arXiv:2602.07606v1 [cs.CC] 7 Feb 2026

排除半图、补匹配或匹配时独立集及更多问题的参数化复杂性*

Jan Dreier Nikolas Mählmann Sebastian Siebertz 维也纳工业大学 华沙大学 不来梅大学 dreier@ac.tuwien.ac.at maehlmann@mimuw.edu.pl siebertz@uni-bremen.de

摘要

Ding、Oporowski、Oxley 和 Vertigan 的一个定理表明，任何规模足够大的无孪生图都包含一个大型匹配、补匹配或半图作为半诱导子图。图中这些不可避免模式的规模分别由匹配指数、余匹配指标和半图指标衡量。因此，可以根据这三个指标分别是否有界，将图类划分为八类。

我们完整刻画了八类图类中独立集、团和支配集的参数化复杂性。为此，我们首先从现有文献中推导出多个可处理性与困难性结果，然后着手填补已发现的空白。在我们的新结果中，我们证明了：在半图指标和余匹配指标同时有界的每个图类上，独立集都是固定参数可解的。反之，我们构造了一个半图指标有界但余匹配指标无界的图类，在该图类上该问题是 W[1]-困难的。

对于我们分类中的 W[1]-困难情形，我们回顾了近似算法的研究现状。在此，我们为半图指数有界的图类上的独立集问题给出了一个近似算法。

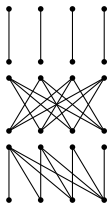
*NM 获得了欧洲研究委员会（ERC）资助，资助协议编号为 101126229 – buka。

1 引言

独立集、团和支配集是三个最基本的 NP 困难图问题。从参数化的角度来看，这三者在一般图上同样难以处理：独立集和团是W[1]-完全 [12]，而支配集是W[2]-完全 [11]（以解的大小为参数时）。这促使我们找出使这些问题变得易处理的结构限制。

一种自然的方法是在邻接关系中禁止某些二部图模式。给定两个不相交的顶点集 $A = \{a_1, \ldots, a_t\}$ 和 $B = \{b_1, \ldots, b_t\}$，我们可以问：它们之间的边有哪些典型的组织方式？我们关注以下三种模式：

- 匹配 M_t：$a_i b_j \in E \Leftrightarrow i = j$（相等）
- 补匹配 C_t：$a_i b_j \in E \Leftrightarrow i \neq j$（不等）
- 半图 H_t：$a_i b_j \in E \Leftrightarrow i \leq j$（顺序）



从某种意义上说，这三种模式构成了复杂性的基本构件，正如 Ding 等人独立证明的以下定理所精确阐述的那样。[10, 推论 2.4], Alekseev [1, 定理 3], 以及 Gravier 等人 [23, 定理 2]。（另见 [28]，其中给出了有界 VC 维数图的多项式界。）

定理 1 ([10, 1, 23])。存在一个函数 $Q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得任何一侧至少有 $Q(h)$ 个顶点且不含孪生顶点的二部图，都包含一个阶数为 h 的匹配、补匹配或半图作为诱导子图。

稍加推导，二部图的结论即可推广到一般图。图 G中的两个顶点 u、v 若满足 $N(u) \setminus \{v\} = N(v) \setminus \{u\}$，则称为孪生顶点。这是一种等价关系（例如参见 [32, 引理 1]），其等价类称为孪生类。Lampis [32], 引入的图 G的邻域多样性，是指图 G的孪生类数量。每个类所诱导的子图要么是团，要么是独立集；任意两个类之间的邻接关系要么是完全邻接，要么是空。因此，邻域多样性较小的图极其简单。有趣的情形是邻域多样性较大：此时，这三种模式中必有一种以半诱导的方式出现在 G 中。形式化地说，若存在A、$B \subseteq V$（G），使得 A 与 B 之间的二部子图同构于 H，则称二部图 H 在 G 中半诱导出现。图 G 的匹配指数、补匹配指数和半图指标，分别是半诱导匹配、补匹配和半图的最大阶数。对于一般图，定理 1 因此推出以下推论（见附录 A）。

推论 1。存在一个函数 $Q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得每个邻域多样性至少为 $Q(h)$ 的图，其匹配指数、余匹配指标或半图指标至少为 h。

如果一个图类中所有图的相应参数都被某个常数所界定，则称该图类具有有界匹配指数／余匹配指标／半图指标。我们也称这些图类为无匹配、无补匹配和无半图图类。由此可根据三个指标中哪些有界，将图类自然地分为八种情况。

贡献 1：完全分类

我们的主要贡献是对独立集、团和支配集的参数化复杂性进行完整分类，涵盖匹配、补匹配和半图指标是否有界的全部八种组合。结果总结于表 1。值得注意的是，这三个指标具有以下良好的对偶性质。固定一个图类 $\mathscr{C}$，并令$\mathscr{C}$ 为包含 $\mathscr{C}$中各图的补图的图类。

