arXiv:2602.07604v1 [math.CT] 7 Feb 2026

自由纤维化、松弛余极限与 Kan 延拓：适用于 (∞,2)-范畴

FERNANDO ABELLÁN、RUNE HAUGSENG 和 LOUIS MARTINI

摘要。本文第一部分研究 (∞,2)-范畴的纤维化。我们用某个方块为拉回这一条件，给出这类纤维化的一个简单刻画，并据此证明，在某些情况下，函子与部分（反）松弛变换构成的 (∞,2)-范畴保持纤维化。我们还描述了 (∞,2)-范畴的自由纤维化，包括仅要求基底中指定的 1-态射和 2-态射具有（余）笛卡尔提升的情形；并描述了沿任意函子从纤维化到此类部分纤维化的拉回函子的右伴随。本文第二部分将这些结果应用于研究 (∞,2)-范畴的余极限与 Kan 延拓。尤为重要的是，我们给出了 (∞,2)-范畴的部分（反）松弛极限和加权（余）极限的纤维化描述，并构造了部分松弛 Kan 延拓。除此之外，我们还给出了适用于 (∞,2)-范畴的、与模型无关的共终性版本，并简要讨论了可呈范的 (∞, 2)-范畴，将其刻画为 ∞-范畴预层的可及局部化。

目录

1. 引言 2 2. 预备知识 7 2.1. (∞,2)-范畴与 Gray 张量积 7 2.2. 带标记的 (∞, 2)-范畴 12 2.3. 带标记 Gray 张量与部分（反）松弛变换 16 2.4. 纤维化与直化等价 19 2.5. 松弛切片与锥 22 2.6. 带装饰的 (∞,2)-范畴 26 2.7. 带装饰的 Gray 张量积与（反）松弛变换 31 3. 带装饰的 (∞, 2)-范畴的纤维化 34 3.1. 部分纤维化 35 3.2. 带装饰的部分纤维化 36 3.3. (反)松弛箭头中的映射 43 3.4. 部分纤维化的刻画 46 3.5. 函子上的部分纤维化 50 3.6. ϵ-等价与 ϵ-余纤维化 53 4. (∞, 2)-范畴的自由纤维化与推前 59 4.1. 来自（反）松弛箭头的纤维化 59 4.2. 自由部分纤维化 64 4.3. 自由带装饰的部分纤维化 70 4.4. 带装饰的 (∞, 2)-范畴上的自由纤维化 73 1

4.5. 带装饰的 (∞, 2)-范畴的光滑性 76 4.6. 偏纤维化的推前 80 4.7. 纤维化的局部化 83 5. (∞, 2)-范畴中的（余）极限与 Kan 延拓 85 5.1. 松与反松（余）极限 86 5.2. (∞, 2)- 范畴中的加权（余）极限 89 5.3. 通过纤维化描述的 (∞, 2)- 范畴的（余）极限 94 5.4. （余）极限的存在性与保持性 99 5.5. 共终函子 102 5.6. Kan 延拓 107 5.7. 加权余极限的 Bousfield–Kan 公式 112 5.8. 自由余完备化 114 5.9. 可表的 (∞,2)-范畴 118 参考文献 121

1. 引言

随着我们对数学中同伦相干结构的理解不断加深，越来越明显的是，为了充分捕捉实践中遇到的某些现象，我们有必要超越如今已得到深入研究的 ∞-范畴领域，进入更高的范畴层次。本文将把注意力限定在下一个复杂度层次，即 (∞，2)-范畴；它们是经典 2-范畴或双范畴的同伦相干类比。

研究 (∞, 2)-范畴理论的一种方法，是将它们视为富化于 ∞-范畴的∞-范畴 [GH15, Hau15]。Hinich [Hin20]和 Heine[Hei23, Hei24]，最近广泛发展了富化 ∞-范畴理论，因此我们可以使用 Yoneda 引理、加权（余）极限和 Kan 延拓等工具。然而，从这一视角无法看见 (∞, 2)-范畴理论的一些重要方面：最值得注意的是，正如经典 2-范畴理论中众所周知的，我们可以利用 2-态射来定义许多构造的松弛版本，例如 Gray 张量积和松弛变换 [CM23, GHL21]。纤维化及其向函子的直化理论，在 ∞-范畴理论及其诸多应用的发展中发挥了极其重要的作用；但对于一般的充实而言，这一理论并无意义。不过，(∞, 2)-范畴有相应的理论[GHL24, AS23a, Nui24]；此外，纤维化的直化还使我们能够处理某些松弛现象 [HHLN23, AGH25]。

本文旨在进一步发展 (∞，2)-范畴的纤维化理论，并将这些关于纤维化的结果应用于相对自足地构建 (∞，2)-范畴的余极限与 Kan 延拓理论。具体而言，我们全面探讨了自由 纤维化，以及沿任意函子的纤维化推前（包括余自由 纤维化）；这使我们能够处理部分

（余）极限和 Kan 延拓的松弛版本，并将其与富集理论中的对应概念联系起来。

(∞, 2)-范畴的纤维化。(∞, 2)-范畴的余笛卡尔纤维化——为简洁地描述 (∞, 2)-纤维化的四种变差，我们将其称为 (0, 1)-纤维化——是一个函子 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$，其中 $\mathbb{E}$ 具有 p-余笛卡尔提升，用于提升 $\mathbb{B}$ 中的所有 1-态射；并且具有 p-笛卡尔提升，用于提升所有 2-态射（更精确的定义见 §2.4）。我们的第一个主要结果给出了此类纤维化的一种新[1] 刻画：某个由 (∞, 2)-范畴构成的方块是一个拉回。为陈述这一结果，我们需要考虑一种其中某些 1-态射和 2-态射被特别标出的 (∞, 2)-范畴；为避免与已有术语混淆，我们将这类对象称为带装饰的 (∞, 2)-范畴，而保留“带标记的”一词，用来指仅标记 1-态射的情形。

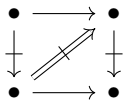
定理 A. 设 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 是一个 $(\infty, 2)$-范畴之间的函子，且 $\mathbb{E}^\diamond$ 是由 *1*-态射和 *2*-态射共同构成的 $\mathbb{E}$ 的装饰。当且仅当交换方块满足以下条件时，p 是一个 $(0,1)$-纤维化，其中这些装饰给出 $\mathbb{E}$ 中的 p-余笛卡尔 *1*-态射和 p-笛卡尔 *2*-态射：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{E}^\diamond) & \xrightarrow{\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(p)} & \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{B}) \\ {\scriptstyle \mathrm{ev}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_1} \\ \mathbb{E} & \xrightarrow[p]{} & \mathbb{B} \end{array}$$

是一个 $(\infty,2)$-范畴的拉回。

这里，$\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{E}^\diamond)$ 是 oplax 箭头（∞,2）-范畴 $\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{E})$ 的局部满子-（∞, 2）-范畴，其

▶ 对象是 $\mathbb{E}^\diamond$ 中带装饰的 1-态射，▶ 态射是 oplax 方块



包含一个装饰 2-态射。

我们在 §3.4中证明这个定理；事实上，我们更一般地证明了对所有四种变差部分 ϵ-纤维化，都存在这样一种刻画 $\epsilon \in \{0,1\}^{\times 2}$，即函子$p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 其中 $\mathbb{E}$ 仅具有由装饰所指定的某些 1-态射和 2-态射的（余）笛卡尔提升 $\mathbb{B}$。接下来，我们指出两个可由这一刻画轻易推出的有用结果：

推论 B. 设 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 是一个 $(0, 1)$-纤维化。那么函子

$$p_*\colon \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{K}, \mathbb{E})^{\mathrm{lax}} \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{K}, \mathbb{B})^{\mathrm{lax}},$$

[1]不过请注意，正如我们在 §3.6中讨论的，这一陈述也可以改述为通过正交条件刻画部分 (0，1)-纤维化；Loubaton 此前也曾在 (∞，∞)-范畴的背景下研究过这一条件 [Lou24，定理 3.2.2。24]。

由与 p 复合给出，对于任意 $(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{K}$ 都是如此。其余笛卡尔态射是这样的 *lax* 变换：它们在 $\mathbb{K}$ 的每个对象处的分量都是 p-余笛卡尔的，并且其所有松弛自然性方块都包含一个 p-笛卡尔 *2*-态射；其笛卡尔 *2*-态射则是在每个对象处的分量都是 p-笛卡尔的那些 *2*-态射。

推论 C. 对于任意$(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{A}$，目标函子

$$\mathrm{ev}_1 \colon \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{A}) \to \mathbb{A}$$

是一个$(0,1)$-纤维化。其余笛卡尔态射是源为等价的交换方块，而其笛卡尔 *2*-态射是源为等价的那些 *2*-态射。

我们在 §3.5中证明第一个陈述及其部分推广和带装饰的推广，使用的是我们在 §2.7中建立的 Gray 张量积和 lax 变换的带装饰版本。第二个陈述的推广版本已在 §4.1中得到证明；Gagna、Harpaz 和 Lanari 使用缩放单纯集合证明了该陈述 [GHL24，定理 3.0。7]对我们而言，这正是构造自由纤维化的起点：

定理 D. 对于任意$(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{B}$，遗忘函子

$$\mathsf{Fib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}} \to \mathsf{Cat}_{(\infty,2)/\mathbb{B}}$$

有一个左伴随，它将函子 $F\colon\ \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 发送到

$$\mathbb{A} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{B}) \to \mathbb{B},$$

其中，拉回是沿着 F 和 ev_0 取的，而到 $\mathbb{B}$ 的函子由 ev_1给出。

这里 $\mathsf{Cat}_{(\infty,2)/\mathbb{B}}$ 是由带有到 ∞的映射的 $(\infty,2)$-范畴构成的范畴，而 $\mathbb{B}$ 且 $\mathsf{Fib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}}$ 是其子范畴，其中包含 $(0,1)$-纤维化，以及保持余笛卡尔 1-态射和笛卡尔 2-态射的映射。第一作者和 Stern 基于缩放单纯集合给出了这一结果的一个版本（更准确地说，是其对偶）AS23b，定理 3。17]。

我们在 §4.2证明定理 4.2.1及其部分变体，并在 §§4.3–4.4进一步考察自由纤维化的若干变体。此后，我们转而考察 $(\infty,2)$-范畴中拉回的右伴随：在 §4.5 中，我们将 Abellán–Stern 关于沿纤维化取拉回存在右伴随的结果 [AS23a], 推广到带装饰的情形；随后在 §4.6 中应用这一结果，证明沿任意函子将纤维化拉回到部分纤维化存在右伴随。一个尤为值得注意的特例是：

定理 E。 对于任意函子 $F\colon\ \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 以及$\mathbb{A}$中的任意一组 *1*-态射 I，函子

$$F^*\colon \mathsf{Fib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}} \to \mathsf{Fib}^{(0,1)}_{/(\mathbb{A},I)},$$

由沿 F 拉回给出，并且有一个右伴随。

此处 $\mathsf{Fib}^{(0,1)}_{/\ \mathbb{A}\ I^{(,)}}$ 表示 $\mathsf{Cat}_{(\infty,2)/\mathbb{A}}$ 的子范畴，其对象是 (0,1)-纤维化，而其态射必须保持所有笛卡尔 2-态射，

但仅限于位于 I 之上的那些余笛卡尔态射。另一个值得注意的特殊情形是余自由纤维化的存在——换言之，遗忘函子

$$\mathsf{Fib}_{/\mathbb{B}}^{(0,1)} \to \mathsf{Cat}_{(\infty,2)/\mathbb{B}}$$

有一个右伴随。

我们还在§4.7 中应用这些结果来证明：若有一个到带装饰的$(\infty, 2)$-范畴的函子，那么对求逆这些装饰后得到的函子，其 $(0, 1)$-纤维化是原函子对应纤维化的一个局部化；这推广了 Hinich [Hin16] 在 $(\infty, 2)$-范畴中的一项结果。

（余）极限与 *Kan* 延拓。 在本文最后一部分，我们将应用关于纤维化的结果，研究 $(\infty, 2)$-范畴中的（余）极限与 Kan 延拓。给定一个函子 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ 以及 $\mathbb{A}$中的一组 I 个 1-态射，我们可以将*I-(反)*松极限 定义为 $\mathbb{C}$ 中的一个对象，它表示 ∞-范畴的预层

$$c \mapsto \mathsf{Nat}_{\mathbb{A},\mathbb{C}}^{I\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}(\underline{c}, F),$$

其中右边表示 ∞-范畴，由从常值函子 c 到 F 的(反)松自然变换组成，这些变换在 I 中的态射处的自然性方块交换。该定义及其对偶给出了$(\infty,2)$-范畴（余）极限的一种概念，并且在§5.1 中我们证明，它等价于部分（反）松弛（余）极限的定义，后者先前由第一作者在 [AG22] 中以及由 Gagna、Harpaz 和 Lanari 在 [GHL25] 中、于缩放单纯集合的背景下研究过。

对于如上所述的函子 F 以及 $\mathbb{A}$上的 ∞-范畴余预层 W，我们也可以定义 W-加权极限：对 F 而言，它是 $\mathbb{C}$ 中表示该预层的对象

$$c \mapsto \mathsf{Nat}_{\mathbb{A},\mathsf{Cat}_\infty}(W, \mathbb{C}(c, F)),$$

其中右边表示 ∞-范畴，其由从W 到 ∞-范畴（即从 c 映入 $F(-)$ 的映射在 $\mathbb{C}$中所成的范畴）的自然变换构成。在§5.2 中我们证明，加权（余）极限可以表示为权所对应纤维化上的部分松与反松(余)极限，反之，部分(反)松余极限可以作为加权余极限来计算。这一点先前也由 Gagna、Harpaz 和 Lanari 在[GHL25], 中证明过，但我们关于自由纤维化的工作使我们能够更明确地描述所出现的权。

接下来，我们将在 §5.3中介绍关于（余）极限的主要新结果：我们用纤维化来计算 $(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)}$ 中的部分（反）松（余）极限，其中 $(\infty,2)$-范畴是小的：

定理 F。 设 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{A}$ 是函子 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)}$ 对应的 $(0, 1)$-纤维化。对于 $\mathbb{A}$ 中 *1-* 态射的一个集合 I，我们有：

(1) F 的 I-松余极限由 $\mathbb{E}$ 通过对所有笛卡尔 *2-*态射以及位于 I 之上的余笛卡尔 *1-*态射求逆得到。*(2)* F 的 I-松极限由 p 的截面 $\mathbb{A} \to \mathbb{E}$ 构成的 $(\infty,2)$-范畴给出；这些截面将所有 *2-*态射映为 p-笛卡尔 *2-*态射，并将 I 中的 *1-*态射映为 p-余笛卡尔态射。

还可以使用纤维化的其他变差来得到 I-反松弛（余）极限 F。注意，Loubaton 的工作中对(∞,∞)-范畴的部分（反）松弛（余）极限也有类似描述，见 [Lou24，例 4.2.3.12–13]。

接下来，我们将在 §5.4 中证明关于（余）极限的存在性与保持性的一些结果，其中包括 $(\infty,2)$-范畴中函子和部分 lax 变换的某些（余）极限的存在性（命题 5.4.2）。随后，在 §5.5 中，我们将看到，带装饰的 $(\infty,2)$-范畴和部分纤维化的框架，使我们能够非常容易地理解带标记的 $(\infty,2)$-范畴之间函子的共尾性，并且可以几乎不费力地得到 [AS23b、AG22、GHL25] 中关于共尾性的大多数结果的与模型无关的证明。

如果我们将定理 E 与 [AGH25]，中关于部分 lax 变换的直化结合起来，就得到：对于一个 $(\infty,2)$-范畴的函子 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 以及 I 中的 1-态射的一个集合 $\mathbb{A}$，限制函子

$$F^*\colon \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{B}, \mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)}) \to \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{A}, \mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)})^{I\text{-lax}}$$

具有右伴随。在 §5.6 中，我们将这一结果与关于（余）极限和 Yoneda 嵌入的工作结合起来，证明这类伴随函子更普遍地存在：

定理 G。 设 F 如上，且 $\mathbb{C}$ 是一个$(\infty,2)$-范畴，对每个$b \in \mathbb{B}$ 都存在 I_b-松极限，则限制函子

$$F^*\colon \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{B}, \mathbb{C}) \to \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{A}, \mathbb{C})^{I\text{-lax}}$$

具有右伴随 $F^{I\text{-松}*}$，即沿 F的 I-松右 Kan 延拓 函子，在$\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ 和 $b \in \mathbb{B}$ 处由下式给出

$$(F^{I\text{-lax}}_{*}\varphi)(b) \simeq \lim\nolimits^{I_b\text{-lax}}_{\mathbb{A}_b} F.$$

这里，$\mathbb{A}_b$ 表示拉回 $\mathbb{A}\times_{\mathbb{B}}\mathbb{B}_b$，其中 $\mathbb{B}_b$ 是 $\mathsf{ev}_0\colon \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{B}) \to \mathbb{B}$ 在 b处的纤维，而 I_b 表示其中投影到 I的映射。更一般地，我们得到左、右部分（反）lax Kan 延拓，从而将使用缩放单纯集合证明的关于一般靶的结果推广至 [Abe23]。令标记 I 取为最大标记，我们便得到（∞, 2）-范畴的普通 Kan 延拓；也可以利用富化 ∞-范畴论得到这些延拓 [Hei24]，，而我们的（余）极限公式则特化为以加权（余）极限表示的预期形式（推论 5.6.6）。

我们应用关于 Kan 延拓的结果，在 §5.7 中证明加权（余）极限的 Bousfield–Kan 公式；这给出了 Heine 的一个结果的 $(\infty,2)$-范畴情形的另一种证明 [Hei24，定理 3。44] 对于一般的充实。之后，我们利用对纤维化的推前的描述，在 §5.8 得到 Yoneda 引理的函子性版本，并进一步应用它来证明，取 $(\infty,2)$-范畴

$$\mathbb{P}\mathbb{S}\mathsf{h}(\mathbb{C}) := \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{C}^{\mathrm{op}}, \mathbb{C}\mathsf{at}_{\infty})$$

∞-范畴的预层给出了一个小的 $(\infty,2)$-范畴$\mathbb{C}$的自由余完备化。

最后，我们简要研究了 可表的 (∞,2)-范畴，见 §5.9。我们相当朴素地将其定义为底层 (∞,2)-范畴余完备，且其底层 ∞-范畴是可表的。作为主要结果，我们得到了这一概念的以下等价刻画：

定理 H. 对于一个(∞,2)-范畴 $\mathbb{C}$，以下条件等价：

(1) $\mathbb{C}$是可表的。*(2)* $\mathbb{C}$ 是余完备且局部小的，并且存在一个正则基数 κ 和一个小的全子-*(∞, 2)*-范畴 $\mathbb{C}_0 \subseteq \mathbb{C}$，其对象由 *2*-$\kappa$-紧对象构成，使得 $\mathbb{C}$ 中的每个对象都是一个以 κ-滤过的∞-范畴为指标、取值于 $\mathbb{C}$ 中的图表的锥形余极限。*(3)* 存在一个小的 *(∞, 2)*-范畴 $\mathbb{J}$ 和一个全忠实函子 $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{PS}h(\mathbb{J})$，该函子有左伴随，且其像在对某个正则基数 κ而言的κ-滤过 ∞-范畴上的锥形余极限下封闭。*(4)* 存在一个小的 *(∞, 2)*-范畴 $\mathbb{J}$、 $\mathbb{PS}h(\mathbb{J})$中的一个小的 *1*-态射集合 S，以及一个等价 $\mathbb{C} \simeq Loc_S(\mathbb{PS}h(\mathbb{J}))$，它将其与由关于 S 为 *2*-局部的对象构成的全子-*(∞, 2)*-范畴等同。

关于此处出现术语的精确定义，请参阅 §5.9 。请注意，Heine 的工作中也有关于一般富化 ∞-范畴可表现性的类似结果，尤其是 [Hei24，定理 510]。

致谢。我们感谢波恩的马克斯·普朗克数学研究所提供的热情接待与支持，本研究的部分工作正是在那里完成的。

2. 预备知识

本节首先在 §2.1 回顾关于 (∞, 2)-范畴的一些术语和基本结果。随后，我们在 §2.2 回顾带标记的 (∞, 2)-范畴，并在 §2.3 回顾其带标记 Gray 张量积。接着，我们在 §2.4 回顾 (∞, 2)-范畴的纤维化及其直化，并在 §2.5 回顾松切片和锥。之后，我们便可以在 §2.6 引入带装饰的 (∞, 2)-范畴，即配备了特殊 1-态射和 2-态射集合的 (∞, 2)-范畴；这将为我们在后续各节研究纤维化提供一个十分便利的框架。最后，我们在 §2.7 引入 Gray 张量积的带装饰版本。

2.1. (∞，2)-范畴与 Gray 张量积。 本节将介绍基本术语和记号，并回顾关于 (∞, 2)-范畴及其 Gray 张量积的一些基本结果。由于我们几乎从不需要引用 (∞，2)-范畴的任何特定模型，因此这里不对这些模型作回顾。

记号 2.1.1。

▶ 一般的（∞，2）-范畴记作 $\mathbb{A}$，$\mathbb{B}$，$\mathbb{C}$，……，一般的 ∞-范畴记作 A，B，C ……。▶ 我们用 $* = [0] = C_0$ 表示 0-胞腔或点，用 $[1] = C_1$ 表示 1-胞腔或箭头，用 C_2 表示 2-胞腔或自由 2-态射。我们还采用以下记号

表示由这些构造出的 2-范畴:

$$\partial[1] := \{0\} \amalg \{1\}, \quad \partial C_2 := [1] \amalg_{\partial[1]} [1], \quad \partial C_3 := C_2 \amalg_{\partial C_2} C_2.$$

▶ 若 $\mathbb{C}$ 是一个具有对象 x, y 的 $(\infty,2)$-范畴，我们通常将 $\mathbb{C}$ 中从 x 到 y 的态射 ∞-范畴记作 $\mathbb{C}(x, y)$；若 C 是一个 ∞-范畴，则将态射的 ∞-群胚记作 $\mathsf{C}(x, y)$ 或 $\mathsf{Map}(x, y)$。
▶ 我们用 Cat_∞ 和 $\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}$ 分别表示由（小的）∞-范畴和 $(\infty,2)$-范畴组成的 ∞-范畴，并用 $\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$ 和 $\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$ 表示它们各自的 $(\infty, 2)$-范畴，
同理，我们用 Gpd_∞ 表示由（小的）∞-群胚或空间组成的 ∞-范畴。

▶ 若 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{D}$ 是 $(\infty, 2)$-范畴，我们将它们之间由函子构成的 $(\infty, 2)$-范畴记作 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C}, \mathbb{D})$（即 $\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}$ 中的内部 Hom），并将其底层的 ∞-范畴记作 $\mathsf{Fun}(\mathbb{C}, \mathbb{D})$。对于函子 $F, G\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$，我们将 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C}, \mathbb{D})$ 中从 F 到 G 的映射所成的 ∞-范畴记作 $\mathsf{Nat}_{\mathbb{C},\mathbb{D}}(F, G)$。
▶ 对于箭头 $[1],$，我们将 $\mathbb{A}\mathrm{r}(\mathbb{C}) := \mathbb{F}\mathrm{un}([1], \mathbb{C})$ 记作一个 $(\infty, 2)$-范畴中箭头所构成的 $(\infty,2)$-范畴，并将其底层 ∞-范畴记作 $\mathsf{Ar}(\mathbb{C})$；通过在 $i \in [1]$ 处求值到 $\mathbb{C}$ 的函子记作 ev_i $(i = 0,1)$。
▶ 我们将 $\mathbb{PS}\mathrm{h}(\mathbb{C}) := \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C}^{\mathrm{op}}, \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty)$ 记作一个 $(\infty, 2)$-范畴 $\mathbb{C}$ 上的 ∞-范畴预层所构成的 $(\infty, 2)$-范畴，并将 $\mathbb{C} \to \mathbb{PS}\colon \mathbb{C}\mathrm{h}(\mathbb{C})$ 记作 Yoneda 嵌入 [Hin20]。

▶ 若一个 $(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{C}$ 带有由一个 ∞-范畴 K 给出的张量，即对每个 $c \in \mathbb{C}$，余预层 $\mathsf{Map}(\mathsf{K}\ \mathbb{C}(c, –))$ 都由某个对象 $\mathsf{K} \boxtimes c$ 余可表，则称其带有由 K 给出的张量；对偶地，若预层 $\mathsf{Map}(\mathsf{K}\ \mathbb{C}(–\ c))$ 都由对象 c^{K}可表，则称其带有由 K 给出的余张量。若 $\mathbb{C}$ 带有由所有小的 ∞- 范畴给出的（余）张量，则称 $\mathbb{C}$ 为带（余）张量的。

▶ 若 $\mathbb{C}$ 是一个 $(\infty,2)$-范畴，我们用 $\mathbb{C}^{\simeq}$ 或 $\mathbb{C}^{\leq 0}$ 表示其底（或核）∞-群胚，用 $\mathbb{C}^{\leq 1}$ 表示其底 ∞-范畴；它们分别是 Gpd_∞ 与 Cat_∞ 到 $\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}$的包含的右伴随。
▶ 这些包含也有左伴随，我们将其记为

$$\|–\| = \tau_{\leq 0}\colon \mathsf{Cat}_{(\infty,2)} \to \mathsf{Gpd}_\infty,$$

$$\tau_{\leq 1}\colon \mathsf{Cat}_{(\infty,2)} \to \mathsf{Cat}_\infty,$$

分别。

定义 2.1.2. 对于 $n \geq 0$，我们将 $\mathbb{O}^n$ 定义为如下严格2-范畴:

▶ 对象是 $[n]$的元素。▶对于 $i, j \in [n]$，映射范畴 $\mathbb{O}^n(i, j)$ 是满足 $\mathsf{min}(S) = i$ 且 $\mathsf{max}(S) = j$的子集 $S \subseteq [n]$所构成的偏序集，按包含排序。▶对于三元组 $i, j, k \in [n]$，复合映射由取并给出。

2-范畴 $\mathbb{O}^n$ 对应于由 Street 定义的（2-截断）*oriental* 或定向单形 [Str87]，且 $\mathbb{O}^n$ 应被视为一个 n-单形，其所有二维面中都插入了方向彼此相容的 2-态射。

定义 2.1.3。设 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{D}$ 是（∞，2）-范畴，且 $\mathbb{C}$ 具有由 ∞-范畴 K 给出的张量。函子 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 于是为 $c \in \mathbb{C}$ 诱导出一个函子

$$\mathbb{C}(\mathsf{K} \boxtimes c, \mathsf{K} \boxtimes c)^{\simeq} \simeq \mathrm{Map}(\mathsf{K}, \mathbb{C}(c, \mathsf{K} \boxtimes c)) \to \mathrm{Map}(\mathsf{K}, \mathbb{D}(Fc, F(\mathsf{K} \boxtimes c))),$$

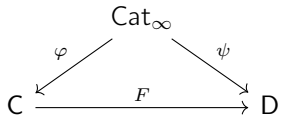
从而得到一个典范函子 $\mathsf{K} \to \mathbb{D}(Fc, F(\mathsf{K} \boxtimes c))$，它来自 $\mathrm{id}_{\mathsf{K}\boxtimes c}$。若这使余预层 $\mathrm{Map}(\mathsf{K}, \mathbb{D}(Fc, -))$ 由 $F(\mathsf{K} \boxtimes c)$ 余表示，我们就称 F 保持由 K 给出的张量。

（∞，2）-范畴可以定义为在 Cat_∞ 中富化的 ∞-范畴（见 [Hau15]）。Hinich [Hin20] 和 Heine [Hei23, Hei24] 近期对富化的 ∞-范畴的一般理论进行了广泛发展。特别地，由 Heine 的工作可知，（∞，2）-范畴 $\mathbb{C}$ 带张量，当且仅当其充实源自底层 ∞-范畴 $\mathbb{C}^{\leq 1}$ 上的 Cat_∞-模结构，并且这一对应构成了 ∞-范畴之间的一个等价。由此我们得到以下构造（∞，2）-范畴及其间函子的实用方法：

观察 2.1.4. 假设 $\varphi\colon \mathrm{Cat}_\infty \to \mathsf{C}$ 是一个保积函子。这使 C 成为 Cat_∞ 上的代数，因此也是一个模，其作用由 $(\mathsf{K}, c) \mapsto \varphi(\mathsf{K}) \times c$ 给出。如果函子 $\mathsf{K} \mapsto \varphi(\mathsf{K}) \times c$ 对所有 $c \in \mathsf{C}$ 都有一个右伴随 $\mathbb{C}(c, -)$，那么我们就可以将 C 升级为一个 (∞,2)- 范畴 $\mathbb{C}$，其中映射 ∞-范畴满足

$$\mathrm{Map}(\mathsf{K}, \mathbb{C}(c, c')) \simeq \mathsf{C}(\varphi(\mathsf{K}) \times c, c').$$

此外，如果我们有一个 ∞-范畴的交换三角形



其中 φ 和 ψ 保积，且存在如上的右伴随，同时函子 F 保积，那么对于由函子 φ 和 ψ诱导的 C 和 D 的 Cat_∞ 充实，我们可以将 F 升级为 (∞,2)-范畴之间的函子。类似地，如果将 Cat_∞ 替换为 $\mathrm{Cat}^{(\infty,2)}$ 后仍满足相同的性质，我们就可以将（函子）∞-范畴升级为（函子）(∞,3)-范畴。

接下来我们指出一个用于提升伴随的有用判据；这也是 [Ste20，命题 4.4 的一个特例。1]（证明中并未用到可表现性假设）或 [MGS24，引理 A.2。14]。

命题 2.1.5。设 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 是一个(∞,2)-范畴的函子，使得$\mathbb{C}$ 有由 $[1]$ 给出的张量，且 F 保留这些张量。若函子 $F^{\leq 1}$ 是左伴随，则 F也是左伴随。

注意，由于$(-)^{\leq 1}$ 是一个 2-函子（例如，见观察 2.1.4），它保留伴随，因此在上述情形中，右伴随的 ∞-范畴的底层函子 F 必然是 $F^{\leq 1}$的右伴随。

证明。根据（∞，2）-范畴的 Yoneda 引理，只需证明对于所有 $d \in \mathbb{D}$，$\mathbb{D}(F(-), d)$ 这一 ∞-范畴预层是可表的。由于 $F^{\leq 1}$ 具有一个

右伴随 g，我们有一个余单位映射 $\epsilon\colon F(g(d)) \to d$，使得复合

$$\mathbb{C}(c, g(d))^{\simeq} \to \mathbb{C}(F(c), F(g(d)))^{\simeq} \to \mathbb{C}(F(c), d)^{\simeq}$$

对每个 c 都是一个等价。我们声称，即使不取核心，也有一个等价；要证明这一点，只需验证复合映射

$$\mathrm{Map}([1], \mathbb{C}(c, g(d))) \to \mathrm{Map}([1], \mathbb{C}(F(c), F(g(d)))) \to \mathrm{Map}([1], \mathbb{C}(F(c), d))$$

是一个等价；由于 F 通过 $[1]$ 保持张量，我们可以将其识别为把 c 替换为 $[1] \boxtimes c$ 后的第一个映射。□

推论 2.1.6. 设 $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 是一个 ∞-范畴之间的函子，如观察 *2.1.4* 中所述。

(i) 若 F 有右伴随 R，则该伴随典范地提升为一个 $F \dashv R$ 的 $(\infty,2)$-范畴间伴随。*(ii)* 若 F 有左伴随 L，则通过 $[1]$ 对 C 和 D 进行张量化所得的函子有右伴随，并且典范映射

$$L([1] \boxtimes d) \to [1] \boxtimes Ld$$

对所有 d 都是一个等价，则该伴随典范地提升为一个 $L \dashv F$ 的 $(\infty,2)$-范畴间伴随。

证明。 第一部分由命题 2.1.5 立即得出，而第二部分则由此以及以下观察得出：F 保留所有余张量，当且仅当其左伴随保留所有张量。□

我们还回顾一下关于 ∞-范畴及 $(\infty,2)$-范畴中子对象的一些有用术语：

定义 2.1.7。 $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 是 ∞-范畴之间的一个函子，若满足以下条件，则称其为：

▶ 忠实的 若对所有$c, c' \in \mathsf{C}$，$\mathsf{C}(c, c') \to \mathsf{D}(Fc, Fc')$ 是 ∞-群胚之间的单态射；▶ 包含若其忠实且 $\mathsf{C}^{\simeq} \to \mathsf{D}^{\simeq}$ 是单态射——此时我们也称 C 是 D 的一个子范畴 。

定义 2.1.8。 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 是 $(\infty,2)$-范畴之间的一个函子，称为

▶ 全忠实，如果对于所有对象 c、$c' \in \mathbb{C}$，$\mathbb{C}(c, c') \to \mathbb{D}(Fc, Fc')$ 是 ∞-范畴之间的等价——此时我们也称 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{D}$ 的一个全子（∞, 2）-范畴；▶ 局部全忠实，如果对于所有 c、$c' \in \mathbb{C}$，$\mathbb{C}(c, c') \to \mathbb{D}(Fc, Fc')$ 是全忠实的；▶ 局部全包含，如果 F 局部全忠实且 $\mathbb{C}^{\simeq} \to \mathbb{D}^{\simeq}$ 是单态射——此时我们也称 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{D}$ 的一个局部全子（∞, 2）-范畴；▶ 局部忠实，如果对于所有 c、$c' \in \mathbb{C}$，$\mathbb{C}(c, c') \to \mathbb{D}(Fc, Fc')$ 是忠实的；▶ 局部为包含，如果对于所有 c、$c' \in \mathbb{C}$，$\mathbb{C}(c, c') \to \mathbb{D}(Fc, Fc')$ 是子范畴包含；▶ 包含，如果它局部为包含且 $\mathbb{C}^{\simeq} \to \mathbb{D}^{\simeq}$ 是单态射——此时我们也称 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{D}$ 的一个子（∞, 2）-范畴。

我们也称一个子(∞，2)-范畴 $\mathbb{C}$ 的 $\mathbb{D}$ 是宽的，如果 $\mathbb{C}^{\simeq} \to \mathbb{D}^{\simeq}$ 是一个等价。如 [AGH25第 2 节所述，5], 所有这些性质都可以刻画为 F与 Cat 中某个有限映射集右正交$\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}$。

记号 2.1.9. 本文中，*Gray* 张量积 (∞，2)-范畴将发挥重要作用，但由于这如今已是标准构造，我们在此不再回顾其定义（例如，参见 [GHL21] ，其中给出了基于缩放单纯集合的定义；或参见 [CM23] ，其中给出了基于 Θ-空间的版本）。

▶ 两个（∞，2)-范畴 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{D}$ 的 Gray 张量积记作 $\mathbb{C} \otimes \mathbb{D}$。▶ 我们用 $\mathsf{Fun}^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$(–，–) 表示 Gray 张量积在两个变量上的伴随函子，因此有自然等价

$$\mathrm{Map}(\mathbb{C} \otimes \mathbb{D}, \mathbb{E}) \simeq \mathrm{Map}(\mathbb{D}, \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{C}, \mathbb{E})^{\mathrm{oplax}}) \simeq \mathrm{Map}(\mathbb{C}, \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{D}, \mathbb{E})^{\mathrm{lax}}).$$

这里，$\mathsf{Fun}^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$($\mathbb{C}$，$\mathbb{D}$) 是一个（∞，2)-范畴，其对象是从 $\mathbb{C}$到 $\mathbb{D}$的函子，态射则由这些函子之间的（反）松自然变换给出。

▶ 对于 [1], 我们记

$$\mathbb{A}\mathsf{r}^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}(\mathbb{C}) := \mathbb{F}\mathsf{un}([1], \mathbb{C})^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}.$$

▶对于函子 F，G：$\mathbb{C} \to \mathbb{D}$，我们将 $\mathsf{Fun}^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$($\mathbb{C}$，$\mathbb{D}$) 中从 F到 G的 ∞-范畴记为 $\mathsf{Nat}^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}_{\mathbb{C}\ \mathbb{D}}$(F，G)。

观察 2.1.10. 存在一个推出方形

$$\begin{array}{ccc} \partial C_2 & \longrightarrow & C_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial([1] \otimes [1]) & \longrightarrow & [1] \otimes [1] \end{array}$$

其中 $\partial([1] \otimes [1])$ 表示边界

$$(\partial[1] \times [1]) \amalg_{\partial[1] \times \partial[1]} ([1] \times \partial[1]) \simeq [2] \amalg_{\{0,2\}} [2],$$

其中左侧竖直映射由粘合 d_1：$[1] \to [2]$ 的两个副本给出。例如，利用缩放单纯集合模型，容易看出存在一个推出

$$\begin{array}{ccc} \partial \mathbb{O}^2 & \longrightarrow & \mathbb{O}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial([1] \otimes [1]) & \longrightarrow & [1] \otimes [1], \end{array}$$

由此可得上面的方块，这里用到了 [AGH25，命题 2.3。6]。

我们强调，Gray 张量积与笛卡尔积不相容，因此不能给出一个 (∞，2)-范畴的函子。不过，对于固定的 $\mathbb{A}$，可以将 $\mathbb{F}\mathsf{un}^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$($\mathbb{A}$，–) 升级为一个 2-函子；我们不会在此证明这一点，而是指出这个函子保持伴随这一有用结论：

构造 2.1.11. 设 R: $\mathsf{Cat}_{(\infty,2)} \to \mathsf{Cat}_{(\infty,2)}$ 是一个保积函子，且 α: id $\to R$ 是一个自然变换。于是我们有一个自然映射

$$\mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \to \mathbb{F}\mathsf{un}(R\mathbb{A}, R\mathbb{B})$$

与该复合映射伴随的

$$\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A},\mathbb{B}) \times R\mathbb{A} \xrightarrow{\alpha\times\mathrm{id}} R\,\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A},\mathbb{B}) \times R\mathbb{A} \simeq R\left(\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A},\mathbb{B}) \times \mathbb{A}\right) \xrightarrow{R(\mathrm{ev})} R\mathbb{B}.$$

特别地，由自然变换 $\varphi\colon \mathbb{A}\times[1]\to\mathbb{B}$ from F to G，我们得到一个自然变换

$$\tilde{R}(\varphi)\colon R\mathbb{A}\times[1] \xrightarrow{\mathrm{id}\times\alpha} R\mathbb{A}\times R[1] \simeq R(\mathbb{A}\times[1]) \xrightarrow{R\varphi} R(\mathbb{B}).$$

容易验证，这一构造与自然变换的水平复合和垂直复合均相容，因此我们得到：

命题 2.1.12. 设 $R\colon \mathrm{Cat}_{(\infty,2)} \to \mathrm{Cat}_{(\infty,2)}$ 是一个保积函子，且 $\alpha\colon \mathrm{id} \to R$ 是一个自然变换。假设 $F\colon \mathbb{C}\to\mathbb{D}$ 是一个具有右伴随 G的$(\infty,2)$-范畴函子，其单位为 η，余单位为 ϵ。那么 $R(F)$ 是 $R(G)$ 的左伴随˜ ˜，其单位为 $R(\eta)$，余单位为 $R(\epsilon)$。□

注记 2.1.13. 事实上，在上述情形中，我们应当能够利用变换 α将 R提升为一个 $(\infty,2)$-范畴（甚至是 $(\infty,3)$-范畴）函子：由于 R 保积，它相对于笛卡尔积是一个幺半函子，而 α 自动成为一个幺半自然变换。特别地，我们可以将 R 视为 $\mathrm{Cat}_{(\infty,2)}$在自身上的典范作用下的一个（松）线性自函子。这对应于一个 $\mathrm{Cat}_{(\infty,2)}$-富化函子 $R_*\,\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$[Hin20, Hei23], ，其中我们沿着 R推前富集。此外，富集的推前是一个 2-函子（例如，这是因为它来自 [GH15]模型中 $(\infty,2)$-范畴里的 ∞-运算子之间的复合），因此幺半自然变换 α 也导出一个 $\mathrm{Cat}_{(\infty,2)}$-富化函子 $\mathbb{C}$ $\mathrm{at}_{(\infty,2)} \to R_*\,\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$。那么复合 $\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)} \to R_*\,\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$ 应当就是 R 所需的富化提升，但遗憾的是，我们尚未在文献中找到任何证明，说明底层函子 ∞-范畴能够还原原函子 R；此处我们不再进一步讨论。

例 2.1.14。 对于任意 $(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{A}$，函子

$$\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A},-)^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}\colon \mathrm{Cat}_{(\infty,2)} \to \mathrm{Cat}_{(\infty,2)}$$

保留伴随，因为它保留积（作为右伴随），并且我们有一个由恒定图表给出的恒等自然变换

$$\mathbb{C} \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A},\mathbb{C})^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}},$$

或者等价地，由左伴随的自然变换所诱导

$$\mathbb{A}\otimes(-) \to [0]\otimes(-) \simeq \mathrm{id}\,.$$

2.2. **带标记的 $(\infty,2)$-范畴**。 本小节回顾带标记的 $(\infty,2)$-范畴；这类范畴是配备了一组态射的 $(\infty,2)$-范畴，并比较其 ∞-范畴的两种描述。

定义 2.2.1。 一个带标记的 $(\infty,2)$-范畴 $(\mathbb{C},E)$由一个 $(\infty,2)$-范畴$\mathbb{C}$ 以及其中一族 E 态射 $\mathbb{C}$组成。我们可以假设 E 包含 $\mathbb{C}$ 中的所有等价，并且还关于复合封闭，因此它

确定了一个宽的局部全子-(∞,2)-范畴 $\mathbb{C}_E \hookrightarrow \mathbb{C}$。这使我们能够将 ∞-范畴 $\mathsf{MCat}_{(\infty,2)}$ 定义为 $\mathsf{Ar}(\mathsf{Cat}_{(\infty,2)})$ 的全子范畴，其对象由宽的局部全子范畴嵌入张成。我们记 $u_{\mathrm{m}}\colon \mathsf{MCat}_{(\infty,2)} \to \mathsf{Cat}_{(\infty,2)}$ 为遗忘函子 $(\mathbb{C}, E) \mapsto \mathbb{C}$，它由限制 ev_1给出。

命题 2.2.2. 给定一个配备了 *1*-态射族 S 的 ∞-范畴 C，令 $\mathsf{Ar}_S(\mathsf{C})$ 为 $\mathsf{Ar}(\mathsf{C})$ 中由 S 中的态射所张成的全子范畴。若 S 的所有元素均为单态射，则 $\mathrm{ev}_1\colon \mathsf{Ar}_S(\mathsf{C}) \to \mathsf{C}$ 是忠实函子。

证明。 只需证明，对于 C 中的态射 $f\colon x \to y$, $g\colon a \to b$，该映射

$$\mathsf{Ar}(\mathsf{C})(f,g) \to \mathsf{C}(y,b)$$

由在 1 处求值所诱导者是 ∞-群胚的单态射，若 g 是 C 中的单态射。此处 $\mathsf{Ar}(\mathsf{C})(f,g)$ 处于一个拉回方块中

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Ar}(\mathsf{C})(f,g) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_0} & \mathsf{C}(x,a) \\ {\scriptstyle \mathrm{ev}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_*} \\ \mathsf{C}(y,b) & \xrightarrow[f^*]{} & \mathsf{C}(x,b), \end{array}$$

因此这是显然的，因为单态射在拉回下封闭。 □

Corollary 2.2.3. *The functor* $u_{\mathrm{m}}\colon \mathsf{MCat}_{(\infty,2)} \to \mathsf{Cat}_{(\infty,2)}$ *is faithful.* □

观察 2.2.4。由 [AGH25 的观察 2.5.6、2.5.8], , (∞, 2)-范畴的函子是宽的局部全子范畴嵌入，当且仅当它右正交于 $\emptyset \to *$, $\partial C_2 \to C_2$。由 [Lur09a 的命题 5.5.5.7] 可知，此类函子构成 $\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}$ 上一个分解系统中的右类，从而蕴含包含 $\mathsf{MCat}_{(\infty,2)} \hookrightarrow \mathsf{Ar}(\mathsf{Cat}_{(\infty,2)})$ 具有左伴随，该左伴随由通过此分解系统对态射作分解给出。由于我们所考虑其正交性的态射也是紧 (∞, 2)-范畴之间的态射，此外显然 $\mathsf{MCat}_{(\infty,2)}$ 在 $\mathsf{Ar}(\mathsf{Cat}_{(\infty,2)})$ 中对滤过余极限封闭，因此该左伴随将 $\mathsf{MCat}_{(\infty,2)}$ 表现为一个可达局部化。从而 $\mathsf{MCat}_{(\infty,2)}$ 是一个可表现∞-范畴。

观察 2.2.5. 函子 $\mathsf{ev}_1\colon \mathsf{Ar}(\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}) \to \mathsf{Cat}_{(\infty,2)}$ 具有以下性质：

(1) ev_1 有一个左伴随，它将一个 (∞,2)-范畴 $\mathbb{A}$ 映到 $\emptyset \to \mathbb{A}$。(2) ev_1 有一个右伴随 const，它将一个 (∞,2)-范畴 $\mathbb{A}$ 映到 $\mathbb{A} \xrightarrow{=} \mathbb{A}$。(3) 右伴随 const 本身是 ev_0的左伴随。
由此可得，ev_0 的限制 u_{m} 具有以下相应性质：

(1') u_{m} 有一个左伴随 $(-)^\flat$，它将一个 (∞,2)-范畴 $\mathbb{A}$ 映到

$$\mathbb{A}^\flat := \mathbb{A}_{\mathrm{eq}} \to \mathbb{A},$$

其中 $\mathbb{A}_{\mathrm{eq}}$ 是子（∞，2）-范畴，它只包含可逆 1-态射，但包含这些态射之间的所有 2-态射。

（2’） u_{m} 有一个右伴随（–）$^\sharp$，它将一个（∞，2）-范畴 $\mathbb{A}$ 送到

$$\mathbb{A}^\sharp := \mathbb{A} \xrightarrow{=} \mathbb{A}.$$

(3’) 右伴随 (–)$^\sharp$ 还有一个右伴随，它将 ($\mathbb{A}$， E) 映到 $\mathbb{A}_{E^\circ}$

通常，将带标记的 (∞， 2)-范畴 ($\mathbb{B}$， E) 中标记的 1-态射视为由 $\mathbb{B}^{\leq 1}$ 的一个宽子范畴指定，而非由 $\mathbb{B}$ 的一个子-(∞， 2)-范畴指定，会更方便；以下观察为此提供了依据，并由此导出对 $\mathbf{MCat}_{(\infty,2)}$ 的另一种描述：

命题 2.2.6. 令 $\mathsf{Ar}_{\mathrm{lff}}(\mathsf{Cat}_{(\infty,2)})$ 表示由局部全忠实函子张成的 $\mathsf{Ar}(\mathsf{Cat}_{(\infty,2)})$ 的全子范畴；令 $\mathsf{Ar}_{\mathrm{fa}}(\mathsf{Cat}_\infty)$ 表示由忠实函子张成的 $\mathsf{Ar}(\mathsf{Cat}_\infty)$ 的全子范畴。那么交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Ar}_{\mathrm{lff}}(\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_1} & \mathsf{Cat}_{(\infty,2)} \\ {\scriptstyle (-)^{\leq 1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (-)^{\leq 1}} \\ \mathsf{Ar}_{\mathrm{fa}}(\mathsf{Cat}_\infty) & \xrightarrow[\mathrm{ev}_1]{} & \mathsf{Cat}_\infty \end{array}$$

是一个拉回。

证明。设 $\mathbb{B}$ 是一个 (∞, 2)-范畴，且 $F\colon \mathbf{A} \to \mathbb{B}^{\leq 1}$ 是一个忠实函子。那么复合 $\mathbf{A} \to \mathbb{B}$ 存在唯一的分解 $\mathbf{A} \xrightarrow{i} \mathbb{A} \xrightarrow{F'} \mathbb{B}$，其中 F' 是局部全忠实的，而 i 与局部全忠实函子左正交。根据 [LMGR+24 定理 5.3，7] 这个左正交类恰由那些在对象上以及所有映射 ∞-范畴上本质满的函子构成。因此， $i^{\leq 1}\colon \mathbf{A} \to \mathbb{A}^{\leq 1}$ 既是全忠实的，又是本质满的，即为一个等价。特别地， $F \simeq F'^{\leq 1}$。反过来，若从一个局部全忠实函子 $G\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 出发，则复合 $\mathbb{A}^{\leq 1} \xrightarrow{G^{\leq 1}} \mathbb{B}^{\leq 1} \to \mathbb{B}$ 可分解为 $\mathbb{A}^{\leq 1} \to \mathbb{A} \xrightarrow{G} \mathbb{B}$，其中第一个函子与局部全忠实函子左正交；由唯一性可知，这意味着对 $G^{\leq 1}$ 应用分解会还原出 G。因此，该构造给出了函子

$$\mathsf{Ar}_{\mathrm{lff}}(\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}) \to \mathsf{Ar}_{\mathrm{fa}}(\mathsf{Cat}_\infty) \times_{\mathsf{Cat}_\infty} \mathsf{Cat}_{(\infty,2)}$$

由交换方块可得，证毕。 □

推论 2.2.7。 该交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{MCat}_{(\infty,2)} & \xrightarrow{u_{\mathrm{m}}} & \mathsf{Cat}_{(\infty,2)} \\ {\scriptstyle (-)^{\leq 1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (-)^{\leq 1}} \\ \mathsf{MCat}_\infty & \xrightarrow[\mathrm{ev}_1]{} & \mathsf{Cat}_\infty \end{array}$$

是一个拉回。 □

引理 2.2.8. 函子 $(-)^\flat\colon \mathsf{Cat}_{(\infty,2)} \to \mathsf{MCat}_{(\infty,2)}$ 有一个左伴随

$$\tau_m\colon \mathsf{MCat}_{(\infty,2)} \to \mathsf{Cat}_{(\infty,2)}\,.$$

这由对标记的 *1*-态射求逆给出；也就是说，对于一个带标记的$(\infty,2)$-范畴$(\mathbb{A}, E)$，我们有一个自然的推出方形

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_E^{\simeq 1} & \longrightarrow & \|\mathbb{A}_E^{\simeq 1}\| \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A} & \longrightarrow & \tau_m(\mathbb{A}, E). \end{array}$$

证明。 显然，这个推出定义了一个函子 τ_m。为了证明它是所需的左伴随，我们注意到存在自然等价

$$\begin{aligned} \mathrm{Map}_{\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}}(\tau_m(\mathbb{A}, E), \mathbb{B}) &\simeq \mathrm{Map}_{\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \times_{\mathrm{Map}_{\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}}(\mathbb{A}_E^{\simeq 1}, \mathbb{B})} \mathrm{Map}_{\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}}(\|\mathbb{A}_E^{\simeq 1}\|, \mathbb{B}) \\ &\simeq \mathrm{Map}_{\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \times_{\mathrm{Map}_{\mathsf{Cat}_\infty}(\mathbb{A}_E^{\simeq 1}, \mathbb{B}^{\simeq 1})} \mathrm{Map}_{\mathsf{Cat}_\infty}(\mathbb{A}_E^{\simeq 1}, \mathbb{B}^{\simeq}) \\ &\simeq \mathrm{Map}_{\mathsf{MCat}_{(\infty,2)}}((\mathbb{A}, E), \mathbb{B}^\flat), \end{aligned}$$

其中，最后一个等价由 $\mathsf{MCat}_{(\infty,2)}$ 作为一个拉回的描述得出，见推论2.2.7。 □

记号 2.2.9。 对于带标记的 (∞，2)-范畴 (𝔸，*I*) 和 (𝔹，*J*)，我们记

$$\mathbb{MF}\mathrm{un}((\mathbb{A}, I), (\mathbb{B}, J))$$

为 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ 的全子范畴，其由保持标记的函子张成。我们赋予它如下标记：自然变换 $\mathbb{A} \times [1] \to \mathbb{B}$，其在每个 $a \in \mathbb{A}$ 处的分量都在 (𝔹，*J*) 中带标记；也就是说，这是一个标记函子

$$(\mathbb{A}, I) \times [1]^\sharp \to (\mathbb{B}, J).$$

观察 2.2.10。 ∞-范畴 $\mathsf{MCat}_{(\infty,2)}$ 是笛卡儿闭的，其内部 Hom 由 $\mathbb{MF}\mathrm{un}(-, -)$ 给出。由于 u_{m} 忠实，要证明这一点，只需注意，对于带标记的 (∞，2)-范畴 (𝔸，*I*)，(𝔹，*J*)，(ℂ，*K*)，函子 $\mathbb{A} \times \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ 是一个标记函子

$$(\mathbb{A}, I) \times (\mathbb{B}, J) \to (\mathbb{C}, K)$$

当且仅当其伴随 $\mathbb{A} \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}, \mathbb{C})$ 可通过一个标记函子 (𝔸，*I*) $\to \mathbb{MF}\mathrm{un}((\mathbb{B}, J), (\mathbb{C}, K))$ 分解。因此，我们可以将 $\mathsf{MCat}_{(\infty,2)}$ 视为在自身中富化；我们也可以沿着 u_{m} 传递这种充实，使 $\mathsf{MCat}_{(\infty,2)}$ 成为一个 (∞，3)- 范畴，其映射 (∞，2)- 范畴为 $u_{\mathrm{m}}\,\mathbb{MF}\mathrm{un}(-, -)$，即由标记函子张成的 $\mathbb{F}\mathrm{un}(-, -)$ 的全子 (∞，2)-范畴；我们将其底层的 (∞，2)-范畴记作 $\mathbb{MC}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$。注意，这又是由保积函子 $(-)^\flat\colon \mathsf{Cat}_\infty \to \mathsf{MCat}_{(\infty,2)}$ 导出的；因为我们有交换三角形

$$\begin{array}{ccc} & \mathsf{Cat}_\infty & \\ {\scriptstyle (-)^\flat}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle (-)^\flat} \\ \mathsf{Cat}_{(\infty,\,2)} & \longrightarrow & \mathsf{MCat}_{(\infty,2),} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \mathsf{Cat}_\infty & \\ {\scriptstyle (-)^\flat}\swarrow & & \searrow \\ \mathsf{MCat}_{(\infty,\,2)} & \xrightarrow{u_{\mathrm{m}}} & \mathsf{MCat}_{(\infty,\,2),} \end{array}$$

函子 $(-)^\flat$、u_{m} 和 $(-)^\sharp$ 提升为带有伴随的 (∞,2)-范畴的 2-函子

$$(-)^\flat \dashv u_{\mathrm{m}} \dashv (-)^\sharp$$

由推论 2.1.6。

2.3. **带标记 Gray 张量与部分（反）松弛变换。** 本小节回顾 Gray 张量积的带标记版本，其中某些 2-态射被反转。这一主题此前已在模型范畴语境中得到研究 [Abe23]，，以及 [GHL25，§4。1]（但未对 Gray 张量进行标记）。

定义 2.3.1. 给定带标记的 $(\infty,2)$-范畴 $(\mathbb{A}, I)$ 和 $(\mathbb{B}, J)$，我们将$\mathbb{A} \otimes_{I,J} \mathbb{B}$ 定义为通过对方块$[1] \otimes [1] \xrightarrow{f \otimes g} \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ 中的 2-态射求逆而得到的 $(\infty,2)$-范畴，其中 f或 g 位于 I或 J中。换言之，我们有一个推出

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_I \otimes \mathbb{B} \amalg \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}_J & \longrightarrow & \mathbb{A}_I \times \mathbb{B} \amalg \mathbb{A} \times \mathbb{B}_J \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A} \otimes \mathbb{B} & \longrightarrow & \mathbb{A} \otimes_{I,J} \mathbb{B}. \end{array}$$

它带有由 $\mathbb{A}_I \times \mathbb{B}^{\simeq} \amalg \mathbb{A}^{\simeq} \times \mathbb{B}_J$ 的像生成的标记，从而得到一个带标记的 $(\infty,2)$-范畴 $(\mathbb{A}, I) \otimes^{\mathrm{m}} (\mathbb{B}, J)$。

观察 2.3.2. 如果 I或 J是极大标记，那么 $(\mathbb{A}, I) \otimes^{\mathrm{m}} (\mathbb{B}, J)$ 等价于笛卡尔积 $(\mathbb{A}, I) \times (\mathbb{B}, J)$。

定义 2.3.3。 给定带标记的 $(\infty,2)$-范畴 $(\mathbb{A}, I)$ 和 $(\mathbb{B}, J)$，我们将$\mathbb{MF}\mathsf{un}((\mathbb{B}, J), (\mathbb{C}, K))^{\mathrm{lax}}$定义为 $\mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{B}, \mathbb{C})^{\mathrm{lax}}$ 的局部满子-$(\infty, 2)$-范畴，其

- ▶ 对象是标记函子，即将 $\mathbb{B}_J$ 中的态射映到 $\mathbb{C}_K$ 的那些函子；▶ 态射是可经由一个带标记的函子$[1] \otimes_{\flat, I} \mathbb{B} \to \mathbb{C}$分解的 lax 变换 $[1] \otimes \mathbb{B} \to \mathbb{C}$，具体而言，这些变换满足：与 I 中的态射相关联的 lax 自然性方块可交换，并且 $[1]$ 在每个对象上的限制给出一个标记函子。

我们在其上赋予如下标记：标记函子之间的强自然变换（根据观察 2.3.2，它们恰好是标记函子$[1] \otimes_{\sharp, I} \mathbb{B} \to \mathbb{C}$）。反转 Gray 张量的顺序，我们类似地定义带标记的$(\infty, 2)$-范畴 $\mathbb{MF}\mathsf{un}((\mathbb{B}, J), (\mathbb{C}, K))^{\mathrm{oplax}}$。

引理 2.3.4. 我们有自然等价

$$\begin{aligned} \mathrm{Map}_{\mathsf{MCat}_{(\infty,2)}}((\mathbb{A}, I) \otimes^{\mathrm{m}} (\mathbb{B}, J), (\mathbb{C}, K)) &\simeq \mathrm{Map}_{\mathsf{MCat}_{(\infty,2)}}((\mathbb{A}, I), \mathbb{MF}\mathsf{un}((\mathbb{B}, J), (\mathbb{C}, K))^{\mathrm{lax}}) \\ &\simeq \mathrm{Map}_{\mathsf{MCat}_{(\infty,2)}}((\mathbb{B}, J), \mathbb{MF}\mathsf{un}((\mathbb{A}, I), (\mathbb{C}, K))^{\mathrm{oplax}}), \end{aligned}$$

从而存在伴随

$$(\mathbb{A}, I) \otimes^{\mathrm{m}} - \dashv \mathbb{MF}\mathsf{un}((\mathbb{A}, I), -)^{\mathrm{oplax}}, \quad - \otimes^{\mathrm{m}} (\mathbb{A}, I) \dashv \mathbb{MF}\mathsf{un}((\mathbb{A}, I), -)^{\mathrm{lax}}.$$

证明. 我们证明第一个等价；第二个可用同样的论证证明。展开左侧映射空间的定义，我们看到它可以识别为由 $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ 构成的函子空间，满足

- ▶ 与一对态射 f from $\mathbb{A}$和 g from $\mathbb{B}$ 相关联的 lax 方形中的 2-态射，在 f 属于 I 或 g 属于 J时可逆，

▶ 与 $\mathbb{A}$ 中的一个态射及 $\mathbb{B}$ 中的一个对象相关联的 $\mathbb{C}$ 中的态射属于 K，当且仅当来自 $\mathbb{A}$ 的态射属于 I；反过来交换 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$的角色时也同样成立。

这些对应于函子 $\mathbb{A} \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}, \mathbb{C})^{\mathrm{lax}}$，使得

▶ 对 $\mathbb{A}$ 的每个对象，相伴函子 $\mathbb{B} \to \mathbb{C}$ 是带标记的，▶ 对 $\mathbb{A}$ 中的每个态射，相伴的松弛自然变换在 J 中的所有态射处具有交换的自然性方块，▶ 对 I中的每个态射，相伴的松弛自然变换在 $\mathbb{B}$ 中的所有态射处具有交换的自然性方块，即它是强的。

这些正是从 $(\mathbb{A}, I)$ 到 $\mathbb{MF}\mathrm{un}((\mathbb{B}, J), (\mathbb{C}, K))^{\mathrm{lax}}$ 的带标记的函子，如所需。□

命题 2.3.5. 标记 *Gray* 张量积是结合的，即我们有一个自然等价

$$((\mathbb{A}, I) \otimes^{\mathrm{m}} (\mathbb{B}, J)) \otimes^{\mathrm{m}} (\mathbb{C}, K) \simeq (\mathbb{A}, I) \otimes^{\mathrm{m}} ((\mathbb{B}, J) \otimes^{\mathrm{m}} (\mathbb{C}, K)).$$

证明. 我们首先证明在底 (∞,2)-范畴上存在一个等价。为此，考虑交换方块

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{A}_I \otimes \mathbb{B}) \otimes \mathbb{C} \amalg (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}_J) \otimes \mathbb{C} \amalg (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) \otimes \mathbb{C}_K & \longrightarrow & \mathbb{A}_I \times (\mathbb{B} \otimes \mathbb{C}) \amalg \mathbb{B}_J \times (\mathbb{A} \otimes \mathbb{C}) \amalg (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) \times \mathbb{C}_K \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) \otimes \mathbb{C} & \longrightarrow & (\mathbb{A} \otimes_{I,J} \mathbb{B}) \otimes_{L,K} \mathbb{C}, \end{array}$$

其中 L 表示 $\mathbb{A} \otimes_{I,J} \mathbb{B}$ 的标记；我们声称这是一个推出。事实上，我们可以沿水平方向将其分解为经过以下方块的形式

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{A}_I \otimes \mathbb{B}) \otimes \mathbb{C} \amalg (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}_J) \otimes \mathbb{C} \amalg (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) \otimes \mathbb{C}_K & \longrightarrow & (\mathbb{A}_I \times \mathbb{B}) \otimes \mathbb{C} \amalg (\mathbb{A} \times \mathbb{B}_J) \otimes \mathbb{C} \amalg (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) \otimes \mathbb{C}_K \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) \otimes \mathbb{C} & \longrightarrow & (\mathbb{A} \otimes_{I,J} \mathbb{B}) \otimes \mathbb{C}, \end{array}$$

该方块是一个推出，因为 $\otimes$ 在每个变量中都保余极限；接着是以下方块

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{A}_I \times \mathbb{B}) \otimes \mathbb{C} \amalg (\mathbb{A} \times \mathbb{B}_J) \otimes \mathbb{C} \amalg (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) \otimes \mathbb{C}_K & \longrightarrow & \mathbb{A}_I \times (\mathbb{B} \otimes \mathbb{C}) \amalg \mathbb{B}_J \times (\mathbb{A} \otimes \mathbb{C}) \amalg (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) \times \mathbb{C}_K \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{A} \otimes_{I,J} \mathbb{B}) \otimes \mathbb{C} & \longrightarrow & (\mathbb{A} \otimes_{I,J} \mathbb{B}) \otimes_{L,K} \mathbb{C}. \end{array}$$

只需证明这是一个推出，为此我们考虑如下图表

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{A}_I \times \mathbb{B}^{\simeq}) \otimes \mathbb{C} \amalg (\mathbb{A}^{\simeq} \times \mathbb{B}_J) \otimes \mathbb{C} \amalg (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) \otimes \mathbb{C}_K & \longrightarrow & (\mathbb{A}_I \times \mathbb{B}^{\simeq}) \times \mathbb{C} \amalg (\mathbb{A}^{\simeq} \times \mathbb{B}_J) \times \mathbb{C} \amalg (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) \times \mathbb{C}_K \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{A}_I \times \mathbb{B}) \otimes \mathbb{C} \amalg (\mathbb{A} \times \mathbb{B}_J) \otimes \mathbb{C} \amalg (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) \otimes \mathbb{C}_K & \longrightarrow & \mathbb{A}_I \times (\mathbb{B} \otimes \mathbb{C}) \amalg \mathbb{B}_J \times (\mathbb{A} \otimes \mathbb{C}) \amalg (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) \times \mathbb{C}_K \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{A} \otimes_{I,J} \mathbb{B}) \otimes \mathbb{C} & \longrightarrow & (\mathbb{A} \otimes_{I,J} \mathbb{B}) \otimes_{L,K} \mathbb{C}. \end{array}$$

