 - (p^2 + p^4 - p^2 + q^2 + p^2q^2 - p^2 - q^2 - 2 + 2)$ 且 $\mathcal{B}(G)[\{\langle a \rangle\} \sqcup \mathrm{Nbd}_{\mathcal{B}(G)}(\langle a \rangle)] = K_{1,\ p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2}$。所以，

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(G) &= \bigsqcup_{H \in L(G)} \mathcal{B}(G)[H \sqcup \mathrm{Nbd}_{\mathcal{B}(G)}(H)] \\ &= K_2 \sqcup K_{1,p^2-1} \sqcup K_{1,p^4-p^2} \sqcup K_{1,q^2-1} \sqcup K_{1,p^2q^2-p^2-q^2+1} \sqcup K_{1,p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2}.\end{aligned}$$

证明至此完成。 ■

定理 2.4. 若 G 是一个阶为 p^2q^2 的循环群，其中 p、 q 是两个素数，且 $p < q$，则 $\mathcal{B}(G) = K_2 \sqcup K_{1,\ p^2-1} \sqcup K_{1,\ p^4-p^2} \sqcup K_{1,\ q^2-1} \sqcup K_{1,\ q^4-q^2} \sqcup K_{1,\ p^2q^2-p^2-q^2+1} \sqcup K_{1,\ p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2} \sqcup K_{1,\ p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2} \sqcup K_{1,\ p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2}$。

证明。 令 $G = \langle a \rangle$。则 $V(\mathcal{B}(G)) = G \times G \sqcup \{\{1\}, \langle a^{pq^2} \rangle, \langle a^{q^2} \rangle, \langle a^{p^2q} \rangle, \langle a^{p^2} \rangle, \langle a^{pq} \rangle, \langle a^p \rangle, \langle a^q \rangle, \langle a \rangle\}$，因为 G 恰有九个子群，且它们都是循环的。这里 $|\langle a^{pq^2} \rangle| = p$、 $|\langle a^{q^2} \rangle| = p^2$、 $|\langle a^{p^2q} \rangle| = q$、$|\langle a^{p^2} \rangle| = q^2$、 $|\langle a^{pq} \rangle| = pq$、 $|\langle a^p \rangle| = pq^2$、 $|\langle a^q \rangle| = p^2q$ 和 $|\langle a \rangle| = p^2q^2$。因此，

$\mathcal{B}(G)[\{\langle a^{pq^2} \rangle\} \sqcup \text{邻域}_{\mathcal{B}(G)}(\langle a^{pq^2} \rangle)] = K_{1,p^2-1}$， $\mathcal{B}(G)[\{\langle a^{q^2} \rangle\} \sqcup \text{邻域}_{\mathcal{B}(G)}(\langle a^{q^2} \rangle)] = K_{1,p^4-p^2}$，

$\mathcal{B}(G)[\{\langle a^{p^2q} \rangle\} \sqcup \mathrm{Nbd}_{\mathcal{B}(G)}(\langle a^{p^2q} \rangle)] = K_{1,q^2-1}$， $\mathcal{B}(G)[\{\langle a^{p^2} \rangle\} \sqcup \mathrm{Nbd}_{\mathcal{B}(G)}(\langle a^{p^2} \rangle)] = K_{1,q^4-q^2}$，$\mathcal{B}(G)[\{\langle a^{pq} \rangle\} \sqcup \mathrm{Nbd}_{\mathcal{B}(G)}(\langle a^{pq} \rangle)] = K_{1,p^2q^2-p^2-q^2+1}$， $\mathcal{B}(G)[\{\langle a^p \rangle\} \sqcup \mathrm{Nbd}_{\mathcal{B}(G)}(\langle a^p \rangle)] = K_{1,p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2}$和 $\mathcal{B}(G)[\{\langle a^q \rangle\} \sqcup \mathrm{Nbd}_{\mathcal{B}(G)}(\langle a^q \rangle)] = K_{1,p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2}$。

因此， $|\mathrm{Nbd}_{\mathcal{B}(G)}(\langle a\rangle)| = p^4q^4-(p^2+p^4-p^2+q^2+q^4-q^2+p^2q^2-p^2-q^2+p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2+p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2-2+2)$与 $\mathcal{B}(G)[\{\langle a\rangle\}\sqcup \mathrm{Nbd}_{\mathcal{B}(G)}(\langle a\rangle)] = K_{1,p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2}$。所以，

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(G) &= \bigsqcup_{H\in L(G)} \mathcal{B}(G)[H\sqcup \mathrm{Nbd}_{\mathcal{B}(G)}(H)]\\ &= K_2\sqcup K_{1,p^2-1}\sqcup K_{1,p^4-p^2}\sqcup K_{1,q^2-1}\sqcup K_{1,q^4-q^2}\sqcup K_{1,p^2q^2-p^2-q^2+1}\\ &\quad \sqcup K_{1,p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2}\sqcup K_{1,p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2}\sqcup K_{1,p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2}.\end{aligned}$$

证明至此完成。 ■

3. Topological indices of $\mathcal{B}(G)$

设 Γ 为所有图的集合。拓扑指数是一个函数 $T:\Gamma\to\mathbb{R}$，满足：当图 $\mathcal{G}_1$ 和 $\mathcal{G}_2$ 同构时， $T(\mathcal{G}_1)=T(\mathcal{G}_2)$。这些数值不变量用于获取某些分子的物理和化学性质信息。自 1947 年以来，人们利用图的不同参数定义了各种拓扑指数。其中一些指数已被证明在其他连通模式发挥重要作用的领域也很有用，例如处理器间连接和复杂网络。Zagreb指数是这类广受欢迎的基于度的拓扑指标中的一类。Gutman和Trinajstić [23] 于1972年提出了这些指数，并将其用于考察总 π电子能量对分子结构的依赖关系。Zagreb指数也用于研究分子复杂性、手性、ZE-异构现象和杂原子体系等 [33]。关于Zagreb指数数学性质的综述见 [22]。有限非阿贝尔群的交换图和非交换图的Zagreb指数已在 [13, 32]中研究。有限群的超交换图和SGB图的Zagreb指数分别已在 [11] 和 [8] 中计算。

设 $\mathcal{G}$ 是一个简单无向图，其顶点集为 $V(\mathcal{G})$，边集为 $e(\mathcal{G})$。$\mathcal{G}$ 的第一和第二 Zagreb 指数分别记为 $M_1(\mathcal{G})$ 和 $M_2(\mathcal{G})$，定义如下：

$$M_1(\mathcal{G}) = \sum_{v\in V(\mathcal{G})} \deg(v)^2 \text{ and } M_2(\mathcal{G}) = \sum_{uv\in e(\mathcal{G})} \deg(u)\deg(v).$$

2007 年，Hansen 和 Vukičević 提出了以下猜想，以比较第一和第二 Zagreb 指数 [25]。

猜想 3.1。（*Hansen-Vukičević* 猜想）对于任意简单有限图 $\mathcal{G}$,

$$\frac{M_2(\mathcal{G})}{|e(\mathcal{G})|} \geq \frac{M_1(\mathcal{G})}{|V(\mathcal{G})|}. \tag{1}$$

在同一篇论文中，他们通过证明当 $\Gamma = K_{1,5}\sqcup K_3$ [25] 时该猜想不成立，推翻了这一猜想。然而，Hansen 和 Vukičević [25] 证明了猜想 3.1 对化学图成立。进一步研究表明，该猜想对树成立，且当 Γ 为星图[41]时，式 (1) 取等号。此后，研究者证明该猜想对连通单圈图成立，且当图为圈时取等号（见 [27]）。式 (1) 取等号的情形在 [42]中得到了广泛研究。Das 等人 [13] 找到了若干有限非阿贝尔群，使其交换图/非交换图满足 Hansen-Vukičević 猜想。最近，Das和Nath [11] 也找到了若干有限群，使其超交换图满足 Hansen-Vukičević 猜想。文献 [36, 37, 38]针对所考虑的有限群类计算了交换共轭类图的 Zagreb 指数，并验证了猜想 3.1。关于 Zagreb 指数比较的综述见 [29]。

本节中，我们求出 $\mathcal{B}(G)$的第一和第二 Zagreb指数的表达式，最终证明对于第 2 节中所考虑的群，$\mathcal{B}(G)$满足 Hansen-Vukičević 猜想。以下引理对我们的计算很有用。

引理 3.1. 设 G 是一个有限群。那么， $\mathcal{B}(G)$ 的 *Zagreb*指数为

$$M_1(\mathcal{B}(G)) = |G|^2 + \sum_{H\in L(G)} \Big(\deg_{\mathcal{B}(G)}(H)\Big)^2 \quad \textit{and} \quad M_2(\mathcal{B}(G)) = M_1(\mathcal{B}(G)) - |G|^2.$$

进一步， $\mathcal{B}(G)$ 满足 *Hansen-Vukičević* 猜想，当且仅当 $|L(G)|M_2(\mathcal{B}(G)) - |G|^4 \geq 0$。

证明。我们有

$$M_1(\mathcal{B}(G)) = \sum_{v\in V(\mathcal{B}(G))} \deg(v)^2 = \sum_{(a,b)\in G\times G} \Big(\deg_{\mathcal{B}(G)}((a,b))\Big)^2 + \sum_{H\in L(G)} \Big(\deg_{\mathcal{B}(G)}(H)\Big)^2.$$

根据 $\mathcal{B}(G)$ 的定义，我们有 $\deg_{\mathcal{B}(G)}((a,\ b))\ = 1$。因此，

$$M_1(\mathcal{B}(G)) = \sum_{(a,b)\in G\times G} 1 + \sum_{H\in L(G)} \Big(\deg_{\mathcal{B}(G)}(H)\Big)^2 = |G|^2 + \sum_{H\in L(G)} \Big(\deg_{\mathcal{B}(G)}(H)\Big)^2.$$

此外，

$$\begin{aligned} M_2(\mathcal{B}(G)) &= \sum_{uv\in e(\mathcal{B}(G))} \deg(u)\deg(v) \\ &= \sum_{(a,b)H\in e(\mathcal{B}(G))} \deg_{\mathcal{B}(G)}((a,b))\deg_{\mathcal{B}(G)}(H) = \sum_{(a,b)H\in e(\mathcal{B}(G))} \deg_{\mathcal{B}(G)}(H). \end{aligned}$$

由于对于每个 $H \in L(G)$，$\deg_{\mathcal{B}(G)}(H)$ 在上述求和式中出现 $\deg_{\mathcal{B}(G)}(H)$ 次，因此我们有

$$M_2(\mathcal{B}(G)) = \sum_{H\in L(G)} \Big(\deg_{\mathcal{B}(G)}(H)\Big)^2 = M_1(\mathcal{B}(G)) - |G|^2.$$

现在，$|V(\mathcal{B}(G))| = |G|^2 + |L(G)|$ 和 $|e(\mathcal{B}(G))| = |G|^2$（参见 [7] 的定理 3.2）。因此，

$$\frac{M_2(\mathcal{B}(G))}{|e(\mathcal{B}(G))|} - \frac{M_1(\mathcal{B}(G))}{|V(\mathcal{B}(G))|} = \frac{M_2(\mathcal{B}(G))}{|G|^2} - \frac{M_2(\mathcal{B}(G)) + |G|^2}{|G|^2 + |L(G)|} = \frac{|L(G)|M_2(\mathcal{B}(G)) - |G|^4}{|G|^2(|G|^2 + |L(G)|)}.$$

因此，注意到 $|G|^2(|G|^2 + |L(G)|) > 0$，结论即得。 ■

定理 *3.2.* 若 G 是阶为 pq 的循环群，其中 p 和 q 是两个素数，且满足 $p < q$，则$M_1(\mathcal{B}(G))$ $= p^4q^4 - 2p^4q^2 - 2p^2q^4 + 5p^2q^2 + 2p^4 + 2q^4 - 4p^2 - 4q^2 + 4$ 和 $M_2(\mathcal{B}(G)) = p^4q^4 - 2p^4q^2 - 2p^2q^4 + 4p^2q^2 + 2p^4 + 2q^4 - 4p^2 - 4q^2 + 4$。此外，$M_2(\mathcal{B}(G))|e(\mathcal{B}(G))| \overset{M_1}{>} |V(\mathcal{B}(G))|$。

证明。由定理 2.2 可知，$\mathcal{B}(G) = K_2 \sqcup K_{1,p^2-1} \sqcup K_{1,q^2-1} \sqcup K_{1,p^2q^2-p^2-q^2+1}$。因此 $|L(G)| = 4$，并由引理 3.1 可知

$$\begin{aligned} M_1(\mathcal{B}(G)) &= |G|^2 + \sum_{H\in L(G)} \Big(\deg_{\mathcal{B}(G)}(H)\Big)^2 \\ &= p^4q^4 - 2p^4q^2 - 2p^2q^4 + 5p^2q^2 + 2p^4 + 2q^4 - 4p^2 - 4q^2 + 4 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} M_2(\mathcal{B}(G)) &= M_1(\mathcal{B}(G)) - |G|^2 \\ &= p^4q^4 - 2p^4q^2 - 2p^2q^4 + 4p^2q^2 + 2p^4 + 2q^4 - 4p^2 - 4q^2 + 4. \end{aligned}$$