- $\mathscr{C}$ 是无匹配的，当且仅当 $\mathscr{C}$ 是无余匹配的。
- $\mathscr{C}$ 是无半图的，当且仅当 $\mathscr{C}$ 是无平图的。

由于团是补图中的独立集，对独立集列的完整分类也会给出团列的分类。因此，我们将论述重点放在独立集和支配集上。

m	c	h	独立集	团	支配集
✓	✓	✓	一致多项式时间 [32]	一致多项式时间 [32]	一致多项式时间 [32]
✓	✓	×	多项式时间 [6]	多项式时间 [6]	多项式时间 [6]
✓	×	✓	多项式时间 [6]	一致固定参数可处理 定理 4	多项式时间 [6]
×	✓	✓	一致固定参数可处理 定理 4	多项式时间 [6]	一致固定参数可处理 [20]
×	×	✓	W[1]-困难 定理 2	W[1]-困难 定理 2	W[1]-困难 [8], 定理 5
×	✓	×	W[1]-困难 [35], 推论 2	多项式时间 [6]	W[1]-困难 [36], 推论 2
✓	×	×	多项式时间 [6]	W[1]-困难 [35], 推论 2	多项式时间 [6]
×	×	×	W[1]-困难 [8]	W[1]-困难 [8]	W[2]-难 [8]

表 1：独立集、团和支配集的分类。每一行考察满足相应限制的图类 $\mathscr{C}$，即无匹配（m）、无余匹配（c）或无半图（h），如 × 和 ✓ 所示。若存在一个满足所考察限制的图类 $\mathscr{C}$，使得该问题是 W[1]-难的，则记作 *W[1]-难* 。若该问题可在时间 $f(k) \cdot \text{poly}(n)$ 内求解，其中 f 是某个函数，k 是解的大小；或者对每个满足所考察限制的图类 $\mathscr{C}$，可在 $\text{poly}(n)$ 时间内求解，则分别记作 固定参数可解 和 多项式时间 。注意，$\text{poly}(n)$ 的次数可能依赖于 $\mathscr{C}$。相比之下，若 $\text{poly}(n)$ 的次数（但函数 f 不一定）可以有一个统一的上界，且该上界与所考察的图类无关，则记作 一致固定参数可处理 或 一致多项式时间 。

已知结果。 当这三个指数均有界时，邻域多样性有界，且这三个问题都可在多项式时间内求解 [32]。更一般地，当匹配指数有界时，每个分支分解的 *mim*-宽度 （最大诱导匹配宽度）都有界，因此可为 独立集 和 支配集 [6]提供多项式时间算法。这些结果对应于 表 1 中的多项式时间条目。

在参数化复杂性方面，Fabiański 等人 [20] 证明，支配集在同时无半图且无补匹配的图类上是固定参数可解的。在一般图上，独立集和团是 W[1]-困难的，而支配集是 W[2]-困难的 [8]。

新增条目。一些困难性条目采用了此前已知的归约，但此前尚未明确指出它们与模式指数之间的联系。例如，已知独立集 [35] 和支配集 [36]是 W[1]-困难的，即使是在单位正方形图上；我们观察到，这些图的补匹配指数有界（推论 2）。在这类情况下，我们同时引用原始困难性结果，以及我们关于其与模式指数之间联系的观察。

我们主要的新可处理性结果是：独立集在同时无半图且无余匹配的图类上属于固定参数可解（定理 4）。我们借助受 [16]启发的基于不可区分性的方法得出这一结果：在这类图中，会出现较长的顶点序列，使得序列外的顶点与其中几乎所有或几乎没有元素相连，从而能够使用高效的归约规则。请注意，独立集和支配集在平面图上都是 NP 困难的 [21], ，而这些平面图无余匹配且无半图，这说明采用 FPT算法是合理的。

作为主要的新困难性结果，我们构造了一个无半图图类，在该图类上，独立集是 W[1]-困难的（定理 2）。

贡献 2：近似

支配集可通过贪心算法实现 $\mathcal{O}(\log n)$-近似 [29], , 而独立集和团则以难以近似而著称：基于 PCP 的结果表明，在标准假设下，不存在 $n^{1-\varepsilon}$-近似算法 [26]。若要为支配集获得更好的近似保证，可以考虑图的邻域集合系统的 VC 维数。对于有界 VC 维数的图， ε-网方法可实现 $\mathcal{O}(\log k)$-近似 [5]。但是，有界 VC 维数并不能为独立集或团带来类似的改进：例如， d 维盒图的 VC 维数为 $\mathcal{O}(d^2)$ [22], , 但目前尚无已知的独立集 $\mathcal{O}(\log^{d-1} n)$-近似算法 [7]。

我们证明，对模式指数加以限制确实 可以获得非平凡的近似：给定一个图 G，我们展示如何计算 .....