根据 [AGH25命题 2.8，顶部的方形是一个推出。1], 而根据带标记 Gray 张量的定义，复合方形是一个推出。因此，底部的方形也是一个推出。将同样的论证应用于 $\mathbb{A} \otimes_{I,M} (\mathbb{B} \otimes_{J,K} \mathbb{C})$，其中$M$ 表示 $\mathbb{B} \otimes_{J,K} \mathbb{C}$的标记，可得到一个推出方形

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_I \otimes (\mathbb{B} \otimes \mathbb{C}) \amalg \mathbb{A} \otimes (\mathbb{B}_J \otimes \mathbb{C}) \amalg \mathbb{A} \otimes (\mathbb{B} \otimes \mathbb{C}_K) & \longrightarrow & \mathbb{A}_I \times (\mathbb{B} \otimes \mathbb{C}) \amalg \mathbb{B}_J \times (\mathbb{A} \otimes \mathbb{C}) \amalg (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) \times \mathbb{C}_K \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A} \otimes (\mathbb{B} \otimes \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{A} \otimes_{I,M} (\mathbb{B} \otimes_{L,K} \mathbb{C}), \end{array}$$

借助 Gray 张量的结合律，它显然等价于第一个推出。此外，两种情况下的标记均由.....的像给出

$$\mathbb{A}_I \times \mathbb{B}^{\simeq} \times \mathbb{C}^{\simeq} \amalg \mathbb{A}^{\simeq} \times \mathbb{B}_J \times \mathbb{C}^{\simeq} \amalg \mathbb{A}^{\simeq} \times \mathbb{B}^{\simeq} \times \mathbb{C}_K,$$

因此，我们得到所需的带标记的 $(\infty, 2)$-范畴之间的自然等价。 □

推论 2.3.6. 对于带标记的$(\infty,2)$-范畴$(\mathbb{A}, I)$、$(\mathbb{B}, J)$ 和$(\mathbb{C}, K)$，我们有带标记的$(\infty, 2)$-范畴之间的自然等价

$$\mathbb{MF}\mathsf{un}((\mathbb{A},\ I)\ \mathbb{MF}\mathsf{un}((\mathbb{B},\ J),\ (\mathbb{C},\ K))^{\mathrm{lax}})^{\mathrm{oplax}} \simeq \mathbb{MF}\mathsf{un}((\mathbb{B},\ J)\ \mathbb{MF}\mathsf{un}((\mathbb{A},\ I),\ (\mathbb{C},\ K))^{\mathrm{oplax}})^{\mathrm{lax}},$$

$$\mathbb{MF}\mathsf{un}((\mathbb{A}, I), \mathbb{MF}\mathsf{un}((\mathbb{B}, J), (\mathbb{C}, K))^{\mathrm{lax}})^{\mathrm{lax}} \simeq \mathbb{MF}\mathsf{un}((\mathbb{A}, I) \otimes^{\mathrm{m}} (\mathbb{B}, J), (\mathbb{C}, K))^{\mathrm{lax}},$$

$$\mathbb{MF}\mathsf{un}((\mathbb{B},\ J)\ \mathbb{MF}\mathsf{un}((\mathbb{A},\ I),\ (\mathbb{C},\ K))^{\mathrm{oplax}})^{\mathrm{oplax}} \simeq \mathbb{MF}\mathsf{un}((\mathbb{A},\ I)\ \otimes^{\mathrm{m}} (\mathbb{B},\ J),\ (\mathbb{C},\ K))^{\mathrm{oplax}}.$$

证明。 应用 Yoneda 引理以及带标记 Gray 张量的结合律。（参见 [AGH25，引理 2.2。10] 对于无标记情形。） □

定义 2.3.7。 给定一个带标记的（∞,2）-范畴（$\mathbb{A}, I$）以及一个（无标记的）（∞, 2）-范畴 $\mathbb{B}$，我们定义

$$\mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{A}, \mathbb{B})^{I\text{-lax}} := u_{\mathrm{m}}\, \mathbb{MF}\mathsf{un}((\mathbb{A}, I), \mathbb{B}^{\sharp})^{\mathrm{lax}},$$

$$\mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{A}, \mathbb{B})^{I\text{-oplax}} := u_{\mathrm{m}}\, \mathbb{MF}\mathsf{un}((\mathbb{A}, I), \mathbb{B}^{\sharp})^{\mathrm{oplax}},$$

展开各种伴随，我们看到函子 $\mathbb{K} \to \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{A}, \mathbb{B})^{I\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$对应于函子

$$\mathbb{K} \otimes_{\flat, I} \mathbb{A} \to \mathbb{B}, \quad \mathbb{A} \otimes_{I, \flat} \mathbb{K} \to \mathbb{B}$$

分别在松弛情形与 oplax 情形中。这里， $\mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{A}, \mathbb{B})^{I\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$可被等同为 $\mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{A}, \mathbb{B})^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$ 的一个宽且局部满的子（$\infty, 2$）-范畴，其态射是 *I-(op)lax* 变换，即那些 (op)lax 变换

$$[1] \otimes \mathbb{A} \to \mathbb{B}, \quad \mathbb{A} \otimes [1] \to \mathbb{B}$$

它们分别经由 $[1] \otimes_{\flat, I} \mathbb{A}$ 与 $\mathbb{A} \otimes_{I, \flat} [1]$ 分解，这意味着与 I 中的态射相关联的（反）松自然性方块实际上交换。

记号 2.3.8. 给定 $(\infty, 2)$-范畴之间的函子 $F, G\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 以及一个标记 $(\mathbb{A}, I)$，我们用 $\mathrm{Nat}^{I\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}\,\mathbb{A},\mathbb{B}}(F, G)$ 表示 $\mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{A}, \mathbb{B})^{I\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$ 中从 F到 G的态射所成的 ∞-范畴。

观察 2.3.9. 应用推论 2.3.6 并取 $(\mathbb{A}, I) = \mathbb{A}^{\flat}$ 和 $(\mathbb{C}, K) = \mathbb{C}^{\sharp}$，可知存在自然等价

$$\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}, \mathbb{C})^{J\text{-}\mathrm{lax}})^{\mathrm{lax}} \simeq \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A} \otimes_{\flat, J} \mathbb{B}, \mathbb{C})^{J'\text{-}\mathrm{lax}},$$

$$\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}, \mathbb{C})^{J\text{-}\mathrm{oplax}})^{\mathrm{oplax}} \simeq \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B} \otimes_{J, \flat} \mathbb{A}, \mathbb{C})^{J''\text{-}\mathrm{oplax}},$$

其中 J' 和 J'' 均由 $\mathbb{B}_J \times \mathbb{A}^{\simeq}$的像生成。这意味着我们有一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}, \mathbb{C})^{J\text{-}\mathrm{lax}})^{\mathrm{lax}} & \longrightarrow & \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A} \otimes_{\flat, J} \mathbb{B}, \mathbb{C})^{\mathrm{lax}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lim_{\mathbb{A}^{\simeq}} \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}, \mathbb{C})^{J\text{-}\mathrm{lax}} & \longrightarrow & \lim_{\mathbb{A}^{\simeq}} \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}, \mathbb{C})^{\mathrm{lax}}, \end{array}$$

在 oplax 情形中也类似。我们还看到，$\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}, \mathbb{C})^{J\text{-}\mathrm{lax}})^{\mathrm{oplax}}$ 等价于 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}, \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{C})^{\mathrm{oplax}})^{J\text{-松弛}}$所张成的全子 $(\infty, 2)$-范畴，其中对象为将 J 中的态射映为强自然变换的函子。

2.4.**纤维化与直化等价。** 本节回顾 $(\infty,2)$-范畴中的（余）笛卡尔纤维化类比。这些概念最初由 [GHL24]，引入，并且还回顾它们与函子之间的直化等价 $\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$，该等价由阿贝利安–Stern [AS23a] 和 Nuiten [Nui24]证明。我们还回顾了 [AGH25]中证明的、针对部分（反）松弛变换的直化扩展。

定义 2.4.1. 设 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 是一个 $(\infty, 2)$-范畴之间的函子。

▶ 若对所有对象$z \in \mathbb{E}$，∞-范畴构成的交换方块态射 $f\colon x \to y$ 在 $\mathbb{E}$ 中称为 p-余笛卡尔（或 p-0-笛卡尔）

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}(y, z) & \xrightarrow{f^*} & \mathbb{E}(x, z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{B}(p(y), p(z)) & \xrightarrow[p(f)^*]{} & \mathbb{B}(p(x), p(z)) \end{array}$$

是一个拉回。对偶地，若 f 作为 $\mathbb{E}^{\mathrm{op}}$中的态射看待时是 p^{op}-余笛卡尔的，则称其为 p-笛卡尔（或 p-1-笛卡尔）。

▶ 从 x 到 y 的 1-态射之间，$\mathbb{E}$ 中的 2-态射 α 称为弱 p-（余）笛卡尔（或弱 p-i-笛卡尔），若它是函子的（余）笛卡尔态射

$$p_{x,y}\colon \mathbb{E}(x, y) \to \mathbb{B}(p(x), p(y)).$$

▶ 从 x 到 y 的 1-态射之间，$\mathbb{E}$ 中的 2-态射 α 称为 p-（余）笛卡尔（或p-i-笛卡尔），若对任意态射 $f\colon x' \to x$ 和 $g\colon y \to y'$，胡须运算$g \circ \alpha \circ f$是弱 p-(余)笛卡尔的。

引理 2.4.2. 设 $f\colon x \to y$ 是函子 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 的 p-余笛卡尔态射，其中 $\mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 是$(\infty, 2)$-范畴。设 $u\colon h \to h'$是态射$y \to z$之间的一个 2-态射。如果 $u \circ f$ 是弱 p-（余）笛卡尔的，那么 u也是如此。

证明。 由于 f 是 p-余笛卡尔的，我们有一个 ∞-范畴的拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}(y,z) & \xrightarrow{f^*} & \mathbb{E}(x,z) \\ {\scriptstyle p_{y,z}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{x,z}} \\ \mathbb{B}(py,pz) & \xrightarrow[p(f)^*]{} & \mathbb{B}(px,pz) \end{array}$$

并且根据假设 f^*u 是 $p_{x,\ z}$-（余）笛卡尔。这意味着 u 是 $p_{y,\ z}$-（余）笛卡尔，依据 [Lur09a，2.4.1.3(2)]。 □

观察 2.4.3。 设 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 是一个（∞，2）-范畴之间的函子。那么 p-（余）笛卡尔提升若存在则唯一。更精确地，若我们将由 i-笛卡尔态射张成的 $\mathrm{Map}([1],\ \mathbb{E})$ 的子空间记为 $\mathrm{Map}_{i\text{-cart}}([1],\ \mathbb{E})$，则函子

$$\mathrm{Map}_{i\text{-cart}}([1],\mathbb{E}) \to \mathrm{Map}([1],\mathbb{B}) \times_{\mathbb{B}^{\simeq}} \mathbb{E}^{\simeq},$$

由交换方块诱导

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}([1],\mathbb{E}) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_i} & \mathbb{E}^{\simeq} \\ {\scriptstyle \mathrm{Map}([1],p)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p^{\simeq}} \\ \mathrm{Map}([1],\mathbb{B}) & \xrightarrow[\mathrm{ev}_i]{} & \mathbb{B}^{\simeq}, \end{array}$$

是一个单态射，即其纤维要么为空，要么可缩。为说明这一点，¯我们可以观察到，若存在某个态射 $f\colon a \to b$ 在 $\mathbb{B}$中的笛卡尔提升 $f\colon x \to y$，则与 f 复合会将以 y 为靶的 ∞-群胚的笛卡尔提升与以 y为靶的 id_b 的余笛卡尔提升识别起来；后者是以 y为靶的等价的 ∞-群胚，它总是可缩的。

定义 2.4.4. 给定一个（∞，2）-范畴之间的函子 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$，若对于 $\mathbb{B}$ 中的态射 $f\colon b \to b'$，任意 $x \in \mathbb{E}$，$p(x) \simeq b$，¯ ¯，都存在一个 p-余笛卡尔态射 $f\colon x \to y$，并带有一个等价 $p(f) \simeq f$，且该等价将源对象上的等价扩展而来，则称 $\mathbb{E}$具有 p-（余）笛卡尔提升。类似地，若诱导的映射 ∞-范畴上的函子具有前述意义下的 p-（余）笛卡尔提升，且这些提升在与 1-态射进行前复合和后复合时保持不变，则称 $\mathbb{E}$ 具有 p-（余）笛卡尔提升于 2-态射。

定义 2.4.5. （∞，2）-范畴之间的函子 $\pi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 称为（0，1）-纤维化，如果：

(1) $\mathbb{E}$ 具有 p-余笛卡尔提升，适用于 $\mathbb{B}$ 中的所有态射。
(2) $\mathbb{E}$ 具有 p-笛卡尔提升，适用于 $\mathbb{B}$ 中的所有 2-态射。

如果 $\pi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 与 $\pi'\colon \mathbb{E}' \to \mathbb{B}'$ 是 $(0,1)$-纤维化，我们称 $(\infty,2)$-范畴的一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{E}' \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ \mathbb{B} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{B}' \end{array}$$

是一个态射，其类型为(0，1)-纤维化，如果 ψ 保持 π-余笛卡尔 1-态射和π-笛卡尔 2-态射。

类似地，对 i、$j \in \{0,1\}$ 的所有选择，我们都有(i,j)-纤维化的概念（它们具有 i-笛卡尔1-态射和 j-笛卡尔 2-态射）及其态射。我们将 $\mathbb{F}\mathsf{ib}_{/\mathbb{B}}^{(i,j)}$ 记为 $\mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)/\mathbb{B}}$ 中包含(i,j)-纤维化、(i,j)-纤维化的态射以及它们之间所有2-态射的局部满子-(∞, 2)-范畴（参见定义 2.1.8）。

定义 2.4.6。一个 ϵ-纤维化 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 称为 *1*-纤维化的，如果其纤维是 ∞-范畴。（参见 [AGH25，命题 3.2。14]其中给出了另一种刻画。）

观察 2.4.7。对于函子 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$，以下条件等价：

- p 是一个（1，0）-纤维化。
- p^{op} 是一个（0，0）-纤维化。
- p^{co} 是一个（1，1）-纤维化。
- p^{coop} 是一个（0，1）-纤维化。

记号 2.4.8。为简化记号，我们通常将 ϵ-纤维化简写为$\epsilon \in \{0,1\}^{\times 2}$，并类似地将 $\mathbb{F}\mathsf{ib}_{/\mathbb{B}}^{(i,j)}$ 记作 $\mathbb{F}\mathsf{ib}_{/\mathbb{B}}^{\epsilon}$。给定 $\epsilon = (i,\ j)$，我们也将共轭变差记作 $\epsilon = (1-i,\ 1-j)$。这样便能用简写表示与纤维化相关的各种结构；特别地，我们定义

$$\mathbb{B}^{\epsilon\text{-}\mathrm{op}} := \begin{cases} \mathbb{B}, & \epsilon = (0,1), \\ \mathbb{B}^{\mathrm{op}}, & \epsilon = (1,0), \\ \mathbb{B}^{\mathrm{co}}, & \epsilon = (0,0), \\ \mathbb{B}^{\mathrm{coop}}, & \epsilon = (1,1). \end{cases}$$

定理 2.4.9 (Nuiten [Nui24], Abellán–Stern [AS23a])。存在等价 $(\infty,2)$-范畴

$$\mathbb{F}\mathsf{ib}_{/\mathbb{B}}^{\epsilon} \simeq \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{B}^{\epsilon\text{-}\mathrm{op}}, \mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)}),$$

i.e.

$$\mathbb{F}\mathsf{ib}_{/\mathbb{B}}^{(0,1)} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{B}, \mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)}), \qquad \mathbb{F}\mathsf{ib}_{/\mathbb{B}}^{(1,0)} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{B}^{\mathrm{op}}, \mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)}),$$

$$\mathbb{F}\mathsf{ib}_{/\mathbb{B}}^{(0,0)} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{B}^{\mathrm{co}}, \mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)}), \qquad \mathbb{F}\mathsf{ib}_{/\mathbb{B}}^{(1,1)} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{B}^{\mathrm{coop}}, \mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)}),$$

它们关于 $\mathbb{B}$ 反变自然：左侧通过拉回，右侧通过复合。□

定理 2.4.10 (Abellán–Stern [AS23a])。设 $p\colon \mathbb{X} \to \mathbb{S}$ 是一个 (i,j)-纤维化。则拉回函子

$$p^*\colon \mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)/\mathbb{S}} \to \mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)/\mathbb{X}}$$

有一个右伴随。

证明。根据 [AS23a，定理 3。90]，函子 p^* 在底层 ∞-范畴层面上存在一个右伴随。$(\infty,2)$-范畴结构在 $\mathbb{C}$处$^{(\infty,2)/\mathbb{S}}$ 源自积函子

$$(-) \times \mathbb{S}\colon \mathsf{Cat}_\infty \to \mathsf{Cat}_{(\infty,2)/\mathbb{S}},$$

它由 p^* 作为 $p^*(\mathsf{K} \times \mathbb{S}) \simeq \mathsf{K} \times \mathbb{X}$所保持。因此，根据推论 2.1.6，伴随 $p^* \dashv p_*$ 可提升为 $(\infty,2)$-范畴之间的伴随。

□

定义 2.4.11. 设 $(\mathbb{C}, E)$ 为一个带标记的 $(\infty,2)$-范畴。对于 $\epsilon = (i, j)$，我们将 $\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/(\mathbb{C},E)}$ 记为 $\mathbb{C}\mathrm{at}^{(\infty,2)/\mathbb{C}}$ 的局部满子 $(\infty, 2)$-范畴，其对象是 $\mathbb{C}$ 上的 ϵ-纤维化，其态射保持位于 E 上的 i-笛卡尔态射以及所有 j-笛卡尔 2-态射。

定理 2.4.12 (Abellán–Gagna–Haugseng，[AGH25，命题 3.5。7])。对于$(\mathbb{C}, E)$一个带标记的 $(\infty, 2)$-范畴，我们有如下 $(\infty$,-范畴之间的等价

$$\mathbb{F}\mathrm{ib}^{(0,1)}_{/(\mathbb{C},E)} \simeq \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C}, \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)})^{E\text{-lax}}, \quad \mathbb{F}\mathrm{ib}^{(0,0)}_{/(\mathbb{C},E)} \simeq \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C}^{\mathrm{co}}, \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)})^{E\text{-lax}}$$

$$\mathbb{F}\mathrm{ib}^{(1,1)}_{/(\mathbb{C},E)} \simeq \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C}^{\mathrm{coop}}, \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)})^{E\text{-oplax}}, \quad \mathbb{F}\mathrm{ib}^{(1,0)}_{/(\mathbb{C},E)} \simeq \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C}^{\mathrm{op}}, \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)})^{E\text{-oplax}},$$

在对象上由直化给出。这些等价关于拉回（左侧）和复合（右侧）均为反变自然的。
□

2.5. **松弛切片与锥**。本小节回顾切片与锥的松弛版本，并指出它们之间存在预期的关联。Gagna–Harpaz–Lanari 曾在缩放单纯集合的背景下研究过类似的构造，见 [GHL25，§5。2]。

定义 2.5.1。设 $\mathbb{C}$ 是一个 $(\infty, 2)$-范畴，并设 $c \in \mathbb{C}$。我们通过以下拉回方块定义切片构造的松弛版本

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{c} & \longrightarrow & \mathbb{A}\mathrm{r}^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}(\mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_0} \\ [0] & \xrightarrow{c} & \mathbb{C}, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{c} & \longrightarrow & \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{lax}}(\mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_0} \\ [0] & \xrightarrow{c} & \mathbb{C}, \end{array}$$

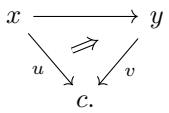
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{c} & \longrightarrow & \mathbb{A}\mathrm{r}^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}(\mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_1} \\ [0] & \xrightarrow{c} & \mathbb{C}, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{c} & \longrightarrow & \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{lax}}(\mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_1} \\ [0] & \xrightarrow{c} & \mathbb{C}. \end{array}$$

松切片具备以下结构：

► 一个由 ev_1 诱导的函子 $\mathbb{C}_{c} \to \mathbb{C}$，它是一个 (0, 1)-纤维化，并对余可表函子 $\mathbb{C}(c, -)$ 进行分类：$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 于 ∞；► 一个由 ev_1 诱导的函子 $\mathbb{C}_{c} \to \mathbb{C}$，它是一个 (0,0)-纤维化，并对余可表函子 $\mathbb{C}(c, -)^{\mathrm{op}}$ 进行分类：$\mathbb{C}^{\mathrm{co}} \to \mathbb{C}$于$\infty$；► 一个由 ev_0 诱导的函子 $\mathbb{C}_{c} \to \mathbb{C}$，它是一个 (1, 0)-纤维化，并对可表函子 $\mathbb{C}(-, c)$ 进行分类：$\mathbb{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}$于$\infty$；► 一个由 ev_0 诱导的函子 $\mathbb{C}_{c} \to \mathbb{C}$，它是一个 (1, 1)-纤维化，并对可表函子 $\mathbb{C}(-, c)^{\mathrm{op}}$ 进行分类：$\mathbb{C}^{\mathrm{coop}} \to \mathbb{C}$于$\infty$。

第一个断言见 [Lur09b，命题 4.1。8]，其余结论则可通过反转 1-态射和 2-态射得到。

注记 2.5.2。 为松弛切片所选的记号旨在给出 1-态射的描述。更确切地说， $\mathbb{C}_{/c}$ 中的一个对象由一个映射u给出： $x \to c$，而从 u 到 v 的一个态射： $y \to c$，可以表示为三角形



它在一个（不可逆）2-态射下交换。类似地，$\mathbb{C}_{/c}$ 中的一个 1-态射由一个松弛交换三角形给出，其中相应的 2-胞腔指向另一个方向。

定义 2.5.3。 给定一个带标记的 (∞,2)-范畴 $(\mathbb{J}, E)$ 和一个函子 $F\colon \mathbb{J} \to \mathbb{C}$，我们将以 F 为底的 E-松弛锥构成的 (∞,2)-范畴 $\mathbb{C}^{E\text{-lax}}_{F}$ 定义为以下拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{E\text{-lax}}_{F} & \longrightarrow & \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{J},\mathbb{C})^{E\text{-lax}}_{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow[\text{const}]{} & \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{J},\mathbb{C})^{E\text{-lax}}; \end{array}$$

因此，根据定义， F 上的一个 E-松弛锥是从一个常值函子出发的 E-松弛自然变换 $c \to F$。类似地，我们定义由 E-松弛反锥构成的 (∞,2)-范畴 $\mathbb{C}^{E\text{-oplax}}_{F}$、由 E-松弛余锥构成的 (∞,2)-范畴 $\mathbb{C}^{E\text{-lax}}_{F}$，以及由 E-松弛反余锥构成的 (∞,2)-范畴 $\mathbb{C}^{E\text{-oplax}}_{F}$。

观察 2.5.4。 由于纤维化的拉回在直化下对应于复合，(1,1)-纤维化 $\mathbb{C}^{E\text{-lax}}_{F} \to \mathbb{C}$ 对应于函子

$$\mathsf{Nat}^{E\text{-lax}}_{\mathbb{J},\mathbb{C}}(\_, F)^{\mathrm{op}}\colon \mathbb{C}^{\mathrm{coop}} \to \mathbb{C}\mathsf{at}_{\infty}\,.$$

类似地，

- $\mathbb{C}^{E\text{-oplax}}_{F}$ 对应于 $\mathsf{Nat}^{E\text{-oplax}}_{\mathbb{J},\mathbb{C}}(-, F)$，
- $\mathbb{C}^{E\text{-lax}}_{F}$ 对应于 $\mathsf{Nat}^{E\text{-lax}}_{\mathbb{J},\mathbb{C}}(F,-)^{\mathrm{op}}$，
- $\mathbb{C}^{E\text{-oplax}}_{F}$ 对应于 $\mathsf{Nat}^{E\text{-oplax}}_{\mathbb{J},\mathbb{C}}(F,-)$。

我们还可以通过联接来描述部分松弛（余）锥的 (∞,2)-范畴：

定义 2.5.5。 设 $(\mathbb{J}, E)$ 是一个带标记的 (∞,2)-范畴。我们通过以下推出图来定义锥构造的松弛版本：

$$\begin{array}{ccc} \{0\}\times\mathbb{J} & \longrightarrow & [0] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [1]\otimes_{\flat,E}\mathbb{J} & \longrightarrow & \mathbb{J}^{\triangleleft}_{E\text{-lax}} \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} \{1\}\times\mathbb{J} & \longrightarrow & [0] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [1]\otimes_{\flat,E}\mathbb{J} & \longrightarrow & \mathbb{J}^{\triangleright}_{E\text{-lax}}. \end{array}$$

类似地，我们通过反转上述 Gray 张量积的顺序来定义 $\mathbb{J}^{\triangleleft}_{E\text{-oplax}}$ 和 $\mathbb{J}^{\triangleright}_{E\text{-(op)lax}}$。

引理 2.5.6。 对于$(\mathbb{J}, E)$带标记的$(\infty,2)$-范畴以及函子 $F\colon \mathbb{J} \to \mathbb{C}$，存在一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{E\text{-lax}}_{F} & \longrightarrow & \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{J}^{\triangleleft}_{E\text{-lax}}, \mathbb{C})^{\mathrm{lax}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{F\} & \longrightarrow & \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{J}, \mathbb{C})^{\mathrm{lax}}, \end{array}$$

其他三种变体也类似。

证明。 根据松切片的定义，我们有一个拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{E\text{-lax}}_{F} & \longrightarrow & \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{lax}}(\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{J}, \mathbb{C})^{E\text{-lax}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} \times [0] & \xrightarrow[\mathrm{const} \times F]{} & (\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{J}, \mathbb{C})^{E\text{-lax}})^{\times 2}. \end{array}$$

根据观察 2.3.9，我们还有一个拉回 k

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{lax}}(\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{J}, \mathbb{C})^{E\text{-lax}}) & \longrightarrow & \mathbb{F}\mathrm{un}([1] \otimes_{\flat, E} \mathbb{J}, \mathbb{C})^{\mathrm{lax}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{J}, \mathbb{C})^{E\text{-lax}})^{\times 2} & \longrightarrow & (\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{J}, \mathbb{C})^{\mathrm{lax}})^{\times 2}. \end{array}$$

将两者结合起来，我们得到一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{E\text{-lax}}_{F} & \longrightarrow & \mathbb{F}\mathrm{un}([1] \otimes_{\flat, E} \mathbb{J}, \mathbb{C})^{\mathrm{lax}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} \times [0] & \xrightarrow[\mathrm{const} \times F]{} & (\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{J}, \mathbb{C})^{\mathrm{lax}})^{\times 2}. \end{array}$$

我们可以将底部的水平映射分解为

$$\mathbb{C} \times [0] \xrightarrow{\mathrm{id} \times F} \mathbb{C} \times \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{J}, \mathbb{C})^{\mathrm{lax}} \xrightarrow{\mathrm{const} \times \mathrm{id}} (\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{J}, \mathbb{C})^{\mathrm{lax}})^{\times 2}.$$

根据 $\mathbb{J}^{\triangleleft}_{E\text{-lax}}$的定义，这给出了我们的方形经由该拉回的水平分解

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{J}^{\triangleleft}_{E\text{-lax}}, \mathbb{C})^{E\text{-lax}} & \longrightarrow & \mathbb{F}\mathrm{un}([1] \otimes_{\flat, E} \mathbb{J}, \mathbb{C})^{\mathrm{lax}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} \times [0] & \xrightarrow[\mathrm{const} \times F]{} & (\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{J}, \mathbb{C})^{\mathrm{lax}})^{\times 2}, \end{array}$$

由此可以看出我们要证明的拉回。 □

引理 2.5.7. 设 $p\colon \mathbb{A} \to [1]$，并考虑函子 $\mathbb{A} \to \mathbb{A}' = \mathbb{A} \coprod_{\mathbb{A}_1} [0]$ 在$[1]$，之上，其中 $\mathbb{A}_1$ 表示在1上的纤维。于是我们有一个$(\infty,2)$范畴之间的等价，

$$\mathbb{A}_0 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{A}'_0.$$

证明。 映射 $\mathbb{A}_0 \to \mathbb{A}'_0$ 显然是本质满的，因此我们只需证明它是全忠实的。为此，我们将在（∞，2）-范畴的一个模型中计算 $\mathbb{A}'$ 。我们首先取 $\mathfrak{A} \to \Delta^1$ 作为 $\mathbb{A} \to [1]$ 在缩放单纯集合中的纤维化模型；于是，纤维 $\mathfrak{A}_i$ 将成为 $\mathbb{A}_i$ $(i = 0, 1)$ 的模型，因为后者由同伦拉回给出。接下来，我们取 $\mathcal{A} := \mathfrak{C}^{\mathrm{sc}}(\mathfrak{A})$ 作为余纤维模型

对于 $\mathbb{A}$，它是一个以标记单纯集合为富化对象的范畴（或 $\mathrm{Set}^{+}_{\Delta}$ -富化范畴），由左Quillen等价 $\mathfrak{C}^{\mathrm{sc}}$ 得到（见 [Lur09b]）。我们类似地定义 $\mathcal{A}_i$ 对于$i = 0,\ 1$；那么所得的函子 $\mathcal{A}_i \to \mathcal{A}$ 是余纤维化（因为 $\mathfrak{C}^{\mathrm{sc}}$ 是左Quillen函子），并且根据该函子的定义，它们也是满子范畴嵌入。

现在我们定义如下的 $\mathrm{Set}^{+}_{\Delta}$ -富化范畴 $\widehat{\mathcal{A}}$：

▶ 对象集合由 $\mathcal{A}_0$ 的对象以及一个“锥点”组成，我们将其记为 v。

▶ 映射的带标记单纯集合定义为 $\widehat{\mathcal{A}}(a,b) = \mathcal{A}_0(a,b)$、$\widehat{\mathcal{A}}(v,v) = *$、$\widehat{\mathcal{A}}(v,b) = \emptyset$；最后，$\widehat{\mathcal{A}}(a,v)$ 定义为函子 $\mathcal{A}(a,\iota(-)):\ \mathcal{A}_1 \to \mathrm{Set}^{+}_{\Delta}$ 的（锥形）$\mathrm{Set}^{+}_{\Delta}$-富化余极限，其中 $\iota:\ \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}$ 表示显然的包含。

这些数据自然地组装成一个 $\mathrm{Set}^{+}_{\Delta}$ -富化范畴，并嵌入如下交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1 & \longrightarrow & [0] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{p} & \widehat{\mathcal{A}}. \end{array}$$

为完成证明，我们将证明这是一个推出方形；由于左侧的垂直态射是余纤维对象之间的余纤维化，且 $[0]$ 也是余纤维对象，因此它是一个同伦推出，从而在 $(\infty,2)$-范畴的 ∞-范畴中刻画一个推出。为证明这一点，假设有一个函子 $f:\ \mathcal{A} \to \mathcal{X}$，其在 $\mathcal{A}_1$ 上的限制在对象 x 处为常值。我们定义一个函子 $\hat{f}:\ \mathcal{A} \to \mathcal{X}$，使得 $f = f \circ p$。要定义 f，只需对每个 $a \in \mathcal{A}_0$ 定义一个映射

$$\varphi_a : \widehat{\mathcal{A}}(p(a), v) \to \mathcal{X}(f(a), x)$$

并证明所有这些选择组合起来构成一个函子。注意，根据构造，我们有一个函子之间的自然变换 $\mathcal{A}(a,\ \iota(-)) \to \mathcal{X}(p(a)\ x)$，其中我们将后一个函子视为常值函子。余极限的泛性质为我们提供了所需的函子 φ_a。显然，上述 $\hat{}$ 选择组合后会如期得到一个函子 f。显然，f 是唯一这样的延拓，证明至此完成。□

命题 2.5.8。 对于任意带标记的 $(\infty,2)$-范畴 $(\mathbb{I}, E)$，典范函子

$$\mathbb{I} \to \mathbb{I}^{\triangleright}_{E\text{-(op)lax}}, \quad \mathbb{I} \to \mathbb{I}^{\triangleleft}_{E\text{-(op)lax}}$$

分别由包含 $\{0\}$、$\{1\} \to [1]$ 诱导的函子都是全忠实的。

证明。 我们只证明 $\{0\} \to [1]$ 的情形；其余情形完全类似。我们先证明映射 $\mathbb{I} \to [1] \otimes_{\flat,E} \mathbb{I}$ 是全忠实的。为此，我们注意到复合

$$\mathbb{I} \to [1] \otimes_{\flat,E} \mathbb{I} \xrightarrow{\pi} [1] \times \mathbb{I}$$

是全忠实的，因此只需证明，π 在第一个函子的本质像中的对象处诱导映射∞-范畴之间的等价。

为此，我们可以使用缩放单纯集合([Lur09b]来实现这个映射，并在应用刚性化函子 $\mathfrak{C}^{\mathrm{sc}}$后验证上述断言，参见 [Lur09b，定义 3.1.10、定理 4.2.2。]。注意，这一点是显然的，因为所得的$\mathrm{Set}_{\Delta}^{+}$ -富化范畴之间的函子在底层单纯富集范畴上是一个同构，且相应映射单纯集合上的装饰一致。

为完成证明，我们将引理 2.5.7 应用于映射 $[1] \otimes_{\flat,E} \mathbb{I} \to [1]$。 □

观察 2.5.9. 设 $* \in \mathbb{I}^{\triangleright}_{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$ 表示锥点，并考虑如下拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I}(*) = \left(\mathbb{I}^{\triangleright}_{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}\right)_{j} \times_{\mathbb{I}^{\triangleright}_{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}} \mathbb{I} & \longrightarrow & \left(\mathbb{I}^{\triangleright}_{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}\right)_{*} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{I} & \longrightarrow & \mathbb{I}^{\triangleright}_{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}} \end{array}$$

我们可以利用直化函子 [Lur09b，定义 3.5.1]的描述看出，$\mathbb{I}(*) \to \mathbb{I}$ 是对应于将 $\mathbb{I}$ 上的恒等函子加以直化的 1-纤维化的 (1, 0)-纤维化，其中我们为源配备由对应于 E 的边所给出的标记。综合以上可知，对每一个 1-纤维化的 (1, 0)-纤维化 $p\colon \mathbb{X} \to \mathbb{I}$，我们可以将 $\mathbb{F}\mathrm{ib}^{(1,0)}_{/\mathbb{I}}(\mathbb{I}(*)\ \mathbb{X})$ 等同于 $\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{I}}(\mathbb{I}, \mathbb{X})$ 的全子-$(\infty, 2)$-范畴，即其中那些位于 $\mathbb{I}$ 之上、并把E 中的 1-态射送到 $\mathbb{X}$ 中笛卡尔态射的函子。

2.6. **带装饰的 $(\infty, 2)$-范畴。** 本小节中，我们引入带装饰的 $(\infty, 2)$-范畴的概念，为后续各节研究纤维化提供一个方便的框架。所谓带装饰的 $(\infty, 2)$-范畴，是指配备了一些（“带装饰的”）1-态射和 2-态射的集合的 $(\infty, 2)$-范畴（这些集合是独立选取的，即带装饰的 2-态射不必连接带装饰的 1-态射）。我们还可以进一步假设这些集合在复合下封闭，并包含所有等价，因此可以将这些对象形式化定义如下：

定义 2.6.1。 带装饰的 $(\infty, 2)$-范畴 $\mathbb{A}^{\diamond}$ 是一个 $(\infty, 2)$-范畴的跨度

$$\mathbb{A}^{\diamond}_{(1)} \xrightarrow{i_1} \mathbb{A} \xleftarrow{i_2} \mathbb{A}^{\diamond}_{(2)}$$

使得（见定义 2.1.8）

► i_1 是一个宽的局部满子-$(\infty, 2)$-范畴，► i_2 是一个宽且局部宽的子-$(\infty, 2)$-范畴包含。

我们将 ∞-范畴 $\mathrm{DCat}_{(\infty,2)}$ 定义为 $\mathrm{Fun}(\Lambda^2_{,0}{}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Cat}_{(\infty,2)})$ 的全子范畴，其跨度由带装饰的 $(\infty,2)$-范畴构成，其中 $\Lambda^2_{,0}{}^{\mathrm{op}}$ 表示范畴

$$1 \to 0 \leftarrow 2.$$

观察 2.6.2。 由 [AGH25，观察 2.5.6、2.5.8] 可直接推出，$(\infty,2)$-范畴的一个函子是

► 当且仅当它与$\emptyset \to *$, $\partial C_2 \to C_2$右正交时，才是宽的局部全子范畴嵌入，

► 当且仅当它与 $\emptyset \to *$, $\partial[1] \to [1]$, $\partial C_3 \to C_2$右正交时，才是宽且局部宽的子范畴嵌入。

特别地，根据 [Lur09a，命题 5.5.5，7] 这两类函子都构成 $\mathrm{Cat}_{(\infty,2)}$ 上某个分解系统的右类。由此很容易看出，包含 $\mathrm{DCat}_{(\infty,2)} \hookrightarrow \mathrm{Fun}(\Lambda^2_{,0}{}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Cat}_{(\infty,2)})$ 有一个左伴随，它通过使用这些分解系统对跨度 (∞,2)-范畴进行分解来定义。此外，由于我们考虑正交性的所有态射都在紧致的 (∞,2)-范畴之间，显然 $\mathrm{DCat}_{(\infty,2)}$ 在 $\mathrm{Fun}(\Lambda^2_{,0}{}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Cat}_{(\infty,2)})$ 中对滤过余极限封闭，因此这个左伴随展示了 $\mathrm{DCat}_{(\infty,2)}$ 是一个可达局部化。特别地，$\mathrm{DCat}_{(\infty,2)}$ 是一个可表的 ∞-范畴。此外，我们可以如下描述带装饰的 (∞,2)-范畴的（余）极限：

► $\mathrm{DCat}_{(\infty,2)}$ 中图表的极限$\Lambda^2_{,0}{}^{\mathrm{op}}$,是在 $\mathrm{Fun}(\Lambda^2_{,0}{}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Cat}_{(\infty,2)})$ 中计算的，因此由底层 (∞,2)-范畴的极限以及装饰子范畴的极限构成；► $\mathrm{DCat}_{(\infty,2)}$ 中图表的余极限$\Lambda^2_{,0}{}^{\mathrm{op}}$,是通过对 $\mathrm{Fun}(\Lambda^2_{,0}{}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Cat}_{(\infty,2)})$ 中的余极限进行因子分解得到的，因此由底层 (∞, 2)-范畴的余极限，以及由图表中各装饰的像生成的装饰构成。

观察 2.6.3。 容易看出，函子 $\mathrm{ev}_0\colon \mathrm{Fun}(\Lambda^2_{,0}{}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Cat}_{(\infty,2)}) \to \mathrm{Cat}_{(\infty,2)}$ 具有以下性质：

(1) ev_0 有一个左伴随，它将一个 (∞,2)-范畴 $\mathbb{A}$ 映到跨度

$$\emptyset \to \mathbb{A} \leftarrow \emptyset.$$

(2) ev_0 有一个右伴随 const，它将一个(∞,2)-范畴 $\mathbb{A}$ 映到跨度

$$\mathbb{A} \xrightarrow{=} \mathbb{A} \xleftarrow{=} \mathbb{A}.$$

(3) 右伴随 const 还有一个右伴随，它将一个跨度

$$\mathbb{A} \to \mathbb{B} \leftarrow \mathbb{C}$$

映到其极限 $\mathbb{A} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{C}$。

(4) ev_0 是余笛卡尔纤维化；跨度的余笛卡尔传输

$$\mathbb{A} \xrightarrow{F} \mathbb{B} \xleftarrow{G} \mathbb{C}$$

沿 $\varphi\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ 由与 φ复合给出，从而得到

$$\mathbb{A} \xrightarrow{\varphi F} \mathbb{B}' \xleftarrow{\varphi G} \mathbb{C}.$$

(5) ev_0 是笛卡尔纤维化；跨度的笛卡尔传输

$$\mathbb{A} \to \mathbb{B} \leftarrow \mathbb{C}$$

沿着 $\psi\colon \mathbb{B}' \to \mathbb{B}$ 由沿着 ψ 的拉回给出，从而得到

$$\mathbb{A} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{B}' \to \mathbb{B}' \leftarrow \mathbb{C} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{B}'.$$

由此可得 ev_0 到.....的限制

$$u_{\mathrm{d}} \colon \mathsf{DCat}_{(\infty,2)} \to \mathsf{Cat}_{(\infty,2)}$$

具有如下相应性质：

(1') u_{d} 具有左伴随 $(-)^{\flat\flat}$，它将一个 $(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{A}$ 映到跨度

$$\mathbb{A}^{\flat\flat} \;:=\; \mathbb{A}_{\mathrm{eq}} \to \mathbb{A} \leftarrow \mathbb{A}^{\leq 1},$$

其中 $\mathbb{A}_{\mathrm{eq}}$ 是仅包含可逆 1-态射、但包含它们之间所有 2-态射的子范畴。

(2') u_{d} 具有右伴随 $(-)^{\sharp\sharp}$，它将一个 $(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{A}$ 映到跨度

$$\mathbb{A}^{\sharp\sharp} \;:=\; \mathbb{A} \xrightarrow{=} \mathbb{A} \xleftarrow{=} \mathbb{A}.$$

(3') 右伴随 $(-)^{\sharp\sharp}$ 还具有进一步的右伴随 D，它将一个带装饰的 $(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{A}^{\diamond}$ 映到拉回

$$D(\mathbb{A}^{\diamond}) \;:=\; \mathbb{A}^{\diamond}_{(1)} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}^{\diamond}_{(2)},$$

即包含这些带装饰的 1-态射及其间带装饰的 2-态射的 $\mathbb{A}$ 的子-$(\infty,2)$-范畴。

(4') u_{d} 是余笛卡尔纤维化；带装饰的 $(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{A}^{\diamond}$ 沿 $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ 的余笛卡尔传输，由先与 φ 复合，再对 $\mathbf{DCat}_{(\infty,2)}$ 进行局部化（即使用适当的分解系统分解该跨度）给出。

$$\mathbb{A}^{\diamond}_{(1)} \to \mathbb{A}' \leftarrow \mathbb{A}^{\diamond}_{(2)}$$

使用适当的分解系统）。

(5') u_{d} 是笛卡尔纤维化；带装饰的 $(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{A}^{\diamond}$ 沿函子 $\psi\colon \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$ 的笛卡尔传输，由沿 ψ 拉回给出（因为这会保留我们分解系统中的右类）。

观察 2.6.4。 令 $\mathbf{2DCat}_{(\infty,2)} \subseteq \mathbf{Ar}(\mathbf{Cat}_{(\infty,2)})$ 表示由那些宽且局部宽的子-$(\infty,2)$-范畴包含函子张成的全子范畴。那么这个等价

$$\mathsf{Fun}(\Lambda^{2,\mathrm{op}}_0, \mathsf{Cat}_{(\infty,2)}) \simeq \mathsf{Ar}(\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}) \times_{\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}} \mathsf{Ar}(\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}),$$

由显然的 $\Lambda^{2}_{,\,0}{}^{\mathrm{op}}$ 推出分解得到，限制为一个等价

$$\mathsf{DCat}_{(\infty,2)} \simeq \mathsf{MCat}_{(\infty,2)} \times_{\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}} \mathsf{2DCat}_{(\infty,2)}\,.$$

由推论 2.2.7，我们接着得到一个等价，

$$\mathsf{DCat}_{(\infty,2)} \simeq \mathsf{MCat}_{\infty} \times_{\mathsf{Cat}_{\infty}} \mathsf{2DCat}_{(\infty,2)}, \tag{2.1}$$

因此我们可以将一个带装饰的 $(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{C}^{\diamond}$ 视为一个图表

$$\mathbb{C}^{\diamond,\leq 1}_{(1)} \to \mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C}^{\diamond}_{(2)}$$

其中 $\mathbb{C}^{\diamond,\leq 1}{}_{(1)}$ 是 $\mathbb{C}^{\leq 1}$ 的一个宽子范畴，且 $\mathbb{C}^{\diamond}_{(2)}$ 是 $\mathbb{C}$的一个宽且局部宽的子-$(\infty,2)$-范畴。我们注意到，遗忘函子 $u^{\mathrm{m}}_{\mathrm{d}}\colon \mathbf{DCat}_{(\infty,2)} \to \mathbf{MCat}_{(\infty,2)}$ 具有

▶ 一个右伴随(–)$^\sharp$，它将$(\mathbb{C}, E) \in \mathsf{MCat}_{(\infty,2)}$映到带装饰的(∞,2)-范畴

$$(\mathbb{C}, E)^\sharp := \mathbb{C}_E \to \mathbb{C} \xleftarrow{=} \mathbb{C},$$

▶ 一个左伴随 (–)$^\flat$，它将 $(\mathbb{C}, E) \in \mathsf{MCat}_{(\infty,2)}$ 映到带装饰的 (∞,2)-范畴

$$(\mathbb{C}, E)^\sharp := \mathbb{C}_E \to \mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C}^{\leq 1},$$

此外，$u_{\mathrm{d}}^{\mathrm{m}}(–)^\sharp \simeq \mathrm{id} \simeq u_{\mathrm{d}}^{\mathrm{m}}(–)^\flat$，因此两个伴随函子都是全忠实的。

记号 2.6.5. 若 K 是一个 ∞-范畴，则它具有唯一一类带装饰的 2-态射，并且有时便于写成

$$\mathsf{K}^\sharp = \mathsf{K}^{\sharp\sharp} = \mathsf{K}^{\sharp\flat}, \quad \mathsf{K}^\flat = \mathsf{K}^{\flat\flat} = \mathsf{K}^{\flat\sharp}.$$

类似地，一个 ∞-群胚 X 具有唯一的装饰，我们可以写成

$$X = X^{\flat\flat} = X^{\sharp\sharp}.$$

命题 2.6.6. $u_{\mathrm{d}}\colon \mathsf{DCat}_{(\infty,2)} \to \mathsf{Cat}_{(\infty,2)}$ 是一个忠实函子。

证明。 这直接由命题 2.2.2得出。 □

引理 2.6.7。 函子 $(–)^{\flat\flat}$ 有一个左伴随 $\tau_{\mathrm{d}}\colon \mathsf{DCat}_{(\infty,2)} \to \mathsf{Cat}_{(\infty,2)}$，由对带装饰的 *1*-态射和 *2*-态射求逆给出。

证明。 我们使用 $\mathsf{DCat}_{(\infty,2)}$ 在 (2.1) 中的描述，并将一个带装饰的 $(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{A}^\diamond$ 视为

$$\mathbb{A}^{\diamond,\leq 1}_{(1)} \to \mathbb{A} \leftarrow \mathbb{A}^\diamond_{(2)};$$

然后我们将 $\tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{A}^\diamond)$ 定义为迭代推出

$$\tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{A}^\diamond) := \|\mathbb{A}^{\diamond,\leq 1}_{(1)}\| \amalg_{\mathbb{A}^{\diamond,\leq 1}_{(1)}} \mathbb{A} \amalg_{\mathbb{A}^\diamond_{(2)}} \tau_{(\infty,1)}(\mathbb{A}^\diamond_{(2)}).$$

显然，这定义了一个函子 $\tau_{\mathrm{d}}\colon \mathsf{DCat}_{(\infty,2)} \to \mathsf{Cat}_{(\infty,2)}$。对于一个 $(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{B}$，我们于是有一个自然等价

$$\begin{aligned}
\mathrm{Map}_{\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}}(\tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{A}^\diamond), \mathbb{B}) &\simeq \mathrm{Map}(\|\mathbb{A}^{\diamond,\leq 1}_{(1)}\|, \mathbb{B}) \times_{\mathrm{Map}(\mathbb{A}^{\diamond,\leq 1}_{(1)}, \mathbb{B})} \mathrm{Map}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \times_{\mathrm{Map}(\mathbb{A}^\diamond_{(2)}, \mathbb{B})} \mathrm{Map}(\tau_{(\infty,1)}\mathbb{A}^\diamond_{(2)}, \mathbb{B}) \\
&\simeq \mathrm{Map}(\mathbb{A}^{\diamond,\leq 1}_{(1)}, \mathbb{B}^{\simeq}) \times_{\mathrm{Map}(\mathbb{A}^{\diamond,\leq 1}_{(1)}, \mathbb{B})} \mathrm{Map}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \times_{\mathrm{Map}(\mathbb{A}^\diamond_{(2)}, \mathbb{B})} \mathrm{Map}(\mathbb{A}^\diamond_{(2)}, \mathbb{B}^{\leq 1}) \\
&\simeq \mathrm{Map}_{\mathsf{DCat}_{(\infty,2)}}(\mathbb{A}^\diamond, \mathbb{B}^{\flat\flat}),
\end{aligned}$$

因为带装饰的 $(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{B}^{\flat\flat}$ 由图表给出

$$\mathbb{B}^{\simeq} \to \mathbb{B} \leftarrow \mathbb{B}^{\leq 1}$$

根据（2.1）中的描述。这表明函子 τ_{d} 是 $(–)^{\flat\flat}$的左伴随，正如所需。□

定义 2.6.8。 对于带装饰的（∞，2）-范畴 $\mathbb{A}^\diamond$ 和 $\mathbb{B}^\diamond$，我们将 $\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}^\diamond, \mathbb{B}^\diamond)$ 记作 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ 的全子范畴，该子范畴由带装饰的函子张成。我们赋予它如下装饰：

▶ 自然变换 $\mathbb{A} \times [1] \to \mathbb{B}$ 是带装饰的，若其在每个 $a \in \mathbb{A}$ 处的分量是 $\mathbb{B}$ 中的带装饰的 1-态射，即若它是装饰函子 $\mathbb{A}^\diamond \times [1]^\sharp \to \mathbb{B}^\diamond$；

▶ 2-态射 $\mathbb{A} \times C_2 \to \mathbb{B}$ 是带装饰的，若其在每个 $a \in \mathbb{A}$ 处的分量是 $\mathbb{B}$ 中的装饰 2-态射，即若它是装饰函子 $\mathbb{A}^\diamond \times C_2^{\flat\sharp} \to \mathbb{B}^\diamond$。

命题 2.6.9. ∞-范畴 $\mathsf{DCat}_{(\infty,2)}$ 是笛卡儿闭的，其内部 *Hom* 由 $\mathbb{D}\mathsf{Fun}(-,-)$给出。

证明。 由于 u_{d} 是忠实的，只需验证：对于带装饰的 $(\infty,2)$-范畴$\mathbb{A}^\diamond, \mathbb{B}^\diamond, \mathbb{C}^\diamond$，函子 $\mathbb{A}\times\mathbb{B} \to \mathbb{C}$ 是带装饰的，当且仅当其伴随 $\mathbb{A} \to \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{B},\mathbb{C})$ 经由一个带装饰的函子 $\mathbb{A}^\diamond \to \mathbb{D}\mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{B}^\diamond,\mathbb{C}^\diamond)$分解；这显然可由展开这两个条件得出。□

因此，我们可以将 $\mathsf{DCat}_{(\infty,2)}$ 视为自身富化的。更重要的是，我们可以将其提升为一个 $(\infty,2)$-（或 $(\infty,3)$-）范畴：

构造 2.6.10. 函子 $(-)^{\flat\flat}\colon \mathsf{Cat}_{(\infty,2)} \to \mathsf{DCat}_{(\infty,2)}$ 保有限乘积；对于 $\mathbb{A}^\diamond \in \mathsf{Cat}_{(\infty,2)}$，函子 $(-)^{\flat\flat} \times \mathbb{A}^\diamond$ 有一个右伴随，即 $u_{\mathrm{d}}\,\mathbb{D}\mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{A}^\diamond,-)$。由观察 2.1.4 可知，我们可以将 $\mathsf{DCat}_{(\infty,2)}$ 提升为一个 $(\infty,3)$-范畴；我们将其底层的 $(\infty,2)$-范畴记为 $\mathbb{D}\mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)}$。展开定义可知，两个对象 $\mathbb{A}^\diamond$ 和 $\mathbb{B}^\diamond$ 之间的映射 ∞-范畴为

$$(u_{\mathrm{d}}\,\mathbb{D}\mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{A}^\diamond,\mathbb{B}^\diamond))^{\leq 1},$$

它是 $\mathsf{Fun}(\mathbb{A},\mathbb{B})$ 中由带装饰的函子张成的全子范畴：其态射是带装饰的函子

$$\mathbb{A}^\diamond \times [1]^\flat \to \mathbb{B}^\diamond,$$

它们是所有带装饰的函子之间的自然变换。我们还注意到，函子 u_{d} 与 $(-)^{\flat\flat}$ 保持积（因其为右伴随），并且存在等价 $u_{\mathrm{d}} \circ (-)^{\flat\flat}$，因此利用推论 2.1.6 我们得到$(\infty,2)$-范畴的伴随

$$(-)^{\flat\flat} \dashv u_{\mathrm{d}} \dashv (-)^{\sharp\sharp}.$$

函子 u_{d} 在映射 ∞-范畴上由全忠实包含给出

$$(u_{\mathrm{d}}\,\mathbb{D}\mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{A}^\diamond,\mathbb{B}^\diamond))^{\leq 1} \to \mathsf{Fun}(\mathbb{A},\mathbb{B})^{\leq 1},$$

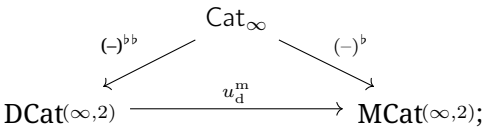
从而这是一个局部全忠实函子。此外，函子 $(-)^{\flat\flat}$ 保持以 $[1]^\flat$ 作的余张量，因为一般而言典范映射

$$\mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{C},\mathbb{D})^{\flat\flat} \to \mathbb{D}\mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{C}^{\flat\flat},\mathbb{D}^{\flat\flat})$$

是一个等价，因此其左伴随 τ_{d} 也可提升为$(\infty,2)$-范畴的伴随 $\tau_{\mathrm{d}} \dashv (-)^{\flat\flat}$，此结论由命题 2.1.5 的对偶得到。

警告 2.6.11. $(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{D}\mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)}$ 并非 $\mathbb{F}\mathsf{un}(\Lambda^2_{,0}{}^{\mathrm{op}}, \mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)})$ 的子-$(\infty,2)$-范畴。这是因为我们把带装饰的函子之间的所有 2-态射，即形如 $\mathbb{A}^\diamond \times [1]^\flat \to \mathbb{B}^\diamond$ 的带装饰的函子，都取作$\mathbb{D}\mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)}$中的 2-态射，而只有形如 $\mathbb{A}^\diamond \times [1]^\sharp \to \mathbb{B}^\diamond$ 的那些来自 $\mathbb{F}\mathsf{un}(\Lambda^2_{,0}{}^{\mathrm{op}}, \mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)})$ 中的 2-态射。

观察 2.6.12. 遗忘函子 $u^{\mathrm{m}}_{\mathrm{d}}\colon \mathrm{DCat}_{(\infty,2)} \to \mathrm{MCat}_{(\infty,2)}$ 嵌入一个交换三角形



该函子及其右伴随 $(-)^\sharp$ 因此可由推论 (∞，2-范畴）提升为 2-函子（以及一个 2.1.6伴随；左伴随 $(-)^\sharp$同样如此，因此我们得到一个伴随三元组 $(-)^\flat \dashv u^{\mathrm{m}}_{\mathrm{d}} \dashv (-)^\sharp$，在 (∞，2-范畴层面上也是如此。此外，我们有一个带装饰的 (∞，2-范畴之间的自然等价

$$\mathbb{M}\mathbb{F}\mathrm{un}(-,-)^\sharp \simeq \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}((-)^\sharp, (-^\sharp)),$$

这尤其表明，$(–)^\sharp$ 可提升为 (∞，2)-范畴 $\mathbb{M}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)} \hookrightarrow \mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$之间的全忠实函子。

2.7. **装饰 Gray 张量积与（反）松自然变换。** 在本小节中，我们引入 Gray 张量积的一个装饰版本，并证明它在每个变量上都有右伴随。提醒读者，这里使用的是普通 Gray 张量积（如 §2.1中所述），并为其赋予某些装饰，不应将其与 §带标记的 Gray 张量积混淆；后者见 §2.3，其中某些 2-态射被求逆。事实上，正如我们将简要讨论的，我们也可以定义带标记 Gray 张量的装饰版本。

定义 2.7.1。 给定两个带装饰的（∞，2）-范畴 $\mathbb{A}^\diamond$ 和 $\mathbb{B}^\diamond$，我们将（不带装饰的）（∞，2）-范畴 $\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}^\diamond, \mathbb{B}^\diamond)^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$ 定义为 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{B})^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$ 的局部满子（∞，2）- 范畴，其中

▶ 对象是装饰函子 $\mathbb{A}^\diamond \to \mathbb{B}^\diamond$，▶ 态射是（反）松自然变换，并且对于 $\mathbb{A}$ 中每个带装饰的 1-态射，相应的（反）松自然性方块中 $\mathbb{B}$ 的 2-态射都带有装饰。

我们将其增强为一个带装饰的 (∞,2)-范畴，规定

▶ 一个 (反)松弛变换是带装饰的 1-态射，当且仅当其所有分量都是 $\mathbb{B}$ 中的带装饰的 1-态射，且其 (反)松弛自然性方块中的所有 2-态射都带有装饰；▶ 一个 2-态射是带装饰的，当且仅当对于 $\mathbb{A}$中的每个对象，其对应的分量 2-态射都带有装饰。

定义 2.7.2. 给定带装饰的 (∞,2)-范畴 $\mathbb{A}^\diamond$ 和 $\mathbb{B}^\diamond$，我们将 deco-rated (∞,2)-范畴 $\mathbb{A}^\diamond \otimes^{\mathrm{d}} \mathbb{B}^\diamond$ 定义为对 $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ 施加装饰，使得

▶ 带装饰的 1-态射由 $\mathbb{A}^\diamond_{(1)} \times \mathbb{B}^\simeq$ 和 $\mathbb{A}^\simeq \times \mathbb{B}^\diamond_{(1)}$ 中的态射生成；▶ 带装饰的 2-态射由 $\mathbb{A}^\diamond_{(2)} \times \mathbb{B}^\simeq$、$\mathbb{A}^\simeq \times \mathbb{B}^\diamond_{(2)}$、$\mathbb{A}^{\diamond,\,\leq 1\,(1)} \otimes \mathbb{B}^{\leq 1}$ 以及 $\mathbb{A}^{\leq 1} \otimes \mathbb{B}^{\diamond,\,\leq 1\,(1)}$ 中的态射生成。

换句话说，除了为与 $\mathbb{A}$ 的某个对象以及 $\mathbb{B}$ 中的一个带装饰的（2-）态射相关联的（2-）态射添加装饰，反之亦然之外，如果来自 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$ 的一对态射中有一个在 $\mathbb{A}^\diamond$ 或 $\mathbb{B}^\diamond$ 中带有标记，我们还会为与这对态射相关联的松方块中的 2-态射添加装饰。

观察 2.7.3. 设 $\mathbb{A}^\diamond, \mathbb{B}^\diamond, \mathbb{C}^\diamond$ 为带装饰的 $(\infty, 2)$-范畴。函子 $\mathbb{C} \to \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{A}, \mathbb{B})^{\mathrm{oplax}}$ 经由 $\mathbb{DF}\mathsf{un}(\mathbb{A}^\diamond, \mathbb{B}^\diamond)^{\mathrm{oplax}}$ 分解，当且仅当伴随函子$\mathbb{A} \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ 满足：

▶ 对每个对象 $c \in \mathbb{C}$，到 $\{c\} \times \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 的限制是带装饰的；▶ 对 $\mathbb{C}$ 中的每个态射 $c \to c'$，到 $\mathbb{A} \otimes [1] \to \mathbb{B}$ 的限制将 $\mathbb{A}$ 中的任意带装饰的 1-态射映为一个带有装饰 2-态射的 oplax 方块。

此外，若还满足以下条件，则此函子是带装饰的：

▶ 对每个带装饰的态射 $c \to c' \in \mathbb{C}$，到 $\mathbb{A} \otimes [1] \to \mathbb{B}$ 的限制将 $\mathbb{A}$ 的每个对象映为 $\mathbb{B}$ 中的带装饰的 1-态射，并将 $\mathbb{A}$ 中的每个态射映为一个带有装饰 2-态射的 oplax 方块；▶ 对 $\mathbb{C}$ 中的每个装饰 2-态射，到 $\mathbb{A} \otimes C_2 \to \mathbb{B}$ 的限制将 $\mathbb{A}$ 的每个对象映为 $\mathbb{B}$ 中的装饰 2-态射。

总而言之，这些条件说明我们有一个装饰函子 $\mathbb{A}^\diamond \otimes^{\mathrm{d}} \mathbb{C}^\diamond \to \mathbb{B}^\diamond$，而且它等价于另一个伴随函子 $\mathbb{A} \to \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{C}, \mathbb{B})^{\mathrm{lax}}$，后者经由一个装饰函子 $\mathbb{A}^\diamond \to \mathbb{DF}\mathsf{un}(\mathbb{C}^\diamond, \mathbb{B}^\diamond)^{\mathrm{lax}}$ 分解。因此，函子

$$- \otimes^{\mathrm{d}} - \colon \mathsf{DCat}_{(\infty,2)} \times \mathsf{DCat}_{(\infty,2)} \to \mathsf{DCat}_{(\infty,2)}$$

在每个变量中都有右伴随，给定为

$$\begin{aligned}\mathrm{Map}_{\mathsf{DCat}_{(\infty,2)}}(\mathbb{C}^\diamond, \mathbb{DF}\mathsf{un}(\mathbb{A}^\diamond, \mathbb{B}^\diamond)^{\mathrm{oplax}}) &\simeq \mathrm{Map}_{\mathsf{DCat}_{(\infty,2)}}(\mathbb{A}^\diamond \otimes^{\mathrm{d}} \mathbb{C}^\diamond, \mathbb{B}^\diamond) \\ &\simeq \mathrm{Map}_{\mathsf{DCat}_{(\infty,2)}}(\mathbb{A}^\diamond, \mathbb{DF}\mathsf{un}(\mathbb{C}^\diamond, \mathbb{B}^\diamond)^{\mathrm{lax}}).\end{aligned}$$

记号 2.7.4. 为使记号更简洁，我们方便地记作

$$\mathbb{A}^\diamond \otimes^{\mathrm{d},\boldsymbol{\epsilon}} \mathbb{B}^\diamond := \begin{cases} \mathbb{A}^\diamond \otimes^{\mathrm{d}} \mathbb{B}^\diamond, & \boldsymbol{\epsilon} = (0,1), (1,0), \\ \mathbb{B}^\diamond \otimes^{\mathrm{d}} \mathbb{A}^\diamond, & \boldsymbol{\epsilon} = (0,0), (1,1), \end{cases}$$

$$\mathbb{DF}\mathsf{un}(\mathbb{A}^\diamond, \mathbb{B}^\diamond)^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-}\mathrm{lax}} := \begin{cases} \mathbb{DF}\mathsf{un}(\mathbb{A}^\diamond, \mathbb{B}^\diamond)^{\mathrm{oplax}}, & \boldsymbol{\epsilon} = (0,1), \quad (1,0), \\ \mathbb{DF}\mathsf{un}(\mathbb{A}^\diamond, \mathbb{B}^\diamond)^{\mathrm{lax}}, & \boldsymbol{\epsilon} = (0,0), \quad (1,1). \end{cases}$$

于是我们有自然等价

映射$(\mathbb{A}^\diamond, \mathbb{DF}\mathsf{un}(\mathbb{B}^\diamond, \mathbb{C}^\diamond)^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-}\mathrm{lax}}) \simeq$映射$(\mathbb{B}^\diamond \otimes^{\mathrm{d},\boldsymbol{\epsilon}} \mathbb{A}^\diamond, \mathbb{C}^\diamond) \simeq$映射$(\mathbb{B}^\diamond, \mathbb{DF}\mathsf{un}(\mathbb{A}^\diamond, \mathbb{C}^\diamond)^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-}\overline{\mathrm{lax}}})$。

警告 2.7.5. 记号 2.7.4 的约定源于对定理 ϵ3.4.1 中部分纤维化的刻画以及相关结果，并且与定理 *2.4.12*中直化到 (反)松弛变换的变差并不吻合。事实上，如上所述，我们将 $(0,1)$与 $(1,0)$配对，而在 2.4.12 中，我们改为将 $(0,1)$ 与 $(0,0)$配对。