进一步，

$$\begin{aligned} &|L(G)|M_2(\mathcal{B}(G)) - |G|^4 \\ &\quad = 4(p^4q^4 - 2p^4q^2 - 2p^2q^4 + 4p^2q^2 + 2p^4 + 2q^4 - 4p^2 - 4q^2 + 4) - p^4q^4 \\ &\quad = p^2q^2(p^2(3q^2 - 8) - 8q^2) + 16p^2q^2 + 8p^2(p^2 - 2) + 8q^2(q^2 - 2) + 16. \end{aligned}$$

我们有 $p^2 - 2 > 0$ 和 $q^2 - 2 > 0$，对所有 p，q均成立。事实上，$p^2 \geq 4$ 和 $q^2 \geq 9$。因此，$3q^2 - 8 > 2q^2$，所以 $p^2(3q^2 - 8) - 8q^2 > 0$。于是，$|L(G)|M_2(\mathcal{B}(G)) - |G|^4 > 0$，由此可根据引理 3.1 得出结论。■

定理 *3.3.* 若 G 是一个阶为 p^2q 的循环群，其中 p、q 是两个不同素数，则 $M_1(\mathcal{B}(G)) =$ $p^8q^4 + 2p^4q^4 + 4p^6q^2 - 2p^6q^4 + 2p^8 + 4p^4 - 2p^8q^2 - 3p^4q^2 - 4p^6 - 2p^2q^4 + 4p^2q^2 + 2q^4 - 4p^2 - 4q^2 + 4$，且 $M_2(\mathcal{B}(G)) = p^8q^4+2p^4q^4+4p^6q^2-2p^6q^4+2p^8+4p^4-2p^8q^2-4p^4q^2-4p^6-2p^2q^4+4p^2q^2+2q^4-4p^2-4q^2+4$。进一步地，$M_2(\mathcal{B}(G))|e(\mathcal{B}(G))| \overset{M_1}{>} |V(\mathcal{B}(G))|$。

证明。 根据定理 2.3，我们有

$$\mathcal{B}(G) = K_2 \sqcup K_{1,p^2-1} \sqcup K_{1,p^4-p^2} \sqcup K_{1,q^2-1} \sqcup K_{1,p^2q^2-p^2-q^2+1} \sqcup K_{1,p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2}.$$

因此 $|L(G)| = 6$，由引理 3.1 可得

$$\begin{aligned} M_1(\mathcal{B}(G)) &= |G|^2 + \sum_{H\in L(G)} \Big(\deg_{\mathcal{B}(G)}(H)\Big)^2 \\ &= p^8q^4 + 2p^4q^4 + 4p^6q^2 - 2p^6q^4 + 2p^8 + 4p^4 - 2p^8q^2 - 3p^4q^2 - 4p^6 - 2p^2q^4 \\ &\quad + 4p^2q^2 + 2q^4 - 4p^2 - 4q^2 + 4 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} M_2(\mathcal{B}(G)) &= M_1(\mathcal{B}(G)) - |G|^2 \\ &= p^8q^4 + 2p^4q^4 + 4p^6q^2 - 2p^6q^4 + 2p^8 + 4p^4 - 2p^8q^2 - 4p^4q^2 - 4p^6 - 2p^2q^4 \\ &\quad + 4p^2q^2 + 2q^4 - 4p^2 - 4q^2 + 4. \end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned} &|L(G)|M_2(\mathcal{B}(G)) - |G|^4 \\ &= p^6q^2(5p^2q^2 - 12q^2 - 12p^2) + 12p^2q^2(2p^4 - 2p^2) + 12p^2q^4(p^2 - 1) + 12p^6(p^2 - 2) \\ &\quad + 24p^2(q^2 - 1) + 12q^2(q^2 - 2) + 24. \end{aligned}$$

对于所有 p, q, p^2-1、q^2-1、p^2-2、q^2-2 和 $2p^4-2p^2$ 均为正数。若 $p > q$，则 $p^2 \geq 9$，因此 $5p^2 - 12 > 3p^2$。因此，$q^2(5p^2 - 12) > 3q^2p^2 > 12p^2$，因为 $q^2 \geq 4$，所以 $5p^2q^2 - 12q^2 - 12p^2 = q^2(5p^2-12) - 12p^2 > 0$。若 $p < q$，则 $q^2 \geq 9$，因此 $5q^2-12 > 3q^2$。因此，$p^2(5q^2-12) > 3q^2p^2 > 12q^2$，因为 $p^2 \geq 4$，所以 $5p^2q^2 - 12q^2 - 12p^2 = p^2(5q^2 - 12) - 12q^2 > 0$。由此，$|L(G)|M_2(\mathcal{B}(G)) - |G|^4 > 0$，故由引理 3.1 可得所需结论。■

定理*3.4.* 若 G 是一个阶为 p^2q^2的循环群，其中 p 和 q 是两个满足$p < q$的不同素数，则 $M_1(\mathcal{B}(G))$ $= p^8q^8 - 2p^6q^8 - 2p^8q^6 - 4p^4q^6 - 4p^6q^4 - 2p^2q^8 - 2p^8q^2 + 2p^4q^8 + 2p^8q^4 + 4p^6q^6 +$ $5p^4q^4 + 4p^2q^6 + 4p^6q^2 - 4p^2q^4 - 4p^4q^2 + 4p^2q^2 + 2q^8 + 2p^8 - 4q^6 - 4p^6 + 4q^4 + 4p^4 - 4p^2 - 4q^2 + 4$ 且$M_2(\mathcal{B}(G))$ $= p^8q^8 - 2p^6q^8 - 2p^8q^6 - 4p^4q^6 - 4p^6q^4 - 2p^2q^8 - 2p^8q^2 + 2p^4q^8 + 2p^8q^4 + 4p^6q^6 + 4p^4q^4 +$ $4p^2q^6 + 4p^6q^2 - 4p^2q^4 - 4p^4q^2 + 4p^2q^2 + 2q^8 + 2p^8 - 4q^6 - 4p^6 + 4q^4 + 4p^4 - 4p^2 - 4q^2 + 4$。此外，$M_2(\mathcal{B}(G)) > M_1(\mathcal{B}(G)) = |V(\mathcal{B}(G))||E(\mathcal{B}(G))|$。

证明。 由定理 2.4，我们有 $\mathcal{B}(G) = K_2 \sqcup K_{1,\ p^2-1} \sqcup K_{1,\ p^4-p^2} \sqcup K_{1,\ q^2-1} \sqcup K_{1,\ q^4-q^2} \sqcup K_{1,\ p^2q^2-p^2-q^2+1} \sqcup K_{1,\ p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2} \sqcup K_{1,\ p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2} \sqcup K_{1,\ p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2}$。因此 $|L(G)| = 9$，由引理 3.1 可得

$$\begin{aligned} M_1(\mathcal{B}(G)) &= |G|^2 + \sum_{H\in L(G)} \Big(\deg_{\mathcal{B}(G)}(H)\Big)^2 \\ &= p^8q^8 - 2p^6q^8 - 2p^8q^6 - 4p^4q^6 - 4p^6q^4 - 2p^2q^8 - 2p^8q^2 + 2p^4q^8 + 2p^8q^4 + 4p^6q^6 \\ &\quad + 5p^4q^4 + 4p^2q^6 + 4p^6q^2 - 4p^2q^4 - 4p^4q^2 + 4p^2q^2 + 2q^8 + 2p^8 - 4q^6 - 4p^6 \\ &\quad + 4q^4 + 4p^4 - 4p^2 - 4q^2 + 4 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} M_2(\mathcal{B}(G)) &= M_1(\mathcal{B}(G)) - |G|^2 \\ &= p^8q^8 - 2p^6q^8 - 2p^8q^6 - 4p^4q^6 - 4p^6q^4 - 2p^2q^8 - 2p^8q^2 + 2p^4q^8 + 2p^8q^4 + 4p^6q^6 + 4p^4q^4 \\ &\quad + 4p^2q^6 + 4p^6q^2 - 4p^2q^4 - 4p^4q^2 + 4p^2q^2 + 2q^8 + 2p^8 - 4q^6 - 4p^6 \\ &\quad + 4q^4 + 4p^4 - 4p^2 - 4q^2 + 4. \end{aligned}$$

进一步,

$$\begin{aligned} &|L(G)|M_2(\mathcal{B}(G)) - |G|^4 \\ &= 2p^6q^6(4p^2q^2 - 9q^2 - 9p^2 + 18) + 18p^2q^6(p^2q^2 - q^2 - 2p^2 + 2) \end{aligned}$$

$$+18p^6q^2(p^2q^2-p^2-2q^2+2)+36p^2q^2(p^2q^2-p^2-q^2)+36p^2q^2+18q^6(q^2-2)$$
$$+18p^6(p^2-2)+36q^2(q^2-1)+36p^2(p^2-1)+36.$$

我们有 p^2-1、q^2-1、p^2-2 和 q^2-2 对所有 p，q 都为正数。如果 $p<q$，则 $q^2\geq 9$，因此$4q^2-9\geq 3q^2$。所以，$p^2(4q^2-9)\geq 3p^2q^2>12q^2$，因为 $p^2\geq 4$，从而 $4p^2q^2-9q^2-9p^2+18=p^2(4q^2-9)$ $-9q^2+18\geq 12q^2-9q^2+18=3q^2+18>0$。我们有 $p^2q^2-p^2-2q^2=q^2(p^2-2)-p^2>0$，因为$q^2>p^2$ 且 $p^2-2>1$。因此，$p^2q^2-p^2-2q^2+2>0$ 且 $p^2q^2-p^2-q^2>p^2q^2-p^2-2q^2>0$。此外，$p^2q^2-q^2-2p^2=q^2(p^2-1)-2p^2>0$，因为 $q^2>p^2$ 且 $p^2-1>2$。因此，$p^2q^2-q^2-2p^2+2>0$。于是，$|L(G)|M_2(\mathcal{B}(G))-|G|^4>0$，故结论由引理 3.1 得出。
■

根据定理 3.2–3.4，我们得出结论：如果 G 同构于阶为 pq，p^2q 且 p^2q^2 的循环群，其中 p 和 q 是任意两个不同素数，那么 $\mathcal{B}(G)$ 满足 Hansen-Vuki˘cevi´c 猜想。

4. Other topological indices

在 Zagreb 指数提出后不久，人们还提出并研究了其他各种基于度的拓扑指标。Randić连通性指数、原子-键连通指数、几何-算术指数、调和指数、和连通性指数等都是一些常用指标。$\mathcal{G}$ 的 Randić连通性指数 $R(\mathcal{G})$、原子-键连通指数 ABC($\mathcal{G}$)、几何-算术指数 GA($\mathcal{G}$)、调和指数 $H(\mathcal{G})$ 和和连通性指数 SCI($\mathcal{G}$) 定义如下：

$$R(\mathcal{G})=\sum_{uv\in e(\mathcal{G})}(\deg(u)\deg(v))^{\frac{-1}{2}},\quad \mathrm{ABC}(\mathcal{G})=\sum_{uv\in e(\mathcal{G})}\left(\frac{\deg(u)+\deg(v)-2}{\deg(u)\deg(v)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{GA}(\mathcal{G})=\sum_{uv\in e(\mathcal{G})}\frac{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}}{\frac{1}{2}(\deg(u)+\deg(v))},\quad H(\mathcal{G})=\sum_{uv\in e(\mathcal{G})}\frac{2}{\deg(u)+\deg(v)}$$

and

$$\mathrm{SCI}(\mathcal{G})=\sum_{uv\in e(\mathcal{G})}(\deg(u)+\deg(v))^{\frac{-1}{2}}.$$

本节中，我们计算第 2 节所讨论群的 $\mathcal{B}(G)$ 的这些拓扑指数。以下结果有助于我们的计算。

引理 4.1. [8, 引理 4.1] 对于任意有限群 G，我们有

$$R(\mathcal{B}(G))=\sum_{H\in L(G)}\left(\deg_{\mathcal{B}(G)}(H)\right)^{\frac{1}{2}},\ \mathrm{ABC}(\mathcal{B}(G))=\sum_{H\in L(G)}\left(\left(\deg_{\mathcal{B}(G)}(H)\right)^2-\deg_{\mathcal{B}(G)}(H)\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\mathrm{GA}(\mathcal{B}(G))=\sum_{H\in L(G)}\frac{2\left(\deg_{\mathcal{B}(G)}(H)\right)^{\frac{3}{2}}}{(1+\deg_{\mathcal{B}(G)}(H))},\qquad H(\mathcal{B}(G)=\sum_{H\in L(G)}\frac{2\deg_{\mathcal{B}(G)}(H)}{1+\deg_{\mathcal{B}(G)}(H)}$$
$$and\quad \mathrm{SCI}(\mathcal{B}(G))=\sum_{H\in L(G)}\left(1+\deg_{\mathcal{B}(G)}(H)\right)^{\frac{-1}{2}}\deg_{\mathcal{B}(G)}(H).$$

在计算阶为 pq、p^2q 和 p^2q^2 的循环群的 $\mathcal{B}(G)$的Zagreb指数时，我们对所有 $H\in L(G)$计算了 $\deg^{\mathcal{B}(G)}(H)$，这可见于定理 3.2–定理3.4的证明。因此，由引理4.1可得如下定理。

定理 4.2. 若 G 是阶为 pq的循环群，其中 p 和 q 是满足 $p<q$的两个素数，则

$$R(\mathcal{B}(G))=1+\sqrt{p^2-1}(1+\sqrt{q^2-1})+\sqrt{q^2-1},$$
$$\mathrm{ABC}(\mathcal{B}(G))=\sqrt{p^2-1}(\sqrt{p^2-2}+\sqrt{(q^2-1)(p^2q^2-p^2-q^2)})+\sqrt{(q^2-1)(q^2-2)},$$
$$\mathrm{GA}(\mathcal{B}(G))=1+2\sqrt{(p^2-1)^3}\left(\tfrac{1}{p^2}+\tfrac{\sqrt{(q^2-1)^3}}{p^2q^2-p^2-q^2+2}\right)+\tfrac{2\sqrt{(q^2-1)^3}}{q^2},$$
$$H(\mathcal{B}(G))=1+2(p^2-1)\left(\tfrac{1}{p^2}+\tfrac{q^2-1}{p^2q^2-p^2-q^2+2}\right)+\tfrac{2(q^2-1)}{q^2}\quad and$$
$$\mathrm{SCI}(\mathcal{B}(G))=\tfrac{1}{\sqrt{2}}+(p^2-1)\left(\tfrac{1}{p}+\tfrac{q^2-1}{\sqrt{p^2q^2-p^2-q^2+2}}\right)+\tfrac{q^2-1}{q}.$$

定理 4.3。若 G 是一个阶为 p^2q 的循环群，其中 p 和 q 是两个不同的素数，则

$$R(\mathcal{B}(G)) = 1+\sqrt{p^2-1}(p+1)(1+\sqrt{q^2-1})+\sqrt{q^2-1},$$
$$\mathrm{ABC}(\mathcal{B}(G)) = \sqrt{p^2-1}(\sqrt{p^2-2}+p\sqrt{p^4-p^2-1}+\sqrt{(q^2-1)(p^2q^2-p^2-q^2)}+$$
$$p\sqrt{(q^2-1)(p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2-1)})+\sqrt{(q^2-1)(q^2-2)},$$
$$\mathrm{GA}(\mathcal{B}(G)) = 1+2\sqrt{(p^2-1)^3}\left(\tfrac{1}{p^2}+\tfrac{p^3}{p^4-p^2+1}+\tfrac{\sqrt{(q^2-1)^3}}{p^2q^2-p^2-q^2+2}+\tfrac{p^3\sqrt{(q^2-1)^3}}{p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2+1}\right)+\tfrac{2\sqrt{(q^2-1)^3}}{q^2},$$
$$H(\mathcal{B}(G)) = 1+2(p^2-1)\left(\tfrac{1}{p^2}+\tfrac{p^2}{p^4-p^2+1}+\tfrac{q^2-1}{p^2q^2-p^2-q^2+2}+\tfrac{p^2(q^2-1)}{p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2+1}\right)+\tfrac{2(q^2-1)}{q^2} \quad and$$
$$\mathrm{SCI}(\mathcal{B}(G)) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}+(p^2-1)\left(\tfrac{1}{p}+\tfrac{p^2}{\sqrt{p^4-p^2+1}}+\tfrac{q^2-1}{\sqrt{p^2q^2-p^2-q^2+2}}+\tfrac{p^2(q^2-1)}{p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2+2}\right)+\tfrac{q^2-1}{q}.$$

定理4.4。 若 G 是一个阶为 p^2q^2 的循环群，其中 p 和 q 是满足 $p<q$ 的两个素数，则

$$R(\mathcal{B}(G)) = 1+\sqrt{p^2-1}(p+1+\sqrt{q^2-1}(1+p+q+pq))+\sqrt{q^2-1}(q+1),$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ABC}(\mathcal{B}(G)) = \sqrt{p^2-1}\Big(&\sqrt{p^2-2}+p\sqrt{p^4-p^2-1}+\sqrt{(q^2-1)(p^2q^2-p^2-q^2)}\\
&+q\sqrt{(q^2-1)(p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2-1)}\\
&+p\sqrt{(q^2-1)(p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2-1)}\\
&+pq\sqrt{(q^2-1)(p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2-1)}\Big)\\
&+\sqrt{(q^2-1)}\big(\sqrt{q^2-2}+q\sqrt{q^4-q^2-1}\big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{GA}(\mathcal{B}(G)) = 1+2\sqrt{(p^2-1)^3}\Big(&\frac{1}{p^2}+\frac{p^3}{p^4-p^2+1}+\frac{\sqrt{(q^2-1)^3}}{p^2q^2-p^2-q^2+2}\\
&+\frac{q^3\sqrt{(q^2-1)^3}}{p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2+1}+\frac{p^3\sqrt{(q^2-1)^3}}{p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2+1}\\
&+\frac{p^3q^3\sqrt{(q^2-1)^3}}{p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2+1}\Big)+2\sqrt{(q^2-1)^3}\Big(\frac{1}{q^2}+\frac{q^3}{q^4-q^2+1}\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H(\mathcal{B}(G)) = 1+2(p^2-1)\Big(&\frac{1}{p^2}+\frac{p^2}{p^4-p^2+1}+\frac{q^2-1}{p^2q^2-p^2-q^2+2}\\
&+\frac{p^2(q^2-1)}{p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2+1}+\frac{q^2(q^2-1)}{p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2+1}\\
&+\frac{p^2q^2(q^2-1)}{p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2+1}\Big)+2(q^2-1)\Big(\frac{1}{q^2}+\frac{q^2}{q^4-q^2+1}\Big) \quad and\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{SCI}(\mathcal{B}(G)) = \frac{1}{\sqrt{2}}+(p^2-1)\Big(&\frac{1}{p}+\frac{p^2}{\sqrt{p^4-p^2+1}}+\frac{q^2-1}{\sqrt{p^2q^2-p^2-q^2+2}}\\
&+\frac{p^2(q^2-1)}{p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2+2}+\frac{q^2(q^2-1)}{\sqrt{p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2+1}}\\
&+\frac{p^2q^2(q^2-1)}{\sqrt{p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2+1}}\Big)+(q^2-1)\Big(\frac{1}{q}+\frac{q^2-1}{\sqrt{q^4-q^2+1}}\Big).\end{aligned}$$

5. Various spectra and energies of SGB-graph

设 $\mathcal{G}$ 是一个简单图，其顶点集为 $V(\mathcal{G})=\{v_i:\ i=1,2,.....,n\}$，且 $|e(\mathcal{G})|=m$。令 $A(\mathcal{G})$ 和 $D(\mathcal{G})$ 分别表示 $\mathcal{G}$ 的邻接矩阵和度矩阵。$A(\mathcal{G})$ 的特征值集合及其重数定义为 $\mathcal{G}$ 的谱。 $\mathcal{G}$ 的拉普拉斯矩阵和无符号拉普拉斯矩阵分别定义为 $L(\mathcal{G}):=D(\mathcal{G})-A(\mathcal{G})$ 以及 $Q(\mathcal{G}):=D(\mathcal{G})+A(\mathcal{G})$。 $\mathcal{G}$ 的拉普拉斯谱（L-谱）和无符号拉普拉斯谱（Q-谱）分别是 $L(\mathcal{G})$ 和 $Q(\mathcal{G})$ 的特征值集合及其重数。.....的公共邻域

两个不同顶点 v_i 和 v_j 的公共邻域，记作 $C(v_i, v_j)$，是与 v_i 和 v_j 都相邻、且不同于 v_i 和 v_j 的所有顶点构成的集合。$\mathcal{G}$ 的公共邻域矩阵记作 $CN(\mathcal{G})$，定义为

$$(CN(\mathcal{G}))_{i,j} = \begin{cases} |C(v_i, v_j)|, & \text{if } i \neq j \\ 0, & \text{if } i = j. \end{cases}$$

$CN(\mathcal{G})$的所有特征值及其重数构成的集合称为 $\mathcal{G}$的公共邻域谱（CN-谱）。我们分别用 Spec($\mathcal{G}$)、L-spec($\mathcal{G}$)、Q-spec($\mathcal{G}$) 和 CN-spec($\mathcal{G}$) 表示 $\mathcal{G}$ 的谱、拉普拉斯谱、Q-谱和CN-谱。这些多重集 Spec($\mathcal{G}$)/L-spec($\mathcal{G}$)/Q-spec($\mathcal{G}$)/CN-spec($\mathcal{G}$)记作 $\{(x_1)^{n_1}, (x_2)^{n_2}, \ldots\ldots, (x_k)^{n_k}\}$ 其中，x_i是 $A(\mathcal{G})/L(\mathcal{G})/Q(\mathcal{G})/CN(\mathcal{G})$ 的特征值，而 n_i是它们的重数。如果 Spec($\mathcal{G}$)/L-spec($\mathcal{G}$)/Q-spec($\mathcal{G}$)/CN-spec($\mathcal{G}$) 中仅含整数，则称图 $\mathcal{G}$ 为整数谱图/L-整数谱图/Q-整数谱图/CN-整数谱图。

$\mathcal{G}$ 的能量 $E(\mathcal{G})$和公共邻域能量（CN-能量） $E_{CN}(\mathcal{G})$，分别是 $A(\mathcal{G})$和 $CN(\mathcal{G})$的特征值绝对值之和。因此

$$E(\mathcal{G}) = \sum_{\alpha \in \mathrm{Spec}(\mathcal{G})} |\alpha| \quad \text{and} \quad E_{CN}(\mathcal{G}) = \sum_{\beta \in \text{CN-spec}(\mathcal{G})} |\beta|.$$

图的拉普拉斯能量（L-能量） $LE(\mathcal{G})$和无符号拉普拉斯能量（Q-能量） $LE^+(\mathcal{G})$定义为 $\mathcal{G}$

$$LE(\mathcal{G}) = \sum_{\lambda \in \text{L-spec}(\mathcal{G})} \left|\lambda - \frac{2m}{n}\right| \quad \text{and} \quad LE^+(\mathcal{G}) = \sum_{\mu \in \text{Q-spec}(\mathcal{G})} \left|\mu - \frac{2m}{n}\right|.$$

注意，图能量由 Gutman [19] 引入，而上述其他图能量由 Gutman 等人 [24, 1, 2]引入。众所周知，$E(K_n) = LE(K_n) = LE^+(K_n) = 2(n-1)$，且 $E_{CN}(K_n) = 2(n-1)(n-2)$。若图 $\mathcal{G}$ 满足 $|V(\mathcal{G})| = n$，则称其为超能量图，当且仅当 $E(\mathcal{G}) > E(K_n)$。若 $E(\mathcal{G}) < n$，则称其为次能量图。类似地，若 $LE(\mathcal{G}) > LE(K_n)$，则称 $\mathcal{G}$ 为 L-超能量图；若 $LE^+(\mathcal{G}) > LE^+(K_n)$，则称其为 Q-超能量图；若 $E_{CN}(\mathcal{G}) > E_{CN}(K_n)$，则称其为 CN-超能量图。寻找 CN-超能量图仍是一个未解决问题（见 [2, 未解决问题 1]）。

$\mathcal{G}$ 的公共邻域图记为 con($\mathcal{G}$)，它的邻接矩阵定义如下：

$$(A(\mathrm{con}(\mathcal{G})))_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{if } |C(v_i, v_j)| \geq 1 \text{ and } i \neq j \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

容易看出，当 $\mathcal{G} = K_{1,n}$ 时，$CN(\mathcal{G})$ 是 $= A(\mathrm{con}(\mathcal{G}))$，即具有 $n+1$ 个顶点的星图。在 [3, Example 2.1], 中，已证明 con($K_{1,n}$) $= K_1 \sqcup K_n$。因此，CN-spec($K_{1,n}$) $=$ Spec(K_1) $\sqcup$ Spec(K_n)。

本节将计算第 2 节所讨论群的 $\mathcal{B}(G)$ 的谱、L-谱、Q-谱、CN-谱及其相应的能量，这些群包括阶为 p^n 的循环群（其中 p 为任意素数）以及 $n \geq 1$。因此，我们将证明，对于这些群，$\mathcal{B}(G)$ 不是整数谱图，但具有 L-整数谱、Q-整数谱和 CN-整数谱。此外，我们将证明，当 G 是上述群之一时，$\mathcal{B}(G)$ 是次能量图，但既不是超能量图，也不是 L-超能量图、Q-超能量图或 CN-超能量图。Gutman 等人 [21] 猜想，$E(\mathcal{G}) \leq LE(\mathcal{G})$，这就是著名的 E-LE 猜想。Gutman [19] 还猜想：“若 $\mathcal{G} \ncong K_{|v(\mathcal{G})|}$，则 $\mathcal{G}$ 不是超能量图。”然而，这两个猜想都已被推翻（见 [28, 40, 20, 12, 39]）。我们将证明，当 G 是上述群之一时，$\mathcal{B}(G)$ 同时满足上述两个猜想。

以下　这些著名结果有助于计算 $\mathcal{B}(G$).

引理5.1. 若 $\mathcal{G} = K_{1,n}$ 是具有 $n+1$ 个顶点的星图，则 Spec($\mathcal{G}$) $= \{(0)^{n-1}, (\pm\sqrt{n})^1\}$, L-spec($\mathcal{G}$) $= \{(0)^1, (1)^{n-1}, (n+1)^1\}$ $=$ Q-spec($\mathcal{G}$) 以及 CN-spec($\mathcal{G}$) $= \{(0)^1, (-1)^{n-1}, (n-1)^1\}$.