命题 2.7.6. 对于带装饰的$(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{A}^\diamond, \mathbb{B}^\diamond, \mathbb{C}^\diamond$，我们有一个自然等价

$$\mathbb{A}^\diamond \otimes^{\mathrm{d}} (\mathbb{B}^\diamond \otimes^{\mathrm{d}} \mathbb{C}^\diamond) \simeq (\mathbb{A}^\diamond \otimes^{\mathrm{d}} \mathbb{B}^\diamond) \otimes^{\mathrm{d}} \mathbb{C}^\diamond.$$

证明. 根据定义可立即得出，在 Gray 张量积的结合律等价下，各装饰彼此匹配。□

注 2.7.7. 我们预期，带装饰的 Gray 张量积实际上可以进一步增强，使 $\mathbb{D}\mathrm{Cat}_{(\infty,2)}$ 成为一个单体 ∞-范畴。由于我们不需要了解上述结合律陈述之外的任何内容，因此不打算证明这一点。

推论2.7.8. 存在带装饰的$(\infty,2)$-范畴之间的自然等价

$$\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{A}^{\diamond},\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{B}^{\diamond},\mathbb{C}^{\diamond})^{\mathrm{lax}})^{\mathrm{oplax}}\simeq\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{B}^{\diamond},\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{A}^{\diamond},\mathbb{B}^{\diamond})^{\mathrm{oplax}})^{\mathrm{lax}},$$
$$\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{A}^{\diamond}\otimes^{\mathrm{d}}\mathbb{B}^{\diamond},\mathbb{C}^{\diamond})^{\mathrm{oplax}}\simeq\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{B}^{\diamond},\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{A}^{\diamond},\mathbb{C}^{\diamond})^{\mathrm{oplax}})^{\mathrm{oplax}},$$
$$\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{A}^{\diamond}\otimes^{\mathrm{d}}\mathbb{B}^{\diamond},\mathbb{C}^{\diamond})^{\mathrm{lax}}\simeq\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{A}^{\diamond},\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{B}^{\diamond},\mathbb{C}^{\diamond})^{\mathrm{lax}})^{\mathrm{lax}},$$

对于 $\mathbb{A}^{\diamond},\mathbb{B}^{\diamond},\mathbb{C}^{\diamond}\in\mathrm{DCat}_{(\infty,2)}$。 □

警告 2.7.9. 我们的带装饰的Gray 张量积由带装饰的 1-态射和 2-态射构成的$(\infty,2)$-范畴的正规 Gray 张量积组成。不要将它与带标记的 Gray 张量积相混淆，后者是带标记的$(\infty,2)$-范畴的 Gray 张量积，如上文 §2.2所述，其中 Gray 张量积中由标记确定的某些 2-态射会被求逆。事实上，我们可以将二者结合起来，考虑带装饰的$(\infty,2)$-范畴，并为其配备另一组带标记的态射：

变体 2.7.10. 假设我们有一个带装饰的（∞，2）-范畴 $\mathbb{A}^{\diamond}$，并且另外在其底（∞，2）-范畴上有一个标记（$\mathbb{A}$，I）。对于 $\mathbb{B}^{\diamond}$另一个带装饰的（∞，2）-范畴，我们随后将 $\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{A}^{\diamond},\mathbb{B}^{\diamond})^{I\text{-（反）松弛}}$定义为 $\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{A}^{\diamond},\mathbb{B}^{\diamond})^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$与 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A},\mathbb{B})^{I\text{-（反）松弛}}$在 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A},\mathbb{B})^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$中的交，其装饰继承自前者。我们随后还可以定义这些标记 Gray 张量积的带装饰版本——$\otimes^{\mathrm{d}}_{\flat,I}\mathbb{A}^{\diamond}$与$\mathbb{A}^{\diamond}\otimes^{\mathrm{d}}_{I,\flat}$——它们参与伴随

$$-\otimes^{\mathrm{d}}_{\flat,I}\mathbb{A}^{\diamond}\dashv\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{A}^{\diamond},-)^{I\text{-lax}},$$
$$\mathbb{A}^{\diamond}\otimes^{\mathrm{d}}_{I,\flat}-\dashv\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{A}^{\diamond},-)^{I\text{-oplax}}.$$

引理 2.7.11. 假设 $\mathbb{A}^{\diamond}$、$\mathbb{B}^{\diamond}$、$\mathbb{C}^{\diamond}$ 是带装饰的（∞，2）-范畴，并且我们还有一个带标记的（∞，2）-范畴（$\mathbb{B}$，I）。则作为（∞，2）-范畴，

$$\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{A}^{\diamond},\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{B}^{\diamond},\mathbb{C}^{\diamond})^{I\text{-lax}})^{\mathrm{oplax}}$$

等价于.....的全子$(\infty,2)$-范畴

$$\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{B}^{\diamond},\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{A}^{\diamond},\mathbb{C}^{\diamond})^{\mathrm{oplax}})^{I\text{-lax}}$$

由将 I 中的态射映为强变换的函子所张成。

证明。由定义， $\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{A}^{\diamond},\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{B}^{\diamond},\mathbb{C}^{\diamond})^{I}\text{-松})^{\mathrm{oplax}}$是 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A},\mathbb{D}\mathrm{Fun}(\mathbb{B}^{\diamond},\mathbb{C}^{\diamond})^{I}\text{-松})^{\mathrm{oplax}}$的一个局部满子-$(\infty,2)$-范畴，而后者又根据 [AGH25，定理2.6.3]是 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A},\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B},\mathbb{C})^{I}\text{-松})^{\mathrm{oplax}}$ 的一个局部满子-$(\infty,2)$-范畴。由观察2.3.9可知，我们可以将其等同于下述对象的满子-$(\infty,2)$-范畴：

$\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}, \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{C})^{\mathrm{oplax}})^{I\text{-松}}$，即由将 I中的态射映为强变换的函子所张成者。这个(∞,2)-范畴进而包含

$$\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}^{\diamond}, \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}^{\diamond}, \mathbb{C}^{\diamond})^{\mathrm{oplax}})^{I\text{-lax}}$$

作为局部满的子-(∞，2)-范畴，因此只需注意到这些子-(∞， 2)-范畴彼此吻合。□

备注 2.7.12。 更一般地，也可以考虑两个带标记的 (∞，2)-范畴 ($\mathbb{A}$， I) 和 ($\mathbb{B}$， J) 的带标记 Gray 张量 $\mathbb{A} \otimes_{I,\ J} \mathbb{B}$ 的带装饰升级。这给出了带有相应伴随的成对带装饰、带标记 (∞，2)-范畴上的带装饰、带标记 Gray 张量，但我们不再详述。

观察 2.7.13。考虑变体 2.7.10 的特殊情形，其中 $\mathbb{A}^{\diamond}$ 由包含其所有 1-态射的集合 I 标记。则对于任意带装饰的 (∞, 2)-范畴 $\mathbb{B}^{\diamond}$， $\mathbb{A}^{\diamond} \otimes^{\mathrm{d}}_{I,\flat} \mathbb{B}^{\diamond}$ 和 $\mathbb{B}^{\diamond} \otimes^{\mathrm{d}}_{\flat,I} \mathbb{A}^{\diamond}$ 都与笛卡尔积 $\mathbb{A}^{\diamond} \times \mathbb{B}^{\diamond}$ 重合，而右伴随 $\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}^{\diamond}, \mathbb{B}^{\diamond})^{I}$-(op)lax 则都与定义 2.6.8 中的内部 Hom $\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}^{\diamond}, \mathbb{B}^{\diamond})$ 重合。

观察 2.7.14。 假设 $\mathbb{A}^{\diamond}$ 和 $\mathbb{B}^{\diamond}$ 是带装饰的 (∞，2)-范畴，且 $\mathbb{A}$配备了一个标记 I，使得 $\mathbb{A}$ 中的所有带装饰的 1-态射也都是带标记的。于是 $\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}^{\diamond}, \mathbb{B}^{\diamond})^{I\text{-(反)松弛}}$ 是 (∞， - 范畴 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{B})^{I\text{-(反)松弛的满子范畴}}$，
因为对于任意 I-(反)松弛变换， $\mathbb{A}$ 中任意带装饰的 1-态射所对应的（反）松自然性方块都交换，因此其中尤其包含一个带装饰的 2-态射。

3. 带装饰的（∞，2）-范畴的纤维化

本节将运用带装饰的（∞, 2）-范畴形式体系研究部分纤维化，所谓部分纤维化，是指（∞, 2）-范畴之间的一类函子，它们在基底中某些指定的 1-态射和 2-态射上存在笛卡尔或余笛卡尔提升。我们在 §3.1 引入这一概念，随后在 §3.2 考察带装饰的部分纤维化这一变体；这类纤维化还配有一种性质良好的装饰，其中包含这些（余）笛卡尔提升。当基底是最大装饰时，我们证明带装饰的纤维化分类了到 $\mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}^{(\infty,2)}$ 的函子。在 §3.3 中，我们研究（op）lax 箭头（∞, 2）-范畴中的映射 ∞-范畴，为 §3.4 中证明部分纤维化的一个非常有用的刻画作准备：某个特定交换方块是一个拉回。我们在 §3.5 运用这一判据，证明在某些条件下，函子 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C}, –)^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$ 及其带装饰版本和部分（op）lax 版本都保纤维化。我们的拉回判据还给出部分 ϵ-纤维化的一个刻画：它们右正交于带装饰的（∞,2）-范畴之间的某些映射。§3.6 则研究相应的左正交类—— ϵ-余纤维化，以及在固定基底上相对于部分 ϵ-纤维化为局部的态射，即 ϵ-等价。

3.1. **部分纤维化**。 本小节介绍（∞，2）-范畴的部分 ϵ-纤维化概念。给出定义后，我们将其与带装饰的（∞，2）-范畴联系起来，并介绍一些例子。

定义 3.1.1。 设 $\mathbb{B}^\diamond$ 是一个带装饰的（∞，2）-范畴。对于 $\epsilon = (i,\ j)$，若（∞，2）-范畴之间的态射 $p\colon \mathbb{E}^\diamond \to \mathbb{B}^\diamond$ 满足以下条件，我们称其为相对于装饰 $\mathbb{B}^\diamond$ 的 部分 ϵ-纤维化：

- $\mathbb{E}$ 在 $\mathbb{B}^\diamond_{(1)}$ 中具有 1-态射的 p-i-笛卡尔提升，
- $\mathbb{E}$ 在 $\mathbb{B}^\diamond_{(2)}$ 中具有 2-态射的 p-j-笛卡尔提升。

我们还称交换三角形

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{F} \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & \mathbb{B} & \end{array}$$

为 部分 ϵ-纤维化之间的态射，如果 f 保持这些 i-笛卡尔1-态射和 j-笛卡尔 2-态射；我们将包含 $\mathbb{B}$ 上的部分 ϵ-纤维化及其间态射的 $\mathsf{Cat}_{(\infty,2)/\mathbb{B}}$ 子范畴记为 $\mathsf{PFib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}^\diamond}$。类似地，我们将 $\mathbb{P}\mathbb{F}\mathsf{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}^\diamond}$ 定义为 $\mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)/\mathbb{B}}$ 上由这些对象和态射构成的局部满子-（∞， 2）-范畴。

变体 3.1.2。 更一般地，对于一个装饰函子 $F\colon \mathbb{B}^\diamond \to \mathbb{C}^\diamond$，我们称交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \xrightarrow{G} & \mathbb{F} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \mathbb{B} & \xrightarrow[F]{} & \mathbb{C} \end{array}$$

是一个 ϵ-偏纤维化态射，如果 p 和 q 分别相对于 $\mathbb{B}^\diamond$ 和 $\mathbb{C}^\diamond$是偏 ϵ-纤维化，并且 G 保持关于 $\mathbb{B}^\diamond$中装饰的 i-笛卡尔态射和 j-笛卡尔 2-态射。

例 3.1.3。 设 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 是一个 $(\infty, 2)$-范畴之间的函子，且 $\epsilon = (i, j)$。

► p 始终是一个相对于 $\mathbb{B}^{\flat\flat}$的偏 ϵ-纤维化。► p 相对于 $\mathbb{B}^{\sharp\flat}$ 是偏 ϵ-纤维化，当且仅当 $\mathbb{E}$ 具有 $\mathbb{B}$中态射的所有 p-i-笛卡尔提升。► p 相对于 $\mathbb{B}^{\flat\sharp}$ 是偏 ϵ-纤维化，当且仅当对所有 x、$y \in \mathbb{E}$，$\mathbb{E}(x, y) \to \mathbb{B}(p(x)\ p(y))$ 是 ∞-范畴之间的一个 j-笛卡尔纤维化，并且 j-笛卡尔态射在胡须运算下封闭。这等价于对所有 x、y、$z \in \mathbb{E}$，复合函子保持 j-笛卡尔态射，因此，按照 [AGH25] 的术语， p 满足此条件对应于它是 j-笛卡尔富化的。结合后两个例子可知， p 相对于 $\mathbb{B}^{\sharp\sharp}$ 是偏 ϵ-纤维化，当且仅当 p 是上文 §2.4 中定义的一个 ϵ-纤维化。

$$\mathbb{E}(x, y) \times \mathbb{E}(y, z) \to \mathbb{E}(x, z)$$

观察 3.1.4. 对于 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 一个（∞，2）-范畴的函子，由拉回方块的可复合性可知， p-（余）笛卡尔态射在复合下封闭

。类似地，弱 p-（余）笛卡尔 2-态射在垂直复合下封闭。由于水平复合可分解为粘合与垂直复合，因此 p-（余）笛卡尔 2-态射在垂直复合和水平复合下均封闭。若 p 是关于 $\mathbb{B}^{\diamond}$的部分（i，j）-纤维化，这意味着

▶ 在 $\mathbb{B}^{\diamond}_{(1)}$ 上的 p-i-笛卡尔态射确定了一个局部满的子（∞，2）-范畴 y of $\mathbb{E}$,▶ 在 $\mathbb{B}^{\diamond}_{(2)}$ 上的 p-j-笛卡尔 2-态射确定了一个宽且局部宽的子（∞，2）-范畴 $\mathbb{E}$。

因此，当 p 是部分纤维化时，我们便得到将 $\mathbb{B}^{\diamond}$ 的装饰典范地提升为 $\mathbb{E}$ 的装饰 $\mathbb{E}^{\natural}$，这引出了以下定义：

定义 3.1.5。设 $\mathbb{B}^{\diamond}$ 为带装饰的（∞，2）-范畴。对于 $\epsilon = (i, j)$，若（∞，2）-范畴之间的态射 $p\colon \mathbb{E}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\diamond}$ 满足以下条件，则称其为部分 ϵ-纤维化

▶ $\mathbb{E}$ 具有 $\mathbb{B}^{\diamond}_{(1)}$ 中 1-态射的 p-i-笛卡尔提升，且 $\mathbb{E}^{\diamond}_{(1)}$ 正是由这些态射构成的宽局部满子（∞，2）-范畴；▶ $\mathbb{E}$ 具有 $\mathbb{B}^{\diamond}_{(2)}$ 中 2-态射的 p-j-笛卡尔提升，且 $\mathbb{E}^{\diamond}_{(2)}$ 正是由这些态射构成的宽局部宽子（∞，2）- 范畴。

因此，我们可以将 $\mathrm{PFib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}^{\diamond}}$ 识别为 $\mathrm{DCat}^{(\infty,2)/\mathbb{B}^{\diamond}}$ 的满子范畴，其对象由此意义下的部分 ϵ-纤维化张成。

例 3.1.6。对于任意带装饰的 (∞，2)-范畴 $\mathbb{B}^{\diamond}$ 和任意 (∞，2)-范畴 $\mathbb{K}$，投影

$$\mathbb{K}^{\flat\flat} \times \mathbb{B}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\diamond}$$

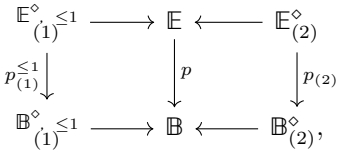
对任意 ϵ 都是部分 ϵ-纤维化。（但请注意，对于 $\mathbb{K}$ 的某种非极小装饰，投影 $\mathbb{K}^{\diamond} \times \mathbb{B}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\diamond}$并非部分纤维化，因为此时 $\mathbb{K}^{\diamond} \times \mathbb{B}^{\diamond}$ 有一些带装饰的 1-态射或 2-态射不是（余）笛卡尔的。）

例 3.1.7。设 ($\mathbb{E}$，I) 是一个带标记的 (∞，2)-范畴，并带有一个函子 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$。那么 ($\mathbb{E}$，$I$)$^{\sharp}$ $\to$ $\mathbb{B}^{\sharp\sharp}$ 是关于 $\epsilon = (i, j)$ 的部分 ϵ-纤维化，当且仅当 p 是一个 ϵ-纤维化，I 是 p-i-笛卡尔1-态射的集合，并且$\mathbb{E}$ 中的所有 2-态射都是 j-笛卡尔的。等价地说，p 是一个带有 I 作为 p-i-笛卡尔1-态射的*1*-纤维化的 ϵ-纤维化。

3.2. **带装饰的部分纤维化**。本节将介绍部分纤维化定义的一种变体，其中允许除（余）笛卡尔1-态射与2-态射之外的额外装饰；这些装饰在下一节的若干处会派上用场。我们将证明，当基底 $\mathbb{B}^{\sharp\sharp}$ 具有最大装饰时，这些纤维化可以直化为取值于 $\mathbb{D}\mathrm{Cat}^{(\infty,2)}$的函子。

定义 3.2.1. 带装饰的 (∞，2)-范畴的一个态射 $p\colon \mathbb{E}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\diamond}$ 是带装饰的部分 ϵ-纤维化，其对应于 $\epsilon = (i, j)$，当交换图中（其中我们

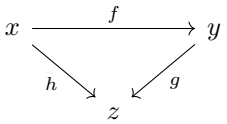
采用（2.1）中的描述



▶ 函子 p：$\mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 是关于 $\mathbb{B}^{\diamond}$ 的部分 ϵ-纤维化，▶ 函子 $p^{\leq 1}{}_{(1)}$：$\mathbb{E}^{\diamond}_{,\ \leq 1\ (1)} \to \mathbb{B}^{\diamond}_{,\ \leq 1\ (1)}$ 是 i-范畴的 ∞-纤维化，▶ 函子 $p_{(2)}$：$\mathbb{E}^{\diamond}_{(2)} \to \mathbb{B}^{\diamond}_{(2)}$ 是关于 $\mathbb{B}^{\diamond}$ 上装饰的限制的部分 ϵ-纤维化，▶ 两个交换方块都是部分 ϵ-纤维化的态射，即它们保持 i-笛卡尔1-态射和 j-笛卡尔 2-态射。

观察 3.2.2。 在 $\epsilon = (0,\ 1)$ 的情形下，让我们更具体地说明这一点：函子 p：$\mathbb{E}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\diamond}$ 是一个带装饰的部分 (0，1)-纤维化，当且仅当

▶（∞，2）-范畴的底层函子 p：$\mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 是一个部分（0，1）-纤维化，▶ 在 $\mathbb{B}^{\diamond}_{(1)}$ 上的余笛卡尔态射属于$\mathbb{E}^{\diamond}$的装饰态射，并且给定一个交换三角形

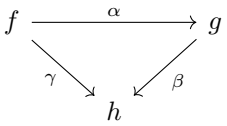


在 $\mathbb{E}$ 中，其在 $\mathbb{B}$ 中的像由装饰态射组成；若 h 带有装饰且 f 是余笛卡尔态射，则 g 也带有装饰。

▶ 在 $\mathbb{B}^{\diamond}_{(2)}$ 上的笛卡尔 2-态射属于$\mathbb{E}^{\diamond}$的带装饰的 2-态射，并且

– 若 f：$x \to y$ 在 $\mathbb{E}$ 中是一个位于$\mathbb{B}$中某个带装饰态射之上的余笛卡尔态射，则对于任意 $z \in \mathbb{E}$，$\mathbb{E}(y,\ z)$中的一个 2-态射，其在 $\mathbb{B}^{\diamond}$ 中的像带有装饰，当且仅当它与 f 在 $\mathbb{E}(x,\ z)$中的复合带有装饰时，该 2-态射在 $\mathbb{E}$ 中带有装饰；

– 给定一个交换三角形



在 $\mathbb{E}(x,\ y)$ 中，其在 $\mathbb{B}(px,\ py)$ 中的像由带装饰的 2-态射构成；若 γ 带有装饰且 β 是笛卡尔的，则 α 也带有装饰。

警告 3.2.3。 注意，我们并不 要求函子 $p_{(1)}$：$\mathbb{E}^{\diamond}_{(1)} \to \mathbb{B}^{\diamond}_{(1)}$ 是（∞,2）-范畴之间的一个部分 ϵ-纤维化。这将要求带装饰的 1-态射在沿带装饰的 2-态射进行 j-笛卡尔传输时保持不变。由于在部分 ϵ-纤维化中，i-笛卡尔 1-态射通常不满足这一点，因此施加这样的条件限制过于严格。

定义 3.2.4。 我们称一个交换三角形

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^{\diamond} & \xrightarrow{\quad F \quad} & \mathbb{F}^{\diamond} \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & \mathbb{B}^{\diamond}, & \end{array}$$

在 $\mathrm{DCat}^{(\infty,2)}$ 中，其中 p 和 q 是带装饰的部分 ϵ-纤维化，若装饰函子 F 还保持 i-笛卡尔1-态射和 j-笛卡尔 2-态射（相对于 $\mathbb{B}^{\diamond}$ 中的装饰），则它是带装饰的部分 ϵ-纤维化之间的态射。于是，定义由 $\mathbb{B}^{\diamond}$ 上的带装饰的部分 ϵ-纤维化构成的（∞，2）-范畴 $\mathbb{DPF}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}^{\diamond}}$ 为 $\mathbb{DC}\mathrm{at}^{(\infty,2)/\mathbb{B}^{\diamond}}$ 的局部满子（∞，2）-范畴，其对象是带装饰的部分 ϵ-纤维化，1-态射则是它们之间的态射。

观察 3.2.5。遗忘函子 $\mathbb{DC}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^{\diamond}} \to \mathbb{C}\mathrm{at}^{(\infty,2)/\mathbb{B}}$ 限制为一个局部全忠实函子

$$\mathbb{DPF}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}^{\diamond}} \to \mathbb{PF}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}^{\diamond}}.$$

变体 3.2.6. 在基底为最大装饰的特殊情况下，我们将基于 $\mathbb{B}^{\sharp\sharp}$ 的带装饰的部分 ϵ-纤维化称为带装饰的 ϵ-纤维化，并记作

$$\mathbb{DF}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}} := \mathbb{DPF}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}.$$

例 3.2.7。

▶ 设 $\mathbb{B}^{\diamond}$ 为一个带装饰的 $(\infty, 2)$-范畴，并假设 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 是相对于 $\mathbb{B}^{\diamond}$的部分ϵ-纤维化。那么，使用 $\mathbb{E}$ 的典范装饰，$p\colon \mathbb{E}^{\natural} \to \mathbb{B}^{\diamond}$ 是一个带装饰的部分 ϵ-纤维化（观察 3.1.4）；这由引理 2.4.2 得出。▶ 对于任意带装饰的 $(\infty, 2)$-范畴 $\mathbb{K}^{\diamond}$ 和 $\mathbb{B}^{\diamond}$，投影 $\mathbb{K}^{\diamond} \times \mathbb{B}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\diamond}$对任意 ϵ都是一个带装饰的部分 ϵ-纤维化。▶ 假设 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 是一个 ϵ-纤维化。那么 $\mathbb{E}^{\sharp\sharp} \to \mathbb{B}^{\sharp\sharp}$ 是一个带装饰的 ϵ-纤维化。

现在我们转而讨论带装饰的 ϵ-纤维化的直化：

定理 3.2.8. 设 $\mathbb{B}$ 是一个 $(\infty,2)$-范畴。针对ϵ-纤维化的直化等价可扩展到带装饰的纤维化，从而得到一个自然交换方形

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{DF}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}^{\epsilon\text{-}\mathrm{op}}, \mathbb{DC}\mathrm{at}_{(\infty,2)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{F}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}} & \xrightarrow[\sim]{} & \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}^{\epsilon\text{-}\mathrm{op}}, \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}). \end{array}$$

我们将在 $\epsilon = (0,1)$ 的情形下证明这一点，其余 3 种变体不再赘述。由于这里的垂直函子是局部全忠实的（在右侧情形下由 [AGH25，定理 2.6.3]可知），以下观察表明，只需证明我们在底层 ∞-范畴上得到一个等价：

观察 3.2.9. 假设我们有局部全忠实函子 $\mathbb{A}, \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ 以及一个位于 $\mathbb{C}^{\leq 1}$ 上方的等价 $\mathbb{A}^{\leq 1} \simeq \mathbb{B}^{\leq 1}$。那么我们可以将其提升为一个等价 $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$

位于 $\mathbb{C}$ 上方。事实上，我们有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{\leq 1} & \longrightarrow & \mathbb{B} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{C} \end{array}$$

其中，左侧垂直映射与右侧垂直映射左正交，因此存在唯一的虚线提升 $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$。类似地，顶部水平映射与底部水平映射左正交，并且由唯一性可知，这些提升的复合是恒等映射。

我们先考虑基底是一个 ∞-范畴的情形：

命题 3.2.10. 对于一个 ∞-范畴 B，存在如下自然交换方形，其对象属于 ∞-范畴：

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{DFib}^{(0,1)}_{/\mathsf{B}} & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{Fun}(\mathsf{B}, \mathsf{DCat}_{(\infty,2)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Fib}^{(0,1)}_{/\mathsf{B}} & \xrightarrow[\sim]{} & \mathsf{Fun}(\mathsf{B}, \mathsf{Cat}_{(\infty,2)}). \end{array}$$

证明。 由于 B 是一个 ∞-范畴，我们可以将 B 上的带装饰的 (0,1)-纤维化视为一个图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{E}^{\diamond}_{(1)} & \longrightarrow & \mathbb{E} & \longleftarrow & \mathbb{E}^{\diamond}_{(2)} \\ {\scriptstyle p_{(1)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p_{(2)}} \\ \mathsf{B} & \xrightarrow{=} & \mathsf{B} & \xleftarrow{=} & \mathsf{B}, \end{array}$$

其中 p、$p_{(1)}$ 和 $p_{(2)}$ 都是 0-纤维化，且顶部水平映射是 0-纤维化之间的态射。类似地，$\mathsf{DFib}^{(0,1)}_{/\mathsf{B}}$ 中的态射对应于 B 上这类余跨之间的映射，且所有分量都保持余笛卡尔态射。因此，我们可以将 $\mathsf{DFib}^{(0,1)}_{/\mathsf{B}}$ 视为 $\mathsf{Fun}(\Lambda^2_{,0}{}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Fib}^{(0,1)}_{/\mathsf{B}})$ 的一个全子范畴。在直化之下，后者等价于 $\mathsf{Fun}(\mathsf{B}, \mathsf{Fun}(\Lambda^2_{,0}{}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Fun}(\mathsf{B}, \mathsf{Cat}_{(\infty,2)}))$。容易看出，B 上的纤维化之间的态射是宽局部满包含或宽且局部宽包含，当且仅当它逐纤维具有相同性质。因此，对应于 $\mathsf{DFib}^{(0,1)}_{/\mathsf{B}}$ 的全子范畴可以识别为 $\mathsf{Fun}(\mathsf{B}, \mathsf{DCat}_{(\infty,2)})$，如所需。□

命题 3.2.11。 对于 $\mathbb{B}$ 一个 $(\infty,2)$-范畴，以下 ∞-范畴的自然交换方形

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{DFib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}} & \longrightarrow & \mathsf{Fib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{DFib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}^{\leq 1}} & \longrightarrow & \mathsf{Fib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}^{\leq 1}} \end{array}$$

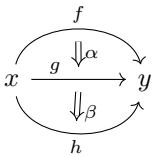
是一个拉回。

为了证明，我们需要以下观察：

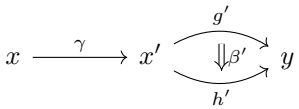
引理 3.2.12。 假设 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 是一个 $(0,1)$-纤维化，并令 $\mathbb{E}' := \mathbb{E} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{B}^{\leq 1}$。若 $\mathbb{E}'^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\leq 1,\sharp}$ 是一个带装饰的 (0,1)-纤维化，则

(i) $\mathbb{E}$ 中的 *2*-态射若可分解为 $\mathbb{E}'^{\diamond}_{(2)}$ 中的一个带装饰的 *2*-态射与一个笛卡尔 *2*-态射的垂直复合，则它们在水平复合和垂直复合下均封闭，因此构成 $\mathbb{E}$的一个宽且局部宽的子范畴 $\mathbb{E}^{\diamond}_{(2)}$ ，它是包含 $\mathbb{E}'^{\diamond}_{(2)}$ 和$\mathbb{E}^{\natural}{}_{(2)}$的最小此类子范畴；*(ii)* 将 p 限制到 $\mathbb{E}^{\diamond}_{(2)} \to \mathbb{B}$ 后得到一个 $(0,1)$-纤维化，且包含 $\mathbb{E}^{\diamond}_{(2)} \to \mathbb{E}$是 $(0,1)$-纤维化之间的一个态射；*(iii)* 若 $\mathbb{E}^{\diamond}$ 是 $\mathbb{E}$ 的装饰，其中的 *1*-态射取自 $\mathbb{E}'^{\diamond}_{(1)}$ ，*2*-态射取自 $\mathbb{E}^{\diamond}_{(2)}$，则 $\mathbb{E}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\diamond}$ 是一个带装饰的 $(0,1)$-纤维化。

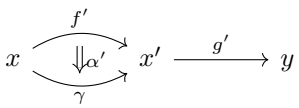
证明。 在 (i) 中，显然，所指定的 2-态射在水平复合下封闭，因为 $\mathbb{E}'^{\diamond}$ 中的带装饰的 2-态射和 $\mathbb{E}$ 中的 p-笛卡尔 2-态射都具有这一性质。因此，只需考虑一个垂直复合



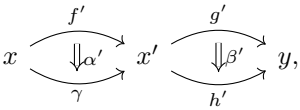
其中 α 为笛卡尔， β 为带装饰的，且其上的态射是一个等价（也就是说，顺序“错误”）。那么 β 可分解为



其中 γ 在 $p(g) \simeq p(h)$ 上为余笛卡尔，而 α 可分解为



其中 α' 为笛卡尔。因此，我们的垂直复合等价于水平复合



接下来，我们可以将其改写为顺序“正确”的垂直复合。由此证明了 (i)。

对于 (ii)，我们首先注意到， $\mathbb{E}$ 中的余笛卡尔态射在$\mathbb{E}^{\diamond}_{(2)}$中也是余笛卡尔的，因为在与余笛卡尔态射进行胡须运算后，可以分别检测到 $\mathbb{E}'^{\diamond}_{(2)}$ 和 $\mathbb{E}^{\natural}{}_{(2)}$ 中的态射。此外，由 $\mathbb{E}^{\diamond}_{(2)}$ 的定义可知，对于x， $y \in \mathbb{E}$，函子

$$\mathbb{E}^{\diamond}_{(2)}(x,y) \to \mathbb{B}(px,py)$$

是一个笛卡尔纤维化，其笛卡尔态射继承自 $\mathbb{E}^{\diamond}(x,\ y)$，如所需。

最后，(iii) 由 (ii) 和带装饰的 (0,1)-纤维化的定义立即得出。□

命题 *3.2.11* 的证明。 利用引理 3.2.12，我们可以定义一个从……出发的函子

$$\mathsf{Fib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}} \times_{\mathsf{Fib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}^{\leq 1}}} \mathsf{DFib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}^{\leq 1}} \to \mathsf{DFib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}}$$

将一对 $(p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}, p'\colon \mathbb{E}'^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\leq 1})$（其中 $\mathbb{E}' := \mathbb{E} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{B}^{\leq 1}$）映到该图表在 $\mathbf{DCat}_{(\infty,2)}$ 中的局部化

$$\mathbb{E}'^{\leq 1}_{(1)} \to \mathbb{E} \leftarrow \mathbb{E}^{\natural}_{(2)} \amalg \mathbb{E}'^{\diamond}_{(2)}$$

在 $\mathbb{B}^{\sharp\sharp}$ 上，这显然是关于 (p, p') 的函子。在此情形下，$\mathbb{E}^{\diamond}_{(2)} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{B}^{\leq 1}$ 恢复了$\mathbb{E}'^{\diamond}_{(2)}$；另一方面，对于 $\mathbf{DFib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}}$ 中的 $\mathbb{E}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\sharp\sharp}$，我们看到 $\mathbb{E}^{\diamond}_{(2)}$ 恰好由那些可分解为先经过等价的带装饰 2-态射、再经过笛卡尔 2-态射的 2-态射组成。因此，两个方向上的复合都是等价，这就完成了证明。□

定理 *3.2.8* 的证明。 由观察 3.2.9可知，只需证明在底层 ∞-范畴上存在一个等价。由正交性，我们也得到一个 ∞-范畴的自然拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Fun}(\mathbb{B}, \mathbb{D}\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}) & \longrightarrow & \mathsf{Fun}(\mathbb{B}, \mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Fun}(\mathbb{B}^{\leq 1}, \mathbb{D}\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}) & \longrightarrow & \mathsf{Fun}(\mathbb{B}^{\leq 1}, \mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)}). \end{array}$$

结合命题 3.2.11 中的拉回方块，这意味着只需构造一个自然的等价余跨

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{Fun}(\mathbb{B}^{\leq 1}, \mathsf{DCat}_{(\infty,2)}) & \longrightarrow & \mathsf{Fun}(\mathbb{B}^{\leq 1}, \mathsf{Cat}_{(\infty,2)}) & \longleftarrow & \mathsf{Fun}(\mathbb{B}, \mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)}), \\ \sim\downarrow & & \downarrow\sim & & \downarrow\sim \\ \mathsf{DFib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}^{\leq 1}} & \longrightarrow & \mathsf{Fib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}^{\leq 1}} & \longleftarrow & \mathsf{Fib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}}, \end{array}$$

由命题 3.2.10 及直化的自然性即可得到。 □

取左伴随后，我们也得到：

推论 3.2.13。 存在一个自然交换方形，其对象为$(\infty,2)$-范畴

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}\mathsf{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-}\mathrm{op}}, \mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)}) \\ \downarrow{\scriptstyle (-)^{\natural}} & & \downarrow{\scriptstyle (-)^{\flat\flat}_{*}} \\ \mathbb{D}\mathbb{F}\mathsf{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}} & \xrightarrow[\sim]{} & \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-}\mathrm{op}}, \mathbb{D}\mathbb{C}\mathsf{at}_{(\infty,2)}). \end{array}$$

此外，$(-)^{\natural}$ 的左伴随在直化下对应于与局部化函子 $\tau_{\mathrm{d}}\colon \mathbb{D}\mathbb{C}\text{在}_{(\infty,2)} \to \mathbb{C}\text{在}^{(\infty,2)}$复合。□

我们预计，也可以推广定理 2.4.12，以便用带装饰的纤维化来描述 $(\infty,2)$- 范畴 $\mathbb{F}\mathsf{un}\mathbb{B}, \mathbb{D}\mathbb{C}\mathsf{at}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}_{(\infty,2)}$。不过，证明这一点似乎有些繁琐，而且本文并不需要此结果，因此我们在此仅陈述如下命题：

命题 3.2.14. 设 $(\mathbb{B}, E)$ 是一个带标记的 $(\infty, 2)$-范畴。对于函子 $F, G\colon \mathbb{B} \to \mathbb{D}\mathrm{Cat}_{(\infty,2)}$，以及相应的带装饰的 ϵ-纤维化 $\mathbb{P}^{\diamond}_{\epsilon}, \mathbb{Q}^{\diamond}_{\epsilon} \to \mathbb{B}^{\sharp\sharp}$，存在一个自然等价

$$\mathrm{Nat}^{E\text{-lax}}_{\mathbb{B},\mathbb{D}\mathrm{Cat}_{(\infty,2)}}(F,G) \simeq \mathrm{DFun}^{E\text{-coc}}_{/(\mathbb{B},E)^{\sharp}}(\mathbb{P}^{\diamond}_{(0,1)}|_E, \mathbb{Q}^{\diamond}_{(0,1)}|_E),$$

其中 $\mathbb{P}^{\diamond}_{(0,1)}|_E$ 表示拉回 $\mathbb{P}^{\diamond}_{(0,1)} \times_{\mathbb{B}^{\sharp\sharp}} (\mathbb{B}、 E)^{\sharp}$（通过将 $\mathbb{P}^{\diamond}_{(0,1)}$ 的带标记 *1*-态射限制为那些位于 E之上的态射得到），并且

$$\mathrm{DFun}^{E\text{-coc}}_{/(\mathbb{B},E)^{\sharp}}(\mathbb{P}^{\diamond}_{(0,1)}|_E, \mathbb{Q}^{\diamond}_{(0,1)}|_E) \subseteq \mathrm{DFun}_{/(\mathbb{B},E)^{\sharp}}(\mathbb{P}^{\diamond}_{(0,1)}|_E, \mathbb{Q}^{\diamond}_{(0,1)}|_E)$$

是保持 E 之上的余笛卡尔态射以及所有笛卡尔 *2*-态射的函子所构成的全子范畴。类似地，我们有自然等价

$$\begin{aligned}\mathrm{Nat}^{E\text{-oplax}}_{\mathbb{B},\mathbb{D}\mathrm{Cat}_{(\infty,2)}}(F,G) &\simeq \mathrm{DFun}^{E\text{-cart}}_{/(\mathbb{B}^{\mathrm{op}},E)^{\sharp}}(\mathbb{P}^{\diamond}_{(1,0)}|_E, \mathbb{Q}^{\diamond}_{(1,0)}|_E)\\ &\simeq \mathrm{DFun}^{E\text{-cart}}_{/(\mathbb{B}^{\mathrm{coop}},E)^{\sharp}}(\mathbb{P}^{\diamond}_{(1,1)}|_E, \mathbb{Q}^{\diamond}_{(1,1)}|_E),\\ \mathrm{Nat}^{E\text{-lax}}_{\mathbb{B},\mathbb{D}\mathrm{Cat}_{(\infty,2)}}(F,G) &\simeq \mathrm{DFun}^{E\text{-coc}}_{/(\mathbb{B}^{\mathrm{co}},E)^{\sharp}}(\mathbb{P}^{\diamond}_{(0,0)}|_E, \mathbb{Q}^{\diamond}_{(0,0)}|_E).\end{aligned}$$

引理 3.2.15。 设 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 是一个局部全忠实函子。那么 $F_*\colon \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}、 \mathbb{C})^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}} \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}、 \mathbb{D})^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$也如此；对于任意带标记的$(\infty、 2)$-范畴$(\mathbb{A}、 E)$，我们可以将其识别为

$$\mathrm{Nat}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}_{\mathbb{A},\mathbb{C}}(\alpha,\beta) \subseteq \mathrm{Nat}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}_{\mathbb{A},\mathbb{D}}(F\alpha, F\beta)$$

作为那些 *E-(op)lax* 变换 $\eta\colon F\alpha \to F\beta$所构成的全子范畴，其中其分量 $\eta_x \in \mathbb{D}(F\alpha(x)\ F\beta(x))$对于每个对象 $x \in \mathbb{A}$都属于 $\mathbb{C}(\alpha(x)\ \alpha(y))$。

证明。 由 [AGH25，推论 2.7 可知，13] 因此 F_* 是局部全忠实的，所以我们只需确定它在映射 ∞-范畴上的像。所述条件显然是必要的，因此我们需要证明它也是充分的。我们考虑 oplax 情形；利用 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, –)^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$与 $\mathbb{A} \otimes_{E,\ \natural} –$之间的伴随，我们可以将其改述为： F 与映射右正交

$$\mathbb{A}^{\simeq} \times [1] \amalg_{\mathbb{A}^{\simeq} \times \partial[1]} \mathbb{A}^{\leq 1} \times \partial[1] \to \mathbb{A} \otimes_{E,\natural} [1].$$

由于 F 是局部全忠实的，当且仅当它与映射$\partial C_2 \to C_2$右正交，因此只需证明该映射属于由后一个映射生成的饱和类；这一点可由 [LMGR+24，定理 5.3 得知。7] 由对象和 1-态射上本质满的函子组成。 $\mathbb{A}$ 作为 Θ_2 中对象余极限的典范描述在 $(–)^{\leq 1}$ 和 $(–)^{\simeq}$ 作用下保持不变，因此仿照 [AGH25，推论 2.5 的证明，我们可以将问题归约到 $(\mathbb{A}, E)$ 为 $[0]$、$[1]^{\flat}$、$[1]^{\sharp}$ 和 $C_2^{\flat}$ 的情形。在这些情形下，给定的映射显然是对象和 1-态射上的满射，由此完成证明。□

命题的证明*3.2.14*。 我们证明松弛情形。根据引理 3.2.15 局部完全忠实遗忘函子 $u_{\mathrm{d}}\colon \mathbb{D}\mathbb{C}于_{(\infty,2)} \to \mathbb{C}于^{(\infty,2)}$ 识别

$$\mathrm{Nat}^{E\text{-lax}}_{\mathbb{B},\mathbb{D}\mathrm{Cat}_{(\infty,2)}}(F,G) \subseteq \mathrm{Nat}^{E\text{-lax}}_{\mathbb{B},\mathrm{Cat}_{(\infty,2)}}(u_{\mathrm{d}}F, u_{\mathrm{d}}G)$$

作为 E-松弛变换的全子范畴 $\varphi\colon u_{\mathrm{d}}F \to u_{\mathrm{d}}G$，其中每个分量 $\varphi_b\colon u_{\mathrm{d}}F(b) \to u_{\mathrm{d}}G(b)$ 对所有 $b \in \mathbb{B}$ 都是一个装饰函子 $F(b) \to G(b)$。

现在，定理 2.4.12 给出了一个自然等价

$$\mathsf{Nat}^{E\text{-lax}}_{\mathbb{B},\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}}(u_{\mathrm{d}}F,u_{\mathrm{d}}G)\simeq \mathbb{F}\mathrm{ib}^{(0,1)}_{/(\mathbb{B},E)}(\mathbb{P},\mathbb{Q}),$$

其中右端是 $\mathsf{Fun}_{/\mathbb{B}}(\mathbb{P},\mathbb{Q})$ 的全子范畴，由保持 E 上的余笛卡尔态射以及所有笛卡尔 2-态射的函子组成。因此，我们可以将 $\mathsf{Nat}^{E\text{-lax}_{\mathbb{B},\mathbb{D}\mathrm{Cat}_{(\infty,2)}}}(F,G)$ 等同于后者中由如下函子所张成的全子范畴：这些函子为 $r\colon\ \mathbb{P}\to\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{B}$ 上，且对所有 $b\in\mathbb{B}$，其在纤维上的映射都是装饰函子 $r_b\colon\ \mathbb{P}^{\diamond}_b\to\mathbb{Q}^{\diamond}_b$。$\mathbb{P}^{\diamond}$ 中的一个装饰态射可分解为一个余笛卡尔态射，后接纤维中的一个装饰态射，因此关于 1-态射的这一条件等价于 r 保持 E 上的所有带装饰的态射；类似地，关于 2-态射的条件等价于 r 保持 所有带装饰的 2-态射。因此，所讨论的 ∞-范畴即为 $\mathsf{DFun}^{E\text{-coc}}_{/(\mathbb{B},E)^\sharp}(\mathbb{P}^{\diamond}_{(0,1)}|_E,\ \mathbb{Q}^{\diamond}_{(0,1)}|_E)$，正如所需。□

3.3. **（反）松弛箭头中的映射。** 本小节的目标是确定 $\mathbb{A}\mathrm{r}^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}(\mathbb{C})$ 中的映射 ∞-范畴，这是下一小节刻画部分纤维化所需的关键输入。

命题 3.3.1。 对于一个$(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{C}$ 以及 $\mathbb{C}$ 中的态射 $f\colon\ x\to y$ 和 $g\colon\ a\to b$，存在如下 ∞-范畴的拉回方块

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{lax}}(\mathbb{C})(f,g) & \longrightarrow & \mathsf{Ar}(\mathbb{C}(x,b))\\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_0,\mathrm{ev}_1}\\ \mathbb{C}(x,a)\times\mathbb{C}(y,b) & \xrightarrow[g_*\times f^*]{} & \mathbb{C}(x,b)\times\mathbb{C}(x,b),\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C})(f,g) & \longrightarrow & \mathsf{Ar}(\mathbb{C}(x,b))\\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_1,\mathrm{ev}_0}\\ \mathbb{C}(x,a)\times\mathbb{C}(y,b) & \xrightarrow[g_*\times f^*]{} & \mathbb{C}(x,b)\times\mathbb{C}(x,b).\end{array}$$

注 3.3.2。 按照 [AM24]，命题 3.3.1 的记号，这表明 ∞-范畴 $\mathbb{A}\mathrm{r}^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}(\mathbb{C})(f,\ g)$ 是定向拉回或逗号对象：

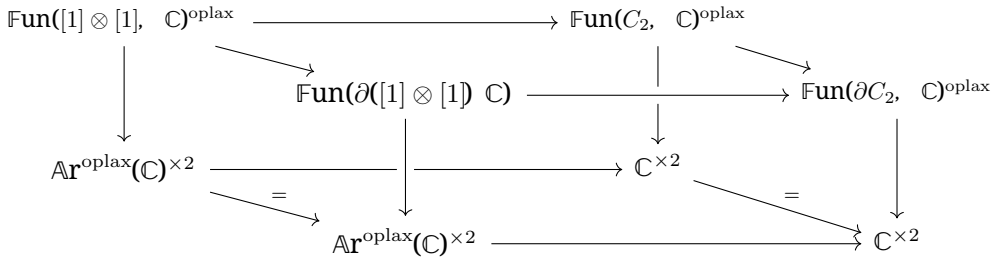
$$\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{lax}}(\mathbb{C})(f,g)\simeq\mathbb{C}(x,a)\overset{\leftarrow}{\times}_{\mathbb{C}(x,b)}\mathbb{C}(y,b),$$
$$\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C})(f,g)\simeq\mathbb{C}(x,a)\overset{\rightarrow}{\times}_{\mathbb{C}(x,b)}\mathbb{C}(y,b).$$

命题 *3.3.1* 的证明。 我们证明 oplax 情形；松弛情形的证明类似。我们可以将映射 ∞- 范畴 $\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C})(f,\ g)$ 识别为拉回

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C})(f,g) & \longrightarrow & \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C}))\\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_0,\mathrm{ev}_1}\\ * & \xrightarrow[(f,g)]{} & \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C})\times\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C}).\end{array}$$

这里，$\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C}))$ 等价于 $\mathbb{F}\mathrm{un}([1]\otimes[1],\mathbb{C})^{\mathrm{oplax}}$。

观察 2.1.10中的推出方形给出了一个交换立方体



其中顶面和底面都是拉回方形，并且我们将 $\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C})(f,\ g)$ 识别为左上角在 $(f,\ g)$ 处的纤维。我们所需的拉回方形将是由这个立方体在纤维上诱导出的拉回。

为确定左下方的纤维，我们考虑推出分解

$$\begin{array}{ccc} [0]^{\amalg 4} & \longrightarrow & [1] \amalg [1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [1] \amalg [1] & \longrightarrow & \partial([1] \otimes [1]), \end{array}$$

它诱导出一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}\mathrm{un}(\partial([1] \otimes [1]), \mathbb{C})^{\mathrm{oplax}} & \longrightarrow & \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C})^{\times 2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C})^{\times 2} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\times 4}; \end{array}$$

由此可知，左侧 $(f\colon\ x \to y,\ \ g\colon\ a \to b)$ 处的纤维等价于$\mathbb{C}(x,\ a) \times \mathbb{C}(y,\ b)$。

为描述立方体右侧的纤维，我们考虑这些推出

$$\begin{array}{ccccc} [1] \amalg [1] & \longrightarrow & \partial([1] \otimes [1]) & \longrightarrow & [1] \otimes [1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [0] \amalg [0] & \longrightarrow & \partial C_2 & \longrightarrow & C_2, \end{array}$$

它们给出拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}\mathrm{un}(C_2, \mathbb{C})^{\mathrm{oplax}} & \longrightarrow & \mathbb{F}\mathrm{un}([1] \otimes [1], \mathbb{C})^{\mathrm{oplax}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{F}\mathrm{un}(\partial C_2, \mathbb{C})^{\mathrm{oplax}} & \longrightarrow & \mathbb{F}\mathrm{un}(\partial([1] \otimes [1]), \mathbb{C})^{\mathrm{oplax}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^{\times 2} & \longrightarrow & \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C})^{\times 2}. \end{array}$$

这里，右上方在 (x, b) 处的纤维，通过对拉回应用$\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\text{–})$，与 $\mathrm{Ar}\ \mathbb{C}(x, b)$ 识别

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(x, b) & \longrightarrow & \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{(x, b)\} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\times 2}, \end{array}$$

而上方 $\partial([1] \otimes [1])$ 的推出再次将右侧中间的纤维识别为 $\mathbb{C}(x, b)^{\times 2}$，其从 $\mathrm{Ar}\ \mathbb{C}(x, b)$ 出发的映射由取源和靶给出。

因此，我们得到了所需的拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C})(f, g) & \longrightarrow & \mathrm{Ar}\,\mathbb{C}(x, b) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}(x, a) \times \mathbb{C}(y, b) & \longrightarrow & \mathbb{C}(x, b)^{\times 2} \end{array}$$

其中，底部的水平映射可识别为与f和 g进行复合所给出的映射，因为它最终来自由 d_1的两个副本给出的映射 $\partial C_2 \to \partial([1]\otimes[1])$。□

观察 3.3.3. 设 $j\colon\ \partial C_2 \to C_2$ 为边界包含。为便于后文使用，我们指出，在本证明过程中已经看到，在交换三角形

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}\mathrm{un}(C_2,\ \mathbb{C})^{\mathrm{oplax}} & \xrightarrow{\quad j^*\quad} & \mathbb{F}\mathrm{un}(\partial C_2,\ \mathbb{C})^{\mathrm{oplax}} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbb{C}^{\times 2} & \end{array}$$

在 x, y 上的各纤维之间的映射是求值映射

$$\mathsf{Ar}\,\mathbb{C}(x,y) \to \mathbb{C}(x,y)^{\times 2}.$$

因此， j^*在对应于 $f, g\colon\ x \to y$的对象处的纤维是 ∞-群胚$\mathbb{C}(x,y)(f,g)$。这特别表明 j^* 在 1-态射上是保守的。

我们可以将这种描述推广到带装饰的（∞,2）-范畴，并引入以下记号：

定义 3.3.4. 对于带装饰的（∞,2）-范畴 $\mathbb{C}^\diamond$，令

$$\mathbb{DA}\mathrm{r}^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}(\mathbb{C}^\diamond) := \mathbb{DF}\mathrm{un}([1]^\sharp, \mathbb{C}^\diamond)^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}.$$

换言之，这是 $\mathbb{A}\mathbf{r}^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}(\mathbb{C})$ 的局部满子（∞,2）-范畴，其中

- ▶ 对象是 $\mathbb{C}^\diamond$ 中的态射 $^{(1)}$，
- ▶ 态射是 2-态射属于 $\mathbb{C}^\diamond$ 的（反）松弛方块 $^{(2)}$.

简洁起见，记作

$$\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-}\mathrm{lax}}(\mathbb{C}^\diamond) := \begin{cases} \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C}^\diamond), & \boldsymbol{\epsilon} = (0,1),\ (1,0), \\ \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{lax}}(\mathbb{C}^\diamond), & \boldsymbol{\epsilon} = (0,0),\ (1,1). \end{cases}$$

将装饰的 (∞,2)-范畴 $\mathbb{C}^\diamond$ 的 $\mathbb{DA}\mathbf{r}^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}(\mathbb{C}^\diamond)$ 视为 $\mathbb{A}\mathbf{r}^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}(\mathbb{C})$ 的局部满子范畴，我们得到：

推论 3.3.5. 对于装饰的$(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{C}^\diamond$ 以及其中的装饰态射$f\colon\ x \to y$ 和 $g\colon\ a \to b$，存在如下 ∞-范畴的拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{lax}}(\mathbb{C}^\diamond)(f,g) & \longrightarrow & \mathsf{DAr}(\mathbb{C}(x,b)) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s,t} \\ \mathbb{C}(x,a)\times\mathbb{C}(y,b) & \xrightarrow[g_*\times f^*]{} & \mathbb{C}(x,b)\times\mathbb{C}(x,b), \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C}^\diamond)(f,g) & \longrightarrow & \mathsf{DAr}(\mathbb{C}(x,b)) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t,s} \\ \mathbb{C}(x,a)\times\mathbb{C}(y,b) & \xrightarrow[g_*\times f^*]{} & \mathbb{C}(x,b)\times\mathbb{C}(x,b), \end{array}$$

其中，$\mathsf{DAr}(\mathbb{C}(x,b))$ 表示$\mathsf{Ar}(\mathbb{C}(x,b))$ 中由带装饰的 2-态射张成的全子范畴。□

观察 3.3.6。 对于一个带标记的 $(\infty,\ 2)$-范畴 $(\mathbb{C},\ I)$，推论 3.3.5 表明我们得到一个拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{DA}\mathrm{r}((\mathbb{C},I)^\flat)(f,g) & \longrightarrow & \mathbb{C}(x,a) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_*} \\ \mathbb{C}(y,b) & \xrightarrow[f^*]{} & \mathbb{C}(x,b). \end{array}$$

这尤其适用于 $\mathbb{A}\mathrm{r}(\mathbb{C}) = \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}(\mathbb{C}^{\sharp_!})$。

观察 3.3.7。 将推论 3.3.5特化到恒等态射，我们得到拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{lax}}(\mathbb{C}^{\diamond})(\mathrm{id}_x,\mathrm{id}_y) & \longrightarrow & \mathrm{DAr}(\mathbb{C}(x,y)) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s,t} \\ \mathbb{C}(x,y)\times\mathbb{C}(x,y) & \xrightarrow[=]{} & \mathbb{C}(x,y)\times\mathbb{C}(x,y), \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C}^{\diamond})(\mathrm{id}_x,\mathrm{id}_y) & \longrightarrow & \mathrm{DAr}(\mathbb{C}(x,y)) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t,s} \\ \mathbb{C}(x,y)\times\mathbb{C}(x,y) & \xrightarrow[=]{} & \mathbb{C}(x,y)\times\mathbb{C}(x,y), \end{array}$$

从而我们有等价 $\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}(\mathbb{C}^{\diamond})(\mathrm{id}_x,\mathrm{id}_y) \simeq \mathrm{DAr}(\mathbb{C}(x,y))$，且与到 $\mathbb{C}(x,y)$ 的求值映射适当地相容。

结合前两个观察可知，函子 $s_0^*\colon \mathbb{C} \to \mathbb{A}\mathrm{r}(\mathbb{C})$ 是全忠实的，其中它由沿退化映射 $s_0\colon [1] \to [0]$ 限制给出。这带来以下有用推论：

引理 3.3.8。 假设 $f\colon \mathbb{C}' \to \mathbb{C}$ 在对象上本质满。那么对于任意$(\infty, 2)$-范畴 $\mathbb{D}$，函子 $f^*\colon \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C},\mathbb{D}) \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C}',\mathbb{D})$ 在 *1*-态射上是保守的。

证明。 如果一个函子与 s_0 右正交，那么它在态射上是保守的： $[1] \to[0]$,因此我们要证明交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}([0],\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C},\mathbb{D})) & \xrightarrow{(f^*)_*} & \mathrm{Map}([0],\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C}',\mathbb{D})) \\ {\scriptstyle s_0^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s_0^*} \\ \mathrm{Map}([1],\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C},\mathbb{D})) & \xrightarrow[(f^*)_*]{} & \mathrm{Map}([1]\,\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C}',\mathbb{D})) \end{array}$$

是一个拉回。这等价于方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}(\mathbb{C},\mathbb{D}) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Map}(\mathbb{C}',\mathbb{D}) \\ {\scriptstyle s_0^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (s_0^*)_*} \\ \mathrm{Map}(\mathbb{C},\mathbb{A}\mathrm{r}(\mathbb{D})) & \xrightarrow[f^*]{} & \mathrm{Map}(\mathbb{C}',\mathbb{A}\mathrm{r}(\mathbb{D})), \end{array}$$

这是一个拉回，因为 $s_0^*\colon \mathbb{D} \to \mathbb{A}\mathrm{r}(\mathbb{D})$ 是全忠实的， f 是本质满的，而本质满函子恰好是左正交于全忠实函子的函子（例如，参见 [LMGR+24，定理 5.3。7]）。□

3.4. **刻画部分纤维化**。 本小节的目标是证明以下关于部分纤维化的有用刻画[2]：

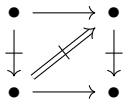
定理 3.4.1。 带装饰的$(\infty, 2)$-范畴之间的一个态射 $p\colon \mathbb{E}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\diamond}$ 对于 $\boldsymbol{\epsilon} = (i, j)$ 是一个部分类 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化，当且仅当交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-}\mathrm{lax}}(\mathbb{E}^{\diamond}) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_i} & \mathbb{E} \\ {\scriptstyle \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-}\mathrm{lax}}(p)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-}\mathrm{lax}}(\mathbb{B}^{\diamond}) & \xrightarrow[\mathrm{ev}_i]{} & \mathbb{B} \end{array} \tag{3.1}$$

是一个$(\infty,2)$-范畴的拉回。

[2]还可以从 Loubaton 关于 $(\infty,\ \infty)$-范畴的著作中推导出这一结果的一个版本（参见注记 3.6.3）。

警告 3.4.2。 若 $p\colon \mathbb{E}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\diamond}$ 是一个部分纤维化，则方形（3.1）通常 不是 带装饰的 $(\infty, 2)$-范畴中的拉回，其中 $\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{E}^{\diamond})$ 带有定义 2.7.1中的标准装饰：对于 $\epsilon = (0, 1)$，$\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{E}^{\diamond})$ 中的一个态射是一个图表



在 $\mathbb{E}$中，竖直态射和对角 2-态射带有装饰。在标准装饰下，若水平态射也带有装饰，则该态射也带有装饰。另一方面，对于 (3.1) 中装饰的拉回，只要 上方的水平态射在 $\mathbb{E}^{\diamond}$ 中带有装饰，且下方水平态射在 $\mathbb{B}^{\diamond}$中的像带有装饰，该态射就带有装饰。要使这些装饰一致，我们需要笛卡尔传输将余笛卡尔 1-态射仍映为余笛卡尔态射，但通常并非如此。不过，我们将在命题 3.5.4 中看到，若适当修改 $\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(-)$ 上的装饰，就能得到带装饰的 $(\infty,2)$-范畴的拉回。

注记 3.4.3。 在定理 3.4.1 中，关于起始时在 $\mathbb{E}$ 上给定装饰的假设可以稍作弱化：由于（余）笛卡尔 1-态射在复合下自动封闭，我们并不严格需要假设 $\mathbb{E}$ 中的带装饰态射在复合下封闭。同样，只需假设带装饰的 2-态射在胡须运算下封闭即可。

定理 3.4.1 证明的出发点，是用箭头 $(\infty, 2)$-范畴来描述（余）笛卡尔态射：

命题 3.4.4。 给定（余） $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 范畴的一个函子，以下条件¯对于态射 $f\colon \bar{x} \to \bar{y}$ 在 $\mathbb{E}$ 上、位于 $f\colon x \to y$ 中的 $\mathbb{B}$内是等价的：

¯*(i)* f 是 p-*i*-笛卡尔的。¯*(ii)* 对于每个态射 $\bar{g}\colon \bar{a} \to b$ 在 $\mathbb{E}$ 上、位于 $g\colon a \to b$ 中的 $\mathbb{B}$内，对于 $i = 0, \infty$-范畴的交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}\mathrm{r}(\mathbb{E})(\bar{f}, \bar{g}) & \longrightarrow & \mathbb{E}(\bar{x}, \bar{a}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A}\mathrm{r}(\mathbb{B})(f, g) & \longrightarrow & \mathbb{B}(x, a) \end{array}$$

是一个拉回。

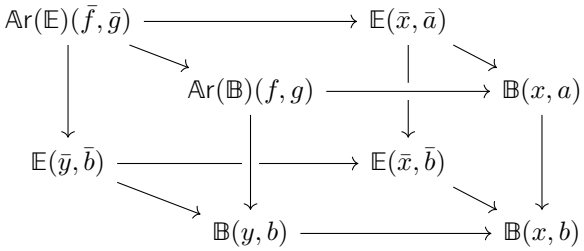
▶ 对于 $i = 1, \infty$-范畴的交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}\mathrm{r}(\mathbb{E})(\bar{g}, \bar{f}) & \longrightarrow & \mathbb{E}(\bar{a}, \bar{x}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A}\mathrm{r}(\mathbb{B})(g, f) & \longrightarrow & \mathbb{B}(a, x) \end{array}$$

是一个拉回。

(iii) 当对 $\mathbb{E}$ 中的所有 $\bar{a}$ 都有 $\bar{g} =$恒等$_{\bar{a}}$ 时，前述条件成立。

证明。我们证明余笛卡尔情形。于是，(ii) 中的交换方块可纳入一个交换立方体



其中后面和前面是由观察 3.3.6 给出的拉回。若 f 是 p-余笛卡尔的，则底部方块也是一个拉回，因此顶部方块亦然；故 (i) 推出 (ii)。另一方面，若 $\bar{g}$ 是一个等价，则右侧方块中的垂直映射可逆，因此另外两个垂直映射也可逆，因为它们是这些映射的拉回。因此，顶部方块是拉回，当且仅当底部方块是拉回。于是，若对 $\_\bar{g} = \mathrm{id}_{\bar{a}}$ 所有 $\bar{a}$，顶部方块都是拉回，则 f 是余笛卡尔的，故 (iii) 推出 (i)。□

由此我们立即得到定理 3.4.1 的一个特例，其中只有 1-态射带有装饰：

推论 3.4.5. 设 $p\colon (\mathbb{E}, I) \to (\mathbb{B}, J)$ 是带标记的$(\infty, 2)$-范畴之间的函子。那么，对于 $\epsilon = (i, j)$，$p^\flat$ 是一个部分 ϵ-纤维化，即 $\mathbb{E}$ 具有 p-i-笛卡尔提升，可提升 $\mathbb{B}$ 中带标记的 *1*-态射，当且仅当交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{DA}\mathrm{r}((\mathbb{E}, I)^\flat) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_i} & \mathbb{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{DA}\mathrm{r}((\mathbb{B}, J)^\flat) & \xrightarrow[\mathrm{ev}_i]{} & \mathbb{B} \end{array} \tag{3.2}$$

是一个拉回，其中 $\mathbb{DA}\mathrm{r}((\mathbb{E}, I)^\flat)$ 表示 $\mathbb{A}\mathrm{r}(\mathbb{E})$ 中由装饰过的 *1*-态射构成的全子范畴。

证明。考虑 $\epsilon = (0,1)$ 的情形，并先假设 p 是一个部分 $(0,1)$-纤维化。由观察 3.3.6 和命题 3.4.4 可知，在 (3.2) 中，所有映射 ∞-范畴上的方块都是拉回。因此，只需证明我们有一个 ∞-群胚的拉回

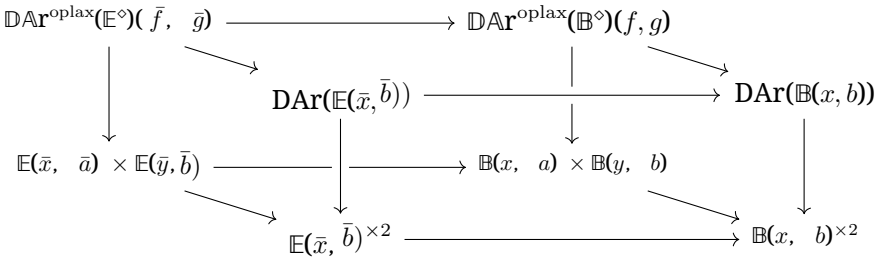
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}^\diamond([1], \mathbb{E}) & \longrightarrow & \mathbb{E}^\simeq \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}^\diamond([1], \mathbb{B}) & \longrightarrow & \mathbb{B}^\simeq \end{array}$$