引理5.2. 若 $\mathcal{G} = K_{1,n}$ 是具有 $n+1$ 个顶点的星图，则 $E(\mathcal{G}) = 2\sqrt{n}$, $LE(\mathcal{G}) = \frac{2n^2+2}{n+1} = LE^+$以及 $(\mathcal{G})$ $E_{CN}(\mathcal{G}) = 2n - 2$.

注5.1. 由于 $\mathcal{B}(G)$ 是若干星图的并，根据引理*5.1*，我们有 L-spec($\mathcal{B}(G)$) $=$Q-spec($\mathcal{B}(G)$) 因此 $LE(\mathcal{B}(G))$ $= LE^+(\mathcal{B}(G))$.

定理5.3。 若 G 是阶为 p^n的循环群，其中 p 是任意素数且 $n \geq 1$，那么

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{B}(G))=\left\{(0)^{p^{2n}-n-1},(\pm1)^1,\left(\pm\sqrt{p^2-1}\right)^1,\left(\pm p\sqrt{p^2-1}\right)^1,\ldots,\left(\pm p^{n-1}\sqrt{p^2-1}\right)^1\right\},$$

$$\begin{aligned}\text{L-spec}(\mathcal{B}(G))=\Big\{&(0)^{n+1},(1)^{p^{2n}-n-1},(2)^1,(p^2)^1,(p^4-p^2+1)^1,(p^6-p^4+1)^1,\ldots,\\&(p^{2n}-p^{2n-2}+1)\Big\}=\text{Q-spec}(\mathcal{B}(G))\end{aligned}$$

且CN谱$(\mathcal{B}(G))=\{(0)^{n+2},\ (-1)^{p^{2n}-n-1},\ (p^2-2)^1,(p^4-p^2-1)^1,(p^6-p^4-1)^1,\ \ldots\ldots,\ (p^{2n}-p^{2n-2}-1)^1\}$。

证明。由定理 2.1，我们有 $\mathcal{B}(G)=K_2\sqcup K_{1,\ p^2-1}\sqcup K_{1,\ p^2(p^2-1)}\sqcup\cdots\sqcup K_{1,\ p^{2n-2}(p^2-1)}$。现在，根据引理 5.1，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}(K_2)=\{(\pm1)^1\},\ \mathrm{Spec}(K_{1,p^2-1})&=\left\{(0)^{p^2-2},(\pm\sqrt{p^2-1})^1\right\},\\ \mathrm{Spec}(K_{1,p^2(p^2-1)})&=\left\{(0)^{p^4-p^2-1},(\pm p\sqrt{p^2-1})^1\right\},\ldots,\\ \mathrm{Spec}(K_{1,p^{2n-2}(p^2-1)})&=\left\{(0)^{p^{2n}-p^{2n-2}-1},(\pm p^{n-1}\sqrt{p^2-1})^1\right\}.\end{aligned}$$

由于我们有 $\mathrm{Spec}(\mathcal{B}(G))=\mathrm{Spec}(K_2)\sqcup\mathrm{Spec}(K_{1,\ p^2-1})\sqcup\mathrm{Spec}(K_{1,\ p^2(p^2-1)})\sqcup\cdots\sqcup\mathrm{Spec}(K_{1,\ p^{2n-2}(p^2-1)})$，因此得到 $\mathrm{Spec}(\mathcal{B}(G))$ 的所需表达式。此外，根据引理5.1，我们得到

$$\begin{aligned}\text{L-spec}(K_2)=\{(0)^1,(2)^1\},\ \text{L-spec}(K_{1,p^2-1})&=\left\{(0)^1,(1)^{p^2-2},(p^2)^1\right\},\\ \text{L-spec}(K_{1,p^2(p^2-1)})&=\left\{(0)^1,(1)^{p^4-p^2-1},(p^4-p^2+1)^1\right\},\ldots,\\ \text{L-spec}(K_{1,p^{2n-2}(p^2-1)})&=\left\{(0)^1,(1)^{p^{2n}-p^{2n-2}-1},(p^{2n}-p^{2n-2}+1)^1\right\}.\end{aligned}$$

由于 $\text{L-spec}(\mathcal{B}(G))=\text{L-spec}(K_2)\sqcup\text{L-spec}(K_{1,\ p^2-1})\sqcup\text{L-spec}(K_{1,\ p^2(p^2-1)})\sqcup\ldots\sqcup\text{L-spec}(K_{1,\ p^{2n-2}(p^2-1)})$，我们得到 $\text{L-spec}(\mathcal{B}(G))$ 的所需表达式，从而得到 $\text{Q-spec}(\mathcal{B}(G))$ 的表达式。此外，我们有

$$\begin{aligned}\text{CN-spec}(K_2)=\{(0)^2\},\ \text{CN-spec}(K_{1,p^2-1})&=\left\{(0)^1,(-1)^{p^2-2},(p^2-2)^1\right\},\\ \text{CN-spec}(K_{1,p^2(p^2-1)})&=\left\{(0)^1,(-1)^{p^4-p^2-1},(p^4-p^2-1)^1\right\},\ldots,\\ \text{CN-spec}(K_{1,p^{2n-2}(p^2-1)})&=\left\{(0)^1,(-1)^{p^{2n}-p^{2n-2}-1},(p^{2n}-p^{2n-2}-1)^1\right\}.\end{aligned}$$

由于
CN谱 $\mathcal{B}(G(\ \ ))$
$=\text{CN-spec}(K_2)\sqcup\text{CN-spec}(K_{1,p^2-1})\sqcup\text{CN-spec}(K_{1,p^2(p^2-1)})\sqcup\cdots\sqcup\text{CN-spec}(K_{1,p^{2n-2}(p^2-1)})$,
we get the desired expression of $\text{CN-spec}(\mathcal{B}(G))$. ■

定理 5.4. 若 G 是阶为 p^n的循环群，其中 p 是任意素数且 $n\geq1$，则 $E(\mathcal{B}(G))=2+2\sqrt{p^2-1}\left(\frac{p^n-1}{p-1}\right)$, $LE(\mathcal{B}(G))=LE^+(\mathcal{B}(G))=\frac{2p^{4n}+2n^2+4n+2}{p^{2n}+n+1}$以及 $E_{CN}(\mathcal{B}(G))=2p^{2n}-2n-2$。

证明. 由定理5.3以及 $E(\mathcal{B}(G))$ 和 $E_{CN}(\mathcal{B}(G))$ 的定义可得

$$\begin{aligned}E(\mathcal{B}(G))&=2+2\sqrt{p^2-1}+2p\sqrt{p^2-1}+2p^2\sqrt{p^2-1}+\cdots+2p^{n-1}\sqrt{p^2-1}\\&=2+2\sqrt{p^2-1}\left(1+p+p^2+\cdots+p^{n-1}\right)\end{aligned}$$

和 $E_{CN}(\mathcal{B}(G))=(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{(p^{2n}-n-1)\text{-times}})+(p^2-2)+(p^4-p^2-1)+(p^6-p^4-1)+\cdots+(p^{2n}-p^{2n-2}-1)$。

因此，我们得到 $E(\mathcal{B}(G))$ 和 $E_{CN}(\mathcal{B}(G))$ 的所需表达式。

此外，由定理5.3和定理 2.1可得

L-谱$(\mathcal{B}(G))=$ Q -谱$(\mathcal{B}(G))$
$=\{(0)^{n+1},\ (1)^{p^{2n}-n-1},\ (2)^1,(p^2)^1,(p^4-p^2+1)^1,(p^6-p^4+1)^1,\ \ldots,\ (p^{2n}-p^{2n-2}+1)\}$以及 $\frac{2m}{n}=\frac{2p^{2n}}{p^{2n}+n+1}$。现在，$|0-\frac{2p^{2n}}{p^{2n}+n+1}|=\frac{2p^{2n}}{p^{2n}+n+1}$, $|1-\frac{2p^{2n}}{p^{2n}+n+1}|=\frac{p^{2n}-n-1}{p^{2n}+n+1}$以及 $|2-\frac{2p^{2n}}{p^{2n}+n+1}|=\frac{2n+2}{p^{2n}+n+1}$。对于所有 $1\leq x\leq n$，我们有

$$(p^{2x}-p^{2x-2}+1)-\frac{2p^{2n}}{p^{2n}+n+1}$$

$$= \frac{p^{2n}(p^{2x} - p^{2x-2} - 1) + np^{2x-2}(p^2 - 1) + p^{2x-2}(p^2 - 1) + n + 1}{p^{2n} + n + 1} > 0,$$

因为对于所有 p， $p^{2x-2}(p^2 - 1) > 1$ 以及 $p^2 - 1 > 0$。因此， $|(p^{2x} - p^{2x-2} + 1) - \frac{2p^{2n}}{p^{2n}+n+1}| = (p^{2x} - p^{2x-2} + 1) - \frac{2p^{2n}}{p^{2n}+n+1}$ 对于所有 $1 \leq x \leq n$。所以，根据（无符号）拉普拉斯能量的定义，我们有

$$\begin{aligned}
LE(\mathcal{B}(G)) &= LE^+(\mathcal{B}(G)) \\
&= (n+1)\frac{2p^{2n}}{p^{2n}+n+1} + (p^{2n} - n - 1)\frac{p^{2n} - n - 1}{p^{2n}+n+1} + \frac{2n+2}{p^{2n}+n+1} \\
&\quad + \left((p^2 - 1 + 1) - \frac{2p^{2n}}{p^{2n}+n+1}\right) + \left((p^4 - p^2 + 1) - \frac{2p^{2n}}{p^{2n}+n+1}\right) \\
&\quad + \cdots + \left((p^{2n} - p^{2n-2} + 1) - \frac{2p^{2n}}{p^{2n}+n+1}\right) \\
&= (n+1)\frac{2p^{2n}}{p^{2n}+n+1} + (p^{2n} - n - 1)\frac{p^{2n} - n - 1}{p^{2n}+n+1} + \frac{2n+2}{p^{2n}+n+1} \\
&\quad + \left(p^{2n} + n - 1 - n\frac{2p^{2n}}{p^{2n}+n+1}\right).
\end{aligned}$$

因此，我们得到所需的表达式。 ■

定理 5.5。 如果 G 是阶为 p^n 的循环群，其中 p 是任意素数且 $n \geq 1$，那么 $\mathcal{B}(G)$ 是次能量的，但不是超能量、*L*-超能量、*Q*-超能量和 *CN*-超能量的。

证明。 根据定理 2.1 和定理 5.4，我们有 $|V(\mathcal{B}(G))| = p^{2n} + n + 1$ 和 $E(\mathcal{B}(G)) = 2 + 2\sqrt{p^2-1} + 2p\sqrt{p^2-1} + 2p^2\sqrt{p^2-1} + \cdots + 2p^{n-1}\sqrt{p^2-1}$。由于 $p^2 > 2\sqrt{p^2-1}$, $p^4 - p^2 + 1 > 2\sqrt{p^4-p^2} = 2p\sqrt{p^2-1}$, $p^6 - p^4 + 1 > 2\sqrt{p^6 - p^4} = 2p^2\sqrt{p^2-1}$, ..., $p^{2n} - p^{2n-2} + 1 > 2\sqrt{p^{2n} - p^{2n-2}} = 2p^{n-1}\sqrt{p^2-1}$ 我们有

$$\begin{aligned}
p^2 + (p^4 - p^2 + 1) + (p^6 - p^4 + 1) + \cdots + (p^{2n} - p^{2n-2} + 1) + 2 \\
> 2 + 2\sqrt{p^2-1} + 2p\sqrt{p^2-1} + 2p^2\sqrt{p^2-1} + \cdots + 2p^{n-1}\sqrt{p^2-1}.
\end{aligned}$$

因此，

$$|V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G)). \tag{2}$$

因此， $\mathcal{B}(G)$ 是次能量的。

我们有 $E(K_{|V(\mathcal{B}(G))|}) = E(K_{p^{2n}+n+1}) = 2(p^{2n} + n + 1 - 1) = 2p^{2n} + 2n > p^{2n} + n + 1 = |V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G))$（利用（2））。因此， $\mathcal{B}(G)$ 不是超能量的。

此外， $LE(K_{p^{2n}+n+1}) = LE^+(K_{p^{2n}+n+1}) = 2p^{2n} + 2n$。根据定理 5.4，我们有 $LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = \frac{2p^{4n}+2n^2+4n+2}{p^{2n}+n+1}$。现在，

$$\begin{aligned}
LE(K_{p^{2n}+n+1}) - LE(\mathcal{B}(G)) &= LE^+(K_{p^{2n}+n+1}) - LE^+(\mathcal{B}(G)) \\
&= 2p^{2n} + 2n - \frac{2p^{4n} + 2n^2 + 4n + 2}{p^{2n} + n + 1} \\
&= \frac{4np^{2n} + 2p^{2n} - 2n - 2}{p^{2n} + n + 1} > 0.
\end{aligned}$$

因此，

$$LE^+(K_{p^{2n}+n+1}) = LE(K_{p^{2n}+n+1}) > LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)).$$

因此， $\mathcal{B}(G)$ 既不是 L-超能量的，也不是 Q-超能量的。

根据定理 5.4，我们有 $E_{CN}(K_{p^{2n}+n+1}) = 2(p^{2n}+n+1-1)(p^{2n}+n+1-2) = (2p^{2n}+2n)(p^{2n}+n-1) > 2p^{2n} - 2n - 2 = E_{CN}(\mathcal{B}(G))$。因此， $\mathcal{B}(G)$ 不是 CN-超能量图。证明至此完成。 ■

定理 5.6。 若 G 是一个阶为 p^n 的循环群，其中 p 是任意素数且 $n \geq 1$，则 $E(\mathcal{B}(G)) < LE(\mathcal{B}(G))$。

证明。根据定理 5.4，我们得到 $E(\mathcal{B}(G)) = 2+2\sqrt{p^2-1}\binom{p^n-1}{p-1}$ 和 $LE(\mathcal{B}(G)) = \frac{2p^{4n}+2n^2+4n+2}{p^{2n}+n+1}$。此外，根据定理 5.5，我们有 $|V(\mathcal{B}(G))| = p^{2n}+n+1 > E(\mathcal{B}(G))$。现在，对于所有的 $p \geq 2$ 和 $n \geq 1$，我们有

$$\begin{aligned} LE(\mathcal{B}(G)) - |V(\mathcal{B}(G))| &= \frac{2p^{4n}+2n^2+4n+2}{p^{2n}+n+1} - p^{2n}+n+1 \\ &= \frac{p^{2n}(p^{2n}-2n-2)+n^2+2n+1}{p^{2n}+n+1} > 0. \end{aligned}$$

因此，$LE(\mathcal{B}(G)) > |V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G))$。 ■

定理 5.7. 设 G 是阶为 pq的循环群，其中 p 和 q 是任意两个不同素数，则

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{B}(G)) = \left\{(0)^{p^2q^2-4}, (\pm 1)^1, \left(\pm\sqrt{p^2-1}\right)^1, \left(\pm\sqrt{q^2-1}\right)^1, \left(\pm\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}\right)^1\right\},$$

$$\text{L-spec}(\mathcal{B}(G)) = \{(0)^4, (1)^{p^2q^2-4}, (2)^1, (p^2)^1, (q^2)^1, (p^2q^2-p^2-q^2+2)^1\} = \text{Q-spec}(\mathcal{B}(G))$$

$$and \quad \text{CN-spec}(\mathcal{B}(G)) = \left\{(0)^5, (-1)^{p^2q^2-4}, (p^2-2)^1, (q^2-2)^1, (p^2q^2-p^2-q^2)^1\right\}.$$

证明. 由定理 2.2，得 $\mathcal{B}(G) = K_2 \sqcup K_{1,p^2-1} \sqcup K_{1,q^2-1} \sqcup K_{1,p^2q^2-p^2-q^2+1}$。现在，由引理5.1，得

$$\mathrm{Spec}(K_2) = \{(\pm 1)^1\}, \mathrm{Spec}(K_{1,p^2-1}) = \left\{(0)^{p^2-2}, (\pm\sqrt{p^2-1})^1\right\},$$

$$\mathrm{Spec}(K_{1,q^2-1}) = \left\{(0)^{q^2-2}, (\pm\sqrt{q^2-1})^1\right\}$$

以及谱$(K_{1,p^2q^2-p^2-q^2+1}) = \left\{(0)^{p^2q^2-p^2-q^2}, (\pm\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)})^1\right\}$.

由于 Spec$(\mathcal{B}(G))$ = Spec(K_2) ⊔ Spec(K_{1,p^2-1}) ⊔Spec(K_{1,q^2-1}) ⊔Spec$(K_{1,p^2q^2-p^2-q^2+1})$，我们得到 Spec$(\mathcal{B}(G))$ 的所需表达式。此外，由引理 5.1，得

$$\text{L-spec}(K_2) = \{(0)^1, (2)^1\}, \text{L-spec}(K_{1,p^2-1}) = \left\{(0)^1, (1)^{p^2-2}, (p^2)^1\right\},$$

$$\text{L-spec}(K_{1,q^2-1}) = \left\{(0)^1, (1)^{q^2-2}, (q^2)^1\right\}$$

以及 L-谱$(K_{1,\ p^2q^2-p^2-q^2+1}) = \left\{(0)^1, (1)^{p^2q^2-p^2-q^2}, (p^2q^2-p^2-q^2+2)^1\right\}$。由于 L-谱$(\mathcal{B}(G))$ =L-谱(K_2) ⊔ L- 谱 $(K_{1,\ p^2-1})$ ⊔ L- 谱 $(K_{1,\ q^2-1})$ ⊔ L- 谱 $(K_{1,\ p^2q^2-p^2-q^2+1})$，我们得到 L- 谱 $(\mathcal{B}(G))$ 的所需表达式，进而得到 Q-谱$(\mathcal{B}(G))$ 的表达式。此外，我们有

$$\text{CN-spec}(K_2) = \{(0)^2\}, \text{CN-spec}(K_{1,p^2-1}) = \left\{(0)^1, (-1)^{p^2-2}, (p^2-2)^1\right\},$$

$$\text{CN-spec}(K_{1,q^2-1}) = \left\{(0)^1, (-1)^{q^2-2}, (q^2-2)^1\right\}$$

以及 CN谱$(K_{1,\ p^2q^2-p^2-q^2+1}) = \left\{(0)^1, (-1)^{p^2q^2-p^2-q^2}, (p^2q^2-p^2-q^2)^1\right\}$。

由于
CN谱$(\mathcal{B}(G))$ = CN谱(K_2) ⊔ CN谱$(K_{1,\ p^2-1})$ ⊔ CN谱$(K_{1,\ q^2-1})$ ⊔CN谱$(K_{1,\ p^2q^2-p^2-q^2+1})$，我们得到 CN谱$(\mathcal{B}(G))$ 的所需表达式。 ■

定理 5.8. 若 G 是阶为 pq 的循环群，其中 p 和 q 是两个满足 $p < q$ 的素数，则 $E(\mathcal{B}(G))$ $= 2+2\sqrt{p^2-1}(1+\sqrt{q^2-1}) + 2\sqrt{q^2-1}$, $LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = \frac{2p^4q^4+32}{p^2q^2+4}$ 和$E_{CN}(\mathcal{B}(G))$ $= 2p^2q^2-8$。

证明。 由定理 5.7 以及 $E(\mathcal{B}(G))$ 和 $E_{CN}(\mathcal{B}(G))$ 的定义，我们有

$$E(\mathcal{B}(G)) = 2+2\sqrt{p^2-1}+2\sqrt{q^2-1}+2\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}$$

以及 $E_{CN}(\mathcal{B}(G)) = \underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{(p^2q^2-4)\text{-times}} + p^2-2+q^2-2+p^2q^2-p^2-q^2$。由此我们得到所需的表达式

关于 $E(\mathcal{B}(G))$和 $E_{CN}(\mathcal{B}(G))$

此外，由定理 5.7 和定理 2.2 可得

$$\text{L-spec}(\mathcal{B}(G)) = \text{Q-spec}(\mathcal{B}(G)) = \{(0)^4, (1)^{p^2q^2-4}, (2)^1, (p^2)^1, (q^2)^1, (p^2q^2-p^2-q^2+2)^1\}$$

以及 $\frac{2m}{n} = \frac{2p^2q^2}{p^2q^2+4}$。现在，$|0 - \frac{2p^2q^2}{p^2q^2+4}| = \frac{2p^2q^2}{p^2q^2+4}$、$|1 - \frac{2p^2q^2}{p^2q^2+4}| = \frac{p^2q^2-4}{p^2q^2+4}$、$|2 - \frac{2p^2q^2}{p^2q^2+4}| = \frac{8}{p^2q^2+4}$、$|p^2 - \frac{2p^2q^2}{p^2q^2+4}| = \frac{p^4q^2+4p^2-2p^2q^2}{p^2q^2+4}$、$|q^2 - \frac{2p^2q^2}{p^2q^2+4}| = \frac{p^2q^4+4q^2-2p^2q^2}{p^2q^2+4}$ 和 $|(p^2q^2-p^2-q^2+2) - \frac{2p^2q^2}{p^2q^2+4}| = \frac{p^4q^4-p^4q^2-p^2q^4+4p^2q^2-4p^2-4q^2+8}{p^2q^2+4}$。因此，根据（无符号）拉普拉斯能量的定义，可得

$$\begin{aligned} LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) &= 4 \times \frac{2p^2q^2}{p^2q^2+4} + (p^2q^2-4)\frac{p^2q^2-4}{p^2q^2+4} + \frac{8}{p^2q^2+4} \\ &+ \frac{p^4q^2+4p^2-2p^2q^2}{p^2q^2+4} + \frac{p^2q^4+4q^2-2p^2q^2}{p^2q^2+4} \\ &+ \frac{p^4q^4-p^4q^2-p^2q^4+4p^2q^2-4p^2-4q^2+8}{p^2q^2+4}. \end{aligned}$$

因此，我们得到了所需的表达式。 ■

定理 5.9. 若 G 是阶为 pq 的循环群，其中 p 和 q 是满足 $p < q$ 的两个素数，则 $\mathcal{B}(G)$ 是次能量的，但不是超能量、*L*-超能量、*Q*-超能量或 *CN*-超能量的。

证明。 根据定理 2.2 和定理 5.8，我们有

$$|V(\mathcal{B}(G))| = p^2q^2+4 \quad \text{and} \quad E(\mathcal{B}(G)) = 2 + 2\sqrt{p^2-1} + 2\sqrt{q^2-1} + 2\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}.$$

由于 $p^2 > 2\sqrt{p^2-1}, q^2 > 2\sqrt{q^2-1}$ 和 $p^2q^2-p^2-q^2+2 > 2\sqrt{p^2q^2-p^2-q^2+1} = 2\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}$，我们有

$$p^2+q^2+p^2q^2-p^2-q^2+2+2 > 2+2\sqrt{p^2-1}+2\sqrt{q^2-1}+2\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}.$$

因此，

$$|V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G)). \tag{3}$$

因此，$\mathcal{B}(G)$ 是次能量的。

我们有 $E(K_{|V(\mathcal{B}(G))|}) = E(K_{p^2q^2+4}) = 2(p^2q^2+4-1) = 2p^2q^2+6 > p^2q^2+4 = |V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G))$（使用 (3)）。因此，$\mathcal{B}(G)$ 不是超能量的。

此外，$LE(K_{p^2q^2+4}) = LE^+(K_{p^2q^2+4}) = 2p^2q^2+6$。根据定理 5.8，我们有 $LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = \frac{2p^4q^4+32}{p^2q^2+4}$。现在，

$$\begin{aligned} LE(K_{p^2q^2+4}) - LE(\mathcal{B}(G)) &= LE^+(K_{p^2q^2+4}) - LE^+(\mathcal{B}(G)) \\ &= 2p^2q^2+6 - \frac{2p^4q^4+32}{p^2q^2+4} = \frac{14p^2q^2-8}{p^2q^2+4} > 0. \end{aligned}$$

因此，$LE^+(K_{p^2q^2+4}) = LE(K_{p^2q^2+4}) > LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G))$。因此，$\mathcal{B}(G)$ 既不是 L-超能量的，也不是 Q- 超能量的。

我们有 $E_{CN}(K_{p^2q^2+4}) = 2(p^2q^2+4-1)(p^2q^2+4-2) = (2p^2q^2+6)(p^2q^2+2) > 2p^2q^2-8 = E_{CN}(\mathcal{B}(G))$（利用定理 5.8）。因此，$\mathcal{B}(G)$ 不是 CN-超能量的。这就完成了证明。■

定理 5.10。 如果 G 是一个阶为 pq 的循环群，其中 p 和 q 是满足 $p < q$的两个素数，则$E(\mathcal{B}(G)) < LE(\mathcal{B}(G))$。

证明。 根据定理 5.8，我们得到 $E(\mathcal{B}(G)) = 2 + 2\sqrt{p^2-1}(1+\sqrt{q^2-1}) + 2\sqrt{q^2-1}$ 和 $LE(\mathcal{B}(G)) = \frac{2p^4q^4+32}{p^2q^2+4}$。此外，由定理 5.9，我们有 $|V(\mathcal{B}(G))| = p^2q^2+4 > E(\mathcal{B}(G))$。现在，对于所有 p, q，我们有

$$\begin{aligned} LE(\mathcal{B}(G)) - |V(\mathcal{B}(G))| &= \frac{2p^4q^4+32}{p^2q^2+4} - p^2q^2 + 4 \\ &= \frac{p^4q^4-8p^2q^2+16}{p^2q^2+4} = \frac{p^2q^2(p^2q^2-8)+16}{p^2q^2+4} > 0. \end{aligned}$$

因此，$LE(\mathcal{B}(G)) > |V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G))$。 ■

定理 5.11. 若 G 是阶为 p^2q的循环群，其中 p 和 q 是两个不同素数，则

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{B}(G)) = \Big\{(0)^{p^4q^2-6}, (\pm 1)^1, \left(\pm\sqrt{p^2-1}\right)^1, \left(\pm\sqrt{q^2-1}\right)^1, \left(\pm p\sqrt{p^2-1}\right)^1, \left(\pm\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}\right)^1, \left(\pm p\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}\right)^1\Big\},$$

$$\text{L-spec}(\mathcal{B}(G)) = \{(0)^6, (1)^{p^4q^2-6}, (2)^1, (p^2)^1, (q^2)^1, (p^4-p^2+1)^1, (p^2q^2-p^2-q^2+2)^1, (p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2+1)^1\} = \text{Q-spec}(\mathcal{B}(G))$$

以及CN谱($\mathcal{B}(G)$) $= \{(0)^7, (-1)^{p^4q^2-6}, (p^2-2)^1, (q^2-2)^1, (p^4-p^2-1)^1, (p^2q^2-p^2-q^2)^1, (p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2-1)^1\}$。

证明. 由定理 2.3，得到 $\mathcal{B}(G) = K_2 \sqcup K_{1,p^2-1} \sqcup K_{1,p^4-p^2} \sqcup K_{1,q^2-1} \sqcup K_{1,p^2q^2-p^2-q^2+1} \sqcup K_{1,p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2}$. 现在，根据引理5.1，得到

$$\mathrm{Spec}(K_2) = \{(\pm 1)^1\}, \mathrm{Spec}(K_{1,p^2-1}) = \left\{(0)^{p^2-2}, (\pm\sqrt{p^2-1})^1\right\},$$
$$\mathrm{Spec}(K_{1,p^4-p^2}) = \left\{(0)^{p^4-p^2-1}, (\pm p\sqrt{p^2-1})^1\right\}, \mathrm{Spec}(K_{1,q^2-1}) = \left\{(0)^{q^2-2}, (\pm\sqrt{q^2-1})^1\right\},$$
$$\mathrm{Spec}(K_{1,p^2q^2-p^2-q^2+1}) = \left\{(0)^{p^2q^2-p^2-q^2}, (\pm\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)})^1\right\}$$

以及谱($K_{1,p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2}$) $= \left\{(0)^{p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2-1}, (\pm p\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)})^1\right\}$.