在核心上，其中 映射$^\diamond([1], -)$ 表示 ∞-群胚，它由 映射$([1], -)$ 中的装饰态射构成。这由余笛卡尔提升的唯一性得出，正如观察 2.4.3 中所述，因为 映射$^\diamond([1], \mathbb{E})$ 恰好是由 ∞ 中态射的余笛卡尔提升构成的群胚，而根据假设，这些提升都存在。

反过来，如果该方块是一个拉回，那么命题 3.4.4 表明 $\mathbb{E}$ 中的带装饰态射全都是 p-余笛卡尔，而核心上的拉回则表明，对于 $\mathbb{B}$ 中的每个带装饰态射及任意

给定的源，都存在一个（唯一的）带装饰提升。因此 $\mathbb{E}$ 具有 $\mathbb{B}$中带装饰态射的所有 p-余笛卡尔提升，并且这些恰好就是它的带装饰态射，正如所要求的。□

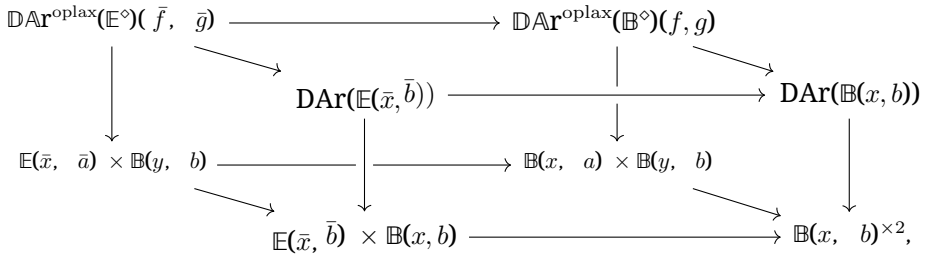
定理 *3.4.1*的证明。 我们考虑部分 (0,1)-纤维化的情形；其余 3 种情形的证明方法相同，或者可通过反转 1-态射和/或 2-态射得到。首先假设 p 是一个部分 (0,1)-纤维化。对于带装饰的 1-态射 $\_f\colon \bar{x} \to \bar{y}$ 和 $\bar{g}\colon \bar{a} \to b$ 在 $\mathbb{E}$ 中，且分别位于 $f\colon x \to y$ 和 $g\colon a \to b$之上，我们有一个交换立方体



其中左右两面是根据推论 3.3.5作出的拉回。这里我们可以将底部的方块分解为

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{E}(\bar{x},\bar{a}) \times \mathbb{E}(\bar{y},\bar{b}) & \longrightarrow & \mathbb{E}(\bar{x},\bar{a}) \times \mathbb{B}(y,b) & \longrightarrow & \mathbb{B}(x,a) \times \mathbb{B}(y,b) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{E}(\bar{x},\bar{b}) \times \mathbb{E}(\bar{x},\bar{b}) & \longrightarrow & \mathbb{E}(\bar{x},\bar{b}) \times \mathbb{B}(x,b) & \longrightarrow & \mathbb{B}(x,b) \times \mathbb{B}(x,b),
\end{array}$$

其中左侧方块是一个拉回，因为 f 是一个余笛卡尔 1-态射。利用这一点，我们可以将立方体重新组织为



其中我们知道左面和右面都是拉回。此外，前面在此处是一个拉回，根据推论 3.4.5，因为 $\mathbb{E}(\bar{x},\ b) \to \mathbb{B}(x,\ b)$ 具有 $\mathbb{B}(x,\ b)$中带装饰态射的笛卡尔提升。因此，后面也是一个拉回，这意味着映射 ∞-范畴的交换方块

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{DAr}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{E}^{\diamond})(\bar{f},\bar{g}) & \longrightarrow & \mathbb{DAr}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{B}^{\diamond})(f,g) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{E}(\bar{x},\bar{a}) & \longrightarrow & \mathbb{B}(x,a)
\end{array}$$

是一个拉回。要证明（3.1）是一个拉回，只需证明它在核心上给出一个拉回方块。这同样可由余笛卡尔提升的唯一性推出（观察2.4.3），与推论 3.4.5中的证明相同。

现在我们证明反向结论：由于等价总是带装饰的，对于 $\mathbb{E}$ 上方 x， $y \in \mathbb{B}$ 中的对象$\bar{x}$ 和 $\bar{y}$，我们得到一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{E}^{\diamond})(\mathrm{id}_{\bar{x}}, \mathrm{id}_{\bar{y}}) & \longrightarrow & \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{B}^{\diamond})(\mathrm{id}_{x}, \mathrm{id}_{y}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{E}(\bar{x}, \bar{y}) & \longrightarrow & \mathbb{B}(x, y). \end{array}$$

利用观察 3.3.7，我们可以将其识别为该方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{DAr}(\mathbb{E}(\bar{x}, \bar{y})) & \longrightarrow & \mathsf{DAr}(\mathbb{B}(x, y)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{E}(\bar{x}, \bar{y}) & \longrightarrow & \mathbb{B}(x, y). \end{array}$$

由于这是一个拉回，推论 3.4.5 意味着 $\mathbb{E}(\bar{x}, \bar{y})$ 具有 $\mathbb{B}(x, y)$ 中带装饰的 2-态射的笛卡尔提升，而这些恰好就是 $\mathbb{E}(x, y)$ 中的带装饰的 2-态射。因此， $\mathbb{E}^{\diamond}$ 中的带装饰的 2-态射可逆，当且仅当其在 $\mathbb{B}$ 中的像可逆，这意味着我们有一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{DA}\mathrm{r}((u_{\mathrm{d}}^{\mathrm{m}}\mathbb{E}^{\diamond})^{\flat}) & \longrightarrow & \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{E}^{\diamond}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{DA}\mathrm{r}((u_{\mathrm{d}}^{\mathrm{m}}\mathbb{B}^{\diamond})^{\flat}) & \longrightarrow & \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{B}^{\diamond}). \end{array}$$

应用推论 3.4.5 于该拉回方块（3.1）与此结果的结合，我们可以得出 $\mathbb{E}$ 具有 $\mathbb{B}$ 中带装饰的 1-态射的余笛卡尔提升，而这些恰好就是 $\mathbb{E}$ 中的带装饰的 1-态射，正如所要求的。 □

3.5. **函子上的部分纤维化**。 设 $p\colon \mathsf{E} \to \mathsf{B}$ 是 ∞-范畴的一个（余）笛卡尔纤维化；那么对于任意 ∞-范畴 K， $p_*\colon \mathsf{Fun}(\mathsf{K}, \mathsf{E}) \to \mathsf{Fun}(\mathsf{K}, \mathsf{B})$ 也是如此，并且 p_*-（余）笛卡尔态射恰好是逐分量为（余）笛卡尔的自然变换。本小节的目标是证明这一陈述的（∞,2）-范畴版本，以及其对部分（op）松变换的推广。我们将在带装饰的（∞,2）-范畴框架下进行讨论，因此更确切地说，我们将给出条件，使函子 $\mathbb{DF}\mathsf{un}(\mathbb{K}^{\diamond}, -)^{I}$ - （op）松保持部分纤维化。

结合我们对带装饰的 Gray 张量积的讨论与定理 3.4.1的判据，我们立即得到以下有用的情形：

推论 3.5.1。 假设 $p\colon \mathbb{E}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\diamond}$ 是一个部分 ϵ-纤维化。那么对于任意$(\infty, 2)$-范畴 $\mathbb{K}$，带装饰的$(\infty, 2)$-范畴之间的诱导函子

$$p_*\colon \mathbb{DF}\mathsf{un}(\mathbb{K}^{\flat\flat}, \mathbb{E}^{\diamond})^{\overline{\epsilon}\text{-lax}} \to \mathbb{DF}\mathsf{un}(\mathbb{K}^{\flat\flat}, \mathbb{B}^{\diamond})^{\overline{\epsilon}\text{-lax}}$$

仍是一个部分 ϵ-纤维化。

注 3.5.2。 更明确地说，为具体起见，限制在 $\epsilon = (0, 1)$ 这一情形，推论 3.5.1 说明函子

$$p_*\colon \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{K}, \mathbb{E})^{\mathrm{lax}} \to \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{K}, \mathbb{B})^{\mathrm{lax}}$$

是相对于靶的装饰而言的一个部分 (0,1)-纤维化，其中

▶ 带装饰的 1-态射是指这样的 lax 变换：其在 $\mathbb{K}$ 的每个对象处的分量都是 $\mathbb{B}$ 中的带装饰的 1-态射，并且其 lax 自然性方块包含带装饰的 2-态射；▶ 带装饰的 2-态射是指这样的 2-态射：其在 $\mathbb{K}$ 的每个对象处的分量都是 $\mathbb{B}$中的带装饰的 2-态射。

此外，源中位于这样一个带装饰的 1-态射之上的 1-态射为余笛卡尔，当且仅当它在 $\mathbb{K}$ 的每个对象处的分量是 p-余笛卡尔的，且其所有松弛自然性方块都包含 p-笛卡尔 2-态射。一个 2-态射同样为笛卡尔的，如果它在 $\mathbb{K}$ 的每个对象处的分量是一个 p-笛卡尔 2-态射。特别地，若 p 是一个 (0,1)-纤维化，则 p_* 亦然，并以上述作为其 (余)笛卡尔1-态射与2-态射。

推论的证明 *3.5.1*。我们证明部分 $(0,1)$-纤维化的情形。应用定理3.4.1，我们需要证明该交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{DF}\mathrm{un}(\mathbb{K}^{\flat\flat},\mathbb{E}^{\diamond})^{\mathrm{lax}}) & \longrightarrow & \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{DF}\mathrm{un}(\mathbb{K}^{\flat\flat},\mathbb{B}^{\diamond})^{\mathrm{lax}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{DF}\mathrm{un}(\mathbb{K}^{\flat\flat},\mathbb{E})^{\mathrm{lax}} & \longrightarrow & \mathbb{DF}\mathrm{un}(\mathbb{K}^{\flat\flat},\mathbb{B})^{\mathrm{lax}} \end{array}$$

是 $(\infty,2)$-范畴的一个拉回。但利用推论 2.7.8 我们可以将其改写为该方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{K},\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{E}^{\diamond}))^{\mathrm{lax}} & \longrightarrow & \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{K},\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{B}^{\diamond}))^{\mathrm{lax}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{K},\mathbb{E})^{\mathrm{lax}} & \longrightarrow & \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{K},\mathbb{B})^{\mathrm{lax}}, \end{array}$$

这是一个拉回，因为 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{K},-)^{\mathrm{lax}}$ 保持极限，因为它是右伴随。 □

我们可以利用定理3.4.1 的带装饰推广来推广这一结果（为供后续使用，我们将在更一般的带装饰部分纤维化情形下证明该推广）。

记号3.5.3. 设 $\mathbb{B}^{\diamond}$ 是一个带装饰的 $(\infty,2)$-范畴。我们记

$$\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-}\mathrm{lax}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\diamond\text{-}\mathrm{fib}}$$

为 $\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-}\mathrm{lax}}(\mathbb{B}^{\diamond})$ 的装饰，其中

▶ 一个（反）松弛方块是带装饰的 1-态射，当且仅当它交换，且它在 ev_0 和 ev_1 下的像在 $\mathbb{B}^{\diamond}$ 中均带装饰；一个 2-态射是带装饰的，当且仅当它在 ev_0 和 ev_1 下的像在 $\mathbb{B}^{\diamond}$ 中均带装饰。

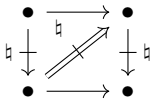
（注意，这与定义 2.7.1 中考虑的装饰不同；后者与带装饰的 Gray 张量积互为伴随：区别在于，我们要求带装饰的 1-态射是交换方块，而非包含一个装饰 2-态射。）如果 $\mathbb{E}^{\diamond}\to\mathbb{B}^{\diamond}$ 是带装饰的部分纤维化，并且 $\mathbb{E}^{\natural}$ 照常表示 $\mathbb{E}$ 的（余）笛卡尔装饰，我们也稍微滥用记号，将 $\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-}\mathrm{lax}}(\mathbb{E}^{\natural})^{\diamond\text{-}\mathrm{fib}}$写作把 $\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-}\mathrm{lax}}(\mathbb{E}^{\natural})$视为 $\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-}\mathrm{lax}}(\mathbb{E}^{\diamond})^{\diamond\text{-}\mathrm{fib}}$ 的全子（∞，2）-范畴时所诱导的装饰。

命题 3.5.4。 设 $p\colon \mathbb{E}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\diamond}$ 是一个带装饰的部分 ϵ-纤维化。那么交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{E}^{\natural})^{\diamond}\text{-纤维化} & \longrightarrow & \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\diamond}\text{-纤维化} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{E}^{\diamond} & \longrightarrow & \mathbb{B}^{\diamond} \end{array}$$

是带装饰的 $(\infty,2)$-范畴的拉回。

证明。 由于底层函子 $\mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 是一个部分 ϵ-纤维化，根据定理 $(\infty,2)$-范畴的底层方块是拉回。因此，只需证明装饰相匹配；我们在 $\epsilon = (0,1)$的情形下进行检验。$\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{E}^{\natural})$ 中的一个 1-态射于是就是一个 oplax 方块



在 $\mathbb{E}$ 中，其中竖直态射和对角 2-态射分别在 $\mathbb{E}^{\natural}$ 中带有装饰，这意味着它们分别是余笛卡尔和笛卡尔的。这对应于拉回 $\mathbb{DA}\mathbf{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\diamond\text{-fib}} \times_{\mathbb{B}^{\diamond}} \mathbb{E}^{\diamond}$ 中的一个带装饰的 1-态射，当且仅当

▶ 顶端水平态射在 $\mathbb{E}^{\diamond}$ 中带有装饰，▶ 且在 $\mathbb{DA}\mathbf{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\diamond\text{-fib}}$ 中的像也带有装饰；也就是说，该图交换，且其水平态射均带有装饰。

由此可知，我们的 $\mathbb{E}$ oplax 方块中的 2-态射在一个等价之上是笛卡尔的，因此它必定可逆，从而得到一个交换方块；于是底端水平态射也带有装饰，因为 p 是一个带装饰的 $(0,1)$-纤维化，正如观察 3.2.2 中所述。关于 2-态射的情形，可由 3.2.2 中所述的带装饰的部分纤维化中带装饰的 2-态射的两个性质类似地推出。 □

利用这一点，我们可以将推论 3.5.1加强如下：

推论 3.5.5。 假设 $p\colon \mathbb{E}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\diamond}$ 是一个部分 ϵ-纤维化，且 $\mathbb{K}^{\diamond}$ 是一个带装饰的$(\infty,2)$-范畴，配备标记 E，使得所有带装饰的 *1*-态射均带有标记。那么，带装饰的$(\infty,2)$-范畴之间的诱导函子

$$p_*\colon \mathbb{DF}\mathrm{un}(\mathbb{K}^{\diamond},\mathbb{E}^{\diamond})^{E-\overline{\epsilon}\text{-lax}} \to \mathbb{DF}\mathrm{un}(\mathbb{K}^{\diamond},\mathbb{B}^{\diamond})^{E-\overline{\epsilon}\text{-lax}}$$

再次是一个部分 ϵ-纤维化。

证明。 将 $\mathbb{DF}\mathrm{un}(\mathbb{K}^{\diamond},-)^{E-\epsilon\text{-拟}}$ 应用于命题 $(\infty,2)$-范畴中带装饰对象的拉回方块 3.5.4，我们得到拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{DF}\mathrm{un}(\mathbb{K}^{\diamond},\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{E}^{\diamond})^{\diamond\text{-fib}})^{E-\overline{\epsilon}\text{-lax}} & \longrightarrow & \mathbb{DF}\mathrm{un}(\mathbb{K}^{\diamond},\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\diamond\text{-fib}})^{E-\overline{\epsilon}\text{-lax}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{DF}\mathrm{un}(\mathbb{K}^{\diamond},\mathbb{E}^{\diamond})^{E-\overline{\epsilon}\text{-lax}} & \longrightarrow & \mathbb{DF}\mathrm{un}(\mathbb{K}^{\diamond},\mathbb{B}^{\diamond})^{E-\overline{\epsilon}\text{-lax}}. \end{array}$$

我们还从引理 2.7.11 得知我们可以等同

$$\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{DF}\mathrm{un}(\mathbb{K}^{\diamond},\mathbb{B}^{\diamond})^{E-\overline{\epsilon}\text{-lax}})$$

与 $\mathbb{D}\mathsf{Fun}(\mathbb{K}^{\diamond},\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{B}^{\diamond}))^{E-\epsilon\text{-lax}}$ 中将 E 中的态射映为交换方块的函子所成的全子-$(\infty,2)$-范畴（其中 $\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{B}^{\diamond})$ 具有标准装饰）。另一方面，$\mathbb{D}\mathsf{Fun}(\mathbb{K}^{\diamond},\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\diamond\text{-fib}})^{E-\epsilon\text{-lax}}$ 是由将带装饰的 1-态射映为交换方块的函子所成的全子-$(\infty,2)$-范畴。由于带装饰的态射全都是带标记的，这意味着$\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{D}\mathsf{Fun}(\mathbb{K}^{\diamond},\mathbb{B}^{\diamond})^{E-\epsilon\text{-lax}})$ 是一个全子-$(\infty,2)$-范畴，包含于

$$\mathbb{D}\mathsf{Fun}(\mathbb{K}^{\diamond},\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\diamond\text{-fib}})^{E-\overline{\epsilon}\text{-lax}}.$$

此外，我们有一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{D}\mathsf{Fun}(\mathbb{K}^{\diamond},\mathbb{E}^{\diamond})^{E-\overline{\epsilon}\text{-lax}}) & \longrightarrow & \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{D}\mathsf{Fun}(\mathbb{K}^{\diamond},\mathbb{B}^{\diamond})^{E-\overline{\epsilon}\text{-lax}}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{D}\mathsf{Fun}(\mathbb{K}^{\diamond},\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{E}^{\diamond})^{\diamond\text{-fib}})^{E-\overline{\epsilon}\text{-lax}} & \longrightarrow & \mathbb{D}\mathsf{Fun}(\mathbb{K}^{\diamond},\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\diamond\text{-fib}})^{E-\overline{\epsilon}\text{-lax}},
\end{array}$$

因为 $\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{E}^{\diamond})$ 的对象是包含一个 j-笛卡尔 2-态射的方块，因此当且仅当它们在 $\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{B}^{\diamond})$ 中的像也交换时，这些方块才交换。将这些方块合在一起，我们得出 p_* 是一个部分 ϵ-纤维化，由定理 3.4.1的判据可知。□

特别地，我们有这样一个极端情形：所有态射均带标记：

推论 3.5.6。 设 $p\colon \mathbb{E}^{\diamond}\to\mathbb{B}^{\diamond}$ 是一个部分 ϵ-纤维化，且 $\mathbb{K}^{\diamond}$ 是一个带装饰的$(\infty,2)$-范畴。那么，带装饰的$(\infty,2)$-范畴之间的诱导函子

$$p_*\colon \mathbb{D}\mathsf{Fun}(\mathbb{K}^{\diamond},\mathbb{E}^{\diamond})\to\mathbb{D}\mathsf{Fun}(\mathbb{K}^{\diamond},\mathbb{B}^{\diamond})$$

仍然是一个部分 ϵ-纤维化。 □

3.6. **ϵ-等价与 ϵ-余纤维化。** 我们可以将定理 3.4.1理解为刻画部分 ϵ-纤维化所满足的右正交性质。本节将详细阐述这一点，随后研究相应的左正交类，即 ϵ-余纤维化，以及相对于固定基底上的部分 ϵ-纤维化为局部等价的态射，我们称之为 ϵ-等价。

利用记号 2.7.4，我们可以将定理 3.4.1重新表述如下：

推论 3.6.1。 带装饰的$(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{E}^{\diamond}\to\mathbb{B}^{\diamond}$ 之间的态射是一个部分ϵ-纤维化，当且仅当它对于

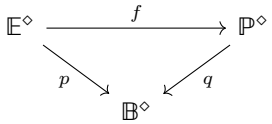
$$\{i\}\otimes^{\mathrm{d},\epsilon}C_k^{\flat\flat}\to[1]^{\sharp}\otimes^{\mathrm{d},\epsilon}C_k^{\flat\flat}$$

对于 $k=0,1,2$。 □

定义 3.6.2。 $\mathrm{DCat}_{(\infty,2)}$ 中的态射若属于由 $\{i\}\otimes^{\mathrm{d},\epsilon}C_k^{\flat\flat}\to[1]^{\sharp}\otimes^{\mathrm{d},\epsilon}C_k^{\flat\flat}$（其中 $k=0,1,2$）生成的饱和类，则称其为关于 $\epsilon=(i,j)$ 的 ϵ-余纤维化。

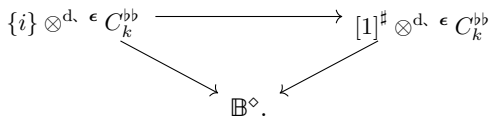
注记 3.6.3. Loubaton [Lou24]定义了带装饰的(∞,∞)-范畴的（两种情形的）纤维化，即与我们的 ϵ-余纤维化的推广右正交的态射。其定理 3.2.2.24 随后通过存在带装饰的 i-态射（对所有 i）的（余）笛卡尔提升来刻画这些纤维化，从而经由伴随给出我们定理 3.4.1 中判据对于 (∞,∞)-范畴的一个版本。

观察 3.6.4. 我们在观察 2.6.2 中看到，$\mathsf{DCat}^{(\infty,2)}$ 是可表现的∞-范畴。因此由 [Lur09a，命题 5.5.5.7] 可知，部分 ϵ-纤维化构成$\mathsf{DCat}^{(\infty,2)}$ 上一个分解系统中的右类，其左类由 ϵ-余纤维化组成。特别地，部分 ϵ-纤维化在 $\mathsf{Ar}(\mathsf{DCat}^{(\infty,2)})$中对基变换、收缩和极限封闭，并且满足消去性质：若我们有带装饰的 $(\infty, 2)$-范畴的交换三角形



使得 q 是一个部分 ϵ-纤维化，则当且仅当 f 是部分 ϵ-纤维化时，p 也是部分 ϵ-纤维化。例如，在这种情况下，$\mathbb{E}$ 中的一个态射在 $\mathbb{B}^\diamond$ 中的一个带装饰态射上是 p-（余）笛卡尔的，当且仅当它在 $\mathbb{P}$ 中的一个 q-（余）笛卡尔态射上是 f-（余）笛卡尔的。

观察 3.6.5。 由推论 3.6.1 还可推出，全子范畴$\mathsf{PFib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}^\diamond} \subseteq \mathsf{DCat}^{(\infty,2)/\mathbb{B}^\diamond}$ 恰好由相对于所有形如以下形式的态射而言局部的对象组成

(3.3)


由于这类态射的等价类构成一个集合，且 $\mathbf{DCat}^{(\infty,2)}$ 是可呈现的，这意味着存在一个局部化函子

$$L^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond} : \mathsf{DCat}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^\diamond} \to \mathsf{PFib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}^\diamond},$$

到包含的左伴随。

定义 3.6.6. 我们称 $\mathsf{DCat}^{(\infty,2)/\mathbb{B}^\diamond}$ 中的一个态射是一个 ϵ-等价相对于 $\mathbb{B}^\diamond$，如果它在 $L^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}$下被映为一个等价；等价地，如果它属于由态射（3.3）生成的强饱和类。

观察 3.6.7. 我们对 ϵ-余纤维化和ϵ-等价作一些初等观察：

▶ 态射 $f\colon \mathbb{A}^\diamond \to \mathbb{B}^\diamond$ 是一个 ϵ-余纤维化，当且仅当将其视为映射 $f \to \mathrm{id}_{\mathbb{B}^\diamond}$ in $\mathbf{DCat}^{(\infty,2)/\mathbb{B}^\diamond}$.▶ 时，它是一个 ϵ-等价。对于任意带装饰的函子 $p\colon \mathbb{A}^\diamond \to \mathbb{B}^\diamond$，函子

$$p_! : \mathsf{DCat}_{(\infty,2)/\mathbb{A}^\diamond} \to \mathsf{DCat}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^\diamond}$$

由与 p复合给出，保持 ϵ-等价，因为其右伴随 p^*保持部分 ϵ-纤维化。

▶ 如果 p 自身是一个部分 ϵ-纤维化，那么 $p_!$ 还会反映 ϵ-等价：此时 $p_!$ 限制为一个函子 $\mathbf{PFib}^{\epsilon}_{/\mathbb{A}^\diamond} \to \mathbf{PFib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}^\diamond}$，它是拉回函子的左伴随，因此我们得到左伴随的一个等价 $L^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond} p_! \simeq p_! L^{\epsilon}_{\mathbb{A}^\diamond}$。由于 $\mathbf{PFib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}^\diamond}$ 中的等价可在 $\mathbf{Cat}^{(\infty,2)}$中检测，因此对于 $\mathbf{DCat}^{(\infty,2)/\mathbb{A}^\diamond}$ 中的态射 f，$L^{\epsilon}_{\mathbb{A}^\diamond}(f)$ 是等价当且仅当

$p_! L^{\epsilon}_{\mathbb{A}^\diamond}(f) \simeq L^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}(p_! f)$ 是等价。注意，如果 p 可分解为 $\mathbb{A}^\diamond \xrightarrow{q} \mathbb{X}^\diamond \xrightarrow{r} \mathbb{B}^\diamond$，那么这意味着 $q_!$ 也能检测 ϵ-等价。

▶ 作为一个特例，这意味着，如果一个态射

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^\diamond \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{B}^\diamond \arrow[dl, "q"] \\ & \mathbb{C}^\diamond & \end{tikzcd}$$

在 $\mathrm{DCat}_{(\infty,2)/\mathbb{C}^\diamond}$ 中是一个 ϵ-等价，且 q 是一个部分 ϵ-纤维化，那么 f 是一个ϵ-余纤维化。

命题 3.6.8. $[1]^\sharp \to [0]$ 和 $C_2^{\flat\sharp} \to [1]^\flat$ 对所有 ϵ都是 ϵ-余纤维化。

证明。 *</style}*令*(*，*j*)。对于第一个映射，我们注意到复合

$$\{i\} \to [1]^\sharp \to [0],$$

是恒等映射，由此根据消去律可知 $[1]^\sharp \to [0]$ 必定是一个ϵ-余纤维化。类似地，由复合

$$\{i\} \times [1]^\flat \to [1]^\sharp \otimes^{\mathrm{d},\epsilon} [1]^\flat \to [1]^\flat$$

我们看到 $[1]^\sharp \otimes^{\mathrm{d},\ \epsilon} [1]^\flat \to [1]^\flat$ 是一个 ϵ-余纤维化。由于我们还有一个推出

$$\begin{tikzcd} {[1]^\sharp \amalg [1]^\sharp} \arrow[r] \arrow[d] & {[0] \amalg [0]} \arrow[d] \\ {[1]^\sharp \otimes^{\mathrm{d}\ \epsilon} [1]^\flat} \arrow[r] & C_2^{\flat\sharp}, \end{tikzcd}$$

由消去法再次可知， $C_2^{\flat\sharp} \to [1]^\flat$ 是一个 ϵ-余纤维化。 □

由于 ϵ-余纤维化在余基变换和余极限下封闭，因此我们得到：

推论 3.6.9. 对于任意带装饰的$(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{C}^\diamond$，态射 $\mathbb{C}^\diamond \to \tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{C}^\diamond)^{\flat\flat}$ 是一个 ϵ-等价，对任意 ϵ 均如此；其任意推出亦然，即通过对一组带装饰的 *1*-态射和 *2*-态射求逆所得到的任意态射。□

观察 3.6.10. 投影 $[1]^\sharp \otimes^{\mathrm{d}} \mathbb{D}^\diamond \to \mathbb{D}^\diamond$是在带装饰的 1-态射和 2-态射处的局部化，因此是一个 ϵ-余纤维化，由推论 3.6.9 可知。因此三角形

$$\begin{tikzcd} {[1]^\sharp \otimes^{\mathrm{d}} \mathbb{D}^\diamond} \arrow[rr, "\mathrm{proj}"] \arrow[dr, "p\circ\mathrm{proj}"'] & & \mathbb{D}^\diamond \arrow[dl, "p"] \\ & \mathbb{B}^\diamond & \end{tikzcd}$$

是 $\mathbb{B}^\diamond$上的一个 ϵ-等价。由三取二性质，两个包含 $\mathbb{D}^\diamond \to [1]^\sharp \otimes^{\mathrm{d}} \mathbb{D}^\diamond$ 也是 ϵ-等价，并且在应用$L^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}$之后变得等价，因为它们都给出等价 $L^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}(\mathrm{proj})$的逆。因此任何lax变换

$$\alpha\colon [1]^\sharp \otimes^{\mathrm{d}} \mathbb{D}^\diamond \to \mathbb{Q}^\diamond$$

从 α_0 到 α_1 的 $\mathbb{B}^\diamond$ 给出 $L^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}(\alpha_0)$ 与 $L^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}(\alpha_1)$ 之间的自然等价。因此，我们可以用 $[1]^\sharp \otimes^{\mathrm{d}}(-)$ 来定义“同伦”和“同伦等价”，它们尤其总是 ϵ-等价。以下特殊情形将在后文派上用场：

引理 3.6.11. 设 $F\colon \mathbb{C}^\diamond \to \mathbb{D}^\diamond$ 是一个在 $\mathbb{B}^\diamond$ 之上的带装饰的函子，且存在一个在 $\mathbb{B}^\diamond$ 之上的 $G\colon \mathbb{D}^\diamond \to \mathbb{C}^\diamond$，使得 $GF \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{C}^\diamond}$，并且有一个交换三角形

$$\begin{array}{ccc} [1]^\sharp \otimes^{\mathrm{d}} \mathbb{D}^\diamond & \xrightarrow{\quad\rho\quad} & \mathbb{D}^\diamond \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbb{B}^\diamond & \end{array}$$

其中，ρ 是 $\mathrm{id}_{\mathbb{D}^\diamond}$ 与 FG 之间的松弛自然变换。于是，对于任意装饰函子 $f\colon \mathbb{A}^\diamond \to \mathbb{B}^\diamond$，拉回 $f^*F\colon f^*\mathbb{C}^\diamond \to f^*\mathbb{D}^\diamond$ 是 $\mathbb{A}^\diamond$ 上的一个 $\boldsymbol{\epsilon}$-等价。

证明。 将观察 3.6.10 应用于 ρ，我们看到 $L^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}(G)$ 成为 $L^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}(F)$的逆，因此这确实是一个 $\boldsymbol{\epsilon}$-等价。沿 f拉回 ρ，此外我们还得到一个关于 f^*F 的类似自然变换，其复合为

$$[1]^\sharp \otimes^{\mathrm{d}} f^*\mathbb{D}^\diamond \to f^*([1]^\sharp \otimes^{\mathrm{d}} \mathbb{D}^\diamond) \xrightarrow{f^*\rho} f^*\mathbb{D}^\diamond,$$

因此，同样的论证表明，f^*F 也是一个 $\boldsymbol{\epsilon}$-等价。 □

作为推论 3.5.5 的结果，我们还得到以下一类 $\boldsymbol{\epsilon}$-余纤维化：

推论 3.6.12. 设 $f\colon \mathbb{A}^\diamond \to \mathbb{B}^\diamond$ 是一个 $\boldsymbol{\epsilon}$-余纤维化，且 $\mathbb{K}^\diamond$ 是一个带装饰的$(\infty,2)$-范畴，并配备标记 E，使得所有带装饰的 *1*-态射均带标记。那么 $f \otimes^{\mathrm{d}}_{\flat,E} \mathbb{K}^\diamond$ 仍是一个 $\boldsymbol{\epsilon}$-余纤维化。特别地，对于任意 $\mathbb{K}^\diamond$，$f \times \mathbb{K}^\diamond$ 都是一个$\boldsymbol{\epsilon}$-余纤维化。□

为了在我们的情境中应用一些在缩放单纯集合框架下证明的结果，找到一组以东方形表示的替代 $\boldsymbol{\epsilon}$-余纤维化生成元将很有用（见定义 2.1.2）；在该模型中，这组生成元更容易处理。

定义 3.6.13. 令 $\mathbb{O}^n$ 表示 2-截断的 n 维 东方形。我们定义：

▶ 一个带装饰的（∞,2）-范畴 $\mathbb{O}^{n,\diamond}$，其装饰方式是为 1-态射（$n-1$）$\to n$以及由形如 $\{i,n\} \subset \{i,n-1,n\}$ 的子集包含所确定的每个 2-态射添加装饰。▶ 一个带装饰的（∞,2）-范畴 $\Lambda^n_i\mathbb{O}^\diamond$，其底层（$\infty,2$）-范畴是余极限 $\mathrm{colim}_{I\subset[n]}\mathbb{O}^I$，其中 I 遍历满足性质 $[n]\setminus\{i\} \not\subset I$ 的非空子集族，并且当且仅当一个 k-态射在典范映射 $\Lambda^n_i\mathbb{O} \to \mathbb{O}^n$ 下的像带有装饰时，该态射才带有装饰。▶ 一个带装饰的（∞,2）-范畴 ${\mathbb{O}^{n,}}_+^\dagger$，其底层（$\infty,2$）-范畴 $\mathbb{O}^n_+$ 是通过对 $\mathbb{O}^n$ 中形如 $\{0,j\} \to \{0,1,j\}$ 的每个 2-态射求逆得到的，并且我们为 1-态射 $0 \to 1$添加装饰。▶ 一个带装饰的 2-范畴 $\Lambda^n_0\mathbb{O}^\dagger_+$，其底层 2-范畴由 $\Lambda^n_0\mathbb{O}$ 将上述相同的 2-态射合并得到，装饰则由函子 $\Lambda^n_0\mathbb{O}_+ \to \mathbb{O}^n_+$诱导。

定义 3.6.14。令 $[1]^{\flat,\otimes^k}$ 表示 k 重带装饰的 Gray 张量积$[1]^{\flat}$。我们定义带装饰的 2-范畴 $\sqsubset_k^{\diamond}$，其中 $k=1,2,3$，如下：

▶ 对于 $k=1$，我们记作 $\sqsubset_1^{\diamond}=[0]$。▶ 对于 $k=2$，我们令 $\sqsubset_2^{\diamond}=[1]^{\flat}\amalg_{\partial[1]}([1]^{\sharp}\amalg[1]^{\sharp})$，其中映射 $\partial[1]\to[1]^{\sharp}\amalg[1]^{\sharp}$ 由选取初始顶点的映射的不交并给出。▶ 对于 $k=3$，我们记作 $\partial([1]^{\flat,\otimes^2})=[2]^{\flat}\amalg_{0<2}[2]^{\flat}$ 并定义

$$\sqsubset_3^{\diamond}=[1]^{\flat,\otimes^2}\amalg_{\partial([1]^{\flat,\otimes^2})}[1]^{\sharp}\otimes\partial([1]^{\flat,\otimes^2})$$

其中粘接映射 $\partial([1]^{\flat,\otimes^2})\to[1]^{\sharp}\otimes^{\mathrm{d},\epsilon}\partial([1]^{\flat,\otimes^2})$ 是由映射$\{0\}\to[1]^{\sharp}$诱导的。

我们注意到，对于 $k=2,3$，我们有自然的带装饰函子 $\sqsubset_k^{\diamond}\to[1]^{\sharp}\otimes^{\mathrm{d},\epsilon}[1]^{\flat,\otimes^{k-1}}$。

注 3.6.15. 在下面的若干论证中，我们需要构造 $[1]$的东方形与迭代 Gray 积之间的映射。为此，值得回顾的是，在缩放单纯集合模型中，此类态射可以描述为与相关装饰或缩放相容的偏序集映射。具体而言，n阶东方形由偏序集 $[n]$（的神经）建模，并赋予最小缩放；而 $[1]^{\flat,\otimes^k}$ 则由 k重笛卡尔积 $[1]$ 构成，并赋予其 Gray 张量积缩放（参见 [GHL21]）。

引理 3.6.16. 映射 $\sqsubset_k^{\diamond}\to[1]^{\sharp}\otimes[1]^{\flat,\otimes^{k-1}}$ 对于 $k=1$、2、3 是 $(0,1)$-余纤维化。此外，它们的饱和闭包是 $(0,1)$-余纤维化类。

证明。我们注意到，这些态射所生成的饱和类

$$\{0\}\times[1]^{\flat,\otimes^{k-1}}\to[1]^{\sharp}\otimes^{\mathrm{d},\epsilon}[1]^{\flat,\otimes^{k-1}},\quad k=1,2,3$$

恰好由 (0,1)-余纤维化组成。此外，对每个 k，我们都有一个分解

$$\{0\}\times[1]^{\flat,\otimes k-1}\to\sqsubset_k^{\diamond}\to[1]^{\sharp}\otimes^{\mathrm{d},\epsilon}[1]^{\flat,\otimes k-1}.$$

这里容易验证，对于 $\ell<k$，第一个映射属于态射$\sqsubset_{\ell}^{\diamond}\to[1]^{\sharp}\otimes^{\mathrm{d},\epsilon}[1]^{\flat,\otimes^{\ell-1}}$所生成的饱和类，因此通过对 k 归纳可知这是一个 (0,1)-余纤维化。由消去性质可知，第二个映射也必定是一个 (0,1)-余纤维化。这个论证还表明，映射 $\{0\}\times[1]^{\flat,\otimes^{k-1}}\to[1]^{\sharp}\otimes^{\mathrm{d},\epsilon}[1]^{\flat,\otimes^{k-1}}$ 属于这些映射所生成的饱和类，从而证明了反向结论。□

引理 3.6.17. 设 $0<i<n$，则映射 $\Lambda_i^n\mathbb{O}^{\diamond}\to\mathbb{O}^{n,\diamond}$ 是(0,1)-余纤维化。

证明。令 $[1]^{\times n}$ 表示 n 重笛卡尔积。存在一个函子

$$r'_n\colon[1]^{\times n}\to[n]$$

由 $v=\{v_i\}_{i=1}^n\mapsto n-(\alpha_v-1)$ 给出，其中 $\alpha_v=\min\{i\mid v_i=1\}$；约定 $\alpha_v=0$ 在 $v_i=0$ 时，对 $i=1,2,\dots,n$ 成立。此映射有一个截面 $i'_n\colon[n]\to[1]^{\times n}$，它将 j 映射到满足 $v_i=0$（当 $i\le n-j$ 时）的元素 $\{v_i\}_{i=1}$，否则映射到 $v_i=1$。这些偏序集之间的映射诱导出带装饰的 2-范畴的函子（见注 3.6.15）$i_n\colon\mathbb{O}^{n,\diamond}\to[1]^{\sharp}\otimes^{\mathrm{d},\epsilon}[1]^{\otimes^{\mathrm{d},\epsilon}n-1,\flat}$，$r_n\colon[1]^{\sharp}\otimes^{\mathrm{d},\epsilon}[1]^{\otimes n-1,\flat}\to\mathbb{O}^{n,\diamond}$，使得 $r_n\circ i_n=\mathrm{id}$。

由此可得一个收缩图：

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{O}^{n-1,\flat} & \longrightarrow & \{0\} \otimes^{\mathrm{d},\epsilon} [1]^{\otimes n-1,\flat} & \longrightarrow & \mathbb{O}^{n-1,\flat} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{O}^{n,\diamond} & \longrightarrow & [1]^{\sharp} \otimes^{\mathrm{d},\epsilon} [1]^{\otimes n-1,\flat} & \longrightarrow & \mathbb{O}^{n,\diamond}. \end{array}$$

根据前面的讨论，我们知道映射 $\mathbb{O}^{n-1,\flat} \to \mathbb{O}^{n,\diamond}$ 是 (0，1)-余纤维化。我们考虑分解 $\mathbb{O}^{n-1,\flat} \to \Lambda^n_i \mathbb{O}^{\diamond} \to \mathbb{O}^{n,\diamond}$，并注意到，根据关于 n 的简单归纳论证，第一个映射是 (0，1)-余纤维化。由消去律即得结论。□

引理 3.6.18。 $\Lambda^n_0 \mathbb{O}^{\dagger} \to \mathbb{O}^{n,\dagger}_{+}$ 对于 $n = 1$、2、3 都是$(0，1)$-余纤维化。

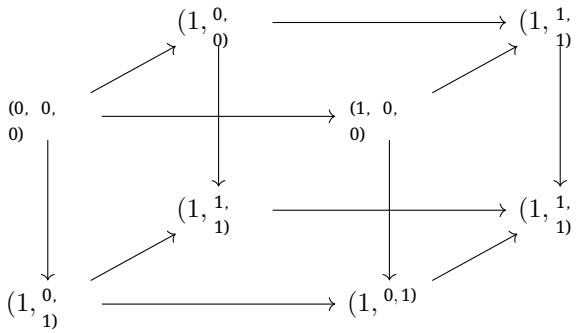
证明。 只需证明存在一个收缩图，

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda^n_0 \mathbb{O}^{\dagger}_{+} & \longrightarrow & \sqsubset^{\diamond}_k & \longrightarrow & \Lambda^n_0 \mathbb{O}^{\dagger}_{+} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{O}^{n,\dagger}_{+} & \xrightarrow{\iota_n} & [1]^{\sharp} \otimes [1]^{\flat,\otimes^{n-1}} & \xrightarrow{r_k} & \mathbb{O}^{n,\dagger}_{+} \end{array}$$

对于 $n = 1$，2，3。我们只讨论 $n = 3$ 的情形，因为其余情形类似且更简单。映射 ι_3 由偏序集函子 i'_3：$[3] \to [1] \times [1] \times [1]$（见注记 3.6.15）诱导，其定义如下：

$$(0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,0,1) \to (1,1,1).$$

我们考虑一个映射 T：$[1] \times [1] \times [1] \to [1] \times [1] \times [1]$，其图示如下：



并定义 r'_3 为其通过 $[3]$的分解。映射 r'_3 诱导出我们陈述中所需的函子 r_3。□

命题 3.6.19。 以下映射集生成了作为饱和类的$(0,1)$-余纤维化：

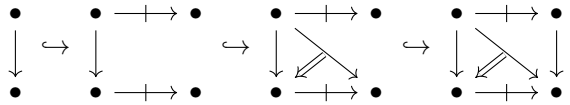
(i) $\Lambda^n_i \mathbb{O}^{\diamond} \to \mathbb{O}^{n,\diamond}$ 对于 $n = 2,3$ 和 $0 < i < n$。
(ii) $\Lambda^n_0 \mathbb{O}^{\dagger} \to \mathbb{O}^{n,\dagger}_{+}$ 对于 $n = 1, 2, 3$。

证明。 由引理 3.6.16 可知，只需证明陈述中的映射是 $(0,1)$-余纤维化，并且态射

$$\sqsubset^{\diamond}_k \to [1]^{\sharp} \otimes^{\mathrm{d},\epsilon} [1]^{\otimes k-1}, \quad k = 1,2,3 \tag{3.4}$$

属于它们的饱和包。第一个断言由引理 3.6.17 和引理 3.6.18。

现在我们来处理第二个断言。 $k = 1$ 的情形显然成立。对于 $k = 2$的情形，我们可以构造一个滤过，并用下图表示：



其中，第一步是沿着 (ii) 型态射取推出得到的，第二步是沿着 (i) 型态射取推出得到的，最后一步则是沿着 (ii) 型态射取推出得到的。（注意，这里使用带横线的箭头表示带装饰的 1-态射。）

对于 $k = 3$ 的情形，我们考虑与上文相同的滤过，但在右侧与 $[1]^\flat$ 取带装饰的 Gray 张量积。这样，我们只需证明映射

$$\Lambda^2_1\mathbb{O}^\diamond \otimes^{\mathrm{d},\epsilon} [1]^\flat \to \mathbb{O}^{2,\diamond} \otimes^{\mathrm{d},\epsilon} [1]^\flat, \qquad \Lambda^2_0\mathbb{O}^\dagger_+ \otimes^{\mathrm{d},\epsilon} [1]^\flat \to \mathbb{O}^{2,\dagger}_+ \otimes^{\mathrm{d},\epsilon} [1]^\flat.$$

可以表示为由 (i) 型和 (ii) 型态射构成的迭代推出。相应的滤过可直接由 [GHL21 的命题 2 改编而来。16]回顾一下，在缩放单纯集合的模型结构中，最小缩放的 n-单纯形对应于第 n 个东方形。□

4. （∞,2）-范畴的自由纤维化与推前

在建立 ∞-范畴理论时，一个出人意料地有用的事实是：从固定基底 B 上的（余）笛卡尔纤维化到 B 上的 ∞-范畴的遗忘函子存在一个左伴随，即自由（余）笛卡尔纤维化函子；它可以具体描述为 B 的箭头 ∞-范畴的一个拉回。本节的首要目标是证明这一结果在（∞, 2）-范畴中的版本，并将其置于部分纤维化的一般背景下。我们首先在 §4.1 中证明，从 $\mathbb{A}\mathrm{r}^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}(\mathbb{B})$ 到 $\mathbb{B}$ 的求值函子是纤维化，随后在 §4.2 中利用这些函子构造自由部分纤维化。在 §4.3 中，我们略微推广这一结果，以描述自由装饰纤维化；在 §4.4 中，我们利用这一描述，给出从 $\mathbb{B}$ 上的纤维化到 $\mathbb{B}^{\sharp\sharp}$上的装饰（$\infty$, 2）-范畴之遗忘函子的左伴随。接着，我们转向本节的第二个主要目标，即描述拉回的右伴随。在 §4.5 中，我们证明，沿装饰纤维化$\mathbb{A}^\diamond \to \mathbb{D}^{\sharp\sharp}$ 对装饰（∞, 2）-范畴切片作拉回存在右伴随，且该右伴随保持相反方差的纤维化。随后在 §4.6 中，我们利用这一结果确定沿任意此类函子对部分纤维化作拉回的右伴随；其中包括余自由纤维化的情形。最后，在 §4.7 中，我们应用这些结果，确定将一个函子局部化到装饰（∞, 2）-范畴时所对应的纤维化。

4.1. 由（反）松弛箭头得到的纤维化。若 C 是一个 ∞-范畴，则 ev_i: Ar(C) →C 对于 $i = 1$ 是余笛卡尔纤维化，对于 $i = 0$ 是笛卡尔纤维化，其中（余）笛卡尔态射恰好是那些在相反的求值下映为等价的态射。本节的目标是将这一结论推广到带装饰的（∞, 2）-范畴。

记号 4.1.1。对于 $\epsilon = (i,\ j)$ 以及 $\mathbb{C}^\diamond$ 一个带装饰的（∞，2）-范畴，令

$$\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{C}^\diamond)^{\flat[\epsilon]}$$

表示 $\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{C}^\diamond)$ 的装饰，其中

▶ 一个（反）松弛方块是带装饰的 1-态射，当且仅当它交换、其在 ev_i 下的像是一个等价，并且其在 ev_{1-i} 下的像是带装饰的；▶ 一个 2-态射是带装饰的，当且仅当其在 ev_i 下的像是一个等价，并且其在 ev_{1-i} 下的像是带装饰的。

定理 4.1.2. 对于任意带装饰的$(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{C}^\diamond$ 和 $\epsilon = (i,j)$，函子

$$\mathrm{ev}_{1-i}\colon \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{C}^\diamond)^{\flat[\epsilon]} \to \mathbb{C}^\diamond$$

是一个部分 ϵ-纤维化。

备注 4.1.3. 该定理的完全带装饰情形已由 Gagna、Harpaz 和 Lanari 在 [GHL24，定理 3.07].

备注 4.1.4。 更简洁地说，这意味着

▶ $\mathrm{ev}_1\colon \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C}^\diamond) \to \mathbb{C}$ 是一个部分 (0，1)-纤维化，
▶ $\mathrm{ev}_0\colon \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C}^\diamond) \to \mathbb{C}$ 是一个部分 (1，0)-纤维化，
▶ $\mathrm{ev}_1\colon \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{lax}}(\mathbb{C}^\diamond) \to \mathbb{C}$ 是一个部分 (0，0)-纤维化，
▶ $\mathrm{ev}_0\colon \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{lax}}(\mathbb{C}^\diamond) \to \mathbb{C}$ 是一个部分 (1，1)-纤维化，

所有这些都是相对于 $\mathbb{C}$ 上给定的装饰 $\mathbb{C}^\diamond$ 而言的。我们还知道

▶ 一个（反）松弛方块是 i-笛卡尔态射，当且仅当它可交换，且其在 ev_i 下的像是一个等价，▶ 一个 2-态射是 j-笛卡尔的，当且仅当其在 ev_i 下的像是一个等价。

我们将利用定理 3.4.1 的判据证明这一点，为此我们需要以下关于 $(\infty,\ 2)$-范畴局部化的结果：

命题 4.1.5. 假设 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ 是对某些 *1*-态射和 *2*-态射的局部化。那么对于任意 $(\infty,2)$- 范畴 $\mathbb{D}$，$F^*\colon \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C}',\mathbb{D})^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}} \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C},\mathbb{D})^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$ 是一个局部满包含。

为此，我们还需要一些关于保守函子的预备结果：

观察 4.1.6. 给定一个$(\infty,2)$-范畴的函子 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$，考虑交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{\leq i} & \longrightarrow & \mathbb{A}^{\leq j} \\ {\scriptstyle F^{\leq i}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F^{\leq j}} \\ \mathbb{B}^{\leq i} & \longrightarrow & \mathbb{B}^{\leq j} \end{array}$$

对于 $0 \leq i < j \leq 2$（其中 $(\text{–})^{\leq 2} = \mathrm{id}$）。我们有：

(i) F 在 2-态射上保守，当且仅当该方块对于$i = 1,\ j = 2$是一个拉回。(ii) F 在 1-态射上保守，当且仅当该方块对于$i = 0,\ j = 1$是一个拉回。

(iii) F 在 1-态射和 2-态射上均保守，当且仅当该方块对于 $i = 0$，1 和 $j = 2$是一个拉回。

命题 4.1.7。

(i) 交换方块

$$\begin{array}{ccc} \partial([1]\otimes[1])\otimes([1]\otimes[1]) & \longrightarrow & [1]^{\otimes 4} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial([1]\otimes[1])\otimes[1] & \longrightarrow & ([1]\otimes[1])\otimes[1] \end{array}$$

是一个推出。

(ii) 对任意 (∞,2)-范畴 $\mathbb{C}$，函子

$$\mathbb{F}\mathrm{un}([1]\otimes[1],\mathbb{C})^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}} \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\partial([1]\otimes[1]),\mathbb{C})^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$$

在 *2*-态射上是保守的。

(iii) 假设 $F\colon \mathbb{A}\to\mathbb{B}$ 是一个 ∞、$\mathbb{B}$ 类别之间的本质满函子。那么对于所有 $\mathbb{C}$，$\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B},\mathbb{C})^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}} \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A},\mathbb{C})^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$ 在 *2*-态射上保守。

证明。 函子在 2-态射上保守，当且仅当它与 $C_2 \to [1]$右正交。这等价于与 $[1]\otimes[1] \to [1]\times[1]$右正交，因为二者互为余基变换。由 [AGH25, 2.4.4]可知，对于任意 $\mathbb{C}$，$\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}\times\mathbb{C}$ 在 2-态射上保守，这又等价于交换方块

$$\begin{array}{ccc} [1]\otimes[1]\times\partial[1] & \longrightarrow & [1]^{\otimes 3} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [1]\times[1]\times\partial[1] & \longrightarrow & ([1]\times[1])\otimes[1] \end{array} \tag{4.1}$$

是一个推出。

为了证明 (i) 中的方块是一个推出，我们先考虑

$$\begin{array}{ccccc} ([1]\otimes[1])^{\amalg 4} & \longrightarrow & [1]^{\otimes 2}\otimes\partial([1]^{\otimes 2}) & \longrightarrow & [1]^{\otimes 4} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ ([1]\times[1])^{\amalg 4} & \longrightarrow & [1]^{\times 2}\otimes\partial([1]^{\otimes 2}) & \longrightarrow & [1]^{\times 2}\otimes[1]^{\otimes 2}, \end{array}$$

其中左侧方块由粘合 4 个 (4.1) 的副本得到，因此是一个推出。因此，要证明右侧方块是一个推出，只需证明外层复合方块是一个推出。接下来，我们改为将该方块分解为

$$\begin{array}{ccccc} ([1]\otimes[1])^{\amalg 4} & \longrightarrow & [1]^{\otimes 3}\times\partial[1] & \longrightarrow & [1]^{\otimes 4} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ ([1]\times[1])^{\amalg 4} & \longrightarrow & [1]^{\times 2}\otimes[1]\times\partial[1] & \longrightarrow & [1]^{\times 2}\otimes[1]^{\otimes 2}. \end{array}$$

这里，左侧方块是两个 (4.1) 的余积，而右侧方块是 (4.1) 与 $[1]$, 的带张量，因此两者都是推出。

(ii) 中的正交条件现在可直接由 (i) 中的方块是一个推出得出。为证明 (iii)，先回顾一下（例如参见 [LMGR+24，定理 5.3。7]）

本质满函子和全忠实函子在$\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}$上构成一个分解系统，并且一个函子是全忠实的，当且仅当它与 $\partial C_i \to C_i$ 对于 $i = 1, 2$ 而言右正交；参见 [AGH25，命题 2.5。10]。因此，本质满函子是包含这两个映射的最小饱和类。另一方面，使所需结论成立的映射类显然是饱和的，所以只需在这两种情形下证明结论。由 $\partial C_2 \to C_2$ 生成的饱和类与 $\partial[1]^{\otimes 2} \to [1]^{\otimes 2}$ 生成的相同，参见 [AGH25，2.5。13], 因此，此情形由 (ii) 得出；而 $i = 1$ 这一情形则是 [AGH25，2.4。4]的一部分。□

命题*4.1.5*的证明。我们证明松弛情形；oplax 情形的证明类似，也可以利用形如 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{B})^{\mathrm{oplax}} \simeq \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}^{\mathrm{op}}, \mathbb{B}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{lax},\,\mathrm{op}}$ 的等价。根据定义，函子 F 是通过对 $\mathbb{C}$ 中某些 1- 态射和 2- 态射求逆得到的。由于满足所需结论的函子类显然在余基变换下封闭，因此只需证明，对于由将 $\mathbb{C}$ 局部化为一个 (∞, i)-范畴所给出的函子 $\ell_i\colon \mathbb{C} \to \tau_{\le i}\mathbb{C}$ （其中 $i = 0, 1$），结论成立。条件 $\ell_i^*\colon \mathbb{F}\mathrm{un}(\tau_{\le i}\mathbb{C}, \mathbb{D})^{\mathrm{lax}} \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C}, \mathbb{D})^{\mathrm{lax}}$ 右正交于某个函子 $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$，等价于以下交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}(\mathbb{C}, \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}, \mathbb{D})^{\mathrm{oplax},\le i}) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(\mathbb{C}, \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}, \mathbb{D})^{\mathrm{oplax}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}(\mathbb{C}, \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{D})^{\mathrm{oplax},\le i}) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(\mathbb{C}, \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{D})^{\mathrm{oplax}}) \end{array}$$

是一个拉回，这对所有 $\mathbb{C}$ 都成立，当且仅当

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}, \mathbb{D})^{\mathrm{oplax},\le i} & \longrightarrow & \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}, \mathbb{D})^{\mathrm{oplax}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{D})^{\mathrm{oplax},\le i} & \longrightarrow & \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{D})^{\mathrm{oplax}} \end{array}$$

是 $(\infty, 2)$-范畴中 4.1.6 观察可知，这对 $i = 0, 1$ 两者都成立，当且仅当 $\varphi^*\colon \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}, \mathbb{D})^{\mathrm{oplax}} \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{D})^{\mathrm{oplax}}$ 在 1-态射和 2-态射上是保守的。

根据 [AGH25，2.5。8], 一个函子是局部全包含，当且仅当它与 $\partial[1] \to [0]$ 和 $\partial C_2 \to C_2$右正交。将前面的讨论应用于这些映射可知，要证明我们所需的结论，只需证明这些函子

$$\mathbb{D} \to \mathbb{D}^{\times 2}, \quad \mathbb{F}\mathrm{un}(C_2, \mathbb{D})^{\mathrm{oplax}} \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\partial C_2, \mathbb{D})^{\mathrm{oplax}}$$

在 1-态射和 2-态射上是保守的。对于第一个映射，这是因为这些包含 $\mathbb{D}^{\le i} \to \mathbb{D}$ 是单态射，因此我们有拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^{\le i} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}^{\le i, \times 2} & \longrightarrow & \mathbb{D}^{\times 2}. \end{array}$$

对于第二种情况，我们在观察 3.3.3 中看到，它在 1-态射上是保守的；而我们刚刚在命题 4.1.7 中证明了它在 2-态射上也是如此。□

观察 4.1.8。 命题 4.1.5 的证明表明，对于任意 $(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{C}$，函子

$$F^*\colon \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B},\mathbb{C})^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}} \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A},\mathbb{C})^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$$

对 1-态射和 2-态射是保守的，前提是 F 属于由 $\partial C_2 \to C_2$ 和 $\partial[1] \to [0]$生成的饱和类。根据 [LMGR+24，定理 5.3，7], 由第一个映射生成的饱和类包含那些满足以下条件的函子： F 对象满射，且还满足 $\mathbb{A}(a,a') \to \mathbb{B}(Fa,Fa')$ 对所有$a,a' \in \mathbb{A}$, 都是对象满射，因此所有这类映射都具有这种保守性。若能确定加入第二个生成元后得到的更大类，也就是左正交于局部满包含而非所有局部全忠实函子的映射类，将会很有意思。

命题 4.1.9。 交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-}\mathrm{lax}}(\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-}\mathrm{lax}}(\mathbb{C}^{\diamond})^{\flat[\epsilon]}) & \longrightarrow & \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-}\mathrm{lax}}(\mathbb{C}^{\diamond}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_1} \\ \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-}\mathrm{lax}}(\mathbb{C}^{\diamond}) & \xrightarrow[\mathrm{ev}_0]{} & \mathbb{C} \end{array}$$

是 $(\infty,2)$-范畴的一个拉回，从而给出一个等价

$$\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-}\mathrm{lax}}(\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-}\mathrm{lax}}(\mathbb{C}^{\diamond})^{\flat[\epsilon]}) \simeq \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}([2]^{\sharp},\mathbb{C}^{\diamond})^{\epsilon\text{-}\mathrm{lax}}$$

于 $(\infty,2)$-范畴。

证明。我们证明 $\epsilon = (0,1)$ 的情形。由于 $\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}(-\ \mathbb{C}^{\diamond})^{\mathrm{oplax}}$ 保持极限，我们可以将方块中的拉回识别为 $\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}([2]^{\sharp},\mathbb{C}^{\diamond})^{\mathrm{oplax}}$。另一方面，由观察 2.3.9 可知， $\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C}^{\diamond})^{\flat[(0,1)]})$ 是 $\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{F}\mathrm{un}([1]\otimes[1],\mathbb{C})^{\mathrm{oplax}}$ 的一个局部全子范畴，其中的

- ▶ 对象是可交换且其顶边可逆的 oplax 方块，我们可以将其识别为函子 $[2] \to \mathbb{C}$，态射同样可以识别为函子 $[2]\otimes[1] \to \mathbb{C}$。

h

因此，只需证明函子 $p^*\colon \mathbb{F}\mathrm{un}([2],\mathbb{C})^{\mathrm{oplax}} \to \mathbb{F}\mathrm{un}([1]\otimes[1],\mathbb{C})^{\mathrm{oplax}}$由与函子 $p\colon [1]\otimes[1] \to [2]$ 复合给出，该函子将 2-态射和顶边反转，是一个局部全子范畴包含；这可由命题 4.1.5 得出。 □

定理 *4.1.2* 的证明。 结合定理3.4.1与命题 4.1.9。 □

我们还有该定理的以下装饰变体：

推论 4.1.10。 对于任意带装饰的$(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{C}^{\diamond}$和 $\epsilon = (i,j)$，函子

$$\mathrm{ev}_{1-i}\colon \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-}\mathrm{lax}}(\mathbb{C}^{\diamond})^{\diamond\text{-}\mathrm{fib}} \to \mathbb{C}^{\diamond}$$

是一个带装饰的部分 ϵ-纤维化。

证明。 展开定义可知

$$\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-}\mathrm{lax}}(\mathbb{C}^{\diamond})^{\diamond\text{-}\mathrm{fib}}_{(2)} \simeq \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-}\mathrm{lax}}(\mathbb{C}^{\diamond}_{(2)}),$$

其中我们将 $\mathbb{C}^{\triangleright}_{(2)}$ 视为一个带装饰的 $(\infty, 2)$-范畴，其装饰继承自 $\mathbb{C}^{\triangleright}$，并且

$$\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{C}^{\triangleright})^{\triangleright\text{-fib},\leq 1}_{(1)} \simeq \mathrm{Ar}(\mathbb{C}^{\triangleright,\leq 1}_{(1)}).$$

因此，受限函子

$$\mathrm{ev}_{1-i}\colon \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{C}^{\triangleright})^{\triangleright\text{-fib}}_{(2)} \to \mathbb{C}^{\triangleright}_{(2)}$$

也是一个部分 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化，由定理 4.1.2得出，其 i-笛卡尔态射和j-笛卡尔 2-态射与 $\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{C}^{\triangleright})$中的一致，而

$$\mathrm{ev}_{1-i}\colon \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{C}^{\triangleright})^{\triangleright\text{-fib},\leq 1}_{(1)} \to \mathbb{C}^{\triangleright,\leq 1}_{(1)}$$

是一个 i-纤维化，其值于 ∞-范畴，且其 i-笛卡尔态射与$\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{C}^{\triangleright})$ 中的一致。□

4.2. 自由部分纤维化。对于一个 ∞-范畴间的函子 $f\colon \mathrm{C} \to \mathrm{B}$，我们可以将其上的自由余笛卡尔纤维化识别为函子 $\mathrm{C} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{Ar(B)} \to \mathrm{B}$，它由在 1 处求值得到；其中拉回是利用 f 和在 0 处求值构造的。该结论最初由 [GHN17], 证明，之后[AMGR17、Sha21]给出了改进的证明。本节将证明这一结论对（∞，2）-范畴的类似版本，并更一般地如下描述自由部分纤维化：

定理 4.2.1. 设 $\mathbb{B}^{\triangleright}$ 是一个带装饰的 $(\infty,2)$-范畴。遗忘函子

$$U^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\triangleright}}\colon \mathrm{PFib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}^{\triangleright}} \to \mathrm{Cat}_{(\infty,2)/\mathbb{B}}$$

有一个左伴随 $\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\triangleright}}$，对于 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$，其定义如下：

$$\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\triangleright}}(p) \;:=\; \mathbb{E}^{\flat\flat} \times_{\mathbb{B}^{\flat\flat}} \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{B}^{\triangleright})^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]} \to \mathbb{B}^{\triangleright},$$

其中，拉回沿 ev_i 进行，而到 $\mathbb{B}^{\triangleright}$ 的映射由 ev_{1-i} 给出。

注 4.2.2. 定理中 $\mathbb{B}$ 是完全带装饰的且 $\boldsymbol{\epsilon} = (1,0)$ 这一情形此前已由阿贝利安和 Stern 证明，见 [AS23b，定理 3。17]。

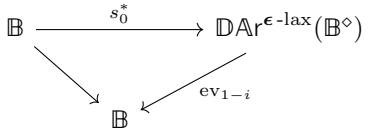
构造 4.2.3. 更准确地说，我们将函子 $\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\triangleright}}$ 定义为以下复合

$$\mathrm{Cat}_{(\infty,2)/\mathbb{B}} \simeq \mathrm{PFib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}^{\flat\flat}} \xrightarrow{\mathrm{ev}_i^*} \mathrm{PFib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\,\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{B}^{\triangleright})^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]}} \xrightarrow{\mathrm{ev}_{1-i,!}} \mathrm{PFib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}^{\triangleright}}$$

这里用到了：偏 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化沿任意函子（例如 ev_i）进行基变换后仍封闭，且与偏 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化（例如ev_{1-i} ）复合后仍封闭（定理4.1.2）。