由于 Spec($\mathcal{B}(G)$) 是上述多重集的并集，因此我们得到 Spec($\mathcal{B}(G)$) 的所需表达式。此外，由引理5.1可得

$$\text{L-spec}(K_2) = \{(0)^1, (2)^1\}, \text{L-spec}(K_{1,p^2-1}) = \left\{(0)^1, (1)^{p^2-2}, (p^2)^1\right\},$$
$$\text{L-spec}(K_{1,p^4-p^2}) = \left\{(0)^1, (1)^{p^4-p^2-1}, (p^4-p^2+1)^1\right\}, \text{L-spec}(K_{1,q^2-1}) = \left\{(0)^1, (1)^{q^2-2}, (q^2)^1\right\},$$
$$\text{L-spec}(K_{1,p^2q^2-p^2-q^2+1}) = \left\{(0)^1, (1)^{p^2q^2-p^2-q^2}, (p^2q^2-p^2-q^2+2)^1\right\}$$

以及拉普拉斯谱($K_{1,p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2}$) $= \left\{(0)^1, (1)^{p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2-1}, (p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2+1)^1\right\}$。

由于拉普拉斯谱($\mathcal{B}(G)$) 是上述多重集的并集，我们得到拉普拉斯谱($\mathcal{B}(G)$) 的所需表达式，进而得到无符号拉普拉斯谱($\mathcal{B}(G)$) 的表达式。此外，我们有

$$\text{CN-spec}(K_2) = \{(0)^2\}, \text{CN-spec}(K_{1,p^2-1}) = \left\{(0)^1, (-1)^{p^2-2}, (p^2-2)^1\right\},$$
$$\text{CN-spec}(K_{1,p^4-p^2}) = \left\{(0)^1, (-1)^{p^4-p^2-1}, (p^4-p^2-1)^1\right\},$$
$$\text{CN-spec}(K_{1,q^2-1}) = \left\{(0)^1, (-1)^{q^2-2}, (q^2-2)^1\right\},$$
$$\text{CN-spec}(K_{1,p^2q^2-p^2-q^2+1}) = \left\{(0)^1, (-1)^{p^2q^2-p^2-q^2}, (p^2q^2-p^2-q^2)^1\right\}$$

以及 CN谱($K_{1,p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2}$) $=$

$$\left\{(0)^1, (-1)^{p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2-1}, (p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2-1)^1\right\}.$$

由于 CN谱($\mathcal{B}(G)$) 是上述多重集的并集，我们得到 CN谱($\mathcal{B}(G)$) 的所需表达式。

■

定理 5.12. 若 G 是一个阶为 p^2q的循环群，其中 p 和 q 是两个不同素数，则$E(\mathcal{B}(G)) = 2+2\sqrt{p^2-1}((1+p)(1+\sqrt{q^2-1}))\overline{+2\sqrt{q^2-1}}$, $LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = \frac{2p^8q^4+72}{p^4q^2+6}$和$E_{CN}(\mathcal{B}(G)) = 2p^4q^2$ ~~-12~~。

证明。 由定理 5.11 以及 $E(\mathcal{B}(G))$ 和 $E_{CN}(\mathcal{B}(G))$ 的定义可得

$$E(\mathcal{B}(G)) = 2 + 2\sqrt{p^2-1} + 2\sqrt{q^2-1} + 2p\sqrt{p^2-1} + 2\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)} + 2p\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}$$

and $E_{CN}(\mathcal{B}(G)) = (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{(p^4q^2-6)\text{-times}}) + p^2 - 2 + q^2 - 2 + p^4 - p^2 - 1 + p^2q^2 - p^2 - q^2 + p^4q^2 - p^2q^2 - p^4 + p^2 - 1.$

因此，我们得到了 $E\ \mathcal{B}\ G$ 和 $E_{CN}\ \mathcal{B}\ G$ 所需的表达式。 （（））

此外，根据定理 5.11 和定理 2.3，我们有

拉普拉斯谱($\mathcal{B}(G)$) = 无符号拉普拉斯谱($\mathcal{B}(G)$) = $\{(0)^6, (1)^{p^4q^2-6}, (2)^1, (p^2)^1, (q^2)^1, (p^4 - p^2 + 1)^1, (p^2q^2 - p^2 - q^2 + 2)^1, (p^4q^2 - p^2q^2 - p^4 + p^2 + 1)^1\}$和 $\binom{2m}{n} = \frac{2p^4q^2}{p^4q^2+6}$。现在，$|0 - \frac{2p^4q^2}{p^4q^2+6}| = \frac{2p^4q^2}{p^4q^2+6}$，$|1 - \frac{2p^4q^2}{p^4q^2+6}| = \frac{p^4q^2-6}{p^4q^2+6}$，$|2 - \frac{2p^4q^2}{p^4q^2+6}| = \frac{12}{p^4q^2+6}$，$|p^2 - \frac{2p^4q^2}{p^4q^2+6}| = \frac{p^6q^2+6p^2-2p^4q^2}{p^4q^2+6}$，$|q^2 - \frac{2p^4q^2}{p^4q^2+6}| = \frac{p^4q^4+6q^2-2p^4q^2}{p^4q^2+6}$，$|(p^4 - p^2 + 1) - \frac{2p^4q^2}{p^4q^2+6}| = \frac{p^8q^2-p^6q^2-p^4q^2+6p^4-6p^2+6}{p^4q^2+6}$，$|p^2q^2 - p^2 - q^2 + 2) - \frac{2p^4q^2}{p^4q^2+6}| = \frac{p^6q^4-p^6q^2-p^4q^4+6p^2q^2-6p^2-6q^2+12}{p^4q^2+6}$ 和 $|(p^4q^2 - p^2q^2 - p^4 + p^2 + 1) - \frac{2p^4q^2}{p^4q^2+6}| = \frac{p^8q^4-p^6q^4-p^8q^2+p^6q^2+5p^4q^2-6p^2q^2-6p^4+6p^2+6}{p^4q^2+6}$。因此，根据（无符号）拉普拉斯能量的定义，我们有

$$\begin{aligned} LE(\mathcal{B}(G)) &= LE^+(\mathcal{B}(G)) \\ &= 6 \times \frac{2p^4q^2}{p^4q^2+6} + (p^4q^2 - 6)\frac{p^4q^2-6}{p^4q^2+6} + \frac{12}{p^4q^2+6} + \frac{p^6q^2+6p^2-2p^4q^2}{p^4q^2+6} \\ &\quad + \frac{p^4q^4+6q^2-2p^4q^2}{p^4q^2+6} + \frac{p^8q^2-p^6q^2-p^4q^2+6p^4-6p^2+6}{p^4q^2+6} \\ &\quad + \frac{p^6q^4-p^6q^2-p^4q^4+6p^2q^2-6p^2-6q^2+12}{p^4q^2+6} \\ &\quad + \frac{p^8q^4-p^6q^4-p^8q^2+p^6q^2+5p^4q^2-6p^2q^2-6p^4+6p^2+6}{p^4q^2+6}. \end{aligned}$$

因此，我们得到了所需的表达式。 ■

定理 5.13. 若 G是一个阶为 p^2q的循环群，其中 p和 q 是两个不同素数，则 $\mathcal{B}(G)$是次能量的，但不是超能量的、*L*-超能量的、*Q*-超能量的和*CN*-超能量的。

证明。根据定理 2.3 和定理 5.12，我们有 $|V(\mathcal{B}(G))| = p^4q^2+6$ 和 $E(\mathcal{B}(G)) = 2+2\sqrt{p^2-1}+2\sqrt{q^2-1}+2p\sqrt{p^2-1}+2\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}+2p\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}$。由于 $p^2 > 2\sqrt{p^2-1}, q^2 > 2\sqrt{q^2-1}$, $p^4 - p^2 + 1 > 2\sqrt{p^4-p^2} = 2p\sqrt{p^2-1}$, $p^2q^2 - p^2 - q^2 + 2 > 2\sqrt{p^2q^2 - p^2 - q^2 + 1} = 2\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}$ 和 $p^4q^2 - p^2q^2 - p^4 + p^2 + 1 > 2\sqrt{p^4q^2 - p^2q^2 - p^4 + p^2} = 2p\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}$，我们有

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 + p^4 - p^2 + 1 + p^2q^2 - p^2 - q^2 + 2 + p^4q^2 - p^2q^2 - p^4 + p^2 + 1 + 2 \\ > 2 + 2\sqrt{p^2-1} + 2\sqrt{q^2-1} + 2p\sqrt{p^2-1} + 2\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)} \\ + 2p\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}. \end{aligned}$$

因此，

$$|V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G)). \tag{4}$$

因此， $\mathcal{B}(G)$ 是次能量的。

我们有 $E(K_{|V(\mathcal{B}(G))|}) = E(K_{p^4q^2+6}) = 2(p^4q^2 + 6 - 1) = 2p^4q^2 + 10 > p^4q^2 + 6 = |V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G))$（利用 (4)）。因此， $\mathcal{B}(G)$ 不是超能量的。

此外， $LE(K_{p^4q^2+6}) = LE^+(K_{p^4q^2+6}) = 2p^4q^2 + 10$。由定理 5.12 可得 $LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = \frac{2p^8q^4+72}{p^4q^2+6}$。现在，

$$\begin{aligned} LE(K_{p^4q^2+6}) - LE(\mathcal{B}(G)) &= LE^+(K_{p^4q^2+6}) - LE^+(\mathcal{B}(G)) \\ &= 2p^4q^2 + 10 - \frac{2p^8q^4+72}{p^4q^2+6} = \frac{22p^4q^2-12}{p^4q^2+6} > 0. \end{aligned}$$

因此， $LE^+(K_{p^4q^2+6}) = LE(K_{p^4q^2+6}) > LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G))$。因此， $\mathcal{B}(G)$ 既不是 L-超能量的，也不是 Q-超能量的。

我们有 $E_{CN}(K_{p^4q^2+6}) = 2(p^4q^2 + 6 - 1)(p^4q^2 + 6 - 2) = (2p^4q^2 + 10)(p^4q^2 + 4) > 2p^4q^2 - 12 = E_{CN}(\mathcal{B}(G))$（根据定理 5.12）。因此， $\mathcal{B}(G)$ 不是 CN-超能量。这就完成了证明。■

定理5.14。 如果 G 是阶为 p^2q 的循环群，其中 p 和 q 是两个不同素数，那么 $E(\mathcal{B}(G)) < LE(\mathcal{B}(G))$。

证明。 根据定理 5.12，我们得到 $E(\mathcal{B}(G)) = 2 + 2\sqrt{p^2-1}(\overline{(1+p)}(1+\sqrt{q^2-1})) + \overline{2\sqrt{q^2}} - 1$ 以及$\overline{LE(\mathcal{B}(G))} = \frac{2p^8q^4+72}{p^4q^2+6}$。此外，根据定理 5.13，我们有 $|V(\mathcal{B}(G))| = p^4q^2+6 > E(\mathcal{B}(G))$。现在，对于所有 p，$q \geq 2$，我们有

$$\begin{aligned} LE(\mathcal{B}(G)) - |V(\mathcal{B}(G))| &= \frac{2p^8q^4+72}{p^4q^2+6} - p^4q^2 + 6 \\ &= \frac{p^8q^4 - 12p^4q^2 + 36}{p^4q^2+6} = \frac{p^4q^2(p^4q^2-12)+36}{p^4q^2+6} > 0. \end{aligned}$$

因此， $LE(\mathcal{B}(G)) > |V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G))$。 ■