伴随的单位很容易定义：

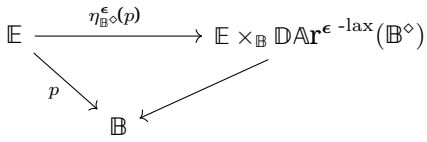
构造 4.2.4. 退化映射 $[1] \to [0]$ 诱导一个交换三角形



的（∞,2）-范畴。通过将其拉回，我们得到一个自然变换

$$\eta^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\triangleright}}\colon \mathrm{id} \to U^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\triangleright}}\, \mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\triangleright}}.$$

也就是说，对于 $p\colon \mathbb{E}\to\mathbb{B}$，映射 $\eta^{\boldsymbol{\epsilon}}(p)$ 是交换三角形



水平映射由与第二个因子中的 s_0 复合给出。

当 p 是一个在 $\boldsymbol{\epsilon}$上的部分 $\mathbb{B}^\diamond$-纤维化时，我们可以利用定理 3.4.1给出对 $\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}(p)$的另一种刻画；这使我们能够定义伴随的余单位，并证明一个三角恒等式：

命题 4.2.5。设 $p\colon \mathbb{E}\to\mathbb{B}$ 是一个在 $\mathbb{B}^\diamond$上的部分 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化。

(i) 定理*3.4.1* 延伸为一个自然等价

$$\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}(p)\simeq\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{E}^\natural)^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]}\xrightarrow{p\circ\mathrm{ev}_{1-i}}\mathbb{B}^\diamond$$

带装饰的$(\infty,2)$-范畴之间。

(ii) 在此等价下，映射 $\eta^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}\colon p\to U^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}\,\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}(p)$ 对应于退化映射

$$s_0^*\colon\mathbb{E}\to\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{E}^\natural).$$

(iii) ev_{1-i} 给出带装饰的$(\infty,2)$-范畴之间的一个自然态射

$$\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{E}^\natural)^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]}\to\mathbb{E}^\natural$$

在 $\mathbb{B}^\diamond$ 上，因此得到一个自然变换

$$\varepsilon^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}\colon\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}U^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}\to\mathrm{id}\,.$$

(iv) 复合

$$\mathbb{E}\xrightarrow{\eta^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}}\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}(p)\xrightarrow{\varepsilon^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}}\mathbb{E}$$

是恒等，即复合自然变换

$$U^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}\xrightarrow{\eta^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}U^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}}U^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}\,\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}U^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}\xrightarrow{U^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}\varepsilon^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}}U^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}$$

是 $U^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}$ 的恒等。

证明。为简化记号，我们证明 $\boldsymbol{\epsilon}=(0,1)$ 的情形。于是，命题 3.5.4给出了带装饰的 $(\infty,2)$-范畴的一个等价

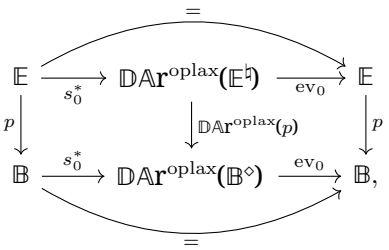
$$\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{E}^\natural)^{\diamond\text{-fib}}\xrightarrow{\sim}\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{B}^\diamond)^{\diamond\text{-fib}}\times_{\mathbb{B}^\diamond}\mathbb{E}^\natural.$$

沿 $\mathbb{E}^{\flat\flat}\to\mathbb{E}^\natural$ 拉回后，即得到所需的等价

$$\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{E}^\natural)^{\flat[(0,1)]}\xrightarrow{\sim}\mathbb{F}\mathrm{ree}^{(0,1)}_{\mathbb{B}^\diamond}(p)$$

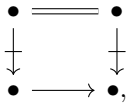
在 (i) 中。

(ii) 部分可直接由交换图得出



其中右侧的方块是一个拉回。

对于 (iii)，我们注意到，对于 $\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{E}^{\natural})^{\flat[(0,1)]}$ 中一个形如以下形式的带装饰的 1-态射



余笛卡尔态射的消去性质意味着，底部的水平态射也必定是余笛卡尔态射，因此 ev_1 保持带装饰的 1-态射。笛卡尔 2-态射的消去性质同样意味着 ev_1 也保持带装饰的 2-态射，由此完成证明。

现在，(iv) 可由以下事实推出：在 (ii) 的识别下，复合 $\mathbb{E} \to \mathbb{F}\mathsf{ree}_{\mathbb{B}^{\diamond}}^{(0,1)}(p) \to \mathbb{E}$ 对应于

$$\mathbb{E} \xrightarrow{s_0^*} \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{E}^{\natural}) \xrightarrow{\mathrm{ev}_1} \mathbb{E},$$

显然，这就是恒等态射。 □

还需验证另一个三角恒等式，为此我们需要更明确地确定复合 $\mathbb{F}\mathsf{ree}_{\mathbb{B}^{\diamond}}^{\boldsymbol{\epsilon}} U_{\mathbb{B}^{\diamond}}^{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbb{F}\mathsf{ree}_{\mathbb{B}^{\diamond}}^{\boldsymbol{\epsilon}}$：

观察 4.2.6. 设 $\boldsymbol{\epsilon} = (i, j)$ 并令

$$i' = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ 2, & i = 1. \end{cases}$$

我们定义 $\mathbb{DF}\mathsf{un}([2]^{\sharp}, \mathbb{B}^{\diamond})^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-余松弛}^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]}}$，并规定其装饰如下：

▶ 若一个 1-态射是强自然变换，且其在 $\mathsf{ev}_{i'}$ 和 ev_1 下的像均可逆、在 $\mathsf{ev}_{2-i'}$ 下的像带装饰，则称其为带装饰的；若一个 2-态射在 $\mathsf{ev}_{i'}$ 和 ev_1 下的像均可逆、在 $\mathsf{ev}_{2-i'}$ 下的像带装饰，则称其为带装饰的。◀

对于 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$，将 $\mathbb{F}\mathsf{ree}_{\mathbb{B}^{\diamond}}^{\boldsymbol{\epsilon}}(\text{–})$ 的定义迭代地视为拉回，便得到一个等价

$$\begin{aligned} \mathbb{F}\mathsf{ree}_{\mathbb{B}^{\diamond}}^{\boldsymbol{\epsilon}} U_{\mathbb{B}^{\diamond}}^{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbb{F}\mathsf{ree}_{\mathbb{B}^{\diamond}}^{\boldsymbol{\epsilon}}(p) &\simeq (\mathbb{E} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{B}^{\diamond}))^{\flat\flat} \times_{\mathbb{B}^{\flat\flat}} \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]} \\ &\simeq \mathbb{E}^{\flat\flat} \times_{\mathbb{B}^{\flat\flat}} \mathbb{DF}\mathsf{un}([2]^{\sharp}, \mathbb{B}^{\diamond})^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax},\flat[\boldsymbol{\epsilon}]}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中拉回经由 $\mathrm{ev}_{i'}$ 取得，且到 $\mathbb{B}$ 的映射由$\mathrm{ev}_{2-i'}$给出。另一方面，由于 $\mathbb{F}\mathsf{ree}_{\mathbb{B}^{\diamond}}^{\boldsymbol{\epsilon}}(p)$ 是一个 $\boldsymbol{\epsilon}$- 纤维化，命题 4.2.5 表明我们有一个等价

$$\mathbb{F}\mathsf{ree}_{\mathbb{B}^{\diamond}}^{\boldsymbol{\epsilon}} U_{\mathbb{B}^{\diamond}}^{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbb{F}\mathsf{ree}_{\mathbb{B}^{\diamond}}^{\boldsymbol{\epsilon}}(p) \simeq \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{F}\mathsf{ree}_{\mathbb{B}^{\diamond}}^{\boldsymbol{\epsilon}}(p))^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]}.$$

展开 $\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}}(p)$ 的定义，可见右端与该拉回等价

$$\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{E}^{\flat\flat})^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]} \times_{\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{B}^{\flat\flat})^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]}} \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]})^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]},$$

我们可以将其识别为

$$\mathbb{E}^{\flat\flat} \times_{\mathbb{B}^{\flat\flat}} \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}([2]^{\sharp}, \mathbb{B}^{\diamond})^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax},\flat[\boldsymbol{\epsilon}]}$$

利用命题4.1.9。我们断言，由此得到的等价

$$\begin{aligned} \mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}} U^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}} \mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}}(p) &\simeq \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}}(p))^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]} \\ &\simeq \mathbb{E}^{\flat\flat} \times_{\mathbb{B}^{\flat\flat}} \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}([2]^{\sharp}, \mathbb{B}^{\diamond})^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax},\flat[\boldsymbol{\epsilon}]}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

与（4.2）相同。事实上，第二个等价来自如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-松}}(\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}}(p))^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]} & \longrightarrow & \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-松弛}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]})^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]} & \longrightarrow & \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-松弛}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}}(p)^{\flat\flat} & \longrightarrow & \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-松弛}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\flat\flat} & \longrightarrow & \mathbb{B}^{\flat\flat} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbb{E}^{\flat\flat} & \longrightarrow & \mathbb{B}^{\flat\flat}, & & \end{array}$$

其中，顶行中的外侧方块由命题 4.2.5给出一个拉回，右上方块由命题 4.1.9给出，而底部方块则由 $\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}}(p)$的定义给出。我们的等价式（4.3）由左列中的复合方块是一个拉回而得出。但这个复合方块也可以分解为

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}}(p))^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]} & \longrightarrow & \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]})^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{E}^{\flat\flat})^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]} & \longrightarrow & \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{B}^{\flat\flat})^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]} \\ \downarrow{\scriptstyle\sim} & & \downarrow{\scriptstyle\sim} \\ \mathbb{E}^{\flat\flat} & \longrightarrow & \mathbb{B}^{\flat\flat}, \end{array}$$

其中，下面两个竖直映射都是等价，而这正是给出第一个等价式（4.2）的方块。

命题 4.2.7。 在等价式（*4.2*）下，我们有：

(i) 映射

$$\varepsilon^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}} \mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}} \colon \mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}} U^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}} \mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}}(p) \to \mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}}(p)$$

对应于复合函子的拉回

$$d_1^* \colon \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}([2]^{\sharp}, \mathbb{B}^{\diamond})^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax},\flat[\boldsymbol{\epsilon}]} \to \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\flat[\boldsymbol{\epsilon}]},$$

(ii) 和映射

$$\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}} \eta^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}} \colon \mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}}(p) \to \mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}} U^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}} \mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}}(p)$$

corresponds to the pullback of the degeneracy functor

$$s_i^* \colon \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{B}^{\diamond}) \to \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}([2]^{\sharp}, \mathbb{B}^{\diamond})^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}.$$

(iii) 复合

$$\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}(p) \xrightarrow{\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}\eta^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}} \mathbb{F}\mathrm{ree}^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond} U^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond} \mathbb{F}\mathrm{ree}^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}(p) \xrightarrow{\varepsilon^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}} \mathbb{F}\mathrm{ree}^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}(p)$$

是恒等映射。

证明。 设 $\epsilon = (0,1)$。展开等价式（4.3），我们看到

$$\mathrm{ev}_1 \colon \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\epsilon\text{-lax}}(\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}(p))^{\flat[\epsilon]} \to \mathbb{F}\mathrm{ree}^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}(p)$$

由 $\mathbb{E}^{\flat\flat}$ 和 $\mathbb{B}^{\flat\flat}$ 上的恒等映射给出，并且由 d_1 在 $\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}([2]^\sharp, \mathbb{B}^\diamond)$上给出，正如 (i) 所要求的。另一方面，展开（4.2）可得 (ii)。将二者结合起来，(iii) 便显然成立。 □

定理 *4.2.1* 的证明。 由命题 4.2.7 和命题 4.2.5可知三角恒等式成立，因此自然变换 $\eta^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}$ 和 $\varepsilon^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}$ 是伴随 $\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond} \dashv U^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}$ 的单位和余单位。 □

观察 4.2.8。 函子 $U^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond} : \mathrm{PFib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}^\diamond} \to \mathrm{Cat}_{(\infty,2)/\mathbb{B}}$ 适合于一个交换三角形

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Cat}_\infty & \\ {\scriptstyle (-)^{\flat\flat}\times\mathbb{B}^\diamond}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle (-)\times\mathbb{B}} \\ \mathrm{PFib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}^\diamond} & \xrightarrow{U^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}} & \mathrm{Cat}_{(\infty,2)/\mathbb{B}}\,. \end{array}$$

此外，对于任意 $(\infty, 2)$-范畴 $\mathbb{K}$，典范映射 $\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}(\mathbb{K}\times p) \to \mathbb{K}^{\flat\flat} \times \mathbb{F}\mathrm{ree}^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}(p)$ 是一个等价。因此，由推论 2.1.6 可知，伴随$\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond} \dashv U^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}$可提升为 $(\infty, 2)$-范畴之间的伴随。事实上，在上面的图表中用 Cat_∞ 替换 $\mathrm{Cat}_{(\infty,2)}$，同样的论证表明，我们甚至可以得到 $(\infty, 3)$-范畴之间的伴随——尤其是，对于任意函子 $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ 和任意部分 ϵ-纤维化 $q\colon \mathbb{E}^\diamond \to \mathbb{B}^\diamond$，该伴随会诱导 $(\infty, 2)$-范畴之间的等价

$$\mathbb{F}\mathrm{un}_{/\mathbb{B}}(\mathbb{C}, \mathbb{E}) \simeq \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}_{/\mathbb{B}^\diamond}(\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\epsilon}_{\mathbb{B}^\diamond}(p), \mathbb{E}^\diamond).$$

作为对自由纤维化描述的首次应用，我们得到如下关于可表 $(1,0)$-纤维化的刻画：

命题 4.2.9. 设 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 是一个 *1*-纤维化的 $(1,\ 0)$-纤维化。则对于 $\mathbb{B}$ 中位于 $b = p(e)$ 上方的对象 $e \in \mathbb{E}$，以下条件等价：

(1) 存在一个等价

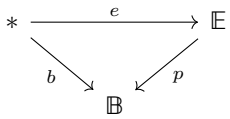
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}_{/b} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{E} \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbb{B} & \end{array}$$

将id_b 映到 e。

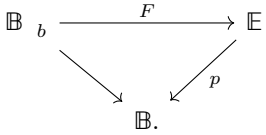
(2) 态射 $\{e\}^{\flat\flat} \to \mathbb{E}^\natural$ 是关于 $\mathbb{B}^{\sharp\sharp}$ 的 $(1,0)$-等价。*(3)* 态射 $\{e\}^{\flat\flat} \to \mathbb{E}^\natural$ 是关于 $\mathbb{E}^{\sharp\sharp}$ 的 $(1,0)$-等价。*(4)* 对于每个对象 $x \in \mathbb{E}$，都存在一个笛卡尔态射 $x \to e$，并且每个笛卡尔态射 $x \to e$ 都是 $\mathbb{E}(x, e)$ 的始对象。

若这些条件成立，我们就称 e 将 p 表现为一个可表的 $(0,1)$-纤维化，该纤维化由 $b \in \mathbb{B}$ 表示。

证明。由定理4.2.1，该交换三角形

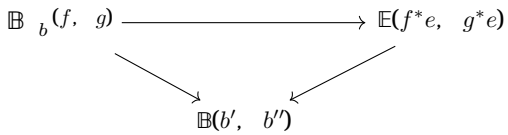


唯一地延拓为从自由纤维化出发的 (1,0)-纤维化的一个态射，该自由纤维化位于 $* \xrightarrow{b} \mathbb{B}$，即到

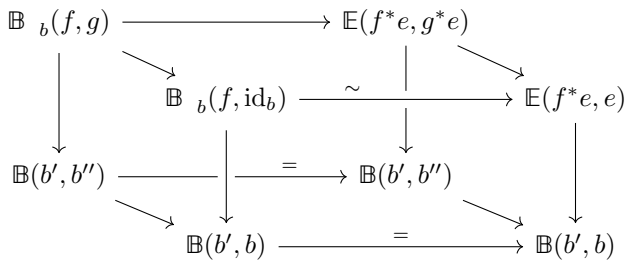


若第一个条件成立，则所讨论的等价因此必定就是这个函子F，而 F为等价当且仅当 $\{e\}^{\flat\flat} \to \mathbb{E}^{\natural}$ 是一个$(1,0)$-等价，位于 $\mathbb{B}^{\sharp\sharp}$之上，这是因为 $\mathbb{B}_{/b} \to \mathbb{B}$ 是自由$(1,0)$-纤维化，定义于 $\{e\}$。这表明前两个条件等价，而第二与第三个条件等价，因为观察3.6.7首先蕴含 (2) 等价于具有一个$(1,0)$-等价，位于 $\mathbb{E}^{\natural}$之上，其次蕴含这些等价可在 $\mathbb{E}^{\sharp\sharp}$ 上被检测，因为该纤维化通过它分解。

为得到最后一个条件，注意函子 F将对象 $f\colon b' \to b$映到 f 上、靶为 e的笛卡尔态射的源 f^*e，因此 F 本质满，当且仅当 $\mathbb{E}$ 的每个对象都是一个指向 e 的笛卡尔态射的源。若此条件成立，则 F 是等价，当且仅当它全忠实；这意味着，对于 $\mathbb{B}$ 中的 $f\colon b' \to b$ 和 $g\colon b'' \to b$，交换三角形中的水平态射（其中两个向下的映射都是左纤维化）



是一个等价。我们首先考虑 $g = \mathrm{id}_b$ 的情形。此时可以利用命题 3.3.1 将 $\mathbb{B}_{/b}(f, \mathrm{id}_b)$ 识别为 $\mathbb{B}(b', b)_{f/}$，因此，当且仅当始对象 f 被映射到 $\mathbb{E}(f^*e, e)$ 中的一个始对象时，我们才能得到一个等价；这里 f^- 被映射为笛卡尔态射 $f\colon f^*e \to e$，所以这恰好对应于 f 是一个始对象的 $^-$ 条件。还需证明，对于一般靶 g，这也给出一个等价。为此，我们注意到 g 给出了一个笛卡尔态射$g \to \mathrm{id}_b$，与它及其在 $\mathbb{E}$ 中的像复合，便得到一个交换立方体



这里，底面、左侧面和右侧面都是拉回，因此顶面也是拉回，从而顶端的水平映射确实是一个等价，正如所需。□

观察 4.2.10。 在直化下，若 $F\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$ 是对应于 1-纤维化的 $(1,0)$-纤维化 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$，则命题 4.2.9 中关于 $e \in \mathbb{E}$ 在 $b \in \mathbb{B}$ 之上的条件等价于存在一个自然等价

$$\mathbb{B}(-, b) \simeq F$$

在该等价下，id_b 对应于 $e \in F(b) \simeq \mathbb{E}_b$。

注记 4.2.11。 命题 4.2.9 中的条件 (2) 是 [GHL25，§4 中研究的可表性刻画。3]，而条件 (3) 则准确地表明，带标记的 $(\infty,$-范畴 $\{e\}^\flat \to (\mathbb{E}, C)$ 按照命题 $(1,0)$-余共终的含义，是 §5.5中所述的 5.5.4命题下的（1，0）-余共终函子。

4.3. **自由装饰偏纤维化**。 在本小节中，我们考虑定理 4.2.1 的一个变体，它将描述自由的 带装饰的 部分纤维化。我们还将证明，由此得到的伴随中的单位映射具有这样的性质：它们的任意拉回都是 $\boldsymbol{\epsilon}$-等价；这一点将是我们下面讨论余自由纤维化的重要依据。

命题 4.3.1。 设 $\mathbb{B}^\diamond$ 是一个带装饰的$(\infty,2)$-范畴。遗忘函子

$$U^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{d},\mathbb{B}^\diamond}\colon \mathbb{DPF}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}^\diamond} \to \mathbb{DC}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^\diamond}$$

有一个左伴随 $\mathbb{DF}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}$，对 $p\colon \mathbb{C}^\diamond \to \mathbb{B}^\diamond$ 的定义如下：

$$\mathbb{DF}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}(p) := \mathbb{C}^\diamond \times_{\mathbb{B}^\diamond} \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{B}^\diamond)^{\diamond\text{-fib}} \to \mathbb{B}^\diamond,$$

其中，拉回沿着 ev_i 进行，而到 $\mathbb{B}^\diamond$ 的映射由 ev_{1-i} 给出。

观察 4.3.2。 采用上述记号，我们可以将命题 3.5.4解释为给出一个自然等价

$$\mathbb{DF}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond} U^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{d},\mathbb{B}^\diamond}(p) \simeq \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{E}^\natural)^{\diamond\text{-fib}}$$

对于任意带装饰的部分 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化 $p\colon \mathbb{E}^\diamond \to \mathbb{B}^\diamond$。

命题 *4.3.1* 的证明。我们将证明，在底层 ∞-范畴上得到一个伴随；根据观察 $(\infty,$ $2)$-范畴，这可提升为 4.2.8 中的情形。对于 $p\colon \mathbb{E}^\diamond \to \mathbb{B}^\diamond$，我们可以将 $\mathbb{DF}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}(p)$ 视为带装饰的部分纤维化的拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{DF}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}(p) & \longrightarrow & \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{B}^\diamond)^{\diamond\text{-fib}} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{ev}_i, \mathrm{ev}_{1-i})} \\ \mathbb{E}^\diamond \times \mathbb{B}^\diamond & \xrightarrow{p \times \mathrm{id}} & \mathbb{B}^\diamond \times \mathbb{B}^\diamond \end{array} \tag{4.4}$$

在 $\boldsymbol{\epsilon}$ 上的纤维化 $\mathbb{B}^\diamond$ （使用推论 4.1.10）。因此， $\mathbb{DF}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}$确实定义了一个函子 $\mathrm{DCat}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^\diamond} \to \mathrm{DPFib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}^\diamond}$。

要证明这给出了一个左伴随，只需检查上一节中的单位和余单位也给出了自然变换 $\eta\colon \mathrm{id} \to U^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{d},\mathbb{B}^\diamond} \mathbb{DF}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond}$和 $\epsilon\colon \mathbb{DF}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^\diamond} U^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{d},\mathbb{B}^\diamond} \to \mathrm{id}$；这相当于检查它们是否与

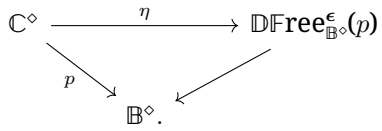
我们现在考虑的装饰相容；三角恒等式随后将自动成立。

对于单位，这可由以下观察得出：退化映射给出一个装饰函子 $\mathbb{B}^{\diamond} \to \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\diamond\text{-纤维化}}$。另一方面，命题 3.5.4 表明，对于 $p\colon \mathbb{E}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\diamond}$ 一个带装饰的部分 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化，其在 p 处的余单位可识别为装饰函子

$$\mathrm{ev}_{1-i}\colon \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{E}^{\natural})^{\diamond\text{-fib}} \to \mathbb{E}^{\diamond},$$

因此它是带装饰的部分 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化之间的态射；证明至此完成。□

观察 4.3.3。 我们可以将命题 4.3.1 中伴随的单位映射在 $p\colon \mathbb{C}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\diamond}$ 处视为一个映射



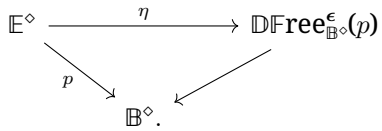
在 $\mathbf{DCat}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^{\diamond}}$ 中。设 $q\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 是相对于 $\mathbb{B}^{\diamond}$的部分 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化；则$q\colon \mathbb{E}^{\natural} \to \mathbb{B}^{\diamond}$ 是带装饰的部分纤维化，并且任何装饰函子$\mathbb{DF}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}}(p) \to q$ 在 $\mathbb{B}^{\diamond}$ 之上都是带装饰的部分 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化之间的态射（即它会自动保留（余）笛卡尔1-态射与2-态射），因此与 η 复合可诱导一个等价

$$\mathrm{Map}_{/\mathbb{B}^{\diamond}}(\mathbb{DF}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}}(p), \mathbb{E}^{\natural}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Map}_{/\mathbb{B}^{\diamond}}(\mathbb{C}^{\diamond}, \mathbb{E}^{\natural}).$$

换言之，η 在带有这些装饰的 $\mathbb{B}^{\diamond}$ 上是一个 $\boldsymbol{\epsilon}$-等价。

再多做一点工作，我们就能找到 η 的一个“同伦逆”，从而将这一观察提升为以下陈述：

命题 4.3.4。 设 $p\colon \mathbb{E}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\diamond}$ 是一个带装饰的部分 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化，并考虑命题 *4.3.1* 中在 p 处的伴随的单位映射，作为映射



对于任意带装饰的函子 $f\colon \mathbb{A}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\diamond}$，拉回 $f^{*}\eta\colon f^{*}\mathbb{E}^{\diamond} \to f^{*}\,\mathbb{DF}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}}(p)$ 在 $\mathbb{A}^{\diamond}$ 上是一个 $\boldsymbol{\epsilon}$-等价。

证明中我们使用了与自由装饰纤维化相关联的一个典范(反)松弛变换。为简单起见，我们在 $\boldsymbol{\epsilon} = (0,1)$ 的情形下将其明确写出：

构造 4.3.5。 考虑带装饰的函子

$$\pi_{(0,1)}\colon [1]^{\sharp} \otimes [1]^{\flat} \to [1]^{\sharp} \times [1]^{\flat} \to [1]^{\sharp},$$

它将 $(0,0)$ 映射到 0，并将其余对象映射到 1。

这对任意带装饰的 $(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{C}^{\diamond}$ 诱导出一个 $(\infty,2)$-范畴的函子

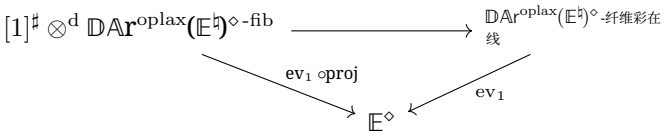
$$\pi^{*}_{(0,1)}\colon \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C}^{\diamond}) \to \mathbb{DF}\mathrm{un}([1]^{\sharp} \otimes [1]^{\flat}, \mathbb{C}^{\diamond})^{\mathrm{oplax}} \simeq \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C}^{\diamond})),$$

它与一个 lax 变换伴随

$$[1] \otimes \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C}^{\diamond}) \to \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C}^{\diamond});$$

展开定义后，我们看到这个变换从恒等变换指向$s_0^* \,\mathrm{ev}_1$。

引理 4.3.6. 假设 $p\colon \mathbb{E}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\diamond}$ 是一个带装饰的部分$(0,\ 1)$-纤维化。那么上述构造给出一个带装饰的函子



因此，一个松弛自然变换

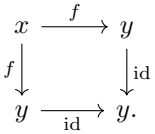
$$[1]^{\sharp} \otimes^{\mathrm{d}} U^{\epsilon}_{\mathrm{d},\mathbb{B}^{\diamond}}\, \mathbb{DF}\mathrm{ree}^{\epsilon}_{\mathbb{B}^{\diamond}}\, U^{\epsilon}_{\mathrm{d},\mathbb{B}^{\diamond}}(p) \to U^{\epsilon}_{\mathrm{d},\mathbb{B}^{\diamond}}\, \mathbb{DF}\mathrm{ree}^{\epsilon}_{\mathbb{B}^{\diamond}}\, U^{\epsilon}_{\mathrm{d},\mathbb{B}^{\diamond}}(p)$$

从 id 到 $(\eta^{\epsilon}_{\mathbb{B}^{\diamond}} U^{\epsilon}_{\mathrm{d},\ \mathbb{B}^{\diamond}}) \circ (U^{\epsilon}{}_{\mathrm{d}\ \mathbb{B}^{\diamond}} \varepsilon^{\epsilon}_{\mathbb{B}^{\diamond}})$ 通过命题 *3.5.4*。

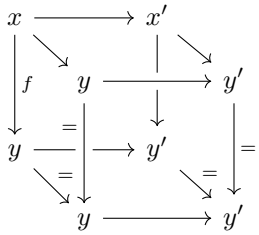
证明。 显然，源函子和目标函子 id 与 $s_0^* \,\mathrm{ev}_1\colon\ \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{E}^{\natural})^{\diamond}\text{-fib} \to \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{E}^{\natural})^{\diamond}\text{-fib}$ 都是带装饰的。因此，我们需要验证

▶ 对于每个对象 $f\colon\ x \to y$ of $\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{E}^{\natural})$（其中 f 是一个余笛卡尔态射），所诱导的映射 $f \to s_0^* \,\mathrm{ev}_1(f) = \mathrm{id}_y$ 是带装饰的；▶ 对于每个态射 $\alpha\colon\ f \to g$ in $\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{E}^{\natural})$，相应自然性方块中的 2-态射是带装饰的。

展开定义，我们可以将第一点中的态射识别为如下方块



该方块可交换，并且 f 和 id_y 在 $\mathbb{E}^{\diamond}$ 中都是带装饰的，因此它确实是带装饰的。对于第二个点，自然性方块展开为立方体



其中我们未展示后面和顶部的面包含 2-态射 α；另外四个面可交换。特别地，顶部和底部的面在 $\mathbb{E}^{\diamond}$ 中都包含一个装饰 2-态射，因此作为 $\mathbb{DA}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{E}^{\natural})$ 中的 oplax 方块，它包含一个装饰 2-态射，正如所要求的那样。□

命题的证明*4.3.4*。 我们应用引理 3.6.11 ，使用伴随的余单位以及引理 4.3.6 中的松弛变换（以及针对其他变差的相应变体）。 □

注记 4.3.7。设 $p\colon \mathrm{E} \to \mathrm{B}$ 是 ∞-范畴的余笛卡尔纤维化。那么，我们上面的定义给出了函子 $\eta\colon \mathrm{E} \to \mathrm{E} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{Ar}(\mathrm{B})$ 以及 $\epsilon\colon \mathrm{E} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{Ar}(\mathrm{B}) \to \mathrm{E}$，使得 $\epsilon\eta \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$。事实上，这些数据是一个伴随 $\epsilon \dashv \eta$ 的一部分，由此可以将 B 上的余笛卡尔纤维化刻画为满足以下条件的函子 p： η 在 B 上有一个左伴随（参见 [RV22，定理 5.2.8]）。我们可以将构造 4.3.5 看作把这个伴随的单位的定义推广到 (∞, 2)-范畴的语境中。不过请注意，由于它只是一个（反）松弛变换，它实际上并不能展示出一个 (∞, 2)-范畴之间的伴随。若能通过某种“松弛伴随”的概念，将通过伴随刻画纤维化推广到 (∞, 2)-范畴，将会很有意思，但我们在此不作进一步讨论。

4.4. **带装饰的 (∞，2)-范畴上的自由纤维化**。本小节将结合命题 4.3.1 与定理 3.2.8 给出的带装饰纤维化的直化等价，来描述从基底上的 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化到带装饰的 (∞，2)-范畴的遗忘函子的左伴随。随后，我们将其特化，以得到带标记的 (∞，2)-范畴上的自由 1-纤维化；这将在我们下文研究余极限与 Kan 延拓时发挥重要作用。注意，稍后我们还将能够把相应的纤维化描述为 §4.7 中自由装饰纤维化的某些局部化。

我们首先确定自由装饰 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化的直化，这需要一些记号：

记号 4.4.1. 对于 $b \in \mathbb{B}$，我们引入以下记号，表示由 $\mathbb{DA}\mathbf{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\diamond\text{-fib}}$ 诱导的带装饰的（逆）松弛切片：

- $\mathbb{B}^{\diamond}_{b}$ 是经由 ev_0 的 $\{b\} \times_{\mathbb{B}^{\diamond}} \mathbb{DA}\mathbf{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\diamond\text{-fib}}$；这是 $\mathbb{DF}\mathbf{ree}^{(0,1)}_{\mathbb{B}^{\diamond}}(\{b\})$。
- ${\mathbb{B}^{\diamond}}_{b}$ 是经由 ev_1 的 $\{b\} \times_{\mathbb{B}^{\diamond}} \mathbb{DA}\mathbf{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\diamond\text{-fib}}$；这是 $\mathbb{DF}\mathbf{ree}^{(1,0)}_{\mathbb{B}^{\diamond}}(\{b\})$。
- $\mathbb{B}^{\diamond}_{b}$ 是经由 ev_0 的 $\{b\} \times_{\mathbb{B}^{\diamond}} \mathbb{DA}\mathbf{r}^{\mathrm{lax}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\diamond\text{-fib}}$；这是 $\mathbb{DF}\mathbf{ree}^{(0,0)}_{\mathbb{B}^{\diamond}}(\{b\})$。
- ${\mathbb{B}^{\diamond}}_{b}$ 是经由 ev_1 的 $\{b\} \times_{\mathbb{B}^{\diamond}} \mathbb{DA}\mathbf{r}^{\mathrm{lax}}(\mathbb{B}^{\diamond})^{\diamond\text{-fib}}$；这是 $\mathbb{DF}\mathbf{ree}^{(1,1)}_{\mathbb{B}^{\diamond}}(\{b\})$。

给定函子 $p\colon \mathbb{C}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\diamond}$ 和 $b \in \mathbb{B}$，我们将 $\mathbb{C}^{\diamond}_{b}$ 的拉回记为 $\mathbb{C}^{\diamond} \times_{\mathbb{B}^{\diamond}} \mathbb{B}^{\diamond}_{b}$，它使用由 ev_1, 诱导的函子到 $\mathbb{B}^{\diamond}$；其他变差情形也类似。于是，我们可以将自由装饰纤维化 $\mathbb{DF}\mathbf{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}}(p)$ 在 b 处的纤维识别为 $\mathbb{C}^{\diamond} \times_{\mathbb{B}^{\diamond}} \mathbb{DF}\mathbf{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\diamond}}(\{b\})$，即

- $\mathbb{DF}\mathbf{ree}^{(1,0)}(p)_b \simeq \mathbb{C}^{\diamond}_{b}$，
- $\mathbb{DF}\mathbf{ree}^{(0,1)}(p)_b \simeq {\mathbb{C}^{\diamond}}_{b}$，
- $\mathbb{DF}\mathbf{ree}^{(1,1)}(p)_b \simeq \mathbb{C}^{\diamond}_{b}$，
- $\mathbb{DF}\mathbf{ree}^{(0,0)}(p)_b \simeq {\mathbb{C}^{\diamond}}_{b}$.

命题 4.4.2. 在直化等价下

$$\mathsf{Fun}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-op}}, \mathbb{DC}\mathrm{at}_{(\infty,2)}) \simeq \mathsf{DFib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}^{\sharp\sharp}},$$

$p\colon \mathbb{C}^{\triangleright} \to \mathbb{B}^{\sharp\sharp}$ 的带装饰的自由纤维化 $\mathbb{DF}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}(p)$ 对应于该函子

$$b \mapsto \mathbb{C}^{\triangleright} \times_{\mathbb{B}^{\sharp\sharp}} \mathbb{DF}\mathrm{ree}^{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}_{\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}(\{b\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{C}^{\triangleright}_{b}, & \boldsymbol{\epsilon} = (1,0), \\ \mathbb{C}^{\triangleright}{}_{b}, & \boldsymbol{\epsilon} = (0,1), \\ \mathbb{C}^{\triangleright}_{b}, & \boldsymbol{\epsilon} = (1,1), \\ \mathbb{C}^{\triangleright}{}_{b}, & \boldsymbol{\epsilon} = (0,0), \end{cases}$$

其中， b 中的函子性来自对……的直化进行拉回

$$\mathrm{ev}_{1-i}\colon \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-}\mathrm{lax}}(\mathbb{B}^{\sharp\sharp}) \to \mathbb{B}^{\sharp\sharp}.$$

证明。 这由直化的自然性以及带装饰的纤维化的拉回方块（4.4）得出。 □

推论 4.4.3。 遗忘函子的左伴随

$$\mathsf{Fib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}} \to \mathsf{DCat}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}$$

将 $\mathbb{C}^{\triangleright} \to \mathbb{B}^{\sharp\sharp}$ 映至函子 $\mathbb{B}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-}\mathrm{op}} \to \mathbb{C}$在$(\infty,2)$ 下的反直化，该函子由下式给出：

$$b \mapsto \tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{C}^{\triangleright} \times_{\mathbb{B}^{\sharp\sharp}} \mathbb{DF}\mathrm{ree}^{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}_{\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}(\{b\})) \simeq \begin{cases} \tau_{\mathrm{d}}\mathbb{C}^{\triangleright}_{b}, & \boldsymbol{\epsilon} = (1,0), \\ \tau_{\mathrm{d}}\mathbb{C}^{\triangleright}{}_{b}, & \boldsymbol{\epsilon} = (0,1), \\ \tau_{\mathrm{d}}\mathbb{C}^{\triangleright}_{b}, & \boldsymbol{\epsilon} = (1,1), \\ \tau_{\mathrm{d}}\mathbb{C}^{\triangleright}{}_{b}, & \boldsymbol{\epsilon} = (0,0). \end{cases}$$

证明。 遗忘函子分解为

$$\mathsf{Fib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}} \xrightarrow{(-)^{\natural}} \mathsf{DFib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}} \to \mathsf{DCat}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^{\sharp\sharp}},$$

因此，其左伴随可分解为 $\mathbb{DF}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}$ 后接 $(-)^{\natural}$ 的左伴随。推论 3.2.13 表明$(-)^{\natural}$ 在直化下对应于与$(-)^{\flat\flat}$复合，因此其左伴随对应于与 τ_{d}复合。□

现在我们将结果具体化，以描述自由*1*-纤维化的 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化：

定义 4.4.4。 令 $\mathbb{MF}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}}$表示 $\mathbb{DF}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}}$ 的满子（∞，2）-范畴，其由带装饰的 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化张成，且其源属于 $(-)^{\sharp}$: $\mathbb{MC}\mathrm{at}_{(\infty,2)} \to \mathbb{DC}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$ 的像；我们将这些称为位于 $\mathbb{B}$ 上的带标记的 $\boldsymbol{\epsilon}$- 纤维化

观察 4.4.5. 对于 $\boldsymbol{\epsilon} = (i,j)$，令 $\mathbb{1F}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}}$表示 $\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}}$ 的全子（$\infty,2$）-范畴，由*1*-纤维化的 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化构成，即其纤维为 ∞-范畴的那些纤维化，或者等价地说，所有2-态射都是 j-笛卡尔的那些纤维化。于是，我们可以将$\mathbb{1F}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}}$ 视为 $\mathbb{MC}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^{\sharp}}$的全子范畴，其中 $\mathbb{E} \to \mathbb{B}$ 对应于 $\mathbb{E}^{\natural} \to \mathbb{B}^{\sharp}$，并由 i-笛卡尔1-态射带标记（因为对于1-纤维化纤维化，所有2-态射都是 j-笛卡尔的，因此总会被保留）。事实上，这恰好将$\mathbb{1F}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}}$描述为 $\mathbb{DC}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}$中 $\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}}$与 $\mathbb{MC}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^{\sharp}}$的交（其中后者通过 $(-)^{\sharp}$ 嵌入）。

记号 4.4.6. 设 $(\mathbb{E}, S)$ 是一个带标记的（$\infty, 2$）-范畴。对于函子 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{B}$，我们令

$$\mathfrak{F}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}}(\mathbb{E}, S)\colon \mathbb{B}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-op}} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_{\infty}$$

是这样一个函子：先对自由带装饰的 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化$\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}(p)$进行反直化，其中我们将 p 视为映射 $(\mathbb{E}, S)^{\sharp} \to \mathbb{B}^{\sharp\sharp}$，然后与 τ_{d}复合。因此，$\mathfrak{F}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}}(\mathbb{E}, S)$由下式给出

$$b \mapsto \tau_{\mathrm{d}}((\mathbb{E}, S)^{\sharp} \times_{\mathbb{B}^{\sharp\sharp}} \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}_{\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}(\{b\})) \simeq \begin{cases} \tau_{\mathrm{d}}\mathbb{E}^{\diamond}_{b}\ , & \boldsymbol{\epsilon} = (1,0), \\ \tau_{\mathrm{d}}{\mathbb{E}^{\diamond}}_{b}, & \boldsymbol{\epsilon} = (0,1), \\ \tau_{\mathrm{d}}\mathbb{E}^{\diamond}_{b}\ , & \boldsymbol{\epsilon} = (1,1), \\ \tau_{\mathrm{d}}{\mathbb{E}^{\diamond}}_{b}, & \boldsymbol{\epsilon} = (0,0), \end{cases}$$

其中，我们可以将 $\mathbb{E}^{\diamond}_{b}$ 识别为 $(\mathbb{E}_{b}, S_{b})^{\sharp}$，其 S_b 由投影到 $\mathbb{E}$ 后落在 S中的映射组成；其他情形也类似。特别地，这些带装饰的（∞,2）-范畴的所有2-态射都带有装饰，因此对它们进行局部化后，该函子确实取值于 $\mathbb{C}\mathrm{at}_{\infty}$。特别地，给定 $\mathbb{B}$的一个标记 $(\mathbb{B}, E)$，我们有函子

$$\mathfrak{F}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}}(\mathbb{B}, E)\colon \mathbb{B}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-op}} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_{\infty},$$

由下式给出

$$b \mapsto \begin{cases} \tau_{\mathrm{d}}\mathbb{B}^{\diamond}_{b}\ , & \boldsymbol{\epsilon} = (1,0), \\ \tau_{\mathrm{d}}{\mathbb{B}^{\diamond}}_{b}, & \boldsymbol{\epsilon} = (0,1), \\ \tau_{\mathrm{d}}\mathbb{B}^{\diamond}_{b}\ , & \boldsymbol{\epsilon} = (1,1), \\ \tau_{\mathrm{d}}{\mathbb{B}^{\diamond}}_{b}, & \boldsymbol{\epsilon} = (0,0), \end{cases}$$

其中，$\mathbb{B}^{\diamond}_{b}$ 由那些位于 E 之上的 1-态射以及所有 2-态射加上装饰；其余三种情形也类似。

推论 4.4.7。 全忠实包含

$$\mathbb{1}\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}} \hookrightarrow \mathbb{M}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^{\sharp}}$$

有一个左伴随，它将 $(\mathbb{C}, S) \to \mathbb{B}^{\sharp}$ 映射为函子$\mathfrak{F}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}}(\mathbb{C}, S)\colon \mathbb{B}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-op}} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_{\infty}$的反直化。特别地，对于 $F\colon \mathbb{B}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-op}} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_{\infty}$ 及其对应的$\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化 $\mathbb{E} \to \mathbb{B}$，我们有一个 ∞-范畴之间的自然等价

$$\mathrm{Nat}_{\mathbb{B}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-op}}, \mathbb{C}\mathrm{at}_{\infty}}(\mathfrak{F}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}}(\mathbb{C}, S), F) \simeq \mathbb{M}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^{\sharp}}((\mathbb{C}, S), \mathbb{E}^{\natural}).$$

证明。 我们需要证明，推论 4.4.3中的伴随限制到这些全子范畴；唯一需要检查的是，左伴随会将一个带标记的$(\infty, 2)$-范畴映为一个 1-纤维化纤维化，这显然成立，因为 $\mathbb{E}^{\diamond} \times_{\mathbb{B}^{\sharp\sharp}} \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}(\{b\})$此时具有 全部 带装饰的 2-态射，因此应用 $\overline{\tau}_{\mathrm{d}}(-)$ 会得到一个 ∞-范畴。 □

4.5. 带装饰的（∞, 2）-范畴的光滑性。设 p: E $\to$ B 是 ∞-范畴之间的余笛卡尔纤维化。那么 p 特别是可指数化的，也就是说，拉回函子 p^*: Cat$_{\infty/\mathsf{B}} \to$ Cat$_{\infty/\mathsf{E}}$ 有一个右伴随 p_*。此外，该右伴随具有如下性质：若 q: D $\to$ E 是一个笛卡尔纤维化，那么 $p_*(q)$ 在 B 上也如此。本节的目标是将这些结果，以及与之密切相关的光滑函子概念，从 [Lur09a, §4.1.2], 推广到带装饰的（∞, 2）-范畴这一情形。

定义 4.5.1。 若装饰函子 p: $\mathbb{A}^\diamond \to \mathbb{B}^\diamond$ 的拉回函子

$$p^*_{\mathrm{dec}} \colon \mathbb{D}\mathrm{Cat}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^\diamond} \to \mathbb{D}\mathrm{Cat}_{(\infty,2)/\mathbb{A}^\diamond}$$

存在一个右伴随 $p_{\mathrm{dec},\ *}$ 我们称之为装饰推前函子。

命题 4.5.2。 设 p: $\mathbb{A}^\diamond \to \mathbb{D}^{\sharp\sharp}$ 是一个装饰 ϵ-纤维化。那么 p 是可指数化的。

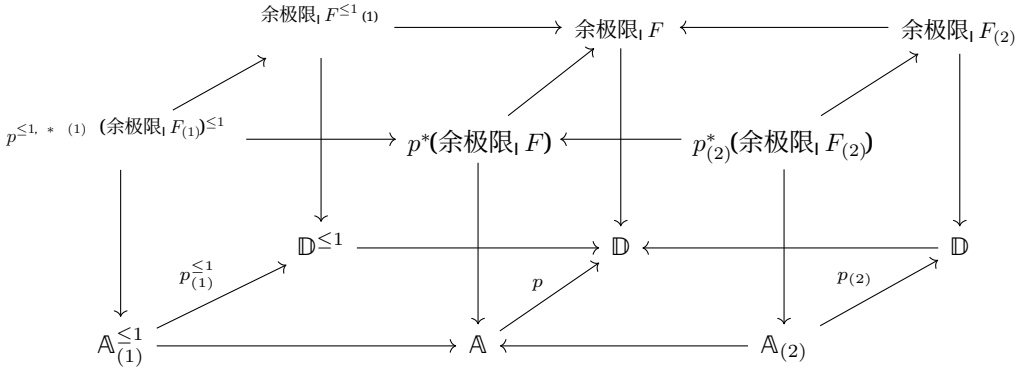
证明中我们将用到以下观察：

引理 4.5.3。 设 F: I $\to (\mathrm{DCat}_{(\infty,2)})_{/\mathbb{D}^{\sharp\sharp}}$ 是一个函子，其中I 是一个 ∞-范畴，并假设 F 的余极限被函子 u_{d}、$(-)^{\leq (1)}$ 和$(-)_{(2)}$保留。那么给定一个装饰 ϵ-纤维化 p: $\mathbb{A}^\diamond \to \mathbb{D}^{\sharp\sharp}$，典范映射

$$\mathrm{colim}_{\mathrm{I}}(p^*_{\mathrm{dec}} \circ F) \to p^*_{\mathrm{dec}}(\mathrm{colim}_{\mathrm{I}} F)$$

是一个等价。

证明。 设 $F^{\leq 1}{}_{(1)} \to F \leftarrow F_{(2)}$ 为与 F 相关联的余跨（这里我们使用了 DCat$_{(\infty,2)}$ 在（2.1）中给出的描述），并考虑以下交换图，其中前部根据我们对该余极限的假设计算 p^*_{dec}(余极限$_{\mathrm{I}}$ F)：



由于 p 是一个带装饰的 ϵ-纤维化，函子 $p^{\leq 1}{}_{(1)}$、 p 和$p_{(2)}$ 都是 ϵ-纤维化，因此沿它们的拉回由定理 2.4.10 保持余极限。因此，该图表的前部描述了 $\mathrm{colim}_{\mathrm{I}}\, p^* F$ 在将其局部化到 DCat$^{(\infty,2)}{}_{/\mathbb{A}^\diamond}$ 之后的结果。不过，在这种情况下无需局部化，故证明完成。□

引理 4.5.4. 设 $p\colon \mathbb{A}^\diamond \to \mathbb{D}^{\sharp\sharp}$ 是一个带装饰的 ϵ-纤维化。那么，对于每个带装饰的函子 $q\colon \mathbb{X}^\diamond \to \mathbb{A}^\diamond$，预层

$$\mathsf{DCat}_{(\infty,2)/\mathbb{A}^\diamond}(p^*_{\mathrm{dec}}(-),\mathbb{X}^\diamond)\colon \mathsf{DCat}_{(\infty,2)/\mathbb{D}^{\sharp\sharp}} \to \mathcal{S},$$

是可表的。

证明。 我们考虑空间的逐点单态射（参见命题2.6.6）

$$\Phi\colon \mathsf{DCat}_{(\infty,2)/\mathbb{A}^\diamond}(p^*_{\mathrm{dec}}(-),\mathbb{X}^\diamond) \to \mathsf{Cat}_{(\infty,2)/\mathbb{A}}(p^*(-),\mathbb{X}) \simeq \mathsf{Cat}_{(\infty,2)/\mathbb{D}}(-,p_*\mathbb{X}),$$

其中，最后一个同构源于以下事实：底层函子 p是一个普通的 ϵ-纤维化，再结合定理 2.4.10。

令 $p_{\mathrm{dec},\ *}\mathbb{X}$ 为 $p_*\mathbb{X}$ 的子-（∞，2）-范畴，其对象、态射和 2-态射分别由在 $\mathbb{A}^\diamond$ 上的带装饰的函子 $\mathbb{T}^{\flat\flat} \times_{\mathbb{D}^\diamond} \mathbb{A}^\diamond \to \mathbb{X}^\diamond$ 以及 $\mathbb{T} \in G = \{[0],[1],C_2\}$给出。为证明该定义确实给出了一个子-（∞，2）-范畴，我们需要验证这些 i-态射类在 $p_*\mathbb{X}$中的复合下保持稳定。这可以通过检验 p^*_{dec} 保持 G中元素的某些余极限来完成。立即可以验证，这些余极限满足引理 4.5.3的假设。这说明 $p_{\mathrm{dec},\ *}\mathbb{X}$ 是 $p_*\mathbb{X}$的一个子-（∞，2）-范畴。

现在我们定义 $p_{\mathrm{dec},*}\mathbb{X}$ 上的装饰：我们将 $p_{\mathrm{dec},*}\mathbb{X}^\diamond_{(i)}$（对于 $i=1,2$）定义为 $p_*\mathbb{X}$ 的子-(∞,2)-范畴，其对象、态射和 2-态射由 $\mathbb{A}^\diamond$ 上形如 $\mathbb{T}^\diamond \times_{\mathbb{D}^\diamond} \mathbb{A}^\diamond \to \mathbb{X}^\diamond$ 的带装饰的函子给出，并带有

$$\mathbb{T}^\diamond \in \begin{cases} [0],[1]^\sharp,C_2^{\sharp\flat}, & i=1,\\ [0],[1]^\flat,C_2^{\flat\sharp}, & i=2, \end{cases}$$

分别如此。与之前相同的论证表明，上述定义如所期望地给出了子-(∞,2)-范畴。此外，我们得到典范函子

$$p_*\mathbb{X}^\diamond_{(1)} \to p_*\mathbb{X} \leftarrow p_*\mathbb{X}^\diamond_{(2)}$$

我们观察到，由于 $[0]^{\flat\flat} = [0]^{\sharp\flat} = [0]^{\flat\sharp}$ 上述两个函子都在底空间上诱导等价。我们进一步观察到 $[1]^{\flat\flat} = [1]^{\flat\sharp}$ 因此最右侧的态射是底 ∞-范畴上的等价。最后，我们注意到 $C_2^{\sharp\flat} \simeq C_2^{\flat\flat} \amalg_{\partial C_2^{\flat\flat}} \partial C_2^{\sharp\flat}$ 并且这个余极限再次满足引理 4.5.3 的假设，这意味着上述跨度最左侧的映射是局部满的。

为完成证明，我们注意到有一个逐点的空间单态射 $\mathsf{DCat}^{(\infty,2)/\mathbb{D}^{\sharp\sharp}}(-,p_{\mathrm{dec},*}\mathbb{X}) \hookrightarrow \mathsf{Cat}^{(\infty,2)/\mathbb{D}}(-,p_*\mathbb{X})$，其像与$\Phi$的像一致。由此得出，$p_{\mathrm{dec},*}\mathbb{X}$ 就是所需的表示对象。□

命题 *4.5.2* 的证明。 由引理4.5.4可知，函子 p^*_{dec} 在底层 ∞-范畴的层面上有一个右伴随。由于 p^*_{dec} 是Cat∞-线性的，我们可以利用推论 p^*_{dec} 将其提升为一个 (∞, 2)-范畴左伴随，方法与定理2.1.6 的证明中相同。2.4.10。 □

观察 4.5.5。 假设 $p\colon \mathbb{A}^\diamond \to \mathbb{B}^\diamond$ 可指数化。那么对于 $q\colon \mathbb{E}^\diamond \to \mathbb{A}^\diamond$，$p_{\mathrm{dec},*}(q)$ 在 $b \in \mathbb{B}$ 处的纤维是 $\mathbb{D}\mathbb{F}\mathsf{un}_{/\mathbb{A}^\diamond}(\mathbb{A}^\diamond_b, \mathbb{E}^\diamond)$。事实上，对于一个带装饰的 $(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{K}^\diamond$，我们有一个自然等价

$$\begin{aligned}\mathrm{Map}(\mathbb{K}^\diamond, (p_{\mathrm{dec},*}(q))_b) &\simeq \mathrm{Map}_{/\mathbb{B}^\diamond}(\mathbb{K}^\diamond \times \{b\}, p_{\mathrm{dec},*}(q)) \\ &\simeq \mathrm{Map}_{/\mathbb{A}^\diamond}(\mathbb{K}^\diamond \times \mathbb{A}^\diamond_b, \mathbb{E}^\diamond) \\ &\simeq \mathrm{Map}(\mathbb{K}^\diamond, \mathbb{D}\mathbb{F}\mathsf{un}_{/\mathbb{A}^\diamond}(\mathbb{A}^\diamond_b, \mathbb{E}^\diamond)).\end{aligned}$$

更一般地，给定一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\diamond & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{A}^\diamond \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathbb{D}^\diamond & \xrightarrow[\beta]{} & \mathbb{B}^\diamond \end{array}$$

其中 p 和 q 可指数化，我们有一个 Beck–Chevalley 等价

$$\beta^* p_* \simeq q_* \alpha^*,$$

因为相应的左伴随函子的伴随变换显然是一个等价。

定义 4.5.6。 若一个带装饰的函子 $p\colon \mathbb{A}^\diamond \to \mathbb{D}^\diamond$ 满足 p 可指数化，则称其为 ϵ-光滑的；并且给定一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{S}'^\diamond & \xrightarrow{\varphi'} & \mathbb{T}'^\diamond & \longrightarrow & \mathbb{A}^\diamond \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{S}^\diamond & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{T}^\diamond & \longrightarrow & \mathbb{B}^\diamond \end{array}$$

其中两个方块都是拉回，且 φ 是一个 ϵ-余纤维化（参见定义 3.6.2），则 φ' 再次是一个 ϵ-余纤维化。

引理 4.5.7. 假设 $p\colon \mathbb{A}^\diamond \to \mathbb{B}^\diamond$ 是 ϵ-光滑的。那么

(i) 拉回函子

$$p^*_{\mathrm{dec}}\colon \mathbb{D}\mathsf{Cat}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^\diamond} \to \mathbb{D}\mathsf{Cat}_{(\infty,2)/\mathbb{A}^\diamond}$$

保 ϵ-等价。

(ii) 推前函子

$$p_{\mathrm{dec},*}\colon \mathbb{D}\mathsf{Cat}_{(\infty,2)/\mathbb{A}^\diamond} \to \mathbb{D}\mathsf{Cat}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^\diamond}$$

保偏 ϵ-纤维化。

(iii) 伴随 $p^*_{\mathrm{dec}} \dashv p_{\mathrm{dec},\,*}$ 在全子范畴上限制为一个伴随

$$p^*_{\mathrm{dec}}\colon \mathbb{P}\mathsf{Fib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}^\diamond} \rightleftarrows \mathbb{P}\mathsf{Fib}_{/\mathbb{A}^\diamond}\colon p_{\mathrm{dec},*}.$$

证明。 第一部分由光滑性的定义立即得出，并通过伴随关系推出第二部分。因此，函子 p^*_{dec} 和 $p_{\mathrm{dec},\,*}$ 都保持部分 ϵ-纤维化，所以该伴随如最后一部分所述受到限制。□

定理 4.5.8。 设 $p\colon \mathbb{A}^\diamond \to \mathbb{B}^{\sharp\sharp}$ 是一个带装饰的 ϵ-纤维化。则 p 是 ϵ-光滑的。

注 4.5.9。 命题 4.5.2 和定理 4.5.8 中 p 是一个 ϵ-纤维化（没有额外装饰）时的情形，可以分别从 [Lou24], 的定理 3.2.3.15 和命题 3.2.5.9 中推出。Loubaton 也允许靶上的标记不是极大的，因此他的结果还涵盖了一些我们未考虑的情形。

证明需要以下技术性结果：

命题 4.5.10。 假设给定带装饰的$(\infty，2)$-范畴的拉回图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{\diamond} & \longrightarrow & \mathbb{A}^{\blacklozenge} \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{p}} \\ \mathbb{O}^{n,\diamond} & \longrightarrow & (\mathbb{O}^{n})^{\sharp\sharp}, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{B}^{\diamond} & \longrightarrow & \mathbb{B}^{\blacklozenge} \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{q}} \\ \mathbb{O}_{+}^{n,\dagger} & \longrightarrow & (\mathbb{O}_{+}^{n})^{\sharp\sharp}, \end{array}$$

其中 $\overline{p}$ 和 $\overline{q}$是带装饰的 $(1，0)$-纤维化，并采用定义 *3.6.13*中的记号。于是我们在 $\mathbb{DC}$处有$(\infty,2)$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_{n}^{\diamond} \times \mathbb{O}^{[0,n-1],\flat\flat} & \longrightarrow & \mathbb{A}_{n}^{\diamond} \times \mathbb{O}^{n,\diamond} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A}^{\diamond} \times_{\mathbb{O}^{n,\diamond}} \mathbb{O}^{[0,n-1],\flat\flat} & \longrightarrow & \mathbb{A}^{\diamond}, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{B}_{n}^{\diamond} \times \mathbb{O}_{+}^{[0,n-1],\dagger} & \longrightarrow & \mathbb{B}_{n}^{\diamond} \times \mathbb{O}^{n,\dagger} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{B}_{\diamond} \times_{\mathbb{O}_{+}^{n,\dagger}} \mathbb{O}^{[0,n-1],\dagger} & \longrightarrow & \mathbb{B}^{\diamond}, \end{array}$$

其中 $\mathbb{A}_{n}^{\diamond}$ 和 $\mathbb{B}_{n}^{\diamond}$ 表示对象 $n \in \mathbb{O}^{n}$ 上对应的纤维。

证明。 令 $f_{\diamond}\colon P_{n}^{\diamond} \to \mathbb{A}^{\diamond}$ 和 $g_{\diamond}\colon Q_{n}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\diamond}$ 表示从推出出发的对应函子。根据 [AS23a、推论 3.73、注 3.74] ，可知函子$f_{\diamond}$ 和 $g_{\diamond}$ 在底层 $(\infty，2)$-范畴上是等价。因此，我们的问题归结为验证两侧的装饰一致。首先注意到$P_{n}^{\diamond}$ 和 $Q_{n}^{\diamond}$ 包含 $\mathbb{A}^{\diamond}$ 和 $\mathbb{B}^{\diamond}$ 中所有位于点 $i \in \mathbb{O}^{n}$的纤维内的装饰。下面分情况讨论。

▶ 设 $u\colon x \to y$ 是 $\mathbb{A}_{(1)}^{\diamond}$ 中位于 $n-1 \to n$之上的一条边。那么我们可以表示为 $u = \beta \circ \alpha$，其中 β 是 $n-1$ 之上的纤维中的一个带装饰态射，而 α 是一条经过 $P_{n}^{\diamond}$分解的带装饰边。由此可得， u 也经过 $P_{n}^{\diamond}$分解。关于 $\mathbb{B}^{\diamond}$ 的类似结论显然成立。

▶ 设 $u, v\colon x \to y$ 是 $\mathbb{A}^{\diamond}$ 中的态射，分别位于态射 $\{i, n\}$ 和$\{i, n-1, n\}$之上，并考虑 $\theta\colon u \to v$ 在 $\mathbb{A}_{(2)}^{\diamond}$中。我们考虑映射

$$\varphi\colon \{y\} \times \mathbb{O}^{2} \to \mathbb{A}_{n} \times \mathbb{O}^{2} \to \mathbb{A}$$

$\hat{}$ 并将 $\varphi(0) = \hat{}x$ 记作 θ，对应的映射记作 $C_{2} \to \mathbb{A}$。于是可得，存在一个映射 $\iota\colon x \to \hat{}x$，使得胡须运算 $\iota \circ \theta$ 等于θ。由于 $\mathbb{A}_{2}^{\diamond} \to \mathbb{O}^{n,\diamond}$ (2) 是一个纤维化，我们可以选取 $\hat{}\theta$ 使其经过 $\mathbb{A}_{(2)}^{\diamond}$ 分解，因此结论成立。□

定理 *4.5.8* 的证明。 我们设 $\epsilon = (0,1)$ 不失一般性。该证明现作为命题 4.5.2、命题 3.6.19 与命题4.5.10 的组合而得出。 □

以下推论可直接由定理 4.5.8 和引理 4.5.7得出。

推论 4.5.11. 设 $p\colon \mathbb{A}^{\triangleright} \to \mathbb{B}^{\sharp\sharp}$ 是带装饰的 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化。那么，$\mathbb{DC}$处$(\infty,2)$ 的切片上的伴随$p^*_{\mathrm{dec}} \dashv p_{\mathrm{dec},\ *}$ 限制在全子范畴上仍为一个伴随

$$p^*_{\mathrm{dec}} : \mathbb{F}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}} \to \mathbb{PF}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{A}^{\triangleright}} : p_{\mathrm{dec},*}. \quad \square$$

观察 4.5.12。 由于左伴随是 $\mathsf{Cat}_{(\infty,2)}$-线性的，上述 $(\infty,2)$-范畴之间的伴随甚至可以借助推论$(\infty,3)$-范畴的一个变体升级为2.1.6。

作为一个有用的特例，我们有：

推论 4.5.13。 设 $q\colon (\mathbb{A}, I) \to \mathbb{B}^{\sharp}$ 是带标记的$(\infty, 2)$-范畴之间的函子，且 $q^{\sharp}$ 是一个带装饰的 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化。则在$^{-}\mathbb{DC}$处$(\infty,2)$ 的切片上的伴随 $q^*_{\mathrm{dec}} \dashv q_{\mathrm{dec},*}$ 限制到全子范畴上后仍为伴随

$$q^*_{\mathrm{dec}} : \mathbb{F}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}} \to \mathbb{F}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/(\mathbb{A},I)} : q_{\mathrm{dec},*}.$$

证明。 由于 $\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/(\mathbb{A},I)}$是 $\mathbb{PF}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/(\mathbb{A},I)^{\sharp}}$的全子范畴，并且拉回函子$q^*_{\mathrm{dec}}$ 的取值落在此全子范畴中，结论直接由推论 4.5.11应用于 $q^{\sharp}$即可。 $\square$

4.6. **偏纤维化的推前。** 本节的目标是推广推论 4.5.11 ，并说明沿任意装饰函子取纤维化的拉回 $f\colon \mathbb{C}^{\triangleright} \to \mathbb{D}^{\sharp\sharp}$ 存在右伴随。作为特例，这将为取值于 Cat_∞的函子给出右 Kan 延拓，这将成为我们在 §5.6中讨论 Kan 延拓的起点，同时也会给出余自由 纤维化。

定义 4.6.1。 设 $f\colon \mathbb{C}^{\triangleright} \to \mathbb{D}^{\sharp\sharp}$ 是一个装饰函子。我们定义一个函子

$$R_f\colon \mathbb{PF}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{C}^{\triangleright}} \to \mathbb{PF}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{D}^{\sharp\sharp}} = \mathbb{F}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{D}}$$

为以下复合

$$\mathbb{PF}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{C}^{\triangleright}} \xrightarrow{\pi^*} \mathbb{PF}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{Q}^{\triangleright}} \xrightarrow{\varphi_*} \mathbb{PF}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{D}^{\sharp\sharp}}$$

其中

$$\mathbb{Q}^{\triangleright} := \mathbb{C}^{\triangleright} \times_{\mathbb{D}^{\sharp\sharp}} \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{D}^{\sharp\sharp})^{\triangleright\text{-fib}},$$

第一个函子由沿投影取拉回来给出

$$\pi\colon \mathbb{Q}^{\triangleright} \to \mathbb{C}^{\triangleright}$$

（见 §4.3），第二个函子则是沿4.5.11所述拉回函子的右伴随（见推论）

$$\varphi = \mathbb{DF}\mathrm{ree}^{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}_{\mathbb{D}^{\sharp\sharp}}(f)\colon \mathbb{Q}^{\triangleright} \to \mathbb{D}^{\sharp\sharp},$$