定理 5.15。 若 G 是一个阶为 p^2q^2 的循环群，其中 p 和 q 是满足 $p < q$的两个素数，则

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}(\mathcal{B}(G)) = \Big\{ &(0)^{p^4q^4-9}, (\pm 1)^1, \left(\pm\sqrt{p^2-1}\right)^1, \left(\pm\sqrt{q^2-1}\right)^1, \left(\pm p\sqrt{p^2-1}\right)^1, \\ &\left(\pm q\sqrt{q^2-1}\right)^1, \left(\pm\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}\right)^1, \left(\pm p\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}\right)^1, \\ &\left(\pm q\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}\right)^1, \left(\pm pq\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}\right)^1 \Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{L-spec}(\mathcal{B}(G)) = \Big\{ &(0)^9, (1)^{p^4q^4-9}, (2)^1, (p^2)^1, (q^2)^1, (p^4-p^2+1)^1, (q^4-q^2+1)^1, \\ &(p^2q^2-p^2-q^2+2)^1, (p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2+1)^1, \\ &(p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2+1)^1, (p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2+1)^1 \Big\} \\ = \text{Q-spec}(\mathcal{B}(G)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{and } \text{CN-spec}(\mathcal{B}(G)) = \Big\{ &(0)^{10}, (-1)^{p^4q^4-9}, (p^2-2)^1, (q^2-2)^1, (p^4-p^2-1)^1, \\ &(q^4-q^2-1)^1, (p^2q^2-p^2-q^2)^1, (p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2-1)^1, \\ &(p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2-1)^1, (p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2-1)^1 \Big\}. \end{aligned}$$

证明。 根据定理 2.4，我们有 $\mathcal{B}(G) = K_2 \sqcup K_{1,\ p^2-1} \sqcup K_{1,\ p^4-p^2} \sqcup K_{1,\ q^2-1} \sqcup K_{1,\ q^4-q^2} \sqcup K_{1,\ p^2q^2-p^2-q^2+1} \sqcup K_{1,\ p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2} \sqcup K_{1,\ p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2} \sqcup K_{1,\ p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2}$。现在，根据引理5.1，我们得到

$$\mathrm{Spec}(K_2) = \{(\pm 1)^1 \quad \mathrm{Spec}(K_{1,p^2-1}) = \left\{(0)^{p^2-2}, (\pm\sqrt{p^2-1})^1\right\},$$

$$\mathrm{Spec}(K_{1,p^4-p^2}) = \left\{(0)^{p^4-p^2-1}, (\pm p\sqrt{p^2-1})^1\right\}, \mathrm{Spec}(K_{1,q^2-1}) = \left\{(0)^{q^2-2}, (\pm\sqrt{q^2-1})^1\right\},$$

$$\mathrm{Spec}(K_{1,q^4-q^2}) = \left\{(0)^{q^4-q^2-1}, (\pm q\sqrt{q^2-1})^1\right\},$$

$$\mathrm{Spec}(K_{1,p^2q^2-p^2-q^2+1}) = \left\{(0)^{p^2q^2-p^2-q^2}, (\pm\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)})^1\right\},$$

$$\mathrm{Spec}(K_{1,p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2}) = \left\{(0)^{p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2-1}, (\pm q\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)})^1\right\},$$

$$\mathrm{Spec}(K_{1,p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2}) = \left\{(0)^{p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2-1}, (\pm p\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)})^1\right\}$$

以及$\mathrm{Spec}(K_{p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2} = \left\{(0)^{p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2-1}, (\pm\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)})^1\right\}$。

由于 $\mathrm{Spec}(\mathcal{B}(G))$ 是上述多重集的并集，因此我们得到 $\mathrm{Spec}(\mathcal{B}(G))$ 的所需表达式。此外，根据引理5.1，我们得到

$$\text{L-spec}(K_2) = \{(0)^1, (2)^1\},\ \text{L-spec}(K_{1,p^2-1}) = \left\{(0)^1, (1)^{p^2-2}, (p^2)^1\right\},$$
$$\text{L-spec}(K_{1,p^4-p^2}) = \left\{(0)^1, (1)^{p^4-p^2-1}, (p^4-p^2+1)^1\right\},\ \text{L-spec}(K_{1,q^2-1}) = \left\{(0)^1, (1)^{q^2-2}, (q^2)^1\right\},$$
$$\text{L-spec}(K_{1,q^4-q^2}) = \left\{(0)^1, (1)^{q^4-q^2-1}, (q^4-q^2+1)^1\right\},$$
$$\text{L-spec}(K_{1,p^2q^2-p^2-q^2+1}) = \left\{(0)^1, (1)^{p^2q^2-p^2-q^2}, (p^2q^2-p^2-q^2+2)^1\right\},$$

$$\text{L-spec}(K_{1,p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2}) = \left\{(0)^1, (1)^{p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2-1}, (p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2+1)^1\right\},$$

$$\text{L-spec}(K_{1,p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2}) = \left\{(0)^1, (1)^{p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2-1}, (p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2+1)^1\right\}$$

且拉普拉斯谱$(K_{1,p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2}) =$

$$\left\{(0)^1, (1)^{p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2-1}, (p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2+1)^1\right\}.$$

由于 L-spec($\mathcal{B}(G)$) 是上述多重集的并集，因此可得到 L-spec($\mathcal{B}(G)$) 的所需表达式，进而得到 Q-spec($\mathcal{B}(G)$) 的表达式。进一步地，我们有

$$\text{CN-spec}(K_2) = \{(0)^2\},\ \text{CN-spec}(K_{1,p^2-1}) = \left\{(0)^1, (-1)^{p^2-2}, (p^2-2)^1\right\},$$
$$\text{CN-spec}(K_{1,p^4-p^2}) = \left\{(0)^1, (-1)^{p^4-p^2-1}, (p^4-p^2-1)^1\right\},$$
$$\text{CN-spec}(K_{1,q^2-1}) = \left\{(0)^1, (-1)^{q^2-2}, (q^2-2)^1\right\},$$
$$\text{CN-spec}(K_{1,q^4-q^2}) = \left\{(0)^1, (-1)^{q^4-q^2-1}, (q^4-q^2-1)^1\right\},$$
$$\text{CN-spec}(K_{1,p^2q^2-p^2-q^2+1}) = \left\{(0)^1, (-1)^{p^2q^2-p^2-q^2}, (p^2q^2-p^2-q^2)^1\right\},$$

$$\text{CN-spec}(K_{1,p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2}) = \left\{(0)^1, (-1)^{p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2-1}, (p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2-1)^1\right\},$$

$$\text{CN-spec}(K_{1,p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2}) = \left\{(0)^1, (-1)^{p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2-1}, (p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2-1)^1\right\}$$

$$\text{and CN-spec}(K_{1,p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2}) = \left\{(0)^1, (-1)^{p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2-1}, (p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2-1)^1\right\}.$$

由于 CN-spec($\mathcal{B}(G)$) 是上述多重集的并集，因此可得到 CN-spec($\mathcal{B}(G)$) 的所需表达式。

■

定理 5.16. 若 G 是阶为 p^2q^2 的循环群，其中 p 和 q 是满足 $p<q$ 的两个素数，则 $E(\mathcal{B}(G)) = 2+2(1+p)\sqrt{p^2-1}+2(1+q)\sqrt{q^2-1}+2(1+p+q+pq)\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}$，$LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = \frac{2p^8q^8+162}{p^4q^4+9}$，且 $E_{CN}(\mathcal{B}(G)) = 2p^4q^4-18$。

证明。由定理 5.15 以及 $E(\mathcal{B}(G))$ 和 $E_{CN}(\mathcal{B}(G))$ 的定义可得

$$E(\mathcal{B}(G)) = 2+2\sqrt{p^2-1}+2\sqrt{q^2-1}+2p\sqrt{p^2-1}+2q\sqrt{q^2-1}+2\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}$$
$$+2p\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}+2q\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}+2pq\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}$$

$$\text{and } E_{CN}(\mathcal{B}(G)) = (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{(p^4q^4-9)\text{-times}})+p^2-2+q^2-2+p^4-p^2-1+q^4-q^2-1$$
$$+p^2q^2-p^2-q^2+p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2-1+p^2q^4$$
$$-p^2q^2-q^4+q^2-1+p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2-1.$$

因此，我们得到了 $E(\mathcal{B}(G))$ 和 $E_{CN}(\mathcal{B}(G))$ 所需的表达式。

此外，由定理 5.15 和定理 2.4 可得
拉普拉斯谱($\mathcal{B}(G)$) =无符号拉普拉斯谱($\mathcal{B}(G)$) = $\{(0)^9,(1)^{p^4q^4-9},(2)^1,(p^2)^1,(q^2)^1,(p^4-p^2+1)^1,(q^4-q^2+1)^1,(p^2q^2-p^2-q^2+2)^1,(p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2+1)^1,(p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2+1)^1,(p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2+1)^1\}$和 $\frac{2m}{n}=\frac{2p^4q^4}{p^4q^4+9}$。现在，$|0-\frac{2p^4q^4}{p^4q^4+9}|=\frac{2p^4q^4}{p^4q^4+9}$, $|1-\frac{2p^4q^4}{p^4q^4+9}|=\frac{p^4q^4-9}{p^4q^4+9}$, $|2-\frac{2p^4q^4}{p^4q^4+9}|=\frac{18}{p^4q^4+9}$, $|p^2-\frac{2p^4q^4}{p^4q^4+9}|=\frac{p^6q^4+9p^2-2p^4q^4}{p^4q^4+9}$, $|q^2-\frac{2p^4q^4}{p^4q^4+9}|=\frac{p^4q^6+9q^2-2p^4q^4}{p^4q^4+9}$, $|(p^4-p^2+1)-\frac{2p^4q^4}{p^4q^4+9}|=\frac{p^8q^4-p^6q^4-p^4q^4+9p^4-9p^2+9}{p^4q^4+9}$, $|(q^4-q^2+1)-\frac{2p^4q^4}{p^4q^4+9}|=\frac{p^4q^8-p^4q^6-p^4q^4+9q^4-9q^2+9}{p^4q^4+9}$, $|(p^2q^2-p^2-q^2+2)-\frac{2p^4q^4}{p^4q^4+9}|=\frac{p^6q^6-p^6q^4-p^4q^6+9p^2q^2-9p^2-9q^2+18}{p^4q^4+9}$, $|(p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2+1)-\frac{2p^4q^4}{p^4q^4+9}|=\frac{p^6q^8-p^6q^6-p^4q^8+p^4q^6-p^4q^4+9p^2q^4-9p^2q^2-9q^4+9q^2+9}{p^4q^4+9}$, $|(p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2+1)-\frac{2p^4q^4}{p^4q^4+9}|=\frac{p^8q^6-p^6q^6-p^8q^4+p^6q^4-p^4q^4+9p^4q^2-9p^2q^2-9p^4+9p^2+9}{p^4q^4+9}$和 $|(p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2+1)-\frac{2p^4q^4}{p^4q^4+9}|=\frac{p^8q^8-p^6q^8-p^8q^6+p^6q^6+8p^4q^4-9p^2q^4-9p^4q^2+9p^2q^2+9}{p^4q^4+9}$。因此，根据（无符号）拉普拉斯能量的定义，我们有

$$\begin{aligned}
LE(\mathcal{B}(G)) &= LE^+(\mathcal{B}(G))\\
&= 9\times\frac{2p^4q^4}{p^4q^4+9}+(p^4q^4-9)\frac{p^4q^4-9}{p^4q^4+9}+\frac{18}{p^4q^4+9}+\frac{p^6q^4+9p^2-2p^4q^4}{p^4q^4+9}\\
&\quad+\frac{p^4q^6+9q^2-2p^4q^4}{p^4q^4+9}+\frac{p^8q^4-p^6q^4-p^4q^4+9p^4-9p^2+9}{p^4q^4+9}\\
&\quad+\frac{p^4q^8-p^4q^6-p^4q^4+9q^4-9q^2+9}{p^4q^4+9}\\
&\quad+\frac{p^6q^6-p^6q^4-p^4q^6+9p^2q^2-9p^2-9q^2+18}{p^4q^4+9}\\
&\quad+\frac{p^6q^8-p^6q^6-p^4q^8+p^4q^6-p^4q^4+9p^2q^4-9p^2q^2-9q^4+9q^2+9}{p^4q^4+9}\\
&\quad+\frac{p^8q^6-p^6q^6-p^8q^4+p^6q^4-p^4q^4+9p^4q^2-9p^2q^2-9p^4+9p^2+9}{p^4q^4+9}\\
&\quad+\frac{p^8q^8-p^6q^8-p^8q^6+p^6q^6+8p^4q^4-9p^2q^4-9p^4q^2+9p^2q^2+9}{p^4q^4+9}.
\end{aligned}$$

因此，我们得到了所需的表达式。 ■

定理 5.17. 若 G 是阶为 p^2q^2 的循环群，其中 p 和 q 是任意两个不同素数，则 $\mathcal{B}(G)$是次能量的，但不是超能量、*L*-超能量、*Q*-超能量或 *CN*-超能量的。