这是一个 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化。

观察 4.6.2。 根据定义， R_f 是函子在部分纤维化的全子范畴上的限制

$$\mathbb{DC}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{C}^{\triangleright}} \xrightarrow{\pi^*} \mathbb{DC}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{Q}^{\triangleright}} \xrightarrow{\varphi_*} \mathbb{DC}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{D}^{\sharp\sharp}}.$$

它有一个左伴随 $\pi_!\varphi^*$，其定义为沿 φ 拉回，随后与π复合。此函子将 q: $\mathbb{A}^{\triangleright} \to \mathbb{D}^{\sharp\sharp}$ 映射为投影

$$\mathbb{C}^{\triangleright} \times_{\mathbb{D}^{\sharp\sharp}} \mathbb{DA}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{D}^{\sharp\sharp})^{\triangleright\text{-fib}} \times_{\mathbb{D}^{\sharp\sharp}} \mathbb{A}^{\triangleright} \to \mathbb{C}^{\triangleright},$$

它是函子拉回到 $\mathbb{C}^{\diamond}$ 的结果

$$\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{D}^{\sharp\sharp}}(q)\colon \mathbb{D}\mathbb{A}\mathrm{r}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-lax}}(\mathbb{D}^{\sharp\sharp})^{\diamond\text{-fib}} \times_{\mathbb{D}^{\sharp\sharp}} \mathbb{A}^{\diamond} \to \mathbb{D}^{\sharp\sharp},$$

使得 $\pi_!\varphi^* \simeq f^*\,\mathbb{D}\mathbb{F}\mathbf{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{D}^{\sharp\sharp}\circ}$

观察 4.6.3. 考虑一个部分 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化 $q\colon \mathbb{E}^{\natural} \to \mathbb{C}^{\diamond}$。根据观察 4.5.5，在上述情形中，我们可以将 $R_f(q)$ 的纤维识别为

$$R_f(q)_d \simeq \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}_{/\mathbb{Q}^{\diamond}}(\mathbb{Q}^{\diamond}_d, \pi^*\mathbb{E}^{\natural}) \simeq \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}_{/\mathbb{C}^{\diamond}}(\mathbb{Q}^{\diamond}_d, \mathbb{E}^{\natural}).$$

使用4.4.1中的记号，可得

$$R_f(q)_d \simeq \begin{cases} \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}_{/\mathbb{C}^{\diamond}}(\mathbb{C}^{\diamond}_d\ , \mathbb{E}^{\natural}), & \boldsymbol{\epsilon} = (0,1), \\ \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}_{/\mathbb{C}^{\diamond}}({\mathbb{C}^{\diamond}}_d, \mathbb{E}^{\natural}), & \boldsymbol{\epsilon} = (1,0), \\ \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}_{/\mathbb{C}^{\diamond}}(\mathbb{C}^{\diamond}_d\ , \mathbb{E}^{\natural}), & \boldsymbol{\epsilon} = (0,0), \\ \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}_{/\mathbb{C}^{\diamond}}({\mathbb{C}^{\diamond}}_d, \mathbb{E}^{\natural}), & \boldsymbol{\epsilon} = (1,1),. \end{cases}$$

定理 4.6.4. 设 $f\colon \mathbb{C}^{\diamond} \to \mathbb{D}^{\sharp\sharp}$ 是一个装饰函子。则存在一个 (∞,2)-范畴之间的伴随

$$f^*\colon \mathbb{F}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{D}} \rightleftarrows \mathbb{P}\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{C}^{\diamond}} : R_f$$

其中 f^* 表示拉回函子。

证明。 设 $q\colon \mathbb{A}^{\diamond} \to \mathbb{D}^{\sharp\sharp}$ 是一个 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化。那么对于每个部分 $\boldsymbol{\epsilon}$-纤维化$p\colon \mathbb{X}^{\diamond} \to \mathbb{C}^{\diamond}$，由观察 4.6.2 可得一个自然等价

$$\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{D}}(q, R_f(p)) \simeq \mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{C}^{\diamond}}(f^*\,\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{D}^{\sharp\sharp}}\,\epsilon(q), p).$$

此外，通过拉回命题 4.3.1中的单位映射，我们得到一个态射$\chi_f\colon f^*q \to f^*\,\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{D}^{\sharp\sharp}}(q)$，根据命题 $\boldsymbol{\epsilon}$-等价 4.3.4。换言之，沿着 χ_f 的限制给出一个等价

$$\mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{C}^{\diamond}}(f^*\,\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbb{D}^{\sharp\sharp}}(q), p) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{C}^{\diamond}}(f^*q, p) \simeq \mathbb{P}\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{C}^{\diamond}}(f^*q, p).$$

结论由此得出。 □

我们注意到两个重要的特殊情形：对于任意函子 (∞,2)-范畴 $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$，我们得到：

推论 4.6.5。 拉回函子

$$f^*\colon \mathbb{F}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{B}} \to \mathbb{F}\mathrm{ib}^{\boldsymbol{\epsilon}}_{/\mathbb{A}}$$

有一个右伴随 R_f。 □

结合我们对这个右伴随的明确描述，这将成为我们在下文 §(∞,2)-范畴中讨论 Kan 延拓的起5.6点。下面的变体同样会引出部分 *lax* Kan 延拓的概念：

推论 4.6.6。 设 $f\colon(\mathbb{C},I)\to\mathbb{D}^\sharp$ 是带标记的$(\infty,2)$-范畴之间的函子。那么拉回函子

$$f^*\colon \mathbb{F}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{D}}\to\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/(\mathbb{C},I)}$$

具有右伴随 R_f。

证明。 我们可以将 $\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/(\mathbb{C},I)}$ 视为全子-$(\infty,2)$-范畴，即 $\mathbb{P}\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/(\mathbb{C},I)^\sharp}$ 中由 ϵ-纤维化所张成者。由于来自 $\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{D}}$ 的拉回函子取值于该全子范畴，故定理 4.6.4 中的右伴随限制为 f^* 的右伴随，即为所求。 □

另一方面，将恒等取作函子 $\mathbb{B}^{\flat\flat}\to\mathbb{B}^{\sharp\sharp}$，我们便得到余自由纤维化的存在性：

推论 4.6.7. 遗忘函子

$$\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}}\to\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{B}}$$

具有右伴随。 □

更一般地，对于任意带装饰的 $(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{B}^\diamond$，我们得到遗忘函子 $\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}}\to\mathbb{P}\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}^\diamond}$ 的一个右伴随。

为了便于后续使用，我们还将更明确地指出定理 4.6.4中伴随的单位和余单位：

观察 4.6.8。 设 $f\colon\mathbb{C}^\diamond\to\mathbb{D}^{\sharp\sharp}$ 是一个装饰函子，且设 $q\colon\mathbb{X}^\diamond\to\mathbb{D}^{\sharp\sharp}$是一个 ϵ-纤维化。那么，映射 $f^*\,\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\epsilon}_{\mathbb{D}^{\sharp\sharp}}(q)\to f^*q$由拉回命题4.3.1中伴随的余单位得到，并通过观察 4.6.2中的伴随对应于映射 $\epsilon\colon q\to R_f(f^*q)$。注意， η在等价下被映为

$$\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{D}}(q,R_f(f^*q))\xrightarrow{\simeq}\mathbb{P}\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{C}^\diamond}(f^*q,f^*q)$$

到 f^*q上的恒等映射，这将 ϵ 识别为定理 4.6.4中伴随的单位。给定 $p\in\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{D}}$，我们可以应用前面的讨论，并结合命题 4.3.1中的遗忘函子是全忠实的这一事实，来识别复合映射

$$\mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{D}^{\sharp\sharp}}(p,q)\xrightarrow{\eta_*}\mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{D}^{\sharp\sharp}}(p,R_f(f^*q))\xrightarrow{\simeq}\mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{C}^\diamond}(f^*p,f^*q),$$

沿着 f 的拉回函子。此外，我们现在可以得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{D}^{\sharp\sharp}}(p,q) & \xrightarrow{\eta_*} & \mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{D}^{\sharp\sharp}}(p,R_f(f^*q))\\ \downarrow{\scriptstyle\xi^*} & & \downarrow{\scriptstyle\simeq}\\ \mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{D}^{\sharp\sharp}}(f_!f^*p,q) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{C}^\diamond}(f^*p,f^*q).\end{array}\tag{4.5}$$

其中 ξ^* 是 $f_!\dashv f^*$的单位。

观察 4.6.9。 设 f， q 与前面相同，并设 $p \in \mathbb{D}\mathbb{C}$在$(\infty,2)/\mathbb{D}^{\sharp\sharp}$处。我们考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{C}^{\diamond}}(p, f^{*}R_{f}(q)) & \longrightarrow & \mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{C}^{\diamond}}(p,q) \\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ \mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{C}^{\diamond}}(f^{*}\,\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\epsilon}_{\mathbb{D}^{\sharp\sharp}}(f_{!}p), q) & \xrightarrow{\psi^{*}} & \mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{C}^{\diamond}}(p,q) \end{array} \tag{4.6}$$

其中底边由沿该态射的预合成给出

$$\psi\colon p \to f^{*}f_{!}p \to f^{*}\,\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\epsilon}_{\mathbb{D}^{\sharp\sharp}}(f_{!}p)$$

其中第一个映射是 $f_{!} \dashv f^{*}$ 的单位，第二个是命题4.3.1中伴随的单位的拉回。注意，该图表关于 p是自然的，因此由 Yoneda 引理我们得到一个映射 $\epsilon\colon\ f^{*}R_{f}$（$q$）$\to q$，我们断言它可以等同于定理4.6.4中伴随的余单位。为此，我们断言该复合

$$\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{D}}(p, R_{f}(q)) \to \mathbb{P}\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{C}^{\diamond}}(f^{*}p, f^{*}R_{f}(q)) \xrightarrow{\epsilon_{*}} \mathbb{P}\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{C}^{\diamond}}(f^{*}p, q)$$

可以等同于定理4.6.4的证明中的自然同构。该结果由该图表的交换性得出

$$\begin{array}{ccccc} f^{*}p & \longrightarrow & f^{*}f_{!}f^{*}p & \longrightarrow & f^{*}\,\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\epsilon}_{/\mathbb{C}^{\diamond}}(f_{!}f^{*}p) \\ & \searrow^{\simeq} & \downarrow & & \downarrow \\ & & f^{*}p & \longrightarrow & f^{*}\,\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ree}^{\epsilon}_{/\mathbb{C}^{\diamond}}(p) \end{array}$$

对定义稍作展开之后。

4.7. 纤维化的局部化。给定一个 ∞-范畴的函子 $F\colon \mathsf{C} \to \mathrm{MCat}_{\infty}$，Hinich 在 [Hin16, §2] 中证明，我们可以将函子 $\tau_{m}(F)$（其中我们将标记态射求逆）对应的余笛卡尔纤维化，识别为底层函子 $u_{\mathrm{m}}(F) : \mathsf{C} \to \mathrm{Cat}_{\infty}$ 对应的纤维化的局部化；Nikolaus 和 Scholze [NS18, 命题 A.14]也给出了这一非常有用的比较的另一种证明。本节的目标是证明这一结果的（∞, 2）-范畴扩展；事实上，我们将看到，关于余自由纤维化的结果使我们能够以比现有的∞-范畴情形证明简单得多的论证来证明这一点。

定理 4.7.1. 假设 $\mathbb{E}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\sharp\sharp}$ 是一个带装饰的$(0,1)$-纤维化，对应于函子 $F\colon\ \mathbb{B} \to \mathbb{D}\mathbb{C}$到$_{(\infty,2)}$。若 $\mathbb{E}^{\diamond}|_{\mathbb{B}^{\flat\flat}}$ 表示到 $\mathbb{B}^{\flat\flat}$ 的拉回（即我们只保留 $\mathbb{E}^{\diamond}$ 中映到等价的装饰），那么局部化 $\tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}^{\diamond}|_{\mathbb{B}^{\flat\flat}}) \to \mathbb{B}$是一个$(0, 1)$-纤维化，并对应于函子 $\tau_{\mathrm{d}}(F)\colon\ \mathbb{B} \to \mathbb{C}$到$_{(\infty,2)}$。

我们将把这作为以下更一般的观察的一个特例来推导：

命题 4.7.2。 设 $p\colon\ \mathbb{E}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\sharp\sharp}$ 是一个带装饰的$(0, 1)$-纤维化，对应于函子 $F\colon$ $\mathbb{B} \to \mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$，并设 $\mathbb{E}' \to \mathbb{B}$ 是 $\tau_{\mathrm{d}}(F)$ 的$(0,1)$-纤维化。那么，对于任意带装饰的函子 $f\colon\ \mathbb{C}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\sharp\sharp}$，典范映射 $\eta\colon\ \mathbb{E}^{\diamond} \to \mathbb{E}'^{\natural}$ 的拉回诱导出一个等价

$$\mathrm{DFun}_{/\mathbb{C}^{\diamond}}(f^{*}\mathbb{E}'^{\natural}, \mathbb{Q}^{\diamond}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{DFun}_{/\mathbb{C}^{\diamond}}(f^{*}\mathbb{E}^{\diamond}, \mathbb{Q}^{\diamond})$$

对于任意部分$(0,1)$-纤维化 $\mathbb{Q}^\diamond \to \mathbb{C}^\diamond$。换言之， $f^*\eta$ 将 $f^*\mathbb{E}'^\natural$ 表示为局部化 $L^{(0,1)}_{\mathbb{C}^\diamond}(f^*\mathbb{E}^\diamond)$ 到部分$(0,1)$-纤维化。

证明。 利用伴随

$$f^* : \mathbb{F}\mathrm{ib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}^{\sharp\sharp}} \rightleftarrows \mathbb{P}\mathbb{F}\mathrm{ib}^{(0,1)}_{/\mathbb{C}^\diamond} : R_f$$

由定理 4.6.4 以及（带装饰的）直化，我们得到∞-范畴的自然等价

$$\begin{aligned}\mathrm{DFun}_{/\mathbb{C}^\diamond}(f^*\mathbb{E}'^\natural, \mathbb{Q}^\diamond) &\simeq \mathrm{DFun}_{/\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}(\mathbb{E}'^\natural, R_f(\mathbb{Q}^\diamond)^\natural)\\ &\simeq \mathrm{Nat}_{\mathbb{B},\mathrm{Cat}_{(\infty,2)}}(\tau_{\mathrm{d}}(F), Q)\\ &\simeq \mathrm{Nat}_{\mathbb{B},\mathbb{D}\mathrm{Cat}_{(\infty,2)}}(F, Q^{\flat\flat})\\ &\simeq \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}(\mathbb{E}^\diamond, R_f(\mathbb{Q}^\diamond)^\natural),\end{aligned}$$

其中 Q 表示 $R_f(\mathbb{Q}^\diamond)$ 的直化。现在我们观察到，对于 $\mathbb{P} \to \mathbb{B}$ 这一$(0,1)$-纤维化，带装饰的纤维化 $\mathbb{E}^\diamond \to \mathbb{P}^\natural$ 的态射不过是带装饰的 $(\infty,2)$-范畴在 $\mathbb{B}^{\sharp\sharp}$ 上的态射（因为到 $\mathbb{P}^\natural$ 的任何装饰函子都尤其保持余笛卡尔态射与笛卡尔 2-态射）。因此我们可以利用观察 4.6.2得到一个等价

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}(\mathbb{E}^\diamond, R_f(\mathbb{Q}^\diamond)^\natural) &\simeq \mathrm{DFun}_{/\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}(\mathbb{E}^\diamond, R_f(\mathbb{Q}^\diamond)^\natural)\\ &\simeq \mathrm{DFun}_{/\mathbb{C}^\diamond}(f^*\,\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ree}^{(0,1)}_{\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}(p), \mathbb{Q}^\diamond).\end{aligned}$$

现在我们可以利用：单位映射 $p \to \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ree}^{(0,1)}_{\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}(p)$ 沿任意映射拉回为一个 $(0,1)$-等价，此结论来自命题 4.3.4；由于 $\mathbb{Q}^\diamond$ 是部分 $(0,1)$-纤维化，这给出一个等价

$$\mathrm{DFun}_{/\mathbb{C}^\diamond}(f^*\,\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ree}^{(0,1)}_{\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}(p), \mathbb{Q}^\diamond) \simeq \mathrm{DFun}_{/\mathbb{C}^\diamond}(f^*\mathbb{E}^\diamond, \mathbb{Q}^\diamond),$$

正如所要求的。 □

定理 4.7.1 的证明。 设 $\mathbb{E}' \to \mathbb{B}$ 是 $(0,1)$-纤维化，其对象为 $\tau_{\mathrm{d}}(F)$；我们将证明它具有局部化 $\tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}^\diamond|_{\mathbb{B}^{\flat\flat}})$ 的泛性质：将命题 4.7.2 应用于恒等函子 $\mathbb{B}^{\flat\flat} \to \mathbb{B}^{\sharp\sharp}$，并注意到到 $\mathbb{B}^{\flat\flat}$ 的函子是部分 $(0,1)$-纤维化，当且仅当它具有 $\mathbb{C}^{\flat\flat} \to \mathbb{B}^{\flat\flat}$ 的形式，我们得到一个自然等价

$$\mathrm{DFun}_{/\mathbb{B}^{\flat\flat}}(\mathbb{E}^\diamond|_{\mathbb{B}^{\flat\flat}}, \mathbb{C}^{\flat\flat}) \simeq \mathrm{DFun}_{/\mathbb{B}^{\flat\flat}}(\mathbb{E}'^{\flat\flat}, \mathbb{C}^{\flat\flat}),$$

因为 $\mathbb{E}'^\natural|_{\mathbb{B}^{\flat\flat}}$ 由位于等价之上的余笛卡尔态射和笛卡尔 2-态射装饰，也就是说，由等价装饰。于是，对于一个 $(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{D}$ ，我们有自然等价

$$\begin{aligned}\mathrm{Fun}(\mathbb{E}', \mathbb{D}) &\simeq \mathrm{Fun}_{/\mathbb{B}}(\mathbb{E}', \mathbb{D}\times\mathbb{B})\\ &\simeq \mathrm{DFun}_{/\mathbb{B}^{\flat\flat}}(\mathbb{E}'^{\flat\flat}, (\mathbb{D}\times\mathbb{B})^{\flat\flat})\\ &\simeq \mathrm{DFun}_{/\mathbb{B}^{\flat\flat}}(\mathbb{E}^\diamond|_{\mathbb{B}^{\flat\flat}}, (\mathbb{D}\times\mathbb{B})^{\flat\flat})\\ &\simeq \mathrm{DFun}(\mathbb{E}^\diamond|_{\mathbb{B}^{\flat\flat}}, \mathbb{D}^{\flat\flat})\\ &\simeq \mathrm{Fun}(\tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}^\diamond|_{\mathbb{B}^{\flat\flat}}), \mathbb{D}),\end{aligned}$$

由此可得等价 $\tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}^\diamond|_{\mathbb{B}^{\flat\flat}}) \simeq \mathbb{E}'$，正如所需。 □

推论 4.7.3。

(1) 包含映射的左伴随

$$\mathbb{F}\mathrm{ib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}} \hookrightarrow \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}$$

将 $\mathbb{E}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\sharp\sharp}$ 送至 $\tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}^{\diamond}|_{\mathbb{B}^{\flat\flat}}) \to \mathbb{B}$。

(2) 到包含映射的左伴随 $L^{(0,1)}_{\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}$

$$\mathbb{F}\mathrm{ib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}} \hookrightarrow \mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}$$

将 $\mathbb{C}^{\diamond} \to \mathbb{B}^{\sharp\sharp}$ 送至 $\tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ree}^{(0,1)}_{\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}(\mathbb{C}^{\diamond})|_{\mathbb{B}^{\flat\flat}})$。

(3) 到包含映射的左伴随

$$\mathbb{1}\mathbb{F}\mathrm{ib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}} \hookrightarrow \mathbb{M}\mathbb{F}\mathrm{ib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}^{\sharp}}$$

将$(\mathbb{E}, S) \to \mathbb{B}^{\sharp}$ 映到 $\tau_{\mathrm{d}}((\mathbb{E}, S)^{\sharp}|_{\mathbb{B}^{\flat\flat}}) \to \mathbb{B}$，其中我们将源自$S$ 的态射以及每个纤维中的所有2-态射局部化。

（*4*）包含的左伴随 $L^{(0,1);1}_{\mathbb{B}^{\sharp}}$

$$\mathbb{1}\mathbb{F}\mathrm{ib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}} \hookrightarrow \mathbb{M}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^{\sharp}}$$

将$(\mathbb{C}, S) \to \mathbb{B}^{\sharp}$ 映到 $\tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ree}^{(0,1)}_{\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}((\mathbb{C}, S)^{\sharp}|_{\mathbb{B}^{\flat\flat}}))$。

证明。 第一个陈述由推论 3.2.13 连同定理 4.7.1 得出，并且在（2）中右伴随经由 $\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{ib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}$ 分解，从而左伴随分解为命题 4.3.1 中的带装饰的自由纤维化，再接上（1）中的左伴随。最后的陈述由将前两个限制到标记情形而得到。 □

5. （余）极限与 (∞,2)-范畴中的 Kan 延拓

在本节中，我们将应用上一节关于纤维化的结果，发展 (∞, 2)-范畴的（余）极限与 Kan 延拓理论。在 §5.1 中，我们介绍 (∞, 2)-范畴中一种自然的（余）极限概念，即（部分）松与反松（余）极限，并比较其若干定义。随后在 §5.2 中，我们介绍另一种（余）极限概念，即加权（余）极限；我们证明这两类（余）极限是等价的，也就是说，任何加权（余）极限都可以改写为部分松或反松（余）极限，反之亦然。在 §5.3 中，我们将考察 $\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$ 和 $\mathbb{C}\mathrm{at}_{\infty}$ 中的这类（余）极限，并说明它们可以用纤维化作简单描述。接下来，我们在 §5.4 中汇集有关（余）极限的存在性与保性的若干有用结果。在 §5.5 中，我们将看到，带装饰的 (∞, 2)-范畴的形式体系以及我们关于自由纤维化的工作，使得理解带标记的 (∞, 2)-范畴的共终函子变得容易。之后，我们在 §5.6 中转而讨论 (∞, 2)-范畴的 Kan 延拓，并在 §5.7 中为加权余极限建立 Bousfield–Kan 公式。最后，我们给出函子性版本 Yoneda 引理的一个纤维化证明，并借此证明 ∞-范畴的预层在 §5.8 中给出一个 (∞, 2)-范畴的自由余完备化；随后在 §5.9 中应用这一结果，比较可表 (∞, 2)-范畴的若干刻画。

5.1. **松与反松（余）极限。** 部分（反）松弛（余）极限最初由 Descotte、Dubuc 和 Szyld 在严格2-范畴中引入，见 [DDS18]，当时称为*σ-(余)*极限；此前，Berman ∞曾在 24] 中研究了这类极限在 ℂat∞ 中的情形，其中图表由一个 ∞-范畴索引；第一作者在 [AG22]中以及 Gagna–Harpaz–Lanari 在 [GHL25]中则在更一般的情形下进行了研究。本节首先将通过部分（反）松弛变换的泛性质，定义 (∞,2)-范畴中的部分（反）松余极限，并推导出若干种等价刻画；特别地，我们将看到，我们的定义与 [GHL25]中的定义等价。

记号 5.1.1. 我们将 $(-)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{I},\mathbb{C})$ 称为对角函子，即转置后得到投影到第二个因子的函子。我们称此函子为常值图表 函子。

定义 5.1.2. 设 $(\mathbb{I}, E)$ 是一个带标记的 (∞,2)-范畴，且 $F\colon \mathbb{I} \to \mathbb{C}$ 是一个 (∞,2)-范畴之间的函子。我们称 $\mathbb{C}$ 的一个对象为：

- F 的 E-*(反)*松极限，记作 $\lim_{\mathbb{I}}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}} F$，如果存在函子之间的等价

$$\mathbb{C}(c, \lim_{\mathbb{I}}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}} F) \simeq \mathsf{Nat}_{\mathbb{I},\mathbb{C}}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}(\underline{c}, F)$$

  该等价关于 c 自然；

- F 的 E-*(反)*松余极限，记作 $\mathrm{colim}_{\mathbb{I}}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}} F$，如果存在函子之间的等价

$$\mathbb{C}(\mathrm{colim}_{\mathbb{I}}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}} F, c) \simeq \mathsf{Nat}_{\mathbb{I},\mathbb{C}}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}(F, \underline{c})$$

  即在 c 中自然。

在极小标记情形（$\mathbb{I}$，E）下，$= \mathbb{I}^{\flat}$ 我们将 E-(反)松(余)极限简称为（反）松（余）极限，记作 $\lim_{\mathbb{I}}^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}} F$ 和 $\mathrm{colim}_{\mathbb{I}}^{(\mathrm{op})\mathrm{lax}} F$。另一方面，在极大标记情形（$\mathbb{I}$，$E$）下，$= \mathbb{I}^{\sharp}$ 我们将它们称为强[3]（余）极限，记作 $\lim_{\mathbb{I}} F$ 和 $\mathrm{colim}_{\mathbb{I}} F$；在此不存在松与反松之间的区别，因为这两个泛性质分别等价于表示（余）预层 $\mathrm{Nat}_{\mathbb{I}}(c, F)$ 和 $\mathrm{Nat}_{\mathbb{I}}(F, c)$。

引理 5.1.3。 对于函子 $F\colon \mathbb{I} \to \mathbb{C}$ 和对象 $x \in \mathbb{C}$，以下各项等价：

- x 是 F 在 $\mathbb{C}$ 中的 E-松余极限。
- x 是 F^{op} 在 $\mathbb{C}^{\mathrm{op}}$ 中的 E-反松极限。
- x 是 F^{co} 在 $\mathbb{C}^{\mathrm{co}}$ 中的 E-反松余极限。
- x 是 F^{coop} 在 $\mathbb{C}^{\mathrm{coop}}$ 中的 E-松极限。

证明。 这由定义以及以下事实推出：Gray 张量积在 (∞,2)-范畴中，在 $(-)^{\mathrm{op}}$ 和 $(-)^{\mathrm{co}}$ 两种情形下，具有反转序的对称性，由此得到弱函子与余弱函子之间的等价（参见 [AGH25，观察 2.2。11]）。□

[3]我们将在稍后的例子中看到 5.2.5这些恰好对应于 锥形 富化范畴论意义下的余极限。

观察 5.1.4。 假设 $\mathbb{C}$ 存在由带标记的（∞,2)-范畴（$\mathbb{I}, E$）索引的所有部分（反）松弛（余）极限。那么，取 E-(反)松弛（余）极限将给出常值图表函子（–）的伴随： $\mathbb{C} \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{I}, \mathbb{C})^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$:

$$\underline{(-)}\colon \mathbb{C} \rightleftarrows \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{I}, \mathbb{C})^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}} \colon \varprojlim_{\mathbb{I}}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}},$$

$$\operatorname{colim}_{\mathbb{I}}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}} \colon \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{I}, \mathbb{C})^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}} \rightleftarrows \mathbb{C} \colon \underline{(-)}.$$

反过来，这类伴随函子的存在意味着 $\mathbb{C}$ 具有由（$\mathbb{I}, E$）索引的所有部分（反）松弛（余）极限。

为了比较我们对（反）松弛（余）极限的定义与 [GHL25], 中给出的定义，我们首先需要推导 ∞-范畴 $\mathrm{Nat}^{E\text{-}(\text{反})\text{松}}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(F, G)$ 的描述，为此我们使用以下记号：

定义 5.1.5。 设 $p\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}, q\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ 为（i, j）-纤维化，且（$\mathbb{C}, E$）为带标记的（∞,2）-范畴。对于 $i = 0$，我们用 $\mathbf{Fun}^{E\text{-余笛卡尔}/\mathbb{C}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ 表示 $\mathbf{Fun}_{/\mathbb{C}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ 的全子范畴，该子范畴由保持位于 E 上方的余笛卡尔 1-态射以及所有 j-笛卡尔 2-态射的函子所张成；对于 $i = 1$，我们类似地定义 $\mathbf{Fun}^{E\text{-笛卡尔}/\mathbb{C}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$。

命题 5.1.6. 设 $(\mathbb{A}, E)$ 是一个带标记的 $(\infty, 2)$-范畴。对于函子 $F, G\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$，我们有一个自然等价

$$\mathrm{Nat}^{E\text{-}\mathrm{lax}}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(F, G) \simeq \mathrm{Fun}^{(E)}_{/\mathbb{A}\times\mathbb{A}}(\mathbb{A}, (F, G)^*\, \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{B})),$$

其中右侧表示 ∞-范畴，其截面将E 中的边映为 $(F, G)^*\, \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{B})$中的交换方块。对偶地，在 E-*oplax* 情形下，我们有一个等价

$$\mathrm{Nat}^{E\text{-}\mathrm{oplax}}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(F, G)^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{Fun}^{(E)}_{/\mathbb{A}\times\mathbb{A}}(\mathbb{A}, (F, G)^*\, \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{lax}}(\mathbb{B})).$$

特别地，对于一个对象 $b \in \mathbb{B}$，我们有：

$$\mathrm{Nat}^{E\text{-}\mathrm{lax}}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(\underline{b}, G) \simeq \mathrm{Fun}^{E\text{-}\mathrm{coc}}_{/\mathbb{A}}(\mathbb{A}, G^*\mathbb{B}_b), \quad \mathrm{Nat}^{E\text{-}\mathrm{oplax}}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(\underline{b}, G)^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{Fun}^{E\text{-}\mathrm{coc}}_{/\mathbb{A}}(\mathbb{A}, G^*\mathbb{B}_b),$$

$$\mathrm{Nat}^{E\text{-}\mathrm{lax}}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(F, \underline{b}) \simeq \mathrm{Fun}^{E\text{-}\mathrm{cart}}_{/\mathbb{A}}(\mathbb{A}, F^*\mathbb{B}_b), \quad \mathrm{Nat}^{E\text{-}\mathrm{oplax}}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(F, \underline{b})^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{Fun}^{E\text{-}\mathrm{cart}}_{/\mathbb{A}}(\mathbb{A}, F^*\mathbb{B}_b).$$

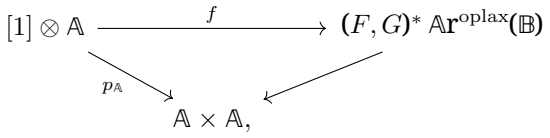
证明。 我们将先详细处理 E-lax 情形，然后说明如何调整论证以推出 E-oplax 情形下的结果。注意，我们有一个自然等价

$$\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{B})^{\mathrm{lax}}) \simeq \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{B}))^{\mathrm{lax}}$$

根据 [AGH25，引理 2.2.9]。将 $\mathrm{Nat}^{\mathrm{lax}}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(F, G)$ 识别为左侧在 F, G 上方的纤维，我们得到

$$\mathrm{Nat}^{\mathrm{lax}}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(F, G) \simeq \mathbb{F}\mathrm{un}_{/\mathbb{A}\times\mathbb{A}}(\mathbb{A}, (F, G)^*\, \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{B}))^{\mathrm{lax}}.$$

我们断言，右侧实际上属于 ∞-范畴 $\mathbf{Fun}_{/\mathbb{A}\times\mathbb{A}}(\mathbb{A}, (F, G)^*\, \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{B}))$。为此，只需证明对于任意交换图



映射 f 可经由笛卡尔积 $[1]\times\mathbb{A}$分解，其中 $p_{\mathbb{A}}$ 由投影到 $\mathbb{A}$ 后接对角映射给出。这是因为$p_{\mathbb{A}}$ 可经由 $[1]\times\mathbb{A}$ 分解，再结合 [AGH25，命题 2.4。3]。

为处理 E-松弛情形，我们注意到 $\mathrm{Nat}^{E\text{-lax}}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(F,G)$ 是 $\mathrm{Nat}^{\mathrm{lax}}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(F,G)$ 的一个全子范畴。沿着上述等价关系追溯可知，一个 E-松弛自然变换对应于一个截面，该截面将 E 中的边映射为 $(F,G)^*\,\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{B})$ 中的一个交换方块。

在 oplax 情形下，我们利用等价关系 $\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{lax}}(\mathbb{X})\simeq(\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{X}^{\mathrm{op}}))^{\mathrm{op}}$，将 $(x,y)\in\mathbb{X}\times\mathbb{X}$ 处的纤维识别为

$$\mathbb{X}^{\mathrm{op}}(y,x)^{\mathrm{op}}\simeq\mathbb{X}(x,y)^{\mathrm{op}}.$$

因此，我们可以将 $\mathrm{Nat}^{\mathrm{oplax}}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(F,G)^{\mathrm{op}}$ 识别为一个纤维，位于

$$\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{lax}}(\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A},\mathbb{B})^{\mathrm{oplax}})\simeq\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A},\mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{lax}}(\mathbb{B}))^{\mathrm{oplax}},$$

并按照松弛情形中的做法继续。 □

推论 5.1.7。对于 $F\colon\ \mathbb{A}\to\mathbb{B}$ 和 $b\in\mathbb{B}$，我们有自然等价

$$\mathrm{Nat}^{E\text{-lax}}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(\underline{b},F)\simeq\mathrm{Nat}^{E\text{-lax}}_{\mathbb{A},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(\underline{*},\mathbb{B}(b,F(-))),\tag{5.1}$$

$$\mathrm{Nat}^{E\text{-lax}}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(F,\underline{b})\simeq\mathrm{Nat}^{E\text{-oplax}}_{\mathbb{A}^{\mathrm{op}},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(\underline{*},\mathbb{B}(F(-),b)),\tag{5.2}$$

$$\mathrm{Nat}^{E\text{-oplax}}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(\underline{b},F)\simeq\mathrm{Nat}^{E\text{-oplax}}_{\mathbb{A},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(\underline{*},\mathbb{B}(b,F(-))),\tag{5.3}$$

$$\mathrm{Nat}^{E\text{-oplax}}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(F,\underline{b})\simeq\mathrm{Nat}^{E\text{-lax}}_{\mathbb{A}^{\mathrm{op}},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(\underline{*},\mathbb{B}(F(-),b)).\tag{5.4}$$

证明。由命题 5.1.6 可得 $\mathrm{Nat}^{E\text{-lax}}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(b,F)\simeq\mathrm{Fun}^{E}\text{-余笛卡尔纤维化}/\mathbb{A}(\mathbb{A},F^*\mathbb{B}_b^{\mathrm{oplax}})$，其中右侧是在 $\mathbb{F}\mathrm{ib}^{(0,1)}_{/\mathbb{A}\,E}(\,,\,)$中的映射 ∞-范畴。在直化下，$\mathbb{A}$ 的恒等映射对应于常值函子 $*$，而 $\mathbb{B}_b$ 对应于 $\mathbb{B}(b,-)$，由 [Lur09b，命题 4.1.8]；因此沿 F 的拉回对应于$\mathbb{B}(b,F(-))$，正如所需。完全类似的论证表明，等价 (5.2) 也成立。

现在考察 $\mathrm{Nat}^{E\text{-oplax}}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}(b,F)^{\mathrm{op}}\simeq\mathrm{Fun}^{E}\text{-余笛卡尔纤维化}/\mathbb{A}(\mathbb{A},F^*\mathbb{B}_b)$，并注意到，对 ∞-范畴取对范畴后，我们可以得到一个等价

$$\mathrm{Fun}^{E\text{-coc}}_{/\mathbb{A}}(\mathbb{A},F^*\mathbb{B}_b\,)\simeq\mathrm{Fun}^{E\text{-cart}}_{/\mathbb{A}^{\mathrm{op}}}(\mathbb{A}^{\mathrm{op}},(F^*\mathbb{B}_b\,)^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}.$$

最后我们看到$(F^*\mathbb{B}_b)^{\mathrm{op}}$ 是分类函子$\mathbb{B}(b,F(-))^{\mathrm{op}}$ 的$(1,0)$-纤维化，因此由定理 2.4.12 可得

$$\mathrm{Fun}^{E\text{-cart}}_{/\mathbb{A}^{\mathrm{op}}}(\mathbb{A}^{\mathrm{op}},(F^*\mathbb{B}_b\,)^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}\simeq\mathrm{Nat}^{E\text{-oplax}}_{\mathbb{A},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(\underline{*},\mathbb{B}(b,F(-)))^{\mathrm{op}},$$

而情形（5.3）随之得证。对于（5.4），其余验证由对偶论证得出。□

推论 5.1.8。对于 $F\colon\ \mathbb{A}\to\mathbb{B}$，$F$ 的 E-（反）松（余）极限可由以下关于 $\mathbb{C}$ 处$_\infty$ 部分（*op*）*lax* 极限的（余）可表性性质唯一刻画：

- $\mathbb{B}(b,\ \lim^{E\text{-lax}}_{\mathbb{A}}F)\simeq\lim^{E\text{-lax}}_{\mathbb{A}}\mathbb{B}(b,\ F)$,
- $\mathbb{B}(\mathrm{colim}^{E\text{-lax}}_{\mathbb{A}}F,\ b)\simeq\lim^{E\text{-oplax}}_{\mathbb{A}^{\mathrm{op}}}\mathbb{B}(F,\ b)$,
- $\mathbb{B}(b,\ \lim^{E\text{-oplax}}_{\mathbb{A}}F)\simeq\lim^{E\text{-oplax}}_{\mathbb{A}}\mathbb{B}(b,\ F)$,

▶ $\mathbb{B}(\mathrm{colim}_{\mathbb{A}}^{E\text{-oplax}} F, b) \simeq \lim_{\mathbb{A}^{\mathrm{op}}}^{E\text{-lax}} \mathbb{B}(F, b)$.

证明。 我们证明第一个陈述；其余部分的证明类似。这里有

$$\begin{aligned}\mathbb{B}(b, \lim_{\mathbb{A}}^{E\text{-lax}} F) &\simeq \mathsf{Nat}_{\mathbb{A},\mathbb{B}}^{E\text{-lax}}(\underline{b}, F)\\ &\simeq \mathsf{Nat}_{\mathbb{A},\mathsf{Cat}_\infty}^{E\text{-lax}}(\underline{*}, \mathbb{B}(b, F))\\ &\simeq \mathsf{Fun}(*, \lim_{\mathbb{A}}^{E\text{-lax}} \mathbb{B}(b, F))\\ &\simeq \lim_{\mathbb{A}}^{E\text{-lax}} \mathbb{B}(b, F),\end{aligned}$$

其中，第一个和第三个等价来自 E-松极限的定义，第二个来自推论 5.1.7，最后一个显然。 □

结合 [GHL25，推论 5.1.7], ，我们得到与 Gagna–Harpaz–Lanari 定义的如下比较：

推论 5.1.9。 设 $(\mathbb{A}, E)$ 是一个带标记的 $(\infty,$ -范畴。按照上文的定义，函子 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 的 E-*(反)*松*(余)*极限与 F 中定义的内、外（余）极限一致，具体如下： [GHL25] ： [4]

▶ E-松极限 F 是 F的内极限，▶ E-反松极限 F 是 F的外极限，▶ E-松余极限 F 是 F的外余极限，▶ E-反松余极限 F 是 F的内余极限。

□

注 5.1.10。根据观察 4.2.10，证明对象 $c \in \mathbb{C}$ 是 E- oplax 余极限 $F\colon \mathbb{I} \to \mathbb{C}$ 等价于证明 (0,1)-纤维化 $\mathbb{C}_F^{E\text{-oplax}} \to \mathbb{C}$可由 Proposition c 中的对象表示，见命题 4.2.9。由引理 2.5.6 可将这样的对象视为满足命题 $\mathbb{J}^{\triangleright}_{E\text{-oplax}} \to \mathbb{C}$ 4.2.9 条件的函子。这类部分松弛锥与余锥可识别为 [GHL25，§6] 中使用的内、外（余）极限锥。

5.2. **（(∞,2)-范畴中的加权（余）极限**。在 V-富化（∞-）范畴论中，（余）极限的一般概念是 V-加权 （余）极限。本节首先回顾 Cat_∞-加权（余）极限在 $(\infty,2)$-范畴中的定义，并利用我们对后者的新描述，简要证明它们可描述为 [GHL25] 中的部分（反）松弛（余）极限。接着，我们证明任意部分（反）松弛（余）极限也可表示为显式的加权（余）极限。由此可得，部分松弛、部分反松弛以及加权（余）极限理论彼此等价，因此它们都导出相同的（余）完备$(\infty,2)$-范畴及其间的（余）连续函子概念；因此，我们对 [GHL25，§62]中的主要结果给出了与模型无关的处理。

定义 5.2.1. 对于 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$和 $W\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}$在$\infty$处， W-加权极限 F（若存在）是对象 $\lim_{\mathbb{A}}^{W} F$ of $\mathbb{B}$ ，由以下泛性质刻画

$$\mathbb{B}(b, \lim_{\mathbb{A}}^{W} F) \simeq \mathsf{Nat}_{\mathbb{A},\mathsf{Cat}_\infty}(W, \mathbb{B}(b, F)).$$

[4]此处极限与余极限在 lax/oplax 与内/外配对上的不一致，是由于（5.2）中从 lax 到 oplax 的转换所致，而该转换并未出现在（5.1）。

对偶地，对于 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 和 $W\colon \mathbb{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}$在$\infty$处， W-加权余极限 F（若存在）是对象 $\mathrm{colim}_{\mathbb{A}}^{W} F$，由以下泛性质刻画

$$\mathbb{B}(\mathrm{colim}_{\mathbb{A}}^{W} F, b) \simeq \mathsf{Nat}_{\mathbb{A}^{\mathrm{op}},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(W, \mathbb{B}(F,b)).$$

观察 5.2.2。 对于函子 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$，我们有

$$\begin{aligned}\mathsf{Fun}(\mathsf{C}, \lim_{\mathbb{A}}^{W} F) &\simeq \mathsf{Nat}_{\mathbb{A},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(W, \mathsf{Fun}(\mathsf{C}, F)) \\ &\simeq \mathsf{Nat}_{\mathbb{A},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(W \times \mathsf{C}, F) \\ &\simeq \mathsf{Fun}(\mathsf{C}, \mathsf{Nat}_{\mathbb{A},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(W, F)).\end{aligned}$$

因此，根据 Yoneda 引理，我们可以用自然等价来描述 $\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$ 中的加权极限

$$\lim_{\mathbb{A}}^{W} F \simeq \mathsf{Nat}_{\mathbb{A},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(W, F).$$

因此，我们也可以用自然等价来刻画函子 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$的加权（余）极限

$$\mathbb{B}(b, \lim_{\mathbb{A}}^{W} F) \simeq \lim_{\mathbb{A}}^{W} \mathbb{B}(b, F)$$

对于 $W\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$，以及

$$\mathbb{B}(\mathrm{colim}_{\mathbb{B}}^{W} F, b) \simeq \lim_{\mathbb{A}^{\mathrm{op}}}^{W} \mathbb{B}(F, b)$$

对于 $W\colon \mathbb{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$。

例 5.2.3。 给定一个 ∞-范畴 A，以及一个对象 c （位于一个 $(\infty, 2)$-范畴 $\mathbb{C}$ 中），我们可以考虑由 $[0] \xrightarrow{\mathsf{A}} \mathbb{C}$ 加权的 $[0] \xrightarrow{c} \mathbb{C}$ 在 ∞ 处的余极限。我们将其记为

$$\mathsf{A} \boxtimes c := \mathrm{colim}_{[0]}^{\mathsf{A}} c;$$

其泛性质是存在一个自然等价

$$\mathbb{C}(\mathsf{A} \boxtimes c, c') \simeq \mathsf{Fun}(\mathsf{A}, \mathbb{C}(c, c')),$$

因此，这恰好是 c 被 A 张量化。类似地，加权极限

$$c^{\mathsf{A}} := \lim_{[0]}^{\mathsf{A}} c$$

是 c 被 A 余张量化，满足

$$\mathbb{C}(c', c^{\mathsf{A}}) \simeq \mathsf{Fun}(\mathsf{A}, \mathbb{C}(c, c')).$$

观察 5.2.4。 假设 X 是一个 ∞-群胚。那么对于 $W\colon X \to \mathbb{C}$ 在 ∞ 处以及 $F\colon X \to \mathbb{C}$，我们有

$$\mathrm{colim}_{X}^{W} F \simeq \mathrm{colim}_{x \in X} W(x) \boxtimes F(x),$$

因为根据定义，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{C}(\mathrm{colim}_{X}^{W} F, c) &\simeq \mathsf{Nat}_{X,\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(W, \mathbb{C}(F, c)) \\ &\simeq \lim_{x \in X} \mathsf{Fun}(W(x), \mathbb{C}(F(x), c)) \\ &\simeq \lim_{x \in X} \mathbb{C}(W(x) \boxtimes F(x), c) \\ &\simeq \mathbb{C}(\mathrm{colim}_{x \in X} W(x) \boxtimes F(x), c),\end{aligned}$$

其中第二个等价成立，因为 $\mathbb{F}\mathsf{un}(X, \mathbb{C}) \simeq \lim_X \mathbb{C}$。

例 5.2.5。 给定一个函子 $F\colon \mathbb{J} \to \mathbb{C}$，我们总可以考虑这个权 $\underline{*}\colon \mathbb{J} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$ 在终对象处为常值。在这种情况下，锥形极限 $\lim^*_{\mathbb{J}} F$ 的泛性质与强极限 $\lim_{\mathbb{J}} F$ 的泛性质相同：存在自然等价

$$\mathbb{C}(c, \lim^*_{\mathbb{J}} F) \simeq \mathsf{Nat}_{\mathbb{J},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(\underline{*}, \mathbb{C}(c, F)) \simeq \mathsf{Nat}_{\mathbb{J},\mathbb{C}}(\underline{c}, F) \simeq \mathbb{C}(c, \lim_{\mathbb{J}} F)$$

根据推论 5.1.7。在 $F\colon \mathsf{J} \to \mathbb{C}$ 是来自一个 ∞-范畴的函子的情况下，我们还有

$$\mathbb{C}(c, \lim^*_{\mathsf{J}} F)^{\simeq} \simeq \mathsf{Nat}_{\mathsf{J},\mathbb{C}}(\underline{c}, F)^{\simeq} \simeq \mathsf{Nat}_{\mathsf{J},\mathbb{C}^{\leq 1}}(\underline{c}, F^{\leq 1})$$

因为 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathsf{J}\ \mathbb{C})^{\leq 1} \simeq \mathrm{Fun}(\mathsf{J}\ \mathbb{C}^{\leq 1})$。因此，在这种情况下，锥形极限 $\lim^*_{\mathsf{J}} F$ 也是将 F 视为底层 ∞-范畴 $\mathbb{C}^{\leq 1}$ 中的图表时的普通极限。特别地，如果我们知道 $\mathbb{C}$ 具有由某个 ∞-范畴索引的锥形极限/强极限，要确定它，只需考虑 $\mathbb{C}^{\leq 1}$ 中的极限。

现在我们证明，加权极限可以表示为松极限和反松极限；此前 [GHL25，命题 6.23] 中已证明这一点。

命题 5.2.6。 对于 $W\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ 在 ∞ 以及 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$，设 $p\colon \mathbb{W} \to \mathbb{A}$ 是 W 上的 $(0, 1)$-纤维化，且 $q\colon \mathbb{W}' \to \mathbb{A}^{\mathrm{op}}$ 是 $(1, 0)$-纤维化。若 C 是 $\mathbb{W}$ 中 p-余笛卡尔态射的集合，而 C' 是 $\mathbb{W}'$ 中 q-笛卡尔态射的集合，则有等价

$$\begin{aligned}\lim^W_{\mathbb{A}} F &\simeq \lim^{C\text{-lax}}_{\mathbb{W}} F \circ p \\ &\simeq \lim^{C'\text{-oplax}}_{\mathbb{W}'^{\mathrm{op}}} F \circ q^{\mathrm{op}}.\end{aligned}$$

证明。 我们先考虑松弛情形。令 $b \in \mathbb{B}$，并注意到我们有自然等价

$$\begin{aligned}\mathbb{B}(b, \lim^W_{\mathbb{A}} F) &\simeq \mathsf{Nat}_{\mathbb{A},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(W, \mathbb{B}(b, F(-))) \\ &\simeq \mathsf{Fun}^{\mathrm{coc}}_{/\mathbb{A}}(\mathbb{W}, F^*\mathbb{B}_b) \\ &\simeq \mathsf{Fun}^{C\text{-coc}}_{/\mathbb{W}}(\mathbb{W}, (F \circ p)^*\mathbb{B}_b),\end{aligned}$$

其中，第二个等价由直化给出，第三个等价则直接由基变换给出。我们还可见

$$\mathsf{Fun}^{C\text{-coc}}_{/\mathbb{W}}(\mathbb{W}, (F \circ p)^*\mathbb{B}_b) \simeq \mathsf{Nat}^{C\text{-lax}}_{\mathbb{W},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(\underline{*}, \mathbb{B}(b, F \circ p(-))) \simeq \mathsf{Nat}^{C\text{-lax}}_{\mathbb{W},\mathbb{B}}(\underline{b}, F \circ p),$$

其中，第一个等价由定理2.4.12 给出，第二个则用到了推论5.1.7。因此，两个泛性质如所需地一致。反松情形的证明类似，只需改用针对 $(1, 0)$-纤维化的直化。 □

对偶化后，我们同样有：

推论 5.2.7。 对于 $W\colon \mathbb{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}$ 在 ∞ 和 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$，令 $p\colon \mathbb{W} \to \mathbb{A}$ 为 W 的 $(1, 0)$-纤维化，令 $q\colon \mathbb{W}' \to \mathbb{A}^{\mathrm{op}}$ 为 $(0, 1)$-纤维化。若 C 是 $\mathbb{W}$ 中 p-笛卡尔态射的集合，而 C' 是 $\mathbb{W}'$ 中 q-余笛卡尔态射的集合，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{colim}^W_{\mathbb{A}} F &\simeq \mathrm{colim}^{C\text{-lax}}_{\mathbb{W}} F \circ p \\ &\simeq \mathrm{colim}^{C'\text{-oplax}}_{\mathbb{W}'^{\mathrm{op}}} F \circ q^{\mathrm{op}}.\end{aligned}$$

现在我们希望将部分（反）松弛（余）极限表示为加权（余）极限：

命题 5.2.8。 设$(\mathbb{A}, E)$为一个带标记的$(\infty,2)$-范畴，并考虑函子$F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$和 $D\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}$。则有等价

$$\lim_{\mathbb{A}}^{E\text{-lax}} DF \simeq \lim_{\mathbb{B}}^{\mathfrak{F}_{\mathbb{B}}^{(0,1)}(\mathbb{A},E)} D, \qquad \operatorname{colim}_{\mathbb{A}}^{E\text{-lax}} DF \simeq \operatorname{colim}_{\mathbb{B}}^{\mathfrak{F}_{\mathbb{B}}^{(1,0)}(\mathbb{A},E)} D,$$

$$\lim_{\mathbb{A}}^{E\text{-oplax}} DF \simeq \lim_{\mathbb{B}}^{\mathfrak{F}_{\mathbb{B}}^{(0,0)}(\mathbb{A},E)^{\mathrm{op}}} D, \qquad \operatorname{colim}_{\mathbb{A}}^{E\text{-oplax}} DF \simeq \operatorname{colim}_{\mathbb{B}}^{\mathfrak{F}_{\mathbb{B}}^{(1,1)}(\mathbb{A},E)^{\mathrm{op}}} F,$$

只要任一边在 $\mathbb{C}$中存在，其中权 $\mathfrak{F}_{\mathbb{B}}^{\epsilon}(\mathbb{A}, E)$ 如记号 *4.4.6*中所定义。

证明。 对于松极限，有等价

$$\mathsf{Nat}_{\mathbb{A},\mathbb{C}}^{E\text{-lax}}(\underline{c}, DF) \simeq \mathsf{Nat}_{\mathbb{A},\mathsf{Cat}_\infty}^{E\text{-lax}}(\underline{*}, \mathbb{C}(c, DF(-))) \simeq \mathbb{1}\mathsf{Fib}^{(0,1)}_{/(\mathbb{A},E)}(\mathbb{A}, F^*D^*\mathbb{C}_c\ ).$$

这里右侧等价于映射 ∞-范畴

$$\mathbb{M}\mathsf{Cat}_{(\infty,2)/\mathbb{A}^\sharp}((\mathbb{A}, E), F^*D^*(\mathbb{C}_c\ )^\natural) \simeq \mathbb{M}\mathsf{Cat}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^\sharp}((\mathbb{A}, E), D^*(\mathbb{C}_c\ )^\natural)$$

其中 $F^*D^*(\mathbb{C}_c\ )^\natural$ 是由余笛卡尔1-态射给出的典范标记。根据推论 4.4.7，它自然等价于 $\mathsf{Nat}_{\mathbb{B},\mathsf{Cat}_\infty}(\mathfrak{F}_{\mathbb{B}}^{(0,1)}(\mathbb{A}, E)\ \mathbb{C}(c, D))$，因此我们有

$$\mathsf{Nat}_{\mathbb{A},\mathbb{C}}^{E\text{-lax}}(\underline{c}, DF) \simeq \mathsf{Nat}_{\mathbb{B},\mathsf{Cat}_\infty}(\mathfrak{F}_{\mathbb{B}}^{(0,1)}(\mathbb{A}, E), \mathbb{C}(c, D)).$$

由 Yoneda 引理可知， $\mathbb{C}$ 的一个对象表示左侧，即它是 DF 的 E-松极限，当且仅当它表示右侧，即它是 F 的一个 $\mathfrak{F}_{\mathbb{B}}^{(0,1)}(\mathbb{A},\ E)$-加权极限。其他情形的证明类似。□

作为一个特例，我们对自由纤维化的刻画给出了 [GHL25，推论 6.211]： 的以下更明确版本

推论 5.2.9。设 $(\mathbb{C}, E)$ 是一个带标记的 $(\infty,2)$-范畴，并考虑一个函子$F\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{D}$。那么我们有等价

$$\lim_{\mathbb{C}}^{E\text{-lax}} F \simeq \lim_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{F}_{\mathbb{C}}^{(0,1)}(\mathbb{C},E)} F, \qquad \operatorname{colim}_{\mathbb{C}}^{E\text{-lax}} F \simeq \operatorname{colim}_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{F}_{\mathbb{C}}^{(1,0)}(\mathbb{C},E)} F,$$

$$\lim_{\mathbb{C}}^{E\text{-oplax}} F \simeq \lim_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{F}_{\mathbb{C}}^{(0,0)}(\mathbb{C},E)} F, \qquad \operatorname{colim}_{\mathbb{C}}^{E\text{-oplax}} F \simeq \operatorname{colim}_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{F}_{\mathbb{C}}^{(1,1)}(\mathbb{C},E)} F.$$

只要任一侧在 $\mathbb{D}$ 中存在即可。 □

结合推论 5.2.9和命题 5.2.6，我们已经证明，部分松极限和反松极限都可以表示为加权极限，反之亦然，因此从某种意义上说，这三类极限彼此等价。特别地，这意味着：

推论 5.2.10。 对于一个$(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{C}$，以下条件等价：

(1) $\mathbb{C}$ 具有所有小的部分松弛（余）极限。

(2) $\mathbb{C}$ 具有所有小的部分反松弛（余）极限。

(3) $\mathbb{C}$ 具有所有小的Cat_∞-加权（余）极限。 □

定义 5.2.11. 我们称 $\mathbb{C}$ 是 （余）完备的，如果推论 5.2.10 中的任一条件成立。给定一个函子 $f\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{D}$，即 $(\infty,\ 2)$-范畴之间的函子，我们称 f 是 （余）连续的，如果它保持所有小的部分（反）松弛（余）极限（从而保持所有小的 Cat_∞-加权（余）极限）。

我们指出如下关于加权（余）极限的标准分解结果：

命题 5.2.12。设有 $W\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$ 以及 $F\colon \mathbb{C}\to\mathbb{D}$。如果可以将 $\mathbb{C}\simeq \mathrm{colim}_{j\in\mathbb{J}}\mathbb{C}_j$ 表示为某个图表 $\mathbb{J}\to\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$，并将 W_j、F_j 表示为 W 和 F 到 $\mathbb{C}_j$的限制，那么有

$$\lim_{\mathbb{C}}^{W} F\simeq \lim_{\mathbb{J}^{\mathrm{op}}}\lim_{\mathbb{C}_j}^{W_j} F_j,$$

或者更准确地说，如果右侧在 $\mathbb{D}$ 中存在，那么它就是 W加权的 F的极限。

证明。由于 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C},\mathbb{D})\simeq\lim_{j\in\mathbb{J}^{\mathrm{op}}}\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C}_j,\mathbb{D})$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(d,\lim_{\mathbb{C}}^{W}F)&\simeq \mathsf{Nat}_{\mathbb{C},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(W,\mathbb{D}(d,F))\\&\simeq\lim_{j\in\mathbb{J}^{\mathrm{op}}}\mathsf{Nat}_{\mathbb{C}_j,\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(W_j,\mathbb{D}(d,F_j))\\&\simeq\lim_{j\in\mathbb{J}^{\mathrm{op}}}\mathbb{D}(d,\lim_{\mathbb{C}_j}^{W_j}F_j)\\&\simeq\mathbb{D}(d,\lim_{j\in\mathbb{J}^{\mathrm{op}}}\lim_{\mathbb{C}_j}^{W_j}F_j),\end{aligned}$$

如所要求。 □

命题 5.2.13。对于 $\Phi\colon \mathbb{J}\to\mathbb{P}\mathbb{S}\mathrm{h}(\mathbb{C})$，$W\in\mathbb{P}\mathbb{S}\mathrm{h}(\mathbb{J})$ 以及 $F\colon \mathbb{C}\to\mathbb{D}$，有

$$\mathrm{colim}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{colim}_{\mathbb{J}}^{W}\Phi}F\simeq\mathrm{colim}_{\mathbb{J}}^{W}(\mathrm{colim}_{\mathbb{C}}^{\Phi(-)}F),$$

如果右侧存在。

证明。我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(\mathrm{colim}_{\mathbb{J}}^{W}(\mathrm{colim}_{\mathbb{C}}^{\Phi(-)}F),d)&\simeq\mathsf{Nat}_{\mathbb{J}^{\mathrm{op}},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(W,\mathbb{D}(\mathrm{colim}_{\mathbb{C}}^{\Phi(-)}F,d))\\&\simeq\mathsf{Nat}_{\mathbb{J}^{\mathrm{op}},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(W,\mathsf{Nat}_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(\Phi,\mathbb{D}(F,d)))\\&\simeq\mathsf{Nat}_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(\mathrm{colim}_{\mathbb{J}}^{W}\Phi,\mathbb{D}(F,d))\\&\simeq\mathbb{D}(\mathrm{colim}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{colim}_{\mathbb{J}}^{W}\Phi}F,d),\end{aligned}$$

即，由这两个对象余表示的函子是等价的。 □

结合命题 5.2.8 和命题 5.2.13 我们得到关于部分（反）松余极限分解的以下结果。

命题 *5.2.14*。设 $(\mathbb{I},E)$ 是一个带装饰的 $(\infty,2)$-范畴，并考虑一个图表 $d\colon \mathbb{I}\to\mathbb{C}$。进一步设给定一个图表 $\tau\colon J\to \mathit{MCat}_{(\infty,2)}$，其指标范畴为 ∞-范畴 J，使得 τ 在 $\mathit{MCat}_{(\infty,2)}$ 中的余极限为 $(\mathbb{I},E)$，并且 $\mathbb{C}$ *admits* 具有形状 J 的强余极限。记作 $(\mathbb{I}_j,E_j)=\tau(j)$，并令 d_j 为沿着典范映射 $\mathbb{I}_j\to\mathbb{I}$ 对 d 的限制。如果 d 的部分（反）松余极限以及每个 d_j 的部分（反）松余极限在 $\mathbb{C}$ 中存在，则有一个等价

$$\mathrm{colim}_{\mathbb{I}}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}d\simeq\mathrm{colim}_{j\in\mathbb{J}}\mathrm{colim}_{\mathbb{I}_j}^{E_j\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}d_j.$$

证明。由命题 5.2.8 我们得到一个自然等价

$$\mathrm{colim}_{\mathbb{I}_j}^{E_j\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}d_j\simeq\mathrm{colim}_{\mathbb{I}}^{\mathfrak{F}^{\epsilon}(\mathbb{I}_j,E_j)}d$$

取 ϵ 的适当值。因此，我们可以将右侧重写为

$$\mathrm{colim}_{\mathbb{I}}^{\mathrm{colim}_{j\in\mathbb{J}}\mathfrak{F}^{\epsilon}(\mathbb{I}_j,E_j)}d.$$

还需注意，我们有一个等价

$$\mathfrak{F}^{\epsilon}(\mathbb{I}, E)) \simeq \mathrm{colim}_{j\in \mathsf{J}}\, \mathfrak{F}^{\epsilon}(\mathbb{I}_j, E_j);$$

这是因为自由1-纤维化是一个左伴随。 □

5.3. **（余）极限的$(\infty,2)$-范畴的纤维化描述。** 本节将利用直化，为 $\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$ 中的部分（反）松弛（余）极限提供纤维化描述。这扩展了（并重新得出了）Berman 关于 $\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$ 中图表的已知刻画，参见 [Ber24，定理 4。4]。Loubaton 已证明了(∞,∞)-范畴的类似结果；参见 [Lou24，例 4.2.3.12–13]。

记号 5.3.1. 设 $(\mathbb{A}, E)$ 是一个带标记的 $(\infty,2)$-范畴，且 $p\colon \mathbb{E} \to \mathbb{A}$ 是一个ϵ-纤维化，其对应对象为 $\epsilon = (i,j)$。我们记

$$\mathbb{E}^{\natural}|_E := \mathbb{E}^{\natural} \times_{\mathbb{A}^{\sharp\sharp}} (\mathbb{A}, E)^{\sharp}$$

对于带装饰的 $(\infty,2)$-范畴，我们只对位于 E 上方的 i-笛卡尔态射以及所有 j-笛卡尔 2-态射加以装饰。

命题 5.3.2. 设 $(\mathbb{A}, E)$ 是一个带标记的 $(\infty,2)$-范畴，并考虑一个函子 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$，其对应的 ϵ-纤维化为 $\mathbb{E}_\epsilon \to \mathbb{A}^{\epsilon\text{-}\mathrm{op}}$。于是，$F$ 的 E-(反)松余极限可描述为

$$\mathrm{colim}_{\mathbb{A}}^{E\text{-}\mathrm{lax}}\, F \simeq \tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}^{\natural}_{(0,j)}|_E), \quad \mathrm{colim}_{\mathbb{A}}^{E\text{-}\mathrm{oplax}}\, F \simeq \tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}^{\natural}_{(1,j)}|_E)$$

对于 $j = 0$、*1* 两者，其中局部化 $\tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}^{\natural}{}_{(i,j)}|_E)$ 是通过对位于 E 上方的 i-笛卡尔 *1*-态射以及 $\mathbb{E}_{(i,j)}$ 中的所有 j-笛卡尔 *2*-态射求逆得到的。

证明。 不失一般性，我们考虑 $\epsilon = (0,1)$ 的情形。由定理2.4.12 可知，我们有函子之间的自然等价

$$\mathsf{Nat}^{E\text{-}\mathrm{lax}}_{\mathbb{A},\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}}\left(F, \underline{(-)}\right) \simeq \mathsf{Fun}^{E\text{-}\mathrm{coc}}_{/\mathbb{A}}(\mathbb{E}_{(0,1)}, (-)\times\mathbb{A}).$$

这里，$\mathbb{B}$ 处的右侧是 $\mathbb{A}$上的函子 $\mathbb{E}_{(0,1)} \to \mathbb{B}\times\mathbb{A}$ 所构成的 ∞-范畴，这些函子保持 E上的笛卡尔 2-态射和余笛卡尔态射。在 $\mathbb{B}\times\mathbb{A}$中，这些是投影到 $\mathbb{B}$ 为等价的2-态射和态射，因此在该等价下

$$\mathsf{Fun}_{/\mathbb{A}}(\mathbb{E}_{(0,1)}, \mathbb{B}\times\mathbb{A}) \simeq \mathsf{Fun}(\mathbb{E}_{(0,1)}, \mathbb{B})$$

全子范畴$\mathsf{Fun}^{E\text{-}\mathrm{coc}/\mathbb{A}}(\mathbb{E}_{(0,1)},(-)\times\mathbb{A})$对应于$\mathsf{Fun}(\tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}^{\natural}{}_{(0,1)}|_E)\ \mathbb{B})$。换言之，我们有一个自然等价

$$\mathsf{Nat}^{E\text{-}\mathrm{lax}}_{\mathbb{A},\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}}\left(F, \underline{(-)}\right) \simeq \mathsf{Fun}(\tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}^{\natural}_{(0,1)}|_E), -),$$

这恰好将 $\tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}^{\natural}{}_{(0,1)}|_E)$等同于 F的 E-松余极限。 □

作为一个无需局部化的特例，我们得到了 ∞-范畴上的纤维化可表示为（反）松余极限（这一结果最早由 [GHN17] 针对取值于 $\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$的函子证明）：

推论 5.3.3。 设A 是一个 ∞-范畴。对于函子 $F\colon \mathsf{A} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$，其对应的0-纤维化为 $\mathbb{E}_0 \to \mathsf{A}$，而1-纤维化为 $\mathbb{E}_1 \to \mathsf{A}^{\mathrm{op}}$，我们有

$$\mathbb{E}_0 \simeq \mathrm{colim}_{\mathsf{A}}^{\mathrm{lax}} F, \quad \mathbb{E}_1 \simeq \mathrm{colim}_{\mathsf{A}}^{\mathrm{oplax}} F.$$

注记 5.3.4. 请注意，我们的结果并未给出 (∞,2)-范畴上纤维化的类似描述，因为命题 5.3.2 的等价总是要求我们将（余）笛卡尔 2-态射取逆；要避免这一点，想必需要一种 (∞,3)-范畴论意义下的（反）松余极限概念。

我们还可以描述 ∞-范畴的（反）松余极限：

推论 5.3.5. 设 $(\mathbb{A}, E)$ 是一个带标记的 (∞,2)-范畴，并考虑一个函子$F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$，其对应的 *1*-纤维化 ϵ-纤维化为 $\mathbb{E}_\epsilon \to \mathbb{A}^{\epsilon\text{-}\mathrm{op}}$。那么， F 在 $\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$ 中的 E-（反）松余极限可描述为

$$\mathrm{colim}_{\mathbb{A}}^{E\text{-}\mathrm{lax}} F \simeq \tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}^{\natural}_{(0,j)}|_E), \quad \mathrm{colim}_{\mathbb{A}}^{E\text{-}\mathrm{oplax}} F \simeq \tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}^{\natural}_{(1,j)}|_E)$$

对于 $j = 0,1$，其中 $\tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}^{\natural}{}_{(i,j)}|_E)$ 是通过对 E 上的 i-笛卡尔*1*-态射以及所有*2*-态射求逆得到的（因为在 *1*-纤维化的 (i,j)-纤维化中，所有 *2*-态射都是 j-笛卡尔的）。□

现在我们转而讨论部分（逆）松弛极限；为描述这些极限，我们引入以下记号：

定义 5.3.6. 设 $(\mathbb{A}, E)$ 是一个带标记的 (∞,2)-范畴，并设 $\mathbb{E}, \mathbb{F} \to \mathbb{A}$ 是 $\mathbb{A}$ 上两个 ϵ-纤维化，它们对应于 $\epsilon = (i,j)$。对于 $i = 0$，我们记

$$\mathbb{F}\mathrm{un}^{E\text{-}\mathrm{coc}}_{/\mathbb{A}}(\mathbb{E}, \mathbb{F}) := \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}_{/(\mathbb{A},E)^\sharp}(\mathbb{E}^{\natural}|_E, \mathbb{F}^{\natural}|_E)$$

由泛性质刻画的 (∞,2)-范畴

$$\mathsf{Fun}(\mathbb{X}, \mathbb{F}\mathrm{un}^{E\text{-}\mathrm{coc}}_{/\mathbb{A}}(\mathbb{E}, \mathbb{F})) \simeq \mathsf{Fun}^{E\text{-}\mathrm{coc}}_{/\mathbb{A}}(\mathbb{E} \times \mathbb{X}, \mathbb{F}),$$

即 $\mathbb{F}\mathrm{un}_{/\mathbb{A}}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ 的全子-$(\infty, 2)$-范畴，其对象由保持 E 上的余笛卡尔态射及 j-笛卡尔 2-态射的函子构成。（换言之，$\mathbb{F}\mathrm{un}^{E\text{-}\mathrm{coc}/\mathbb{A}}(-,-)$ 表示 $\mathrm{Fib}^{(0,j)}_{/\mathbb{A}}{}_{(-,E)}$ 上自然的 (∞, 3)- 范畴结构所对应的映射 $(\infty, 2)$- 范畴。）对于 $i = 1$，我们类似地定义 $\mathbb{F}\mathrm{un}^{E\text{-}\mathrm{cart}/\mathbb{A}}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$。

观察 5.3.7。 如果 $\mathbb{F} \to \mathbb{A}$ 是一个关于 $\epsilon = (0, j)$ 的 1-纤维化的 ϵ-纤维化，那么（∞，2）-范畴 $\mathbb{F}\mathrm{un}^{E\text{-}\mathrm{coc}/\mathbb{A}}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ 实际上是一个 ∞-范畴：任意 2-态射 $\mathbb{E} \times C_2 \to \mathbb{F}$在每个 $x \in \mathbb{E}$ 处都必须由 $\mathbb{F}$ 中的一个 2-态射给出，而该 2-态射映射到 $\mathbb{A}$中的一个等价，因此是可逆的，因为 $\mathbb{F}$ 中的所有 2-态射都是 j-笛卡尔的。

命题 5.3.8。 设 $(\mathbb{A}, E)$ 是一个带标记的 (∞，2)-范畴，并考虑一个函子$F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$，其对应的 ϵ-纤维化为 $\mathbb{E}_\epsilon \to \mathbb{A}^{\epsilon\text{-}\mathrm{op}}$。那么 *E-(反)*松极限 F 在 $\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$ 中可以描述为

$$\lim_{\mathbb{A}}^{E\text{-}\mathrm{lax}} F \simeq \mathbb{F}\mathrm{un}^{E\text{-}\mathrm{coc}}_{/\mathbb{A}^{\epsilon\text{-}\mathrm{op}}}(\mathbb{A}^{\epsilon\text{-}\mathrm{op}}, \mathbb{E}_{(0,j)}), \quad \lim_{\mathbb{A}}^{E\text{-}\mathrm{oplax}} F \simeq \mathbb{F}\mathrm{un}^{E\text{-}\mathrm{cart}}_{/\mathbb{A}^{\epsilon\text{-}\mathrm{op}}}(\mathbb{A}^{\epsilon\text{-}\mathrm{op}}, \mathbb{E}_{(1,j)})$$

对于 $j = 0,\ 1$。

证明。 不妨设 $\epsilon = (0, 1)$。注意到我们有自然等价

$$\mathsf{Fun}(-, \mathbb{F}\mathrm{un}^{E\text{-coc}}_{/\mathbb{A}}(\mathbb{A}, \mathbb{E}_{(0,1)})) \simeq \mathsf{Fun}^{E\text{-coc}}_{/\mathbb{A}}(\mathbb{A} \times (-), \mathbb{E}_{(0,j)}) \simeq \mathsf{Nat}^{E\text{-lax}}_{\mathbb{A}, \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}}\left(\underline{(-)}, F\right),$$

其中第一个等价是形式上的，第二个则用到了定理 2.4.12。因此，$(\infty, 2)$-范畴 $\mathbb{F}\mathrm{un}^{E\text{-coc}/\mathbb{A}}(\mathbb{A}, \mathbb{E}_{(0,1)})$ 具有 E-松极限的泛性质。□

对于一个 ∞-范畴，我们可以将（反）松极限描述为纤维化的截面（这同样归功于 [GHN17]，针对取值于 $\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$的函子）：

推论 5.3.9。 设 A 是一个 ∞-范畴。对于函子 $F\colon \mathsf{A} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$，其对应的 i-纤维化 $\mathbb{E}_i \to \mathsf{A}$ 对应于 $i = 0,1$，我们有

$$\lim^{\mathrm{lax}}_{\mathsf{A}} F \simeq \mathbb{F}\mathsf{un}_{/\mathsf{A}}(\mathsf{A}, \mathbb{E}_0), \quad \lim^{\mathrm{oplax}}_{\mathsf{A}} F \simeq \mathbb{F}\mathsf{un}_{/\mathsf{A}^{\mathrm{op}}}(\mathsf{A}^{\mathrm{op}}, \mathbb{E}_1). \quad \square$$

推论 5.3.10。 设 $(\mathbb{A}, E)$ 是一个带标记的 $(\infty,2)$-范畴，并考虑函子$F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$，其对应的 *1*-纤维化的 ϵ-纤维化为 $\mathbb{E}_\epsilon \to \mathbb{A}^{\epsilon\text{-op}}$。则 F 在 $\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$ 中的 E-（反）松极限可描述为

$$\lim^{E\text{-lax}}_{\mathbb{A}} F \simeq \mathsf{Fun}^{E\text{-coc}}_{/\mathbb{A}^{\epsilon\text{-op}}}(\mathbb{A}^{\epsilon\text{-op}}, \mathbb{E}_{(0,j)}), \quad \lim^{E\text{-oplax}}_{\mathbb{A}} F \simeq \mathsf{Fun}^{E\text{-cart}}_{/\mathbb{A}^{\epsilon\text{-op}}}(\mathbb{A}^{\epsilon\text{-op}}, \mathbb{E}_{(1,j)})$$

for $j = 0, 1$. □

注记 5.3.11. 在 $\mathbb{C}$处$_\infty$，推论5.3.10 中对（反）松极限的纤维化描述被 [AMGR24，§B6], 用作定义；其中这些极限被称为左松极限和右松极限；因此由推论 5.3.10可知，这些概念与文献中的其他松极限概念一致。

我们还注意到，我们的结果对于 $\mathbb{C}$处$_{(\infty,2)}$按 ∞-范畴索引的普通（余）极限的特化：

推论 5.3.12. 设有一个函子 $F\colon \mathsf{A} \to \mathbb{C}$处$_{(\infty,2)}$，其中 A 是一个∞-范畴，其对应的 0-纤维化为 $\mathbb{E}_0 \to \mathsf{A}$，*1*-纤维化为 $\mathbb{E}_1 \to \mathsf{A}^{\mathrm{op}}$。

(i) F 的余极限可描述为

$$\mathrm{colim}_{\mathsf{A}} F \simeq \tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}_i^{\natural})$$

对于 $i = 0,1$，其中 $\tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}_i^{\natural})$ 表示将所有（余）笛卡尔1-态射求逆的局部化。

(ii) F 的极限可以描述为

$$\lim_{\mathsf{A}} F \simeq \mathbb{F}\mathsf{un}^{\mathrm{coc}}_{/\mathsf{A}}(\mathsf{A}, \mathbb{E}_0) \simeq \mathbb{F}\mathsf{un}^{\mathrm{cart}}_{/\mathsf{A}^{\mathrm{op}}}(\mathsf{A}^{\mathrm{op}}, \mathbb{E}_1),$$

即，这些纤维化的（余）笛卡尔截面所成的（∞，2）-范畴。 □

利用命题 3.2.14，我们也可以类似地识别$\mathbb{D}\mathbb{C}$处$_{(\infty,2)}$的部分（反）松弛（余）极限：

推论 5.3.13。 设 $(\mathbb{A}, E)$ 为一个带标记的$(\infty,2)$-范畴，并考虑函子$F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$，其对应的带装饰的 ϵ-纤维化为 $\pi\colon \mathbb{E}_\epsilon^{\diamond} \to \mathbb{A}^{\sharp\sharp,\ \epsilon\text{-op}}$。

(1) F 在 $\mathbb{D}\mathrm{Cat}_{(\infty,2)}$ 中的 E*-(反)*松余极限可描述为以下推出

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^{\natural}_{(0,j)}|_E & \longrightarrow & \tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}^{\natural}_{(0,j)}|_E)^{\flat\flat} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{E}^{\diamond}_{(0,j)}|_E & \longrightarrow & \mathrm{colim}^{E\text{-lax}}_{\mathbb{A}} F, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{E}^{\natural}_{(1,j)}|_E & \longrightarrow & \tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}^{\natural}_{(1,j)}|_E)^{\flat\flat} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{E}^{\diamond}_{(1,j)}|_E & \longrightarrow & \mathrm{colim}^{E\text{-oplax}}_{\mathbb{A}} F, \end{array}$$

其中 $\mathbb{E}^{\diamond}_{\boldsymbol{\epsilon}}|_E$ 表示拉回 $\mathbb{E}^{\diamond} \times_{\mathbb{A}^{\sharp}, \boldsymbol{\epsilon}\text{-op}} (\mathbb{A}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-op}}, E)^{\sharp}$。换言之，我们将 E 上的 i-笛卡尔态射以及 $\mathbb{E}$ 中所有 j-笛卡尔 2-态射求逆，并赋予其由 $\mathbb{E}^{\diamond}_{\boldsymbol{\epsilon}}|_E$ 诱导的装饰。

(2) $\mathbb{D}\mathbb{C}$在$_{(\infty,2)}$ 中，F 的 E*-(反)*松极限可描述为

$$\begin{aligned} \lim^{E\text{-lax}}_{\mathbb{A}} F &\simeq \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}^{E\text{-coc}}_{/(\mathbb{A},E)^{\sharp}}((\mathbb{A},E)^{\sharp}, \mathbb{E}^{\diamond}_{(0,1)}|_E) \\ &\simeq \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}^{E\text{-coc}}_{/(\mathbb{A}^{\mathrm{co}},E)^{\sharp}}((\mathbb{A}^{\mathrm{co}},E)^{\sharp}, \mathbb{E}^{\diamond}_{(0,0)}|_E) \\ \lim^{E\text{-oplax}}_{\mathbb{A}} F &\simeq \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}^{E\text{-cart}}_{/(\mathbb{A}^{\mathrm{op}},E)^{\sharp}}((\mathbb{A}^{\mathrm{op}},E)^{\sharp}, \mathbb{E}^{\diamond}_{(1,0)}|_E) \\ &\simeq \mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}^{E\text{-cart}}_{/(\mathbb{A}^{\mathrm{coop}},E)^{\sharp}}((\mathbb{A}^{\mathrm{coop}},E)^{\sharp}, \mathbb{E}^{\diamond}_{(1,1)}|_E), \end{aligned}$$

其中右侧表示由以下对象构成的带装饰全子（∞，2）-范畴：

$$\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}_{/(\mathbb{A}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-op}},E)^{\sharp}}((\mathbb{A}^{\boldsymbol{\epsilon}\text{-op}},E)^{\sharp}, \mathbb{E}^{\diamond}_{\boldsymbol{\epsilon}}|_E)$$

由这样的截面张成：它们将 E 中的 *1*-态射映为 i-笛卡尔态射，并将所有 *2*-态射映为 $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ 中的 j-笛卡尔 *2*-态射。

证明。 我们对 (0,1-纤维化证明该命题，并简记 $\mathbb{E}^{\diamond} := \mathbb{E}^{\diamond}_{(0,1)^{\circ}}$ 由命题 3.2.14，我们有自然等价

$$\mathsf{Nat}^{E\text{-lax}}_{\mathbb{A},\mathbb{D}\mathrm{Cat}_{(\infty,2)}}(F, \underline{\mathbb{C}^{\diamond}}) \simeq \mathsf{DFun}^{E\text{-coc}}_{/(\mathbb{A},E)^{\sharp}}(\mathbb{E}^{\diamond}|_E, \mathbb{C}^{\diamond} \times (\mathbb{A},E)^{\sharp}).$$

这里右侧是关于 $(\mathbb{A},E)^{\sharp}$ 的 ∞-范畴，其中的装饰函子还保持在 E 上的余笛卡尔态射以及笛卡尔 2-态射；我们可以将其识别为把后者映为等价的装饰函子 $\mathbb{E}^{\diamond}|_E \to \mathbb{C}^{\diamond}$，由此可知，这个余预层由推出$\mathbb{E}^{\diamond}|_E \amalg_{\mathbb{E}^{\natural}|_E} \tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}^{\natural}|_E)^{\flat\flat}$余表示，正如所需。

为识别 F 的 E-松极限，我们同样考虑自然等价

$$\mathsf{Nat}^{E\text{-lax}}_{\mathbb{A},\mathbb{D}\mathrm{Cat}_{(\infty,2)}}(\underline{\mathbb{C}^{\diamond}}, F) \simeq \mathsf{DFun}^{E\text{-coc}}_{/(\mathbb{A},E)^{\sharp}}(\mathbb{C}^{\diamond} \times (\mathbb{A},E)^{\sharp}, \mathbb{E}^{\diamond}|_E).$$

我们可以将其识别为从 $\mathbb{C}^{\diamond}$ 到

$$\mathbb{D}\mathbb{F}\mathrm{un}_{/(\mathbb{A},E)^{\sharp}}((\mathbb{A},E)^{\sharp}, \mathbb{E}^{\diamond}|_E)$$

的装饰函子的 E-范畴；这些函子在每个对象处都将 E 中的态射映为 $\mathbb{E}$ 中的余笛卡尔态射，并将所有 2-态射映为 $\mathbb{E}$ 中的笛卡尔 2-态射，正如所需。□

最后，将我们对 $\mathbb{C}$在$_{(\infty,2)}$中的部分（反）松弛（余）极限的描述，与前一小节中将加权（余）极限解释为部分（反）松弛（余）极限的结果相结合，我们还可以得到$\mathbb{C}$在$_{(\infty,2)}$中的加权（余）极限的具体描述。对于极限，命题 5.2.6 给出：

推论 5.3.14。对于 $W\colon\ \mathbb{A} \to \mathbb{C}$在$_{\infty}$ 以及 $F\colon\ \mathbb{A} \to \mathbb{C}$在$_{(\infty,2)}$，令

- $\mathbb{W} \to \mathbb{A}$ 是 W 的 $(0,1)$-纤维化，

- $\mathbb{W}' \to \mathbb{A}^{\mathrm{op}}$ 是 W 的 $(1,0)$-纤维化，
- $\mathbb{E} \to \mathbb{A}$ 是 F 的 $(0,1)$-纤维化，
- $\mathbb{E}' \to \mathbb{A}^{\mathrm{op}}$ 是 F 的 $(1,0)$-纤维化。

于是我们有

$$\lim_{\mathbb{A}}^{W} F \simeq \mathbb{F}\mathrm{un}^{\mathrm{coc}}_{/\mathbb{A}}(\mathbb{W},\mathbb{E}) \simeq \mathbb{F}\mathrm{un}^{\mathrm{cart}}_{/\mathbb{A}^{\mathrm{op}}}(\mathbb{W}',\mathbb{E}'). \quad \square$$

对偶地，推论 5.2.7 给出如下结论：

推论 5.3.15. 对于 $W\colon\ \mathbb{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}\text{在}\infty$ 和 $F\colon\ \mathbb{A} \to \mathbb{C}\text{在}(\infty,2)$，设

- $\mathbb{W} \to \mathbb{A}$ 是 W 的$(1,\ 0)$-纤维化；
- $\mathbb{W}' \to \mathbb{A}^{\mathrm{op}}$ 是 W 的$(0,\ 1)$-纤维化；
- $\mathbb{E} \to \mathbb{A}$ 是 F 的$(0,\ 1)$-纤维化；
- $\mathbb{E}' \to \mathbb{A}^{\mathrm{op}}$ 是 F 的$(1,\ 0)$-纤维化。

于是我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{colim}_{\mathbb{A}}^{W} F &\simeq \tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}^{\natural} \times_{\mathbb{A}^{\sharp\sharp}} (\mathbb{W},C)^{\sharp}) \\ &\simeq \tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}'^{\natural} \times_{\mathbb{A}^{\mathrm{op},\sharp\sharp}} (\mathbb{W}',C')^{\sharp}).\end{aligned}$$

其中，C 由 $\mathbb{W}$ 中的笛卡尔态射组成，而 C' 由 $\mathbb{W}'$中的余笛卡尔态射组成。

注记 5.3.16。 在 F 和 W 是普通范畴的图表这一特殊情形下，Cat-加权余极限在 Cat 中的这个公式见于 [Lam17]。

利用推论 5.3.13，我们可以得到$\mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$中加权余极限的类似描述：

推论 5.3.17。 对于 $W\colon\ \mathbb{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_{\infty}$ 和 $F\colon\ \mathbb{A} \to \mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$，令

- $\mathbb{W} \to \mathbb{A}$ 是对应于 W的$(1,\ 0)$-纤维化，
- $\mathbb{W}' \to \mathbb{A}^{\mathrm{op}}$ 是对应于 W的$(0,\ 1)$-纤维化，
- $\mathbb{E}^{\diamond} \to \mathbb{A}^{\sharp\sharp}$ 是对应于 F的带装饰$(0,\ 1)$-纤维化，
- $\mathbb{E}'^{\diamond} \to \mathbb{A}^{\mathrm{op},\ \sharp\sharp}$ 是对应于 F的带装饰$(1,\ 0)$-纤维化。

那么，W加权的余极限 F 由以下推出给出

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{E}^{\natural} \times_{\mathbb{A}^{\sharp\sharp}} (\mathbb{W},C)^{\sharp} & \longrightarrow & \tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}^{\natural} \times_{\mathbb{A}^{\sharp\sharp}} (\mathbb{W},C)^{\sharp})^{\flat\flat} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{E}^{\diamond} \times_{\mathbb{A}^{\sharp\sharp}} (\mathbb{W},C)^{\sharp} & \longrightarrow & \mathrm{colim}_{\mathbb{A}}^{W} F,\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{E}'^{\natural} \times_{\mathbb{A}^{\mathrm{op},\sharp\sharp}} (\mathbb{W}',C')^{\sharp} & \longrightarrow & \tau_{\mathrm{d}}(\mathbb{E}'^{\natural} \times_{\mathbb{A}^{\mathrm{op},\sharp\sharp}} (\mathbb{W}',C')^{\sharp})^{\flat\flat} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{E}'^{\diamond} \times_{\mathbb{A}^{\mathrm{op},\sharp\sharp}} (\mathbb{W}',C')^{\sharp} & \longrightarrow & \mathrm{colim}_{\mathbb{A}}^{W} F,\end{array}$$

其中，C 由 $\mathbb{W}$ 中的笛卡尔态射和 $\mathbb{W}'$中的余笛卡尔态射 C' 组成。

$\square$

5.4. **（余）极限的存在性与保持。** 本节汇集了一些有用的结果，用以给出部分（反）松弛（余）极限存在并得到保持的判据。

命题 5.4.1。 设 $L\colon \mathbb{C} \rightleftarrows \mathbb{D}\colon R$是一个 $(\infty,2)$-范畴之间的伴随。则左伴随 L 保留 $\mathbb{C}$中存在的所有部分（反）松余极限。对偶地，右伴随 R 保留 $\mathbb{D}$中存在的所有部分（反）松极限。

证明。 我们证明左伴随的情形；其余情形形式上对偶。注意，根据命题 2.1.12的一个标记变体，对于每个带标记的 $(\infty,2)$-范畴 $(\mathbb{I},E)$，函子 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{I},-)^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$ 保留伴随。因此，与该伴随作后复合 $L\dashv R$ 可得一个伴随

$$L_*\colon \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{I},\mathbb{C})^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}} \rightleftarrows \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{I},\mathbb{D})^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}\colon R_*.$$

给定一个函子 $F\colon \mathbb{I}\to\mathbb{C}$，它存在一个 E-(反)松余极限，那么我们可以构造如下自然等价链

$$\begin{aligned}\mathrm{Nat}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}_{\mathbb{I},\mathbb{D}}(L_*F,\underline{d}) &\simeq \mathrm{Nat}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}_{\mathbb{I},\mathbb{C}}(F,\underline{Rd})\\ &\simeq \mathbb{C}\left(\mathrm{colim}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}_{\mathbb{C}}F, Rd\right)\\ &\simeq \mathbb{D}\left(L\left(\mathrm{colim}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}_{\mathbb{C}}F\right), d\right),\end{aligned}$$

这恰好表明 $L(\mathrm{colim}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}_{\mathbb{C}}F)$ 具有余极限 $\mathrm{colim}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}_{\mathbb{C}}L_*F$ 的泛性质，正如所需。□

命题 5.4.2. 设 $(\mathbb{I},E)$ 为一个带标记的$(\infty,2)$-范畴，且 $\mathbb{C}$ 为一个在 $\mathbb{I}$上存在 E-*lax*（余）极限的$(\infty,2)$-范畴。

(i) 对任意带标记的$(\infty,2)$-范畴$(\mathbb{S},T)$，$(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S},\mathbb{C})^{T\text{-}\mathrm{oplax}}$对所有满足以下条件的函子 $\mathbb{I}\to\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S},\mathbb{C})^{T\text{-}\mathrm{oplax}}$ 都存在 E-*lax*（余）极限：这些函子将 E 中的态射映为强变换；并且这些（余）极限在 $\mathbb{C}$ 中逐点计算。

(ii) 这些（余）极限由函子保留

$$f^*\colon \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S},\mathbb{C})^{T\text{-}\mathrm{oplax}}\to\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S}',\mathbb{C})^{T'\text{-}\mathrm{oplax}}$$

对于任意带标记的$(\infty,2)$-范畴之间的函子 $f\colon(\mathbb{S}',T')\to(\mathbb{S},T)$。

(iii) 对偶地，如果 $\mathbb{C}$ 在 $\mathbb{I}$上具有 E-反松弛（余）极限，那么 $\mathbb{F}$非$(\mathbb{S},\mathbb{C})^{T\text{-松弛}}$ 容许此类函子的部分反松弛（余）极限，并且这些极限同样是逐点计算的，且由所有限制函子保留。

证明。 我们只讨论松极限，因为反松极限和（反）松弛余极限的情形在形式上与之对偶。我们的假设保证存在一个伴随

$$L=\mathrm{const}:\mathbb{C}\rightleftarrows\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{I},\mathbb{C})^{E\text{-}\mathrm{lax}}:R=\lim\nolimits^{E\text{-}\mathrm{lax}}_{\mathbb{I}}.$$

由于 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S},-)^{T\text{-}\mathrm{oplax}}$ 由命题 2.1.12保持伴随，因此这导出一个伴随

$$L_*\colon \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S},\mathbb{C})^{T\text{-}\mathrm{oplax}} \rightleftarrows \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S},\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{I},\mathbb{C})^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}})^{T\text{-}\mathrm{oplax}}\colon R_*$$

其中，左伴随由与常值图表函子的后复合给出，右伴随则由沿 E-(反)松极限函子的后复合给出。令 $\mathbb{F}\mathrm{un}'(\mathbb{S}, \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{I}, \mathbb{C})^{E\text{-lax}})^{T}$-oplax 表示由那些将 T 中的态射映为强变换的函子构成的全子-$(\infty, 2)$-范畴；常值图表函子 L_* 可分解通过该范畴，因此我们可以将伴随限制到这个子-$(\infty, 2)$-范畴。此外，由推论 2.3.6 可知，我们可以将其识别为由那些将 E 中的态射映为强自然变换的函子构成的 $(\infty, 2)$-范畴 $\mathbb{F}\mathrm{un}'(\mathbb{I}, \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S}, \mathbb{C})^{T}\text{-oplax})^{E\text{-lax}}$。因此我们得到一个伴随

$$\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S}, \mathbb{C})^{T\text{-oplax}} \leftrightarrows \mathbb{F}\mathrm{un}'(\mathbb{I}, \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S}, \mathbb{C})^{T\text{-oplax}})^{E\text{-lax}},$$

其中，左伴随仍然是常值图表函子。右伴随按构造会逐对象地计算 E-松极限，因此对于 $\mathbb{F}\mathrm{un}'(\mathbb{I}, \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S}, \mathbb{C})^{T\text{-oplax}})^{E\text{-lax}}$ 中的所有函子，它给出 E-松极限，其中 $\mathbb{S}$ 中的 $\mathbb{I}$ 对象逐点取值于 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S}, \mathbb{C})^{T\text{-oplax}}$，这就证明了 (i)。现在，(ii) 随即成立，因为这一构造显然关于 $(\mathbb{S}, T)$ 自然。□

我们注意到以下一个有用的特殊情形，其中标记是极大的：

推论 5.4.3。设 $(\mathbb{I}, E)$ 是一个带标记的 $(\infty,2)$-范畴，且 $\mathbb{C}$ 是一个容许在 $\mathbb{I}$ 上存在 E-*(反)*松*(余)*极限的 $(\infty,2)$-范畴。

(i) 对任意 $(\infty, 2)$-范畴 $\mathbb{S}$，$(\infty, 2)$-范畴 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S}, \mathbb{C})$ 都容许对所有函子 $\mathbb{I} \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S}, \mathbb{C})$ 取 E-松*(余)*极限，且这些极限在 $\mathbb{C}$ 中逐点计算。*(ii)* 这些（余）极限由函子保持

$$f^*\colon \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S}, \mathbb{C}) \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S}', \mathbb{C})$$

对于任意$(\infty,2)$-范畴的函子 $f\colon \mathbb{S}' \to \mathbb{S}$。

观察 5.4.4. 设 $\mathbb{C}$ 是一个（余）完备的 $(\infty,2)$-范畴。则推论 5.4.3 表明，对任意 $\mathbb{S}$，$(\infty, 2)$-范畴 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S}, \mathbb{C})$ 也是（余）完备的，其部分(反)松余极限在 $\mathbb{C}$ 中逐点计算。此外，取 f 在命题 5.4.2(ii) 中作为映射 $(\mathbb{S}, T) \to \mathbb{S}^{\natural}$，可见该包含

$$\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S}, \mathbb{C}) \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S}, \mathbb{C})^{T\text{-oplax}}$$

保持所有部分松弛（余）极限，因而（余）连续（尽管靶未必容许所有（余）极限）。事实上，我们稍后将在推论 5.6.7中看到该函子具有右伴随或左伴随，当 $\mathbb{C}$ 分别为完备或余完备时。

命题 5.4.5. 设 $\mathbb{C}$ 是一个 $(\infty,2)$-范畴。那么 *Yoneda* 嵌入$h_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}\mathbb{S}\mathrm{h}(\mathbb{C})$ 保留 $\mathbb{C}$ 中存在的所有部分 *(op)lax* 极限。

证明. 设 $(\mathbb{I}, E)$ 是一个带标记的 $(\infty, 2)$-范畴，并设 $D\colon \mathbb{I} \to \mathbb{C}$ 是一个图表。由于 $h_{\mathbb{C}}$ 是全忠实的，因此有自然等价

$$\mathrm{Nat}_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Cat}_\infty}\left(h_{\mathbb{C}}(-), h_{\mathbb{C}}(\lim\nolimits_{\mathbb{I}}^{E\text{-(op)lax}} D)\right) \simeq \mathbb{C}\left(-, \lim\nolimits_{\mathbb{I}}^{E\text{-(op)lax}} D\right) \simeq \mathrm{Nat}_{\mathbb{I}, \mathbb{C}}^{E\text{-(op)lax}}\left(\underline{(-)}, D\right)$$

因此，根据 [AGH25，推论 2.8。13]，该函子

$$h_{\mathbb{C},*}\colon \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{I}, \mathbb{C})^{E\text{-(op)lax}} \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{I}, \mathbb{P}\mathbb{S}\mathrm{h}(\mathbb{C}))^{E\text{-(op)lax}}$$

也是全忠实的，因此我们得到一个自然等价

$$\mathsf{Nat}_{\mathbb{I},\mathbb{C}}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}\left(\underline{(-)},D\right)\simeq\mathsf{Nat}_{\mathbb{I},\mathbb{P}\mathbb{S}\mathrm{h}(\mathbb{C})}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}(\underline{h_{\mathbb{C}}},h_{\mathbb{C}}D).$$

结合前面的讨论与极限的泛性质，可知存在一个典范态射 $h_{\mathbb{C}}(\lim_{\mathbb{I}}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}D)\to\lim_{\mathbb{I}}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}h_{\mathbb{C}}D$。再次运用 Yoneda 引理，我们看到该映射逐点为等价，由观察 4.1.8 中提到的保守性可得证。□

命题 5.4.6。设 $\mathbb{C}$ 是一个 $(\infty,2)$-范畴，它具有形状为 $(\mathbb{I},E)$ 的部分 *(op)lax* 极限。假设给定另一个带标记的 $(\infty,2)$-范畴 $(\mathbb{S},T)$以及一个函子 $F\colon\mathbb{S}\to\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{I},\mathbb{C})^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$，使得 T 的 *(反)*松极限在 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{I},\mathbb{C})^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$ 中存在，并且 $\mathbb{C}$ 具有由 $(\mathbb{S},T)$ 索引的部分 *(op)lax* 极限。那么我们在 $\mathbb{C}$ 中有一个等价

$$\lim_{\mathbb{I}}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}G\simeq\lim_{\mathbb{S}}^{T\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}H.$$

其中 $G\colon=\lim^{T\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}{}_{\mathbb{S}}\qquad F$是 F在 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{I},\mathbb{C})^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$ 中的极限，而 H是复合函子 $\lim_{\mathbb{I}}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}\circ F$。

注 5.4.7。 很容易想把这个等价写成

$$\lim_{\mathbb{I}}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}\lim_{\mathbb{S}}^{T\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}F\simeq\lim_{\mathbb{S}}^{T\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}\lim_{\mathbb{I}}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}F,$$

但这样可能会造成误导，因为我们并未声称 F 在$\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{I},\mathbb{C})^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$ 中的极限是逐对象由 $\mathbb{C}$中的极限计算得出的。不过，正如上文命题 5.4.2 中所见，在某些条件下确实如此。

命题 *5.4.6* 的证明。 对于 $c\in\mathbb{C}$，我们有自然等价

$$\mathbb{C}(c,\lim_{\mathbb{I}}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}G)\simeq\mathsf{Nat}_{\mathbb{I},\mathbb{C}}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}(\underline{c}_{\mathbb{I}},G)\simeq\mathsf{Nat}_{\mathbb{S},\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{I},\mathbb{C})^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}}^{T\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}(\underline{c_{\mathbb{I}}}_{\mathbb{S}},F),$$

为清楚起见，我们用其定义域为常值图表添加下标。由于 $\mathbb{C}$存在关于 $\mathbb{I}$的 E-(op)lax 极限，因此我们有一个伴随

$$L:=\underline{(-)}_{\mathbb{I}}:\mathbb{C}\rightleftarrows\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{I},\mathbb{C})^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}:\lim_{\mathbb{I}}^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}=:R,$$

并且由于 $\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S},-)^{T\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$ 根据命题 2.1.12保持伴随，故由复合诱导出一个伴随

$$L_*:\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S},\mathbb{C})^{T\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}\rightleftarrows\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{S},\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{I},\mathbb{C})^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}})^{T\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}:R_*$$

常值图表$c_{\mathbb{I}\mathbb{S}}$ 也是 $L_*(\underline{c_{\mathbb{S}}})$，因此利用这一伴随，我们得到一个自然等价

$$\mathsf{Nat}_{\mathbb{S},\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{I},\mathbb{C})^{E\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}}^{T\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}(\underline{c_{\mathbb{I}}}_{\mathbb{S}},F)\simeq\mathsf{Nat}_{\mathbb{S},\mathbb{C}}^{T\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}(\underline{c}_{\mathbb{S}},R_*F)\simeq\mathbb{C}(c,\lim_{\mathbb{S}}^{T\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}H),$$

如所需。 □

5.5. **共终函子。** 本节利用迄今为止的工作，给出关于 $(\infty,2)$-范畴的共尾性理论，并为此前发表于 [AS23b, AG22, GHL25]中的结果提供与模型无关的证明。关于(∞,∞)-范畴共尾性的相关结果也见于 [Lou24, §4.2。3]。

我们首先通过正交性性质定义共尾映射，并考察由此得出的一些推论，然后在命题 5.5.8 中根据（余）极限的保持性刻画共尾性；我们还将在定理 5.5.13 中给出一个更具体的共尾性判据。

定义 5.5.1。 带标记的 $(\infty,2)$-范畴之间的函子 $F\colon(\mathbb{I},S)\to(\mathbb{J},T)$ 称为 ϵ-共尾的，如果它与所有 1-纤维化的 ϵ-纤维化 $\mathbb{E}^\natural\to\mathbb{B}^\sharp$ 左正交。

定义 5.5.2。 我们用 $L^{\epsilon;1}_{\mathbb{B}^\sharp}$ 表示包含映射的左伴随

$$\mathbb{1}\mathbb{F}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}}\hookrightarrow\mathbb{M}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^\sharp}$$

（我们已在推论 4.7.3 中对其作了明确描述）。我们称带标记的 $(\infty,2)$-范畴之间的态射 $F\colon(\mathbb{I},S)\to(\mathbb{J},T)$ 在 $\mathbb{B}^\sharp$ 之上为带标记的 ϵ-等价 若其$\mathbb{B}^\sharp$ $L^{\epsilon;1}_{\mathbb{B}^\sharp}(F)$ 是一个等价。

引理 5.5.3。 对于带标记的（$\infty,2$）-范畴之间的态射 $F\colon(\mathbb{I},S)\to(\mathbb{J},T)$（位于 $\mathbb{B}^\sharp$ 之上），以下条件等价：

(1) F 是一个位于 $\mathbb{B}^\sharp$ 之上的带标记 ϵ-等价。*(2)* 将 F视为函子 $(\mathbb{I},S)^\sharp\to(\mathbb{J},T)^\sharp$时，它是一个位于 $\mathbb{B}^{\sharp\sharp}$ 之上的 ϵ-等价。*(3)* 对于 $b\in\mathbb{B}$，∞-范畴的诱导函子

$$\mathfrak{F}^{\epsilon}_{\mathbb{B}}(\mathbb{I},S)(b)\to\mathfrak{F}^{\epsilon}_{\mathbb{B}}(\mathbb{J},T)(b)$$

是一个等价。

证明。 前两个条件等价，因为任何从 $(\mathbb{I},S)^\sharp$ 到纤维化之上的映射，$\mathbb{B}^{\sharp\sharp}$ 都会经由其底层的 1-纤维化纤维化分解。第一和第三个条件等价，这是由推论 4.4.7 对$L^{\epsilon;1}_{\mathbb{B}^\sharp}(\mathbb{I},S)$ 的直化描述得出的。□

命题 5.5.4. </style}以下对象对于 : $(\mathbb{I},S)\to(\mathbb{J},T)$ 等价：

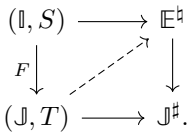
(1) F 是 ϵ-共终的。*(2)* F 是一个在 $\mathbb{J}^\sharp$ 上的带标记的 ϵ-等价。*(3)* 将 F视为函子 $(\mathbb{I},S)^\sharp\to(\mathbb{J},T)^\sharp$时，它是一个在 $\mathbb{J}^{\sharp\sharp}$ 上的 ϵ-等价。*(4)* $L^{\epsilon;1}_{\mathbb{J}^\sharp}(F)\colon L^{\epsilon;1}_{\mathbb{J}^\sharp}(\mathbb{I},S)\to L^{\epsilon;1}_{\mathbb{J}^\sharp}(\mathbb{J},T)$ 是一个等价。*(5)* 对每个 $b\in\mathbb{J}$，∞-范畴的函子

$$\mathfrak{F}^{\epsilon}_{\mathbb{B}}(\mathbb{I},S)(b)\to\mathfrak{F}^{\epsilon}_{\mathbb{B}}(\mathbb{J},T)(b)$$

是一个等价。

证明。 由于任意函子 $(\mathbb{J},\ S)\to\mathbb{B}^\sharp$ 都可经由 $\mathbb{J}^\sharp$分解，且 1-纤维化的 ϵ-纤维化在拉回下封闭，因此 (1) 成立当且仅当对于任意 1-纤维化的 ϵ-纤维化 $\mathbb{E}^\natural\to\mathbb{J}^\sharp$,

任意交换图中都存在唯一的提升



这等价于 F 对于 1-纤维化的 ϵ-纤维化，在将其视为 $\mathbb{MC}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^\sharp}$中的映射时是局部等价，因此 (1) 等价于 (2)。这与其余条件的等价性则是引理 5.5.3 的一个特例。□

观察 5.5.5。 我们有以下关于 ϵ-共尾映射的直接性质：

► ϵ-共终函子在余基变换、复合、收缩和余极限下封闭。► 若 F 是 ϵ-共尾的，则 GF 是 ϵ-共尾的，当且仅当 G 是如此。► 若 $F\colon \mathbb{C}^\diamond \to \mathbb{D}^\diamond$ 是一个 ϵ-余纤维化，则带标记的$(\infty,2)$-范畴的底层函子是 ϵ-共尾的。特别地，根据推论 3.6.9 ，({v50$(\infty,2)$-范畴的所有局部化都给出 ϵ-共尾映射，对任意 ϵ。

观察 5.5.6。 以下条件等价，适用于带标记的 $(\infty,2)$-范畴之间的函子 $F\colon (\mathbb{I},S) \to (\mathbb{J},T)$（参见观察 2.4.7）：

► F 是 (1,0)-共尾的。
► F^{op} 是 $(0,0)$-共尾的。
► F^{co} 是 $(1,1)$-共尾的。
► F^{coop} 是 $(0,1)$-共尾的。

接下来，我们用部分（反）松弛（余）极限来刻画我们的四种共尾性概念：

定义 5.5.7。 我们称带标记的 $(\infty,2)$-范畴之间的函子 $F\colon (\mathbb{I},S) \to (\mathbb{J},T)$ 为（反）松弛余极限余终，若对于每个函子 $D\colon \mathbb{J} \to \mathbb{C}$， D 的 T-(反)松余极限存在，当且仅当 DF 的 S-(反)松余极限存在，并且典范映射

$$\mathrm{colim}_{\mathbb{I}}^{S\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}} DF \to \mathrm{colim}_{\mathbb{J}}^{T\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}} F$$

是一个等价。对偶地，若部分 (op)lax 极限满足相应条件，则称 F 为（反）松弛极限余终。

命题 5.5.8. 对于带标记的 $(\infty, 2)$-范畴之间的函子 $F\colon (\mathbb{I}, S) \to (\mathbb{J}, T)$，有

► F 是 $(1,0)$-余终的，当且仅当它是松弛余极限余终。► F 是 $(0,1)$-余终的，当且仅当它是松弛极限余终。► F 是 $(1,1)$-余终的，当且仅当它是反松弛余极限余终。► F 是 $(0,0)$-余终的，当且仅当它是反松弛极限余终。

证明。 我们证明第一种情形；其余三种情形由此应用引理 5.1.3和观察 5.5.6即可得出。首先考虑可表函子 $\mathbb{J}(j,\ -)\colon \mathbb{J} \to \mathbb{C}$处的$\infty$；这里推论 5.3.5 表明典范映射

$$\mathrm{colim}_{\mathbb{I}}^{S\text{-}\mathrm{lax}} \mathbb{J}(j, F(-)) \to \mathrm{colim}_{\mathbb{J}}^{T\text{-}\mathrm{lax}} \mathbb{J}(j, -)$$

等价于

$$\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{I},S)(j) \to \mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{J},T)(j),$$

因此，如果 F 是松弛终的，则这对所有 j 都是等价，即 F 是 (1,0)-余终的。另一方面，命题 5.2.8将松余极限上的比较映射确定为该映射

$$\operatorname{colim}_{\mathbb{J}}^{\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{I},S)} D \to \operatorname{colim}_{\mathbb{J}}^{\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{J},T)} D$$

它由权的变换 $\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{I},S) \to \mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{J},T)$ 所诱导。因此，当该变换是自然等价时，松余极限上的映射是等价，即当 F 是 (1,0)-余终的时。□

注记 5.5.9. Loubaton 证明了命题 5.5.8 关于 (∞,∞)-范畴的一个版本，即 [Lou24，定理 4.2.3。21]。

命题 5.5.10. 考虑带标记的 $(\infty,2)$-范畴的一个图表

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{C},P) & \xrightarrow{f'} & (\mathbb{D},Q) & \longrightarrow & (\mathbb{D},R) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ (\mathbb{I},S) & \xrightarrow[f]{} & (\mathbb{J},T) & \longrightarrow & \mathbb{J}^{\sharp} \end{array} \tag{5.5}$$

其中两个方块都是拉回（因此 Q 由 R 中位于T之上的态射组成）。如果将 p 视为态射 $(\mathbb{D},R)^{\sharp} \to \mathbb{J}^{\sharp\sharp}$ 时是 ϵ-光滑的，并且 f 是 ϵ-余终的，那么 f' 也 ϵ-余终。

证明。 由命题 5.5。4 f 作为装饰函子，是一个 ϵ-等价，且位于 $\mathbb{J}^{\sharp\sharp}$ 之上。因此，由引理 4.5.7 可知， f' 是一个 ϵ-等价，且位于 $(\mathbb{D},R)^{\sharp}$之上。由观察 3.6.7，它也是一个 ϵ-等价，且位于 $\mathbb{D}^{\sharp\sharp}$ 之上，因此 ϵ-余终，证毕。□

利用定理 4.5.8对此作特化，可得：

推论 5.5.11。 考虑如上所述的一个带标记的 5.5 图表，其对象为 $(\infty,2)$-范畴，且两个方块都是拉回。若 p 是一个带标记的 $\bar{\epsilon}$-纤维化，且 f 是 ϵ-余终的，那么 f'也 ϵ-余终。□

我们的下一个目标是给出共尾性的一个更具体的刻画，它基于 $\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{J},T)$ 的以下性质：

引理 5.5.12. 对于带标记的$(\infty,2)$-范畴$(\mathbb{J},T)$，有：

(i) 对每个 $j \in \mathbb{J}$， ∞-范畴 $\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{J},T)(j)$ 都有一个始对象 *(ii)* 任意带标记态射 $f\colon j \to j'$ 在 T 中于 $\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{J},T)(j)$ 中的像都是始对象。*(iii)* 对于 T 中每个带标记态射 $f\colon j \to j'$，函子 $\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{J},T)(f)$ 保始对象。

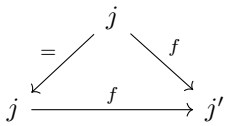
证明。根据定义， $\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{J},T)(j)$ 是由 $\mathbb{J}_{j}$ 通过对 j 下由 $\mathbb{J}$ 中的标记态射给出的交换三角形以及所有 2-态射取逆而得到的 ∞-范畴。我们首先考虑将所有 2-态射取逆的局部化 $\tau_{\leq 1}\mathbb{J}_{j}$；我们断言 id_{j} 在此处是一个始对象。事实上，对于态射 $f\colon j \to j'$，我们可以利用命题 3.3.1 将映射 ∞-范畴 $\mathbb{J}_{j}(\mathrm{id}_{j},f)$ 等同于 $\mathbb{J}(j,j')_{f/}$；这

有一个始对象，因此 $(\tau_{\leq 1}\mathbb{J}_j)(\mathrm{id}_j, f) \simeq \|\mathbb{J}(j,j')_{f/}\|$ 是可缩的，这意味着 id_j 是一个始对象。现在考虑复合

$$\{\mathrm{id}_j\} \to \tau_{\leq 1}\mathbb{J}_j \ (\mathrm{id}_j, f) \to \mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{J}, T)(j);$$

这里第一个函子是极限余共终的，因为 id_j 是始对象；而第二个函子同样是极限余共终的，因为它是 ∞-范畴的局部化。因此复合函子也是极限余共终的，这意味着 id_j 也是 $\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{J}, T)(j)$的始对象。这就证明了（i）。

如果 $f\colon j \to j'$ 是一个标记态射，则交换三角形



被送到 $\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{J}, T)(j)$中的一个等价，因此 f的像与 id_j的像等价，从而也必为始对象，得到（ii）。由于 $\mathrm{id}_{j'}$在 $\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{J}, T)(f)$下的像就是 f的像，而后者是始对象，故（iii）成立。□

定理 5.5.13。 带标记的$(\infty, 2)$-范畴之间的函子 $f\colon (\mathbb{I}, E) \to (\mathbb{J}, T)$ 是$(1,0)$-余终的（即松弛余极限余终），当且仅当满足以下条件：

(i) 对每个 $j \in \mathbb{J}$，$\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{I}, E)(j)$ 中都存在一个始对象。*(ii)* $\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{I}, E)(j)$ 的始对象经由 $\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(f)$ 映到 $\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{J}, T)(j)$ 中的一个始对象。*(iii)* 给定一个对象 $x \in \mathbb{I}$，$\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{I}, E)(f(x))$ 中作为 $(x, \mathrm{id}_{f(x)})$ 的像的对象是始对象。*(iv)* 对每个标记态射 $\varphi\colon j \to j'$ *in* T，函子

$$\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{\epsilon}(\mathbb{I}, E)(\varphi)\colon \mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{\epsilon}(\mathbb{I}, E)(j') \to \mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{\epsilon}(\mathbb{I}, E)(j)$$

保留始对象。

同样，在另外三种情形中，我们有：

► f 是$(1,1)$-余终（反松余极限余终），当且仅当将$(1,0)$ 替换为$(1,1)$后，同样的条件成立。► f 是 ϵ-余终的，其中 $\epsilon = (0,1)$ 或$(0, 0)$ （(反)松极限余终），当且仅当将$(1,0)$ 替换为 ϵ，并将“始对象”替换为“终对象”后，类似的条件成立。

证明。 由命题 5.5.4，函子 f是 $(1,0)$-余终的，当且仅当 $\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{\epsilon}(f)$ 是自然等价。因此，由引理 5.5.12 可知这些条件是必要的。接下来，我们要证明这些条件对于使 $\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{\epsilon}(f)$ 成为等价也充分。

令 $q\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{J}$ 为与 $\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{I}, E)$ 对应的 1-纤维化的 (1，0)-纤维化，并令 $\mathbb{P} \to \mathbb{J}$ 为与 $\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{J}, T)$ 对应的 1-纤维化的 (1，0)-纤维化，其中 $\Phi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{P}$ 是与 $\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{\epsilon}(f)$ 对应的 1-纤维化的 (1，0)-纤维化之间的态射；我们还有典范映射 $\eta_{\mathbb{J}}\colon \mathbb{J} \to \mathbb{P}$ 和 $\eta_{\mathbb{I}}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{Q}$，它们分别将这些对象呈现为 $(\mathbb{J}, T)$ 和 $(\mathbb{I}, E)$ 上的自由 1-纤维化的 (0，1)-纤维化。我们考虑由逐纤维初始对象构成的全子 $(\infty, 2)$-范畴 $\mathbb{Q}_0 \subseteq \mathbb{Q}$。假设 (i) 蕴含限制 $\mathbb{Q}_0 \to \mathbb{J}$ 是

本质满；它也全忠实，因为对于 $\mathbb{J}$ 中位于 j，j' 上方的对象 x，$y \in \mathbb{Q}_0$，余笛卡尔纤维化 $\mathbb{Q}(x,\ y) \to \mathbb{J}(j,\ j')$ 在 $f\colon j \to j'$ 处的纤维等价于 $\mathbb{Q}_j(x,\ f^*j')$；根据假设，x 是 $\mathbb{Q}_j$ 中的始对象，因此该纤维可缩。于是我们得到一个等价 $\mathbb{Q}_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{J}$，其逆给出 q 的截面 $s\colon \mathbb{J} \to \mathbb{Q}$，它选取逐纤维初始对象。此外，条件 (iv) 蕴含 s 将 T 中的标记态射映为笛卡尔态射。因此，我们可以将 s 延拓到自由 1- 纤维化的 (1，0)-纤维化 $\mathbb{P}$ 上，得到一个 1-纤维化的 (1，0)-纤维化之间的态射 $\bar{s}\colon \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$，它直化为一个自然变换

$$\sigma\colon \mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{J}, T) \to \mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{I}, E).$$

此外，根据条件 (ii)，复合映射 $\mathbb{J} \xrightarrow{s} \mathbb{Q} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}$ 在 $\mathbb{P}$ 中选出了逐纤维初始对象，因此根据唯一性，复合映射 $\Phi \circ \bar{s}$ 是恒等映射，从而 $\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}(f) \circ \sigma$也是如此。另一方面，由于 $\mathbb{Q}$ 的自由性，复合映射 $\bar{s} \circ \Phi$ 由函子唯一确定

$$\mathbb{I} \to \mathbb{Q} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P} \xrightarrow{\bar{s}} \mathbb{Q}.$$

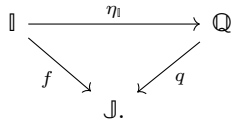
这里，前两个映射的复合等价于复合映射

$$\mathbb{I} \xrightarrow{f} \mathbb{J} \xrightarrow{\eta_{\mathbb{J}}} \mathbb{P},$$

因此完整的复合映射与

$$\mathbb{I} \xrightarrow{f} \mathbb{J} \xrightarrow{s} \mathbb{Q}.$$

为了将其与 $\eta_{\mathbb{I}}$对应起来，考虑交换三角形



根据假设 (iii)，$\eta_{\mathbb{I}}$ 经过 $\tilde{\eta}_{\mathbb{I}}$分解为：$\mathbb{I} \to \mathbb{Q}_0$，因此我们可以将 f 与 _的复合映射 $\mathbb{I} \xrightarrow{\eta_{\mathbb{I}}} \mathbb{Q}_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{J}$认定为同一映射。由此可知，$s \circ f$ 等价于 $\eta_{\mathbb{I}}$，所以 $\bar{s} \circ \Phi$必为恒等映射，因而 $\sigma \circ \mathfrak{F}_{\mathbb{J}}(f)$也如此。于是我们证明了，$\sigma$ 是 $\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}(f)$的逆映射；因此后者是一个等价，这正是我们要证明的结论。□

因此，我们得到以下关于从该点出发的映射具有共尾性的更简单的充分（但非必要）条件：

推论 5.5.14。设 $(\mathbb{J}, T)$ 是一个带标记的 $(\infty, 2)$-范畴，且 j 是 $\mathbb{J}$ 的一个对象，并满足以下条件：

- ▶ 对于 $\mathbb{J}$ 中的每个对象 j'，存在一个标记态射 $j' \to j$,▶，并且
- 每个标记态射 $j' \to j$ 在 $\mathbb{J}(j', j)$ 中都是初始的。

那么函子 $\{j\}^\flat \to (\mathbb{J}, T)$ 是共尾的。

证明。我们应用定理 5.5.13。在此情形下，$\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\{j\})$ 是函子 $\mathbb{J}(-\ j)$，因此这两个假设合起来给出了条件 (i) 以及 (iii)，因为 id_j 总是带标记的；也给出了条件 (iv)，因为带标记的态射在复合下封闭。对于条件 (ii)，我们回顾引理 5.5.12 指出，$\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{J}, T)(j')$的始对象是 $\mathrm{id}_{j'}$的像，而一个带标记的态射 $\varphi\colon j' \to j$ 给出一个态射 $\mathrm{id}_{j'} \to \varphi$

其在 $\mathfrak{F}_{\mathbb{J}}^{(1,0)}(\mathbb{J},T)(j')$ 中的像是一个等价；因此，始对象 φ 在 $\mathbb{J}(j',j)$ 中确实被映到一个始对象，正如所要求的。□

注 5.5.15. 我们在命题 4.2.9 中看到，如果 $p\colon \mathbb{E}\to\mathbb{B}$ 是一个 1-纤维化的 $(1,0)$-纤维化，且 e 是 $\mathbb{E}$中的一个对象，那么函子 $\{e\}^\flat\to(\mathbb{E},C)$（其中 C 表示笛卡尔态射）是 $(1,0)$-共尾的，当且仅当推论5.5.14的条件成立（并且二者都等价于 e 表明 p 是一个可表纤维化）。因此，在这个特定情形下，这些先验上更强的条件实际上是共尾性的必要条件。

5.6. **Kan 延拓。** 本节将运用我们关于 §4.6 中纤维化推前的结果，来构造 $(\infty,2)$-范畴的 Kan 延拓。这不仅包括普通 Kan 延拓（也可以用富化∞-范畴论来构造 [Hei24], ），还包括部分松弛的 Kan 延拓；这种延拓最初由 [Abe23] 通过模型范畴方法提出。[5]

我们先考虑 $\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$ 中右 Kan 延拓的情形，这可通过直化直接由我们先前的结果推出：

命题 5.6.1。 设 $f\colon(\mathbb{C},I)\to\mathbb{D}^\sharp$ 是带标记的 $(\infty,2)$-范畴之间的一个函子。则存在一个 $(\infty,2)$-范畴之间的伴随

$$f^*\colon \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{D},\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)})\rightleftarrows \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C},\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)})^{I\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}\colon f_*^{I\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$$

其中 f^* 是显然的限制函子。对于 $F\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$，我们可以用逐点公式描述 $f^{I\text{-}(反)松}_*F$

$$f_*^{I\text{-}\mathrm{lax}}F(d)\simeq\lim_{\mathbb{C}_d}^{I_d\text{-}\mathrm{lax}}\left(\mathbb{C}_d\to\mathbb{C}\xrightarrow{F}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}\right)$$
$$f_*^{I\text{-}\mathrm{oplax}}F(d)\simeq\lim_{\mathbb{C}_d}^{I_d\text{-}\mathrm{oplax}}\left(\mathbb{C}_d\to\mathbb{C}\xrightarrow{F}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}\right),$$

其中 I_d 表示投影到 $\mathbb{C}$ 上、映为 I 中的态射以及 $\mathbb{D}$ 中的交换三角形的那些态射。

证明。该伴随的存在性可由推论 4.6.6 与定理 2.4.12 的直化等价结合得到：在松弛情形中，通过直化 f 在 $\epsilon=(0,1)$ 情形下的伴随，或 f^{co} 在 $\epsilon=(0,0)$ 情形下的伴随；在 oplax 情形中，通过直化 f^{coop} 与 $\epsilon=(1,1)$ 的伴随，或 f^{op} 与 $\epsilon=(1,0)$ 的伴随。为了确定 f^I-松弛$_*$ F 的取值，我们接着将观察 4.6.3 与命题 5.3.8 中 $\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$ 里 I-(反)松极限的纤维化描述结合起来。□

我们将函子 $f_*^{I\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}$称为沿 f 的 *I-(op)lax 右 Kan 延拓函子*。现在，我们的目标是利用 Yoneda 嵌入，将这些 Kan 延拓扩展到比 $\mathbb{C}$在$_{(\infty,2)}$处更一般的靶；为此，我们先给出以下观察：

[5] Loubaton 还在$(\infty,\ \infty)$-范畴中定义了部分松弛 Kan 延拓的概念，见[Lou24，§4.2。4], 但除了非松弛情形（他的推论 4.2.4.9）之外，他似乎并未证明这类延拓存在。

观察 5.6.2。 设 $f\colon (\mathbb{C}, I) \to \mathbb{D}^\sharp$ 是一个标记函子。那么，对每个 $(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{A}$，沿 f 的限制给出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{D}, \mathbb{A}) & \xrightarrow{f^*} & \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{C}, \mathbb{A})^{I\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{D}, \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty) & \xrightarrow{(f\times \mathrm{id})^*} & \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C}, \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty)^{\bar{I}\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}} \end{array}$$

其中，竖直函子由 Yoneda 嵌入诱导，而 I 包含所有这样的态射对：其在 $\mathbb{C}$ 中的分量属于 I。

根据 [AGH25，推论 2.8，5] 可知，竖直函子是全忠实的，其本质像由满足以下条件的函子组成： $F\colon \mathbb{X} \times \mathbb{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}$在$\infty$中，且 $\mathbb{X} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{D}\}$满足 $F(-, x)$ 对每个 $x \in \mathbb{X}$都是可表的。

观察 5.6.3。设$(\mathbb{A}, I)$是一个带标记的$(\infty, 2)$-范畴，并设 J表示$(\mathbb{A}, I) \times \mathbb{B}^\sharp$的标记。将推论2.3.6 应用于 $(\mathbb{A}, I)$、 $\mathbb{B}^\sharp$ 和 $\mathbb{C}$在$^\sharp{}_{(\infty,\, 2)}$处，我们得到一个等价

$$\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B} \times \mathbb{A}, \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)})^{J\text{-}\mathrm{lax}} \simeq \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}, \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}))^{I\text{-}\mathrm{lax}},$$

以及一个全忠实函子

$$\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}, \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}))^{I\text{-}\mathrm{lax}} \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}, \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}, \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)})^{I\text{-}\mathrm{lax}}),$$

其本质像由满足以下条件的函子构成：它们将 $\mathbb{B}$ 中的每个态射映为强自然变换；等价地说，这些函子经由笛卡尔积分解。

引理 5.6.4. 给定一个带标记的$(\infty,2)$-范畴$(\mathbb{A}, I)$ 和一个$(\infty,2)$-范畴 $\mathbb{B}$，令 $\pi_{\mathbb{B}}\colon (\mathbb{A}, I) \times \mathbb{B}^\sharp \to \mathbb{B}^\sharp$ 为投影，并将$(\mathbb{A}, I) \times \mathbb{B}^\sharp$的标记记为 J。那么，右伴随

$$\pi_{\mathbb{B},*}\colon \mathbb{F}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/(\mathbb{A}\times\mathbb{B},J)} \to \mathbb{F}\mathrm{ib}^{\epsilon}_{/\mathbb{B}}$$

由推论 $\pi_{\mathbb{B}}$ *4.5.13* 中的拉回所诱导的 *4.5.13*在直化下可识别为以下复合

$$\begin{aligned} \mathbb{F}\mathrm{un}((\mathbb{A} \times \mathbb{B})^{\epsilon\text{-}\mathrm{op}}, \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)})^{J\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}} &\hookrightarrow \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}^{\epsilon\text{-}\mathrm{op}}, \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}^{\epsilon\text{-}\mathrm{op}}, \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)})^{I\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}) \\ &\to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}^{\epsilon\text{-}\mathrm{op}}, \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}) \end{aligned}$$

其中，第一个函子是观察*5.6.3* 中的包含，第二个函子则由复合以下映射给出

$$\lim^{I\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}}_{\mathbb{A}^{\epsilon\text{-}\mathrm{op}}}\colon \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}^{\epsilon\text{-}\mathrm{op}}, \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)})^{I\text{-}(\mathrm{op})\mathrm{lax}} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}\,.$$

证明。 我们处理 $\epsilon = (0,1)$ 的情形。令 p 和 q 分别为函子 $F\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}\mathrm{at}^{(\infty,2)}$ 和 $G\colon \mathbb{A} \times \mathbb{B} \to \mathbb{C}\mathrm{at}^{(\infty,2)}$ 对应的 $(0,1)$-纤维化。于是，我们有映射 ∞-范畴的一个自然识别

$$\mathbb{F}\mathrm{ib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}}(p, \pi_{\mathbb{B},*}(q)) \simeq \mathbb{F}\mathrm{ib}^{(0,1)}_{/(\mathbb{A}\times\mathbb{B},J)}(p \times \mathbb{A}, q) \simeq \mathbb{N}\mathrm{at}^{J\text{-}\mathrm{lax}}_{\mathbb{A}\times\mathbb{B},\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}}(F \circ \pi_{\mathbb{A}}, G),$$

利用直化等价定理 2.4.12，其中 $\pi_{\mathbb{A}}$ 表示到 $\mathbb{A}$的投影。由观察 5.6.3，我们有一个自然的识别

$$\mathbb{N}\mathrm{at}^{J\text{-}\mathrm{lax}}_{\mathbb{A}\times\mathbb{B},\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}}(F \circ \pi_{\mathbb{A}}, G) \simeq \mathbb{N}\mathrm{at}_{\mathbb{B},\mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A},\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)})^{I\text{-}\mathrm{lax}}}(F', G')$$

其中 $G'(b)(\text{–}) \simeq G(\text{–}\ b)$，$F'$ 亦然，因此我们可以将 F' 识别为函子 $b \mapsto F(b)$，它由与 $\mathbb{A}$ 上的常值图表函子复合给出。于是，F 中的这个函子有一个右伴随，它通过逐点取 I-松极限 over $\mathbb{A}$ 给出，因此我们有一个自然等价

$$\mathbb{F}\mathrm{ib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}}(p, \pi_{\mathbb{B},*}(q)) \simeq \mathsf{Nat}_{\mathbb{B},\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}}(F, \lim\nolimits^{I\text{-lax}}_{\mathbb{A}} G).$$