证明. 根据定理 2.4 和定理 5.16，我们有 $|V(\mathcal{B}(G))|=p^4q^4+9$和 $E(\mathcal{B}(G))=2+2\sqrt{p^2-1}+2\sqrt{q^2-1}+2p\sqrt{p^2-1}+2q\sqrt{q^2-1}+2\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}+2p\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}+2q\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}+2pq\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}$。由于 $p^2>2\sqrt{p^2-1}$, $q^2>2\sqrt{q^2-1}$, $p^4-p^2+1>2\sqrt{p^4-p^2}=2p\sqrt{p^2-1}$, $q^4-q^2+1>2\sqrt{q^4-q^2}=2q\sqrt{q^2-1}$, $p^2q^2-p^2-q^2+2>2\sqrt{p^2q^2-p^2}-q^2+1=2\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}$, $p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2+1>2\sqrt{p^4q^2-p^2q^2-p^4+p^2}=2p\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}$, $p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2+1>2\sqrt{p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2}=2q\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}$ 和 $p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2+1>2\sqrt{p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2}=2pq\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}$，我们有

$$\begin{aligned}
&p^2+q^2+p^4-p^2+1+q^4-q^2+1+p^2q^2-p^2-q^2+2+p^4q^2-p^2q^2-p^4\\
&\quad+p^2+1+p^2q^4-p^2q^2-q^4+q^2+1+p^4q^4-p^2q^4-p^4q^2+p^2q^2+1+2\\
&\quad>2+2\sqrt{p^2-1}+2\sqrt{q^2-1}+2p\sqrt{p^2-1}+2q\sqrt{q^2-1}+2\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}\\
&\quad\quad+2p\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}+2q\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}+2pq\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}.
\end{aligned}$$

因此，

$$|V(\mathcal{B}(G))|>E(\mathcal{B}(G)). \tag{5}$$

从而，$\mathcal{B}(G)$是次能量的。

我们有 $E(K_{|V(\mathcal{B}(G))|})=E(K_{p^4q^4+9})=2(p^4q^4+9-1)=2p^4q^4+16>p^4q^4+9=|V(\mathcal{B}(G))|>E(\mathcal{B}(G))$（利用（5））。因此，$\mathcal{B}(G)$ 不是超能量图。

此外，$LE(K_{p^4q^4+9}) = LE^+(K_{p^4q^4+9}) = 2p^4q^4 + 16$。根据定理 5.12，我们有 $LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) = \frac{2p^8q^8+162}{p^4q^4+9}$。现在，

$$\begin{aligned} LE(K_{p^4q^4+9}) - LE(\mathcal{B}(G)) &= LE^+(K_{p^4q^4+9}) - LE^+(\mathcal{B}(G)) \\ &= 2p^4q^4 + 16 - \frac{2p^8q^8+162}{p^4q^4+9} = \frac{34p^4q^4-18}{p^4q^4+9} > 0. \end{aligned}$$

因此，$LE^+(K_{p^4q^4+9}) = LE(K_{p^4q^4+9}) > LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G))$。故 $\mathcal{B}(G)$ 既不是 L-超能量的，也不是 Q-超能量的。

我们有 $E_{CN}(K_{p^4q^4+9}) = 2(p^4q^4+9-1)(p^4q^4+9-2) = (2p^4q^4+16)(p^4q^4+7) > 2p^4q^4 - 18 = E_{CN}(\mathcal{B}(G))$（利用定理 5.16）。因此，$\mathcal{B}(G)$ 不是 CN-超能量的。证明完毕。■

定理 5.18. 若 G 是阶为 p^2q^2 的循环群，其中 p 与 q 是满足 $p < q$ 的两个素数，则 $E(\mathcal{B}(G)) < LE(\mathcal{B}(G))$。

证明。由定理 5.16，我们得到 $E(\mathcal{B}(G)) = 2 + 2(1+p)\sqrt{p^2 - \overline{1+2(1}+q)}\sqrt{q^2 - 1 \overline{+2(1}} + p + q + pq)\sqrt{(p^2-1)(q^2-1)}$ 以及 $LE(\mathcal{B}(G)) = \frac{2p^8q^8+162}{p^4q^4+9}$。~~此外，~~由定理 5.17，我们有 $|V(\mathcal{B}(G))| = p^4q^4 + 9 > E(\mathcal{B}(G))$。现在，对所有 $p, q \geq 2$，我们有

$$LE(\mathcal{B}(G)) - |V(\mathcal{B}(G))| = \frac{2p^8q^8+162}{p^4q^4+9} - p^4q^4 + 9 = \frac{p^8q^8 - 18p^4q^4 + 81}{p^4q^4+9} = \frac{p^4q^4(p^4q^4-18)+81}{p^4q^4+9} > 0.$$

因此，$LE(\mathcal{B}(G)) = LE^+(\mathcal{B}(G)) > |V(\mathcal{B}(G))| > E(\mathcal{B}(G))$。■

我们在结束本节时指出，若 G 是阶为 p^n, pq, p^2q 且 p^2q^2 的循环群，对任意两个不同素数 p 和 q 以及 $n \geq 1$，则

(a) $\mathcal{B}(G)$不是整数谱，但属于 L-整数谱、Q-整数谱和CN-整数谱。(b) $\mathcal{B}(G)$是次能量的，但既不是超能量的，也不是 L-超能量的、Q-超能量的或 CN-超能量的。(c) $\mathcal{B}(G)$满足 E-LE 猜想。

对于任意循环群也得出相同结论，或许会很有意思。

References

[1] Abreu, N.、Cardoso, D. M.、Gutman, I.、Martins, E. A. 和 Robbiano, M. 无符号拉普拉斯能量的界，*Linear Algebra and its Applications*，**435**(10)，2365–2374，2011。[2] Alwardi, A.、Soner, N. D. 和 Gutman, I. 关于图的共同邻域能量，*Bulletin (Acad´mie Serbe* e e *Des Sciences Et Des Arts. Classe Des Sciences Math´matiques Et Naturelles. Sciences Math´matiques)* **36** 49 e , , –59，2011。[3] Alwardi, A.、Arsic, B.、Gutman, I.、Sonera, N.D. 公共邻域图及其能量，*Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics* **7** 2 1 8, 2012 , （） , –。

[4] Arunkumar, G.、Cameron, P. J.、Nath, R. K. 和 Selvaganesh, L. 群上的超图 I，*Graphs and Combinatorics*，**38**，文章编号 100，2022。[5] Cameron, P. J. 定义在群上的图，*International Journal of Group Theory*，**11**(2)，53–107，2022。[6] Cs ´ ´ ´ *Czechoslovak Mathematical Journal* **19** 241 247, akany, B. 1969 和 Pollak, G. 有限群的子群图，，，–。[7] Das, S.、Erfanian, A. 和 Nath, R. K. 关于定义在群上的二部图，*Journal of Algebra and Its Applications*，https://doi.org/10.1142/S0219498826501926。[8] Das, S.、Erfanian, A. 和 Nath, R. K. 子群生成二分图的Zagreb指数，*Discrete Mathematics, Algorithms and Applications* 10 1142 1793830925501411 , https://doi.org/ . /S 。[9] Das, S.、Erfanian, A. 和 Nath, R. K. 子群生成二分图的各种谱与能量，https://arxiv.org/abs/2601.04004。[10] Das, A. K.、Nath, R. K. 和 Pournaki, M. R. 有限群中交换性估计综述，*Southeast Asian Bulletin of Mathematics* **37** 2 161 180, 2013 , （） , -。

[11] Das, S. 和 Nath, R. K. 有限群的超交换图及其Zagreb指数，https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.11297。[12] Das, S.、Nongsiang, D. 和 Nath, R. K. 具有小亏格的有限群交换图的刻画，*Algebra and Discrete Mathematics*，**37**(2)，191-214，2024。[13] Das, S.、Sarkhel, A. 和 Nath, R. K. 有限群交换图与非交换图的Zagreb指数及Hansen-Vuki˘cevi´c猜想，*Palestine Journal of Mathematics*，**14**(1)，813-838，2025。[14] Das, S.、Nath R. K. 和 Shang, Y. 其交换共轭类图满足Hansen-Vuki˘cevi´c猜想的某些有限群，https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.03170。

[15] Devi, P. 和 Rajkumar, R. 群的子群包含图，https://arxiv.org/abs/1604.08259v1。[16] Dixon, J. D.，生成对称群的概率，*Mathematische Zeitschrift*，110，199-205，1969。[17] Dubose-Schmidt, H.、Galloy, M. D. 和 Wilson, D. L. 有限群中幂零对的计数：若干猜想，数学科学技术报告（MSTR），

132, 1992 132 。 _

[18]

https://scholar.rose-hulman.edu/math mstr/ Fulman, J. E.、Galloy, M. D.、Sherman, G. J. 和 Vanderkam, J. M. 有限群中幂零对的计数，*Combinatoria* **54** 161 178, 2000 ，，-。[19] Gutman, I. 图

能量，*Ber. Math-Statist. Sekt. Forschungsz. Graz*，103，1–22，1978。[20] Gutman, I. 超能量图与低能图，*Zbornik Radova*，22，113–135，2011。[21] Gutman, I.、Abreu, N. M. M.、Vinagre, C. T. M.、Bonifacioa, A. S. 和 Radenkovic, S. 能量与拉普拉斯能量之间的关系，*MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*，59，343–354，2008。[22] Gutman, I. 和 Das, K. C. 第一 Zagreb 指数

30 *MATCH Communications in Mathematical and in* 年之后，，，-。[23]

Computer Chemistry **50** 83 92, 2004
Gutman, I. 和 Trinajsti´c, N. 交替烃的总 π电子能量，*Chemical Physics Letters*，17，535-538，1972。[24] Gutman, I. 和 Zhou, B. 图的拉普拉斯能量，*Linear Algebra and its Applications*，414(1)，29–37，2006。[25] Hansen, P. 和 Vuki˘cevi´c, D. Zagreb指数的比较，*Croatica Chemica Acta*，80(2)，165-168，2007。[26] Lewis, M. L. 与有限群中特征标次数和共轭类大小相关的图综述，*Rocky Mountain Journal of Mathematics* **38** 175 211, 2008 ，，–。[27] Liu, B. 关于比

较Zagreb指数的一个猜想，

Recent Results in the Theory of Randic Index Univ.，，，，页 –。[28] Liu, J. 和 *Kragujevac Kragujevac* 205 209, 2008
Liu, B. 关于能量与拉普拉斯能量之间的关系，*MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry* **61** 403 406, 2009 ，，–。[29] Liu, B. 和

You, Z. Zagreb指数比较综述，*MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry* **65** 581 593, 2011 ，，-。[30]

Madhumitha, S. 和 Naduvath, S. 从元素阶角度看群上的图：综述，*Discrete Mathematics, Algorithms and Applications* **16** 2330003, 2024 ，，文章编号。[31]
Mahtabi, M.、Erfanian, A. 和 Mahtabi, R. 与有限群相关联的二部图，*Asian-European Journal of Mathematics* **16** 10 2350185, 2023 ，（），文章编号。[32]

Mirzargar, M. 和 Ashrafi, A. 非交换图的若干基于距离的拓扑指标，*Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* **41** 4 515 526, 2012 ，（），-。[33] Nikoli

´ ´ ´ ´ 30 *Croatica Chemica* c, S.、Kova˘cevic, G.、*Acta* **76** 2 113 124, 2003
Ante Mili˘cevic 和 Trinajstic, N. Zagreb指数若干年之后，，（），-。[34] Patrick, D. M.、Sherman, G. J.、Sugar, C. A. 和 Wepsic, E. K. 生成循环群的概率是多少？，*Irish Mathematical Society Bulletin*，31，22–27，1993。[35] Rajkumar, R. 和 Devi, P. 群的子群可置换图的平面性，*Journal of Algebra and Its Applications* **13** 2014 1350112 ，（）文章编号。[36]

Salahshour, M. A. G 在$z\overset{G}{G}()\cong D_{2n}$时的交换共轭类图，*Mathematics Interdisciplinary Research*，1 379，–385，2020。[37] Salahshour, M. A. 和 Ashrafi, A. R. 有限群的交换共轭类图，*Algebraic Structures and Their Applications* **7** 13 145, 2020 ，，-。[38] Salahshour,

M. A. 和 Ashrafi, A. R. 有限 CA-群的交换共轭类图，*Khayyam Journal of Mathematics* **6** 108 ，，-118，2020。[39]

Sharma, M. 和 Nath, R. K. 有限群非交换图的无符号拉普拉斯能量及相关结果，*Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*，17(4)，2450060（68页）2025。[40] Stevanovic, D.、Stankovic, I. 和 Milosevic, M. 关于图的能量与拉普拉斯能量之间关系的进一步讨论，*MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*，61，395–401，2009。[41] Vuki˘cevi

´ M_1 M_2 *MATCH Communications* c, D. 和 Graovac, A. 无环分*in Mathematical and in Computer Chemistry* **57** 3 587 590, 2007
子的Zagreb与指数比较，，（），-。[42] Vuki˘cevi´c, D.、Gutman, I.、Furtula, B.、Andova, V. 和 Dimitrov, D. 关于比较Zagreb指数的若干观察，*MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*，66，627–645，2011。

S. Das Department of Mathematical Sciences Tezpur University Napaam-784028 Sonitpur Assam India. ，，，，，，，，，，，，，
Department of Mathematics Sibsagar University Joysagar-785665 Sibsagar Assam India.
Email address: shrabanidas904@gmail.comA. E

rfanian, Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, P.O. Box 1159-91775, Mashhad, Iran
Email address: erfanian@um.ac.ir

R. K. Nath, Department of Mathematical Sciences, Tezpur University, Napaam-784028, Sonitpur, Assam, India.
Email address: rajatkantinath@yahoo.com