因此，$\pi_{\mathbb{B},*}(q)$ 的直化就是函子 $\lim^{I\text{-lax}}_{\mathbb{A}} G$，如所要求的那样。 □

定理 5.6.5。 设 $f\colon (\mathbb{C}, I) \to \mathbb{D}^\sharp$ 是一个标记函子，且 $\mathbb{B}$ 是一个$(\infty,2)$-范畴。则有如下结论：

- ▶ 若 $\mathbb{B}$ 对所有 d都存在沿 $\mathbb{C}_d$ 的 I_d-松弛极限，则有一个伴随

$$f^*\colon \mathsf{Fun}(\mathbb{D}, \mathbb{B}) \rightleftarrows \mathsf{Fun}(\mathbb{C}, \mathbb{B})^{I\text{-lax}}\colon f_*^{I\text{-lax}}$$

  其中 $f^{I\text{-松弛}}_* F(d) \simeq$极限$^{I_d\text{-松弛}\,\mathbb{C}_d} F.$

- ▶ 若 $\mathbb{B}$ 对所有 d都存在沿 $\mathbb{C}_d$ 的 I_d-松弛余极限，则有一个伴随

$$f_!^{I\text{-lax}}\colon \mathsf{Fun}(\mathbb{C}, \mathbb{B})^{I\text{-lax}} \rightleftarrows \mathsf{Fun}(\mathbb{D}, \mathbb{B})\colon f^*$$

  其中 $f^{I\text{-松弛}!} F(d) \simeq$余极限$^{I_d\text{-松弛}\,\mathbb{C}_d} F.$

- ▶ 如果 $\mathbb{B}$ 对所有 d 都容许 $\mathbb{C}_d$ 上的 I_d-反松弛极限，则我们有一个伴随

$$f^*\colon \mathsf{Fun}(\mathbb{D}, \mathbb{B}) \rightleftarrows \mathsf{Fun}(\mathbb{C}, \mathbb{B})^{I\text{-oplax}}\colon f_*^{I\text{-oplax}}$$

  其中 $f^{I\text{-反松弛}}_* F(d) \simeq$极限$^{I_d\text{-反松弛}\,\mathbb{C}_d} F.$

- ▶ 如果 $\mathbb{B}$ 对所有 d 都容许 $\mathbb{C}_d$ 上的 I_d-反松弛余极限，则我们有一个伴随

$$f_!^{I\text{-oplax}}\colon \mathsf{Fun}(\mathbb{C}, \mathbb{B})^{I\text{-oplax}} \rightleftarrows \mathsf{Fun}(\mathbb{D}, \mathbb{B})\colon f^*$$

  其中 $f^{I\text{-反松弛}!} F(d) \simeq$余极限$^{I_d\text{-反松弛}\,\mathbb{C}_d} F.$

当它们存在时，我们分别把函子 f^I_*-（反）松弛与 f^I-（反）松弛$!$称为沿 f 的 I-（反）松弛右*Kan*延拓函子与左*Kan*延拓函子。

证明。 应用对合 co 和 op 我们只需验证第一个结论。这相当于证明观察 5.6.2中的交换方块在水平方向上可伴随。注意，由命题 5.6.1可知，底部的水平态射存在右伴随，因此我们可以进一步归结为证明该右伴随具有适当的限制。在纤维化的表述下，我们要证明函子

$$R_g\colon \mathbb{F}\mathrm{ib}^{(0,1)}_{/(\mathbb{B}^{\mathrm{op}}\times\mathbb{C},J)} \to \mathbb{F}\mathrm{ib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}^{\mathrm{op}}\times\mathbb{D}},$$

其中 $g\colon (\mathbb{B}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C},\ J) \to (\mathbb{B}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{D})^\sharp$ 是标记函子 $(\mathbb{B}^{\mathrm{op}})^\sharp \times f$，具有如下性质：给定一个 (0，1)-纤维化 $p\colon \mathbb{X} \to \mathbb{B}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C}$，若对每个$c \in \mathbb{C}$，拉回 $\mathbb{E}_c \to \mathbb{B}^{\mathrm{op}}$ 直化为 $\mathbb{B}$ 上的一个可表预层，则纤维化 $R_g(p)\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{B}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{D}$ 对每个 $d \in \mathbb{D}$ 都具有类似的性质。

因此，我们希望确定 $i\colon \mathbb{B}^{\mathrm{op}} \times \{d\} \to \mathbb{B}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{D}$ 对应的拉回 $i^* R_g(p)$。回忆一下，根据定义，R_g 是函子 $\varphi_*\pi^*$ 的复合

$$(\mathbb{B}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C}, J)^\sharp \xleftarrow{\pi} \mathbb{Q}^\diamond \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{B}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{D})^{\sharp\sharp},$$

使用定义 4.6.1中的记号。如果我们考虑拉回

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}_d^{\diamond} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\varphi_d"'] & \mathbb{Q}^{\diamond} \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{B}^{\mathrm{op},\sharp\sharp} \times \{d\} \arrow[r, "i"'] & (\mathbb{B}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{D})^{\sharp\sharp}, \end{tikzcd}$$

于是，观察4.5.5 给出了一个基变换等价 $i^*\varphi_* \simeq \varphi_{d,\ *}j^*$，因此我们有

$$i^* R_g \simeq \varphi_{d,*} r^*$$

其中 r 是复合函子 $\mathbb{Q}_d^{\diamond} \xrightarrow{j} \mathbb{Q}^{\diamond} \xrightarrow{\pi} (\mathbb{B}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C}, J)^{\sharp}$。展开记号可知，$\mathbb{Q}_d^{\diamond}$ 是 $\mathbb{C}_d^{\diamond} \times \mathbb{B}^{\mathrm{op}}$, $^{\sharp\sharp}$，其中 r 是 $s \times \mathrm{id}_{\mathbb{B}^{\mathrm{op}}}$，这里 s 是典范函子$\mathbb{C}_d^{\diamond} \to (\mathbb{C}, I)^{\sharp}$，而 φ_d 是到 $\mathbb{B}^{\mathrm{op}}$的投影。因此，所需性质由引理 5.6.4 以及我们对 $\mathbb{B}$的假设推出。□

在极大标记情形下，这就特化为给出$(\infty, 2)$-范畴的普通 Kan 延拓：

推论 5.6.6。对于一个（∞,2）-范畴间的函子 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 以及一个（∞, 2）-范畴 $\mathbb{B}$，我们有：

- 若 $\mathbb{B}$ 对所有 d 都存在关于 $\mathbb{C}$ 的 $\mathbb{D}(d, f(-))$-加权极限，则我们有一个伴随，其中 $f_*F(d) \simeq \lim_{\mathbb{C}}^{\mathbb{D}(d,f(-))} F$.
- 若 $\mathbb{B}$ 对所有 d 都存在关于 $\mathbb{C}$ 的 $\mathbb{D}(F(-)\ d)$-加权余极限，则我们有一个伴随，其中 $f_!F(d) \simeq \mathrm{colim}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{D}(F(\ )\ d)} F$。

$$f_!\colon \mathsf{Fun}(\mathbb{C}, \mathbb{B}) \rightleftarrows \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{D}, \mathbb{B})\colon f^*$$

证明。我们证明第一种情形。由定理 5.6.5 的极大标记情形可知，右伴随存在；如果这些极限存在，它可由关于 $\mathbb{C}_d$ 的部分松弛极限或关于 $\mathbb{C}_d$ 的部分反松弛极限给出，在这两种情形下，均由 $\mathbb{C}$ 上的笛卡尔态射标记。这里，$\mathbb{C}_d \to \mathbb{C}$ 是函子 $\mathbb{D}(d, f(-))$ 的 (0, 1)- 纤维化，而 $\mathbb{C}_d \to \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{D}(d, f(-))^{\mathrm{op}}$ 的 (0,0)- 纤维化，因此 $(\mathbb{C}_d)^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}^{\mathrm{op}}$ 是 $\mathbb{D}(d, f(-))$ 的 (1, 0)- 纤维化。由命题 5.2.6 可知，这两者都计算 F 的 $\mathbb{D}(d, f(-))$-加权极限。□

另一方面，令 f 为恒等映射，可得以下特例：

推论 5.6.7. 设 $\mathbb{B}$ 为一个$(\infty, 2)$-范畴，且$(\mathbb{C}, I)$ 为一个带标记的$(\infty,2)$-范畴。则有：

- 若 $\mathbb{B}$ 对所有 $c \in \mathbb{C}$都存在关于 $\mathbb{C}_c$ 的 I_c-松极限，则有一个伴随

$$\mathrm{id}^*\colon \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{C}, \mathbb{B}) \rightleftarrows \mathsf{Fun}(\mathbb{C}, \mathbb{B})^{I\text{-(op)lax}}\colon \mathrm{id}_*^{I\text{-lax}}$$

其中 $\mathrm{id}^{I\text{-松弛}_*} F(c) \simeq \text{极限}^{I_d\text{-松弛}_{\mathbb{C}_c}} F$。

▶ 若 $\mathbb{B}$ 对所有 $c \in \mathbb{C}$ 都存在关于 $\mathbb{C}_{c}$ 的 I_c-松余极限，则我们有一个伴随

$$\mathrm{id}_!^{I\text{-lax}} \colon \mathsf{Fun}(\mathbb{C},\mathbb{B})^{I\text{-lax}} \rightleftarrows \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{C},\mathbb{B}) \colon \mathrm{id}^*$$

其中 $\mathrm{id}^{I\text{-松弛}!}\, F(c) \simeq$ 余极限$^{I_c\text{-松弛}}{}_{\mathbb{C}_{c}}\ F$。

▶ 若 $\mathbb{B}$ 对所有 $c \in \mathbb{C}$都存在关于 $\mathbb{C}_c$ 的 I_c-反松极限，则有一个伴随

$$\mathrm{id}^* \colon \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{C},\mathbb{B}) \rightleftarrows \mathsf{Fun}(\mathbb{C},\mathbb{B})^{I\text{-(op)lax}} \colon \mathrm{id}_*^{I\text{-oplax}}$$

其中 $\mathrm{id}^{I\text{-反松}_*}\ F(c) \simeq$极限$^{I_c\text{-反松}}{}_{\mathbb{C}_c}\ F$。▶ 若 $\mathbb{B}$ 对所有 $c \in \mathbb{C}$都存在关于 $\mathbb{C}_{c}$ 的 I_c-反松余极限，则有一个伴随，其中 $\mathrm{id}^{I\text{-反松}!}\, F(c) \simeq$余极限$^{I_c\text{-反松}}{}_{\mathbb{C}_{c}}\ F$。

$$\mathrm{id}_!^{I\text{-oplax}} \colon \mathsf{Fun}(\mathbb{C},\mathbb{B})^{I\text{-oplax}} \rightleftarrows \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{C},\mathbb{B}) \colon \mathrm{id}^*$$

□

观察 5.6.8。 设 $f\colon (\mathbb{C},\ I) \to \mathbb{D}^\sharp$ 是一个标记函子，并假设 $\mathbb{B}$在 $\mathbb{C}_d$ 上存在 I_d-松弛极限。我们提出以下断言：

▶伴随 $f^* \dashv f_*^{I\text{-松弛}}$在对象 c处的单位可视为由沿标记函子 $(\mathbb{C}_d,\ I_d) \to \mathbb{D}_d^\sharp$ 的限制所诱导的 I-松弛极限上的典范映射。▶伴随 $f^* \dashv f_*^{I\text{-松弛}}$在对象 c处的余单位可视为由沿标记函子 $(\mathbb{C}_{f(c)},\ I_{f(c)}) \to \mathbb{D}^\sharp_{f(c)}$ 的限制所诱导的 I-松弛极限上的典范映射。

为此，请回顾我们在定理 5.6.5 中证明了观察 5.6.2 中的交换方块在水平方向上可取伴随。特别地，这使我们可以归约到 $\mathbb{B} = \mathbb{C}$处∞。观察 4.6.8 中的第一个断言，只需令 $p = \mathbb{D}\mathsf{Free}^{\epsilon}_{\mathbb{D}^{\sharp\sharp}}(t_d)$对于 $t_d\colon\ [0] \to \mathbb{D}^{\sharp\sharp}$ 选取对象 d即可。第二个断言同样由观察 4.6.9推出，只需令 p 为源是终端范畴的带装饰函子。

特别地，如果 f 是全忠实的，则有 $\mathbb{C}_{f(c)} \simeq \mathbb{C}_c$；由于 $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ 的包含由命题 4.2.9知是 (0,1)-余终 cofinal 的，这一伴随余单位的刻画使我们可以得出结论：f_*^{I}-松是一个全忠实函子。

命题 5.6.9。 设 $(\mathbb{I}, E)$ 是一个带标记的 $(\infty,2)$-范畴，并设 $\mathbb{C}$ 是一个 $(\infty,2)$-范畴，且该范畴承认形状为 $(\mathbb{I}, E)$的部分*(反)*松余极限。那么沿着 $\iota\colon\ \mathbb{I}^{\sharp\sharp} \hookrightarrow (\mathbb{I}^{\triangleright}_{E\text{-(op)lax}})^{\sharp\sharp}$ 的左 *Kan* 延拓存在，是全忠实的，其本质像是由 *E-(反)*松余极限锥构成的满 $(\infty,2)$-子范畴。

证明。 由于包含 ι 根据命题 2.5.8是全忠实的，因此只要左 Kan 扩张 $\iota_!$ 存在，它就会根据观察 5.6.8是全忠实的。为证明 $\iota_!$确实存在，我们将应用推论5.6.6 并验证相应的加权余极限存在。我们先考虑拉回图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{I}(j) = \left(\mathbb{I}^{\triangleright}_{E\text{-(op)lax}}\right)_{j} \times_{\mathbb{I}^{\triangleright}_{E\text{-(op)lax}}} \mathbb{I} & \xrightarrow{\ \iota\ } & \left(\mathbb{I}^{\triangleright}_{E\text{-(op)lax}}\right)_{j} \\
\downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
\mathbb{I} & \xrightarrow{\ j\ } & \mathbb{I}^{\triangleright}_{E\text{-(op)lax}},
\end{array}$$

并注意到 $\mathbb{I}(j)$ 可识别为 $\mathbb{I}_{j}$ 只要 $j \neq *$，其中 $*$ 表示锥点。特别地，这个加权余极限存在，且可通过将我们的函子作用于对象 j来得到。如果 $j = *$，那么观察 2.5.9 告诉我们，$\mathbb{I}(*) \to \mathbb{I}$ 是(1,0)-纤维化 $\mathfrak{F}_{\mathbb{I}}^{(1,0)}(\mathbb{I}, E)$。根据我们的假设，并应用命题 5.2.8，我们得出相应的加权余极限存在。

为完成证明，我们必须证明一个函子 $\hat{}F\colon \mathbb{I}^{\triangleright}_{E\text{-(op)lax}} \to \mathbb{C}$ 定义了一个$\hat{}$ $\hat{}E$-(op)lax 余极限锥，当且仅当 $F \simeq \iota^* F$。由观察 5.6.8 可知，余单位变换可以识别为余极限之间的映射

$$\operatorname{colim}^{\natural\text{-(op)lax}}_{\mathbb{I}(*)} \hat{F} \circ \pi \circ \iota \to \operatorname{colim}^{\natural\text{-(op)lax}}_{\left(\mathbb{I}^{\triangleright}_{E\text{-(op)lax}}\right)_{*}} \hat{F} \circ \pi \simeq \hat{F}(*)$$

其中，最后一个等价来自将切片上的余极限识别为在对应于恒等映射的对象处求值，这与 $j \neq *$ 的 $\mathbb{I}(j)$ 情形完全相同。

接下来，我们注意到推论 4.4.7中的伴随的单位给出了一个截面$s\colon (\mathbb{I}, E) \to \mathbb{I}(*)$。此伴随立即推出 s 是一个带标记的 (1,0)- 等价在 $\mathbb{I}^{\sharp}$ 之上，即 (1,0)- 余最终的。结合等价$\hat{}$ $\hat{}F \circ j \circ p \simeq F \circ \pi \circ \iota$，我们可以将余单位变换识别为映射

$$\operatorname{colim}^{E\text{-(op)lax}}_{(\mathbb{I}, E)} \hat{F} \circ j \to \hat{F}(*).$$

根据构造，此映射由 E-(op)lax-$\hat{}$ 余极限的泛性质，通过 F 所确定的锥诱导。由此可知，当且仅当 F 是一个余极限锥时，此映射才是等价。□

5.7. **加权余极限的 Bousfield–Kan 公式。** 本节的目标是利用我们关于 Kan 延拓的结果，得到 $(\infty,2)$-范畴中加权余极限的 Bousfield–Kan 类型（或“条构造”）描述；对于一般的充实情形，Heine [Hei24，定理 344] 也用截然不同的方法完成了这项工作。为此，首先要描述函子 ∞-范畴中的映射 $(\infty,2)$-范畴；我们将通过单子性定理从以下观察中推导出这一描述：

命题 5.7.1。 设 $\mathbb{D}$ 是一个余完备的$(\infty,2)$-范畴，且 $f\colon \mathbb{C}' \to \mathbb{C}$ 是小$(\infty,2)$-范畴之间的本质满函子。那么伴随

$$f_! : \mathsf{Fun}(\mathbb{C}', \mathbb{D}) \rightleftarrows \mathsf{Fun}(\mathbb{C}, \mathbb{D}) : f^*$$

是单子性的，且 f^* 保留所有余极限。

证明。 由引理 3.3.8 可知 f^* 是保守的。此外，根据推论5.4.3，它保留所有余极限。因此，由单子性定理[Lur17，定理 4.7.3，5] 可知该伴随是单子性的。□

作为一个特例，我们有：

推论 5.7.2. 设 $\mathbb{D}$ 是一个余完备$(\infty,2)$-范畴，而 $\mathbb{C}$ 是一个小的$(\infty,2)$-范畴。那么伴随

$$i_! : \mathsf{Fun}(\mathbb{C}^{\simeq}, \mathbb{D}) \rightleftarrows \mathsf{Fun}(\mathbb{C}, \mathbb{D}) : i^*$$

是单子性的，其中 i 是核心包含 $\mathbb{C}^{\simeq} \to \mathbb{C}$。 □

命题 5.7.3。 对于 $(\infty, 2)$-范畴之间的函子 $F, G\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$，从 F 到 G 的自然变换的 ∞-范畴可以表示为如下形式的极限

$$\mathsf{Nat}_{\mathbb{C},\mathbb{D}}(F,G) \simeq \lim_{[n]\in\mathbf{\Delta}} \lim_{(c_0,\dots,c_n)\in(\mathbb{C}^{\simeq})^{\times n+1}} \mathsf{Fun}(\mathbb{C}(c_0,\dots,c_n), \mathbb{D}(F(c_0), G(c_n))$$

其中

$$\mathbb{C}(c_0,\dots,c_n) := \mathbb{C}(c_0,c_1) \times \mathbb{C}(c_1,c_2) \times \cdots \times \mathbb{C}(c_{n-1},c_n).$$

证明。 如有必要，将 $\mathbb{D}$ 嵌入（大）预层中（这会根据 (∞,2)-范畴上的函子 [AGH25，推论 2.7。14] 给出一个完全忠实的函子），不失一般性，可假设 $\mathbb{C}$ 是小的，且 $\mathbb{D}$ 是余完备的（相对于某个宇宙）。由于根据推论 5.7.2，伴随 $i_! \dashv i^*$ 对于 $i\colon \mathbb{C}^{\simeq} \to \mathbb{C}$ 是单子性的，因此对象 F 有一个作为余极限的单纯自由分解

$$F \simeq \operatorname{colim}_{[n]\in\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} i_! T^n i^* F$$

在 $\mathsf{Fun}(\mathbb{C},\mathbb{D})$ 中，其中 $T := i^* i_!$（例如，参见 [Lur17，引理 4.7.3。13]）。由于 $\mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{C}, \mathbb{D})$ 根据推论 5.4.3是一个余完备的 $(\infty, 2)$-范畴，因此这也是一个 $(\infty, 2)$-范畴余极限，从而得到一个等价

$$\begin{aligned}\mathsf{Nat}_{\mathbb{C},\mathbb{D}}(F,G) &\simeq \lim_{[n]\in\mathbf{\Delta}} \mathsf{Nat}_{\mathbb{C},\mathbb{D}}(i_! T^n i^* F, G)\\ &\simeq \lim_{[n]\in\mathbf{\Delta}} \mathsf{Nat}_{\mathbb{C}^{\simeq},\mathbb{D}}(T^n i^* F, i^* G)\\ &\simeq \lim_{[n]\in\mathbf{\Delta}} \lim_{c\in\mathbb{C}^{\simeq}} \mathbb{D}((T^n i^* F)(c), G(c)),\end{aligned}$$

其中，第一个等价利用了左 Kan 延拓 $i_!$ 是一个（∞,2）范畴的左伴随；最后一个等价则利用了 $\mathbb{C}^{\simeq}$ 是一个 ∞-群胚，因此我们有等价 $\mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{C}^{\simeq}, \mathbb{D}) \simeq$ 极限$_{\mathbb{C}^{\simeq}}$ $\mathbb{D}$。

现在，观察 5.2.4以及推论 5.6.6 中左 Kan 延拓的加权余极限公式表明，对于 $W\colon \mathbb{C}^{\simeq} \to \mathbb{D}$，我们有

$$(i_! W)(c) \simeq \operatorname{colim}^{\mathbb{C}(-,c)}_{\mathbb{C}^{\simeq}} W \simeq \operatorname{colim}_{x\in\mathbb{C}^{\simeq}} W(x) \boxtimes \mathbb{C}(x,c),$$

其中 $\boxtimes$ 表示 $\mathbb{D}$ 在 ∞-范畴上的张量化，因此

$$\begin{aligned}(T^n W)(c) &\simeq \operatorname{colim}_{x\in\mathbb{C}^{\simeq}} T^{n-1} W(x) \boxtimes \mathbb{C}(x,c)\\ &\simeq \operatorname{colim}_{(x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{C}^{\simeq})^{\times n}} W(x_1) \boxtimes \mathbb{C}(x_1,\dots,x_n,c).\end{aligned}$$

将这个余极限移到外面，并重写所得的极限，我们便得到

$$\begin{aligned}\mathsf{Nat}_{\mathbb{C},\mathbb{D}}(F,G) &\simeq \text{极限}_{[n]\in\mathbf{\Delta}} \text{极限}_{c\in\mathbb{C}^{\simeq}} \mathbb{D}(\text{余极限}_{(x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{C}^{\simeq})^{\times n}} F(x_1) \boxtimes \mathbb{C}(x_1,\dots,x_n,c)\ G(c))\\ &\simeq \lim_{[n]\in\mathbf{\Delta}} \lim_{(x_0,\dots,x_n)\in(\mathbb{C}^{\simeq})^{\times(n+1)}} \mathbb{D}(F(x_0) \boxtimes \mathbb{C}(x_0,\dots,x_n), G(x_n))\\ &\simeq \lim_{[n]\in\mathbf{\Delta}} \lim_{(x_0,\dots,x_n)\in(\mathbb{C}^{\simeq})^{\times(n+1)}} \mathsf{Fun}(\mathbb{C}(x_0,\dots,x_n), \mathbb{D}(F(x_0), G(x_n))),\end{aligned}$$

如所要求。 □

推论 5.7.4。 对于一个从(∞,2)-范畴 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 出发的函子，其中 $\mathbb{C}$ 是小的，我们有：

(i) 对于任意权 $W\colon \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$，加权余极限 $\operatorname{colim}^W_{\mathbb{C}} F$ 存在，且可计算为

$$\operatorname{colim}_{[n]\in\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \operatorname{colim}_{(c_0,\dots,c_n)\in(\mathbb{C}^{\simeq})^{\times(n+1)}} F(c_0) \boxtimes (\mathbb{C}(c_0,\dots,c_n) \times W(c_n))$$

如果它在 $\mathbb{D}$ 中存在。

(ii) 对任意权 $W\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$，加权极限 $\lim_{\mathbb{C}}^{W} F$ 存在，且计算为

$$\lim_{[n]\in\mathbf{\Delta}} \lim_{(c_0,\dots,c_n)\in(\mathbb{C}^{\simeq})^{\times(n+1)}} F(c_n)^{W(c_0)\times\mathbb{C}(c_0,\dots,c_n)}$$

如果它在 $\mathbb{D}$ 中存在。

证明。 我们证明余极限的情形；极限的情形证明类似，或者可通过应用 $(-)^{\mathrm{op}}$ 得出。对于 $d \in \mathbb{D}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(\text{余极限}_{\mathbb{C}}^{W} F,\ d) &\simeq \mathrm{Nat}_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}},\ \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(W,\ \mathbb{D}(F,\ d)) \\ &\simeq \lim_{[n]\in\mathbf{\Delta}} \lim_{(c_0,\dots,c_n)\in(\mathbb{C}^{\simeq})^{\times(n+1)}} \mathrm{Fun}(W(c_0)\times\mathbb{C}^{\mathrm{op}}(c_0,\dots,c_n), \mathbb{D}(F(c_n),d)) \\ &\simeq \lim_{[n]\in\mathbf{\Delta}} \lim_{(c_0,\dots,c_n)\in(\mathbb{C}^{\simeq})^{\times(n+1)}} \mathbb{D}(F(c_0)\boxtimes(\mathbb{C}(c_0,\dots,c_n)\times W(c_n)),d) \\ &\simeq \mathbb{D}(\mathrm{colim}_{[n]\in\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \mathrm{colim}_{(c_0,\dots,c_n)\in(\mathbb{C}^{\simeq})^{\times(n+1)}} F(c_0)\boxtimes(\mathbb{C}(c_0,\dots,c_n)\times W(c_n),d)),\end{aligned}$$

如所需，其中在第三个等价中，我们重新排列了对象列表，以便从 $\mathbb{C}^{\mathrm{op}}$ 转到 $\mathbb{C}$。 □

推论 5.7.5。

(i) 一个 $(\infty, 2)$-范畴 $\mathbb{C}$ 是余完备的，当且仅当 $\mathbb{C}$ 在 Cat_∞上带张量，且 $\mathbb{C}^{\leq 1}$ 是一个余完备的 ∞-范畴。*(ii)* 一个 $(\infty, 2)$-范畴 $\mathbb{C}$ 是完备的，当且仅当 $\mathbb{C}$ 在 Cat_∞上余张量化，且 $\mathbb{C}^{\leq 1}$ 是一个完备的 ∞-范畴。□

5.8. **自由余完备化**。 本节的目标是确定 $\mathbb{P}\mathrm{Sh}(\mathbb{C})$ 是一个小的 $(\infty, 2)$-范畴 $\mathbb{C}$的自由余完备化。这是 Heine 关于在 ∞-范畴中对一类余极限进行富化自由余完备化的非常一般的构造的特例，见 [Hei24，§3。11]；关于 (∞, ∞)-范畴的类似结果也已由 Loubaton 证明，见 [Lou24，推论 4.2.4。8]。为了证明这一点，我们需要 Yoneda 引理的函子性版本；我们将利用以下构造，从关于纤维化的结果中推导出该版本：

构造 5.8.1。 给定一个函子 $\Phi\colon \mathbb{A}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{B} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$，我们可以将其视为函子 $\Phi'\colon \mathbb{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{B}, \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty) \simeq \mathbb{1}\mathbb{F}\mathrm{ib}_{/\mathbb{B}}^{(0,1)}$。将后者识别为 $\mathbb{M}\mathbb{C}\mathrm{at}^{(\infty,2)/\mathbb{B}^\sharp}$ 的一个全子 $(\infty, 2)$-范畴后，我们可以将其直化为标记的 (1,0)-纤维化之间的一个态射

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{E},\ I) & \xrightarrow{\quad(p,\ q)\quad} & \mathbb{A}^\sharp \times \mathbb{B}^\sharp \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbb{A}^\sharp, & \end{array}$$

这意味着 $\mathbb{E}$ 中的 p-笛卡尔1-态射和 p-余笛卡尔 2-态射映射到 $\mathbb{B}$ 中的等价。给定 $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ 中位于 $(f\colon a \to a', g\colon b \to b')$ 上方的一个 1-态射 $\varphi\colon x \to y$ in $\mathbb{E}$，我们可以将 φ 分解为

$$x \xrightarrow{\varphi'} f^*y \xrightarrow{\bar{f}} y$$

其中 f是位于 f之上的 p-笛卡尔态射，因此位于 $(f, \mathrm{id}_{b'})$ 之上；于是 φ' 位于 (id_a, g) 之上，因此可经由 $x \to g_!x \to f^*y$ 分解为 $\mathbb{E}_a$中的一个 q_a-余笛卡尔态射；当且仅当由此得到的态射 $g_!x \to f^*y$ 是一个等价时，态射 φ 才属于标记 I，

也就是说，当且仅当 φ 分解为一个 q_a-余笛卡尔态射后接一个 p-笛卡尔态射时。我们将其称为

$$(p,q)\colon (\mathbb{E},I)\to \mathbb{A}^\sharp\times\mathbb{B}^\sharp$$

作为与 Φ 相关联的带标记的 (1,0)-双纤维化。若我们改为将 Φ 视为函子$\mathbb{B}\to \mathbb{F}\mathrm{un}(\mathbb{A}^{\mathrm{op}},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty)\simeq \mathbb{1}\mathrm{Fib}^{(1,0)}_{/\mathbb{A}}$，并将其沿 $\mathbb{B}$ 直化，则类似地得到带标记的 (0,1)-双纤维化[6]

$$(q',p')\colon (\mathbb{E}',I')\to \mathbb{B}^\sharp\times\mathbb{A}^\sharp$$

对于 Φ。

命题 5.8.2. 给定函子 $\Phi\colon \mathbb{A}^{\mathrm{op}}\times\mathbb{B}\to\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$，令

$$(p,q)\colon (\mathbb{E},I)\to \mathbb{A}^\sharp\times\mathbb{B}^\sharp,\qquad (q',p')\colon (\mathbb{E}',I')\to \mathbb{B}^\sharp\times\mathbb{A}^\sharp$$

分别为与 Φ 对应的带标记的 *(1, 0)*-双纤维化和带标记的 *(0, 1)*-双纤维化。

(i) 对于函子 $G\colon \mathbb{B}\to\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$，其对应的 *1*-纤维化*(0, 1)*-纤维化为 $\mathbb{Q}\to\mathbb{B}$，函子 $\mathrm{Nat}_{\mathbb{B},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(\Phi,G)\colon \mathbb{A}\to\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$ 由 $\mathbb{A}$ 上的 *1*-纤维化*(0, 1)*-纤维化 $p_*q^*\mathbb{Q}$ 分类。*(ii)* 对于函子 $H\colon \mathbb{A}^{\mathrm{op}}\to\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$，其对应的 *1*-纤维化的 *(1, 0)*-纤维化为$\mathbb{P}\to\mathbb{A}$，函子 $\mathrm{Nat}_{\mathbb{A}^{\mathrm{op}},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(\Phi,G)\colon \mathbb{B}^{\mathrm{op}}\to\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$ 由 $\mathbb{B}$ 上的 *1*-纤维化的 *(1, 0)*-纤维化 $q'_*p'^*\mathbb{P}$ 分类。

证明。 我们证明第一种情形。设 Φ' 为与Φ相关联的函子 $\mathbb{A}^{\mathrm{op}}\to\mathbb{1}\mathrm{Fib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}}$。于是我们有一个自然等价

$$\mathrm{Nat}_{\mathbb{B},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(\Phi,G)\simeq \mathbb{1}\mathrm{Fib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}}(\Phi',\mathbb{Q})\simeq \mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)/\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}(\Phi'^{\natural},\mathbb{Q}^{\natural}).$$

给定 $W\colon \mathbb{A}\to\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$，我们得到一个自然拉回方块

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Nat}_{\mathbb{A},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(W,\mathrm{Nat}_{\mathbb{B},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(\Phi,G)) & \longrightarrow & \mathrm{Nat}_{\mathbb{A},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(W,\mathrm{DFun}(\Phi'^{\natural},\mathbb{Q}^{\natural}))\\ \downarrow & & \downarrow\\ * & \longrightarrow & \mathrm{Nat}_{\mathbb{A},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(W,\mathrm{DFun}(\Phi'^{\natural},\mathbb{B}^{\sharp\sharp})),\end{array}$$

其中我们将 Φ' 视为到 $\mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$的函子。由此可将左上方的 ∞-范畴等同为

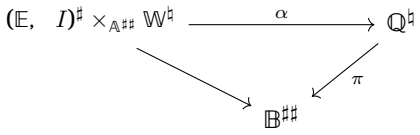
$$\mathrm{DFun}_{/\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}(\mathrm{colim}^W_{\mathbb{A}^{\mathrm{op}}}\Phi'^{\natural},\mathbb{Q}^{\natural})$$

其中加权余极限取在 $\mathbb{D}\mathbb{C}\mathrm{at}_{(\infty,2)}$。这里 $p\colon (\mathbb{E},I)^\sharp\to\mathbb{A}^{\sharp\sharp}$ 是装饰的 $(1,0)$-纤维化，对应于 Φ'，因此若 $\pi\colon \mathbb{W}\to\mathbb{A}$ 是 $(0,1)$-纤维化，对应于 W，则推论 5.3.17 将此加权余极限等同为 $(\mathbb{E},I)^\sharp\times_{\mathbb{A}^{\sharp\sharp}}\mathbb{W}^\natural$的局部化，其中我们反转

▶ 投影到 $\mathbb{E}$ 中的 a p-笛卡尔态射以及 $\mathbb{W}$ 中的 a π-余笛卡尔态射的 1-态射，▶ 投影到 $\mathbb{E}$ 中的 a p-余笛卡尔 2-态射的 2-态射（因为 $\mathbb{W}$ 中的所有 2-态射都是 π-笛卡尔的）。

[6]事实上，我们预期这与带标记的 $(1,0)$-双纤维化相同，对应于 Φ，只是 $\mathbb{A}$ 与 $\mathbb{B}$ 的次序相反；这可由一个 $(\infty,2)$-范畴版本的双变直化唯一性推出，该唯一性证明于 [HHLN23]，但我们在此不予深究。

我们声称，在我们的情形下可以忽略此局部化：给定一个交换三角形



我们看到，源中任何投影到 $\mathbb{E}$ 中的 p-笛卡尔态射的 1-态射都带有装饰，因此会被送到 $\mathbb{Q}^\natural$ 中的 π-余笛卡尔态射；但它也经由 q 投影到 $\mathbb{B}$ 中的等价，所以其像是在一个等价之上的 π-余笛卡尔态射，因此它本身必定是等价。同理，任何投影到 $\mathbb{E}$ 中的 p-余笛卡尔态射的 2-态射，其在 $\mathbb{Q}$ 中的像都必须可逆。由此可得自然等价

$$\begin{aligned}\mathsf{Nat}_{\mathbb{A},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(W,\mathsf{Nat}_{\mathbb{B},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(\Phi,G)) &\simeq \mathsf{DFun}_{/\mathbb{B}^{\sharp\sharp}}((\mathbb{E},I)^\sharp \times_{\mathbb{A}^{\sharp\sharp}} \mathbb{W}^\natural, \mathbb{Q}^\natural)\\ &\simeq \mathbb{1}\mathsf{Fib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}}(q_!p^*\mathbb{W}^\natural, \mathbb{Q}^\natural)\\ &\simeq \mathbb{1}\mathsf{Fib}^{(0,1)}_{/\mathbb{B}}(\mathbb{W}^\natural, p_*q^*\mathbb{Q}^\natural),\end{aligned}$$

正如所需。 □

作为一个特例，我们可以确定形如 $\mathsf{Fun}(F(\text{–}),\mathsf{C})$ 的函子的纤维化：

推论 5.8.3。考虑一个函子 $F\colon\ \mathbb{B}\to\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$ 并令

▶ $p\colon\ \mathbb{E}\to\mathbb{B}$ 是 F 的$(0,\ 1)$-纤维化，▶ $q\colon$ $\mathbb{E}'\to\mathbb{B}^{\mathrm{op}}$ 是 F 的 $(1,\ 0)$- 纤维化。

那么，对于任意 ∞-范畴 C，函子 $\mathsf{Fun}(F(\text{–}),\mathsf{C})\colon\ \mathbb{B}^{\mathrm{op}}\to\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$ 由下式分类：

▶ 这个(1,0)-纤维化 $p_*(\mathsf{C}\times\mathbb{E})$，

▶ 这个$(0,\ 1)$-纤维化 $q_*(\mathsf{C}\times\mathbb{E}')$。 □

结合我们关于右 Kan 延拓的工作，现在可以得到所需的 Yoneda 引理函子性版本：

记号 5.8.4。对于一个 $(\infty,\ 2)$-范畴 $\mathbb{C}$，令 $h_{\mathbb{C}}\colon\ \mathbb{C}\to\mathbb{P}\mathbb{S}\mathsf{h}(\mathbb{C})$ 为通过在第二个变量中直化得到的函子

$$(\mathrm{ev}_0,\mathrm{ev}_1)\colon\ \mathbb{A}\mathrm{r}^{\mathrm{oplax}}(\mathbb{C})\to\mathbb{C}\times\mathbb{C}$$

为一个函子

$$\mathbb{C}\to\mathbb{1}\mathsf{Fib}^{(1,0)}_{/\mathbb{C}}\simeq\mathbb{P}\mathbb{S}\mathsf{h}(\mathbb{C}).$$

推论 5.8.5. 我们有一个自然等价

$$\mathsf{Nat}_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(h_{\mathbb{C}},\text{–})\simeq\mathrm{id}$$

函子 $\mathbb{P}\mathbb{S}\mathsf{h}(\mathbb{C})\ \to\mathbb{P}\mathbb{S}\mathsf{h}(\mathbb{C})$.

证明. 由命题 5.8.2，我们知道，$\mathsf{Nat}^{\mathbb{C}^{\mathrm{op}},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(h_{\mathbb{C}},\text{–})$ 可以用纤维化表示为

$$\mathrm{ev}_{0,*}\,\mathrm{ev}_1^*\colon\ \mathbb{1}\mathsf{Fib}^{(1,0)}_{/\mathbb{C}}\to\mathbb{1}\mathsf{Fib}^{(1,0)}_{/\mathbb{C}}.$$

但定理 4.6.4 将后者识别为沿 $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ 拉回的右伴随。 □

注 5.8.6。 针对 (∞， ∞)-范畴的 Yoneda 引理的类似函子性版本见 [Lou24，定理 4.2.1。20]

推论 5.8.7 （“余 Yoneda 引理”）。 对于一个(∞,2)-范畴 $\mathbb{C}$ ， 我们有一个自然等价

$$\operatorname{colim}_{\mathbb{C}}^{\Phi} h_{\mathbb{C}} \simeq \Phi$$

对于 $\Phi \in \mathbb{PS}\mathsf{h}(\mathbb{C})$.

证明。 根据定义，这个加权余极限应满足

$$\mathbb{PS}\mathsf{h}(\mathbb{C})(\operatorname{colim}_{\mathbb{C}}^{\Phi} h_{\mathbb{C}}, \Psi) \simeq \mathsf{Nat}_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}},\mathbb{C}\mathrm{at}_{\infty}}(\Phi, \mathsf{Nat}_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}},\mathbb{C}\mathrm{at}_{\infty}}(h_{\mathbb{C}}, \Psi)),$$

并且由推论5.8.5 可知，右侧自然等价于 ∞-范畴 $\mathsf{Nat}_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}},\mathbb{C}\mathrm{at}_{\infty}}(\Phi, \Psi)$。□

有了这些结果，我们现在可以转而讨论小的 (∞，2)-范畴的自由余完备化。

命题 5.8.8. 设 $\mathbb{C}$ 是一个小的(∞,2)-范畴， $\mathbb{D}$ 是一个余完备(∞, 2)-范畴。

(i) 对任意函子 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$，左 *Kan* 延拓 $h_{\mathbb{C},!}F\colon \mathbb{PS}\mathsf{h}(\mathbb{C}) \to \mathbb{D}$ 存在且是余连续的。*(ii)* 对任意余连续函子 $G\colon \mathbb{PS}\mathsf{h}(\mathbb{C}) \to \mathbb{D}$，余单位映射 $h_{\mathbb{C},!}h_{\mathbb{C}}^{*}G \to G$是一个等价。

证明。由推论 5.6.6，若 $\mathbb{D}$ 存在由 $\mathbb{PS}\mathsf{h}(\mathbb{C})(h_{\mathbb{C}}(-)\ \varphi)$ 加权的余极限，则 Kan 延拓 $h_{\mathbb{C},!}F$ 存在，其中对所有 $\varphi \in \mathbb{PS}\mathsf{h}(\mathbb{C})$ 都成立；由推论 5.8.5，该预层自然等价于 φ，因此根据我们的假设—— $\mathbb{C}$ 是小的且 $\mathbb{D}$是余完备的——它存在。为证明 $h_{\mathbb{C},!}F$ 是余连续的，我们考虑 $\Phi\colon \mathbb{J} \to \mathbb{PS}\mathsf{h}(\mathbb{C})$ 和$W \in \mathbb{PS}\mathsf{h}(\mathbb{J})$，并使用命题 5.2.13 计算

$$h_{\mathbb{C},!}F(\operatorname{colim}_{\mathbb{J}}^{W} \Phi) \simeq \operatorname{colim}_{\mathbb{C}}^{\operatorname{colim}_{\mathbb{J}}^{W} \Phi} F \simeq \operatorname{colim}_{\mathbb{J}}^{W} \operatorname{colim}_{\mathbb{C}}^{\Phi} F \simeq \operatorname{colim}_{\mathbb{J}}^{W} h_{\mathbb{C},!}F(\Phi).$$

最后，如果 G 保余极限，那么在 $\varphi \in \mathbf{PSh}(\mathbb{C})$ 处的余单位映射 $h_{\mathbb{C},\,!}h_{\mathbb{C}}^{*}G \to G$ 就是典范映射

$$\operatorname{colim}_{\mathbb{C}}^{\varphi} G(h_{\mathbb{C}}) \to G(\operatorname{colim}_{\mathbb{C}}^{\varphi} h_{\mathbb{C}}),$$

由于 G 是余连续的，因此这是一个等价。 □

推论 5.8.9. 如果 $\mathbb{C}$ 是一个小的 (∞,2)-范畴，而 $\mathbb{D}$ 是一个余完备的 (∞,2)-范畴，那么限制函子

$$h_{\mathbb{C}}^{*}\colon \mathsf{Fun}(\mathbb{PS}\mathsf{h}(\mathbb{C}), \mathbb{D}) \to \mathsf{Fun}(\mathbb{C}, \mathbb{D})$$

有一个完全忠实左伴随 $h_{\mathbb{C},\,!}$ 其像为余连续函子。 □

5.9. **可呈现(∞，2)-范畴**。本节将考虑一个相当简单的可呈现（∞，2）-范畴定义，并证明它有若干其他刻画，这些刻画推广了可呈现 ∞-范畴的相关刻画：

定义 5.9.1. 一个 (∞,2)-范畴 $\mathbb{C}$ 称为可表的，如果 $\mathbb{C}$ 余完备且 $\mathbb{C}^{\leq 1}$可表，或者等价地说是可达的。

我们先陈述比较结果，然后引入理解它所需的术语：

定理 5.9.2. 对于一个(∞,2)-范畴 $\mathbb{C}$，以下条件等价：
(1) $\mathbb{C}$可表。*(2)* $\mathbb{C}$ 余完备且局部小，并且存在一个正则基数 κ 以及一个由 *2-*κ*-* 紧对象组成的小全子（∞, *2*）-范畴 $\mathbb{C}_0 \subseteq \mathbb{C}$，使得 $\mathbb{C}$ 中的每个对象都是一个以 κ-滤过∞-范畴为指标、取值于 $\mathbb{C}$ 的图表的锥形余极限。*(3)* 存在一个小的（∞, *2*）-范畴 $\mathbb{J}$ 以及一个全忠实函子 $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{PS}h(\mathbb{J})$，它有左伴随，且其像在对某个正则基数 κ而言以κ-滤过的 ∞-范畴上的锥形余极限下封闭。*(4)* 存在一个小的（∞, *2*）-范畴 $\mathbb{J}$、 $\mathbb{PS}h(\mathbb{J})$中的一个小的 *1-*态射集合 S 以及一个等价 $\mathbb{C} \simeq Loc_S(\mathbb{PS}h(\mathbb{J}))$.

定义 5.9.3. 如果 $\mathbb{C}(c,–)$ 保持在 κ-过滤的 ∞-范畴上的锥形余极限，则对象 $c \in \mathbb{C}$ 对正则基数 κ 是 *2-*κ*-* 紧致的 。

观察 5.9.4. 如果 $\mathbb{C}$ 存在关于 κ-过滤的 ∞-范畴的锥形余极限，且有由 $[1]$, 给出的张量，那么对象 $c \in \mathbb{C}$ 是 2-κ-紧致的，当且仅当 c 和 $[1] \boxtimes c$ 在 $\mathbb{C}^{\leq 1}$ 中都是 κ-紧致的。（事实上，只需 $[1]boxtimesc$ 是 2-κ-紧致的，因为 c 是它的一个收缩。）

定义 5.9.5. 对于 s：在 (∞, 2)-范畴 $\mathbb{C}$ 中的 $x \to y$ 和 c，如果函子 c 相对于 s 是 *2-* 局部 的，

$$s^* : \mathbb{C}(y, c) \to \mathbb{C}(x, c)$$

是一个等价。如果 S 是 $\mathbb{C}$ 中一组 1-态射，我们用 $\mathrm{Loc}_S(\mathbb{C})$ 表示由那些相对于 S 的所有元素都是 2- 局部的对象构成的全子 (∞,2)- 范畴。

观察 5.9.6. 设 $\mathbb{C}$ 是一个具有由 $[1]$ 张量的 (∞,2)-范畴。那么，对象 c 关于 s 是 2-局部的，当且仅当 c 在 $\mathbb{C}^{\leq 1}$ 中同时关于 s 和 $s \boxtimes [1]$ 是局部的。类似地，若 $\mathbb{C}$ 具有由 $[1]$ 余张量，则 c 关于 s 是 2-局部的，当且仅当 c 和 $c^{[1]}$ 在 $\mathbb{C}^{\leq 1}$ 中关于 s 是局部的。

现在我们来考察关于可呈示 ∞-范畴的标准结果的一些简单推论。

观察 5.9.7. 设 $\mathbb{C}$ 是一个可呈示的（∞,2）-范畴。那么 $\mathbb{C}$ 也在 Cat_∞上余张量化，因为预层 Map(K $\mathbb{C}$(– c)) 保持极限，因此是可表的。由于 $\mathbb{C}^{\leq 1}$ 是完备的，因此 $\mathbb{C}$ 也是一个完备的（∞,2）-范畴。

观察 5.9.8. 若 $\mathbb{C}$ 是一个可呈示的（∞,2）-范畴，则对于 $c, c' \in \mathbb{C}$，我们有

$$\mathrm{Map}(\mathsf{K}, \mathbb{C}(c, c')) \simeq \mathbb{C}(\mathsf{K} \boxtimes c, c')^{\simeq}$$

对于所有小的 ∞-范畴 K，它都是一个小的 ∞-群胚。因此，$\mathbb{C}(c,\ c')$ 是一个小的 ∞-范畴，所以 $\mathbb{C}$ 是局部小的。

结合 [Lur09a中的伴随函子定理 5.5.2，9] 以及命题 2.1.5，我们得到：

命题 5.9.9。设 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{D}$ 是局部小的（∞，2）-范畴，其中 $\mathbb{C}$ 可表，并考虑一个函子 $F\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{D}$。

（*1*） F 是左伴随，当且仅当它是余连续的。（*2*）如果 $\mathbb{D}$ 也可表，那么 F 是右伴随，当且仅当它是连续的且 $F^{\leq 1}$ 可达。□

推论 5.9.10。设 $\mathbb{C}$ 是一个可表的（∞，2）-范畴。

(1) 预层 $F\colon\ \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$ 可表，当且仅当 F 连续。*(2)* 余预层 $F\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$ 余可表，当且仅当 F 连续且 $F^{\leq 1}$ 可达。

证明。 在第二种情形中，该条件等价于 F 有一个左伴随 $L\colon\ \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty \to \mathbb{C}$，它是唯一将点映到 $x = L(*)$ 的余连续函子。于是 x 余表出 F，因为我们得到

$$\mathbb{C}(x, -) \simeq \mathsf{Fun}(*, F(-)) \simeq F(-).$$

第一种情形类似，利用 F^{op} 有右伴随这一点即可。 □

引理 5.9.11. 设 $\mathbb{C}$ 是一个可呈现的$(\infty, 2)$-范畴。那么对于任意小的$(\infty, 2)$-范畴 $\mathbb{K}$，$\mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{K}, \mathbb{C})$ 也是可呈现的。特别地，$\mathbb{P}\mathsf{Sh}(\mathbb{K}) := \mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{K}^{\mathrm{op}}, \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty)$ 总是可呈现的。

证明。 首先假设 $\mathbb{K}$ 是一个 ∞-范畴。那么 $\mathbb{F}\mathsf{un}(\mathbb{K}, \mathbb{C})^{\leq 1} \simeq \mathsf{Fun}(\mathbb{K}, \mathbb{C}^{\leq 1})$ 是可呈现的。一般情形则由推论5.7.2 结合[Lur09a，推论 4.2.3 得出。7] 或 [HM25，推论 6。8]。 □

接下来，我们对 2-紧致对象和 2-局部对象作一些简单的观察，由此引出定理 5.9.2 的证明。

引理 5.9.12. 设 $\mathbb{C}$ 是一个可呈现的 $(\infty,2)$-范畴。那么存在一个正则基数 κ，使得 $\mathbb{C}^{\leq 1}$ 是 κ-可达的，并且一个对象 $c \in \mathbb{C}$ 是 *2*-κ-紧致的，当且仅当它是 $\mathbb{C}^{\leq 1}$ 中的一个 κ-紧致对象。

证明。 根据观察5.9.4 只需证明存在一个 κ 使得

$$[1] \boxtimes -\colon\ \mathbb{C}^{\leq 1} \to \mathbb{C}^{\leq 1}$$

保留 κ-紧对象，且 $\mathbb{C}^{\leq 1}$ 是 κ-可达的。但这是可呈现 ∞-范畴之间的余连续函子，因此这样的 κ 必定存在：由伴随函子定理 [Lur09a，定理 5.5.2。9]这个函子有一个右伴随，它必定是 κ-可达的，其中某个 κ 满足 $\mathbb{C}^{\leq 1}$ 是 κ-可达的（由

[Lur09a，引理 5.4.7。7]；于是左伴随保留 κ-紧对象，正如所需。□

引理 5.9.13. 对于某个 S 映射集，在一个$(\infty,2)$-范畴中，满子$(\infty,2)$-范畴 $\mathrm{Loc}_S(\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}$中对加权极限封闭。

证明。 给定 $W\colon \mathbb{K} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty$ 和 $F\colon \mathbb{K} \to \mathrm{Loc}_S \mathbb{C}$，考虑交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(y, \lim_{\mathbb{K}}^{W} F) & \xrightarrow{\quad s^* \quad} & \mathbb{C}(x, \lim_{\mathbb{K}}^{W} F) \\ \sim\downarrow & & \downarrow\sim \\ \mathrm{Nat}_{\mathbb{K},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(W, \mathbb{C}(y,F)) & \xrightarrow[\mathbb{C}(s,F)_*]{} & \mathrm{Nat}_{\mathbb{K},\mathbb{C}\mathrm{at}_\infty}(W, \mathbb{C}(x,F)). \end{array}$$

这里，底部的水平映射是一个等价，因为自然变换$\mathbb{C}(s, F)$逐点可逆，因此在 $\mathbb{F}$un$(\mathbb{K}, \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty)$中是一个等价。□

引理 5.9.14. 设 $\mathbb{C}$ 是一个可呈示$(\infty,2)$-范畴，且 $\mathbb{C}' \hookrightarrow \mathbb{C}$ 是一个满子$(\infty,2)$-范畴，它对某个 κ的 κ-滤过 ∞-范畴上的锥形余极限封闭。若包含有左伴随，则 $\mathbb{C}'$ 是一个可呈示$(\infty,2)$-范畴。

证明。 显然， $\mathbb{C}'$ 是余完备的，因为可以将包含的左伴随作用于 $\mathbb{C}$中的余极限来计算余极限。此外， $\mathbb{C}'^{\leq 1}$ 由[Lur09a，命题 5.5.42] 可知，它是可呈示的，因为它是可呈示∞-范畴 $\mathbb{C}^{\leq 1}$的反射子范畴，且包含保留 κ-滤过余极限。□

引理 5.9.15. 设 $\mathbb{C}$ 是一个可呈示的$(\infty,2)$-范畴，且 $\mathbb{C}_0$ 是一个全子$(\infty,2)$-范畴。则以下条件等价：

(1) $\mathbb{C}_0$ 对某个正则基数 κ，在 κ-滤过的 ∞-范畴上的锥形余极限下封闭，并且包含 $\mathbb{C}_0 \hookrightarrow \mathbb{C}$ 有一个左伴随。*(2)* 存在一个小集合 S，其元素是 $\mathbb{C}$ 中的态射，满足 $\mathbb{C}_0 \simeq \mathrm{Loc}_S \mathbb{C}$。

证明。由 (1)，根据 [Lur09a，命题 5.5.4，2]可知，存在 $\mathbb{C}$ 中的一个小态射集合 S，使得 $\mathbb{C}_0^{\leq 1} \simeq \mathrm{Loc}_S(\mathbb{C}^{\leq 1})$。但我们也知道， $\mathbb{C}_0$ 在 $\mathbb{C}$ 中对余张量封闭（因为包含是右伴随，因此根据命题 5.4.1 保持极限），所以若 $x \in \mathbb{C}^{\leq 1}$ 是 S-局部的，那么 $x^{[1]}$也是；于是x 也是 S-2-局部的，因此 $\mathbb{C}_0$ 恰好包含 S-2-局部对象，符合要求。反过来，由 (2)，根据观察 5.9.6 可知 $\mathbb{C}_0^{\leq 1} \simeq \mathrm{Loc}_{S'} \mathbb{C}^{\leq 1}$，其中$S'$ 由 S 和 $S \boxtimes [1]$构成。因此，根据[Lur09a，命题 5.5.4，15]，包含 $\mathbb{C}_0^{\leq 1} \to \mathbb{C}^{\leq 1}$ 有一个左伴随；进而，根据命题 2.1.5，它在（∞,2）层级上也有左伴随，因为根据引理 5.9.13，$\mathrm{Loc}_S \mathbb{C}$ 对与 $[1]$ 的余张量封闭。

□

定理 *5.9.2* 的证明。 首先假设 $\mathbb{C}$ 是可呈示的。那么， $\mathbb{C}$ 由观察 5.9.8可知是局部小的，而条件 (2) 的其余部分则由 [Lur09a，命题 5.4.2，2] 以及引理 5.9.12得出。反过来，利用 $\mathbb{C}$ 再次应用 [Lur09a，命题 5.4.2，2]，可由条件 (2) 推出 $\mathbb{C}$ 是可呈示的。

最后两个条件等价是引理 5.9.15 的一个特例，而条件 (3) 蕴含 $\mathbb{C}$ 由引理 5.9.14 可表示。剩下需要证明，若 $\mathbb{C}$ 可表示，则条件 (3) 成立。

按照引理 5.9.12 中的方式选取 κ，并考虑包含映射 $i\colon \mathbb{C}^\kappa \hookrightarrow \mathbb{C}$。由于 $\mathbb{C}^\kappa$是小的，且 $\mathbb{C}$ 是余完备的，我们有一个 Yoneda 延拓

$$i' = h_{\mathbb{C}^\kappa,!} i\colon \mathbb{P}\mathbb{S}\mathrm{h}(\mathbb{C}^\kappa) \to \mathbb{C},$$

它是余连续的，因此具有一个右伴随

$$R\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}\mathbb{S}\mathrm{h}(\mathbb{C}^\kappa)$$

由命题 2.1.5。我们断言 R 保持在 κ-滤∞-范畴上的锥形余极限，并且是全忠实的，这将完成证明。为证明前者，我们注意到预层中的余极限是逐点计算的，因此给定一个图表$\varphi\colon \mathsf{J} \to \mathbb{C}$，其中 J 是一个 κ-滤 ∞-范畴，只需验证对于 $x \in \mathbb{C}^\kappa$,

$$\mathrm{colim}_{\mathsf{J}} \mathbb{P}\mathbb{S}\mathrm{h}(\mathbb{C}^\kappa)(h_{\mathbb{C}^\kappa} x,\ R(\varphi)) \simeq \mathbb{P}\mathbb{S}\mathrm{h}(\mathbb{C}^\kappa)(h_{\mathbb{C}^\kappa} x,\ \mathrm{colim}_{\mathsf{J}} R(\varphi)) \to \mathbb{P}\mathbb{S}\mathrm{h}(\mathbb{C}^\kappa)(h_{\mathbb{C}^\kappa} x,\ R(\mathrm{colim}_{\mathsf{J}} \varphi))$$

是一个等价。借助伴随以及 $i' \circ h_{\mathbb{C}^\kappa}$ 与包含 i之间的等价，我们可以将其识别为

$$\mathrm{colim}_{\mathsf{J}} \mathbb{C}(x, \varphi) \to \mathbb{C}(x, \mathrm{colim}_{\mathsf{J}} \varphi).$$

这确实是一个等价，因为 x 是 2-κ-紧的。为了证明 R 是全忠实的，我们等价地可以证明，对于所有 $c \in \mathbb{C}$，余单位映射 $i'R(c) \to c$ 是一个等价。由于 R 和 i' 保持 κ-滤过余极限，且任意 c 都是 κ 中某个图表的 κ-滤过余极限，我们可以将问题归约到 c 是 2-κ-紧的情形。在此情形下，我们知道 $c \simeq i' h_{\mathbb{C}^\kappa}(c)$，因此对 i' 的三角等价应用三者取二性质可知，只需证明单位映射 $h_{\mathbb{C}^\kappa} c \to Rc$ 是一个等价，或者等价地，证明映射

$$\mathbb{P}\mathbb{S}\mathrm{h}(\mathbb{C}^\kappa)(\varphi, h_{\mathbb{C}^\kappa}(c)) \to \mathbb{C}(i'\varphi, i(c))$$

对于所有预层 φ 都是一个等价；我们可以在可表预层上检测这一点，此时我们要求映射

$$\mathbb{C}^\kappa(x, c) \to \mathbb{C}(i(x), i(c))$$

是一个等价，这一点显然。 □

参考文献

[Abe23] Fernando Abellán。《比较（∞,2）-范畴的松函子》，2023，arXiv:2311.12746。[AG22] Fernando Abellán García。《标记余极限与高阶共终性》。《同伦与相关结构杂志》，17(1):1–22，2022。[AGH25] Fernando Abellán、Andrea Gagna 和 Rune Haugseng。《（∞, 2）-范畴的松变换与伴随的直化》。《Selecta Mathematica》（新辑），31(4):论文编号 85，共 81 页，2025，arXiv:2404.03971。[AM24] Fernando Abellán 和 Louis Martini。《（∞, 2）-拓扑斯与下降》，2024，arXiv:2410.02014。[AMGR17] David Ayala、Aaron Mazel-Gee 和 Nick Rozenblyum。《富化 ∞-范畴的因子化同调》，2017，arXiv:1710.06414。[AMGR24] David Ayala、Aaron Mazel-Gee 和 Nick Rozenblyum。《分层非交换几何》。《美国数学会回忆录》，297(1485):iii+260，2024，arXiv:1910.14602。

122 FERNANDO ABELLÁN、RUNE HAUGSENG 和 LOUIS MARTINI[AS23a] Fernando Abellán 和 Walker H. Stern。《2- 笛卡尔纤维化 II： ∞- 双范畴的 Grothendieck 构造》。《Jussieu 数学研究所杂志》（即将出版），2023，arXiv:2201.09589。[AS23b] Fernando Abellán 和 Walker H. Stern。《∞-双范畴的共终函子》，2023，arXiv:2304.07028。[Ber24] John D. Berman。《∞-范畴中的松极限》。《美国数学会会刊》，152(12):5055–5066，2024，arXiv:2006.10851。[CM23] Timothy Campion 和 Yuki Maehara。《（∞, 2）-范畴的模型无关 Gray 张量积》，2023，arXiv:2304.05965。[DDS18] M.E. Descotte、E.J. Dubuc 和 M. Szyld。《2-范畴中的 Sigma 极限与平伪函子》。《数学进展》，333:266–313，2018。[GH15] David Gepner 和 Rune Haugseng。《通过非对称 ∞-运算子构造富化 ∞-范畴》。《数学进展》，279:575–716，2015。[GHL21] Andrea Gagna、Yonatan Harpaz 和 Edoardo Lanari。《Gray 张量积与（∞, 2）-范畴的松函子》。《数学进展》，391:论文编号 107986，共 32 页，2021，arXiv:2006.14495。[GHL24] Andrea Gagna、Yonatan Harpaz 和 Edoardo Lanari。《（∞, 2）-范畴的笛卡尔纤维化》。《代数与几何拓扑》，24(9):4731–4778，2024，arXiv:2107.12356。[GHL25] Andrea Gagna、Yonatan Harpaz 和 Edoardo Lanari。《（∞, 2）-范畴中的标记极限》。《数学文献》，在线发表，2025。[GHN17] David Gepner、Rune Haugseng 和 Thomas Nikolaus。《∞-范畴中的松余极限与自由纤维化》。《数学文献》，22:225–1266，2017。[Hau15] Rune Haugseng。《富化 ∞-范畴的严格化》。《代数与几何拓扑》，15(4):1931–1982，2015。[Hei23] Hadrian Heine。《富化 ∞-范畴与带有弱作用的 ∞-范畴之间的等价》。《数学进展》，417:论文编号 108941，共 140 页，2023。[Hei24] Hadrian Heine。《加权余极限的高阶代数》，2024，arXiv:2406.08925。[HHLN23] Rune Haugseng、Fabian Hebestreit、Sil Linskens 和 Joost Nuiten。《松幺半伴随、二变量纤维化与伴随演算》。《伦敦数学会会刊》（第三辑），127(4):889–957，2023，arXiv:2011.08808。[Hin16] Vladimir Hinich。《重新审视 Dwyer-Kan 局部化》。《同调、同伦及其应用》，18(1):27–48，2016。[Hin20] Vladimir Hinich。《富化 ∞-范畴的 Yoneda 引理》。《数学进展》，367:107129，共 119 页，2020。[HM25] Simon Henry 和 Nicholas J. Meadows。《高阶理论与单子》。《高阶结构》，9(1):227–268，2025。[Lam17] Michael Lambert。《加权余极限的计算》，2017，arXiv:1711.05903。[LMGR+24]Yu Leon Liu、Aaron Mazel-Gee、David Reutter、Catharina Stroppel 和 Paul Wedrich。《Soergel 双模的辫状幺半（∞, 2）-范畴》，2024，arXiv:2401.02956。[Lou24] Félix Loubaton。《（∞, ω）-范畴的范畴论》，2024，arXiv:2406.05425。[Lur09a] Jacob Lurie。《高阶拓扑斯理论》，《数学年鉴研究》第 170 卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿（新泽西州），2009。[Lur09b] Jacob Lurie。《（∞, 2）-范畴与 Goodwillie 演算 I》，2009，arXiv:0905.0462。[Lur17] Jacob Lurie。《高阶代数》，2017。https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA. pdf。[MGS24] Aaron Mazel-Gee 和 Reuben Stern。《非交换动机与次级代数 K-理论的一个普适刻画》。《K-理论年刊》，9:369–445，2024。[NS18] Thomas Nikolaus 和 Peter Scholze。《关于拓扑循环同调》。《数学学报》，221(2):203–409，2018。[Nui24] Joost Nuiten。《关于 Segal 空间的直化》。《组合数学》，160(3):586–656，2024。

[RV22] Emily Riehl 和 Dominic Verity。《 ∞-范畴论》，第194卷，收录于剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2022年。[Sha21] Jay Shah。《参数化高阶范畴论 II：泛性质构造》，2021年，arXiv:2109.11954。[Ste20] Germán Stefanich。《可呈现的(∞, n)-范畴》，2020年，arXiv:2011.03035。[Str87] Ross Street。《定向单形的代数》。 纯粹与应用代数杂志，49(3)：283–335，1987年。