1. .....在 $\mathcal{O}(n^{2h+2})$ 时间内求得一个大小为 $k^{1/h}$ 的独立集, (Theorem 3)
2. . . . 在 $\mathcal{O}(n^3 \log(n))$ 时间内，找到一个大小为 $\log_{2c+2}(k)$ 的独立集 -2, (Corollary 4)

其中， h 是 G的半图指标， c是 G的余匹配指标，而 k 是 G中最大独立集的大小。第一个结果基于一种新颖的分支算法，其分支深度由半图指标有界。第二个结果则是对 Gyárfás 提出的一种论证的算法化应用，该论证证明了排除诱导路径 [25] 的图类具有 χ-有界性。

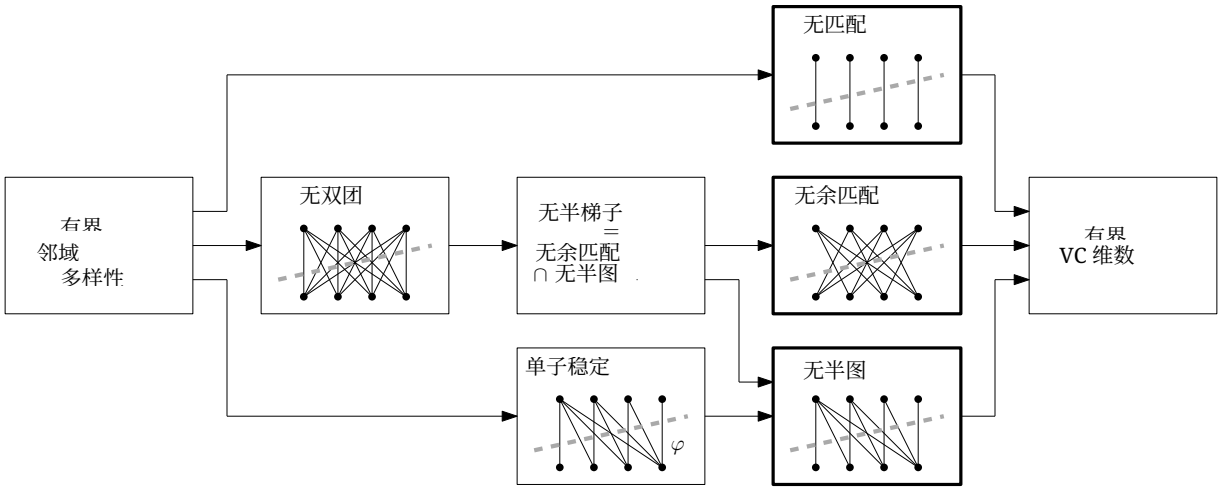
相关工作

我们 hi 重点介绍我们工作的三项关联。请参见图 1，其中展示了相关概念的示意图 s.

与稀疏性理论的关联。图的完全二分图指标是满足$K_{t,\ t}$ 以半诱导方式出现的最大 t。因此，若一个类的完全二分图指标有界，则称其为无双团类。无双团图类是极为一般的稀疏图类，因为它们涵盖了平面图、有界退化度图、无子式图和处处稀疏图类。然而，从我们关注的三个目标问题来看，无双团情形基本上已得到解决。独立集和团分别是固定参数可解和多项式时间可解的，理由很简单：任何 K_r 都包含半诱导的$K_{\lfloor r/2 \rfloor,\ \lfloor r/2 \rfloor}$，因此团数受一个仅依赖于该图类的常数所界定。根据 Ramsey 型论证，团数有界意味着存在大小无界的独立集，因此独立集问题是固定参数可解的。此外，已有证明表明，支配集在无双团类上是固定参数可解的 [41]。

为了超越稀疏图类，学界研究了同时无半图且无补匹配的图类（也称为无半梯子类）。无半梯形无关性推广了无二分团性，但也涵盖了稠密图类，例如地图图 [20]，更一般地说，还包括所有能通过稀疏处处图类中的存在正一阶公式编码的图类 [33]。Fabiański 等人 [20] 和 Guillemot [24] 证明，即使在所有无半梯子类上，支配集问题仍是固定参数可解的。Guillemot [24] 提出，能否将可处理性推广到仅无半图（但不一定无补匹配）的图类。自然也会提出类似的问题：仅无补匹配（但不一定无半图）的图类是否也具有可处理性？我们的工作对这两个问题均给出了否定答案。

Fabiański 等人的渐进式探索方法 [20] 也适用于独立集，不过对于这个问题，他们只能在半梯形无关性的一个真子片段中实现可处理性。我们针对半梯形无关类的固定参数算法（定理4）推广了他们的结果。



图类性质的层级结构。箭头 $P_1 \to P_2$ 表示每个具有性质P_1 的图类也具有性质 P_2。

与宽度度量的联系。Eiben 等人 [19] 基于 $\mathcal{F}$-分支宽度的概念提出了一个统一的宽度度量框架。在这一框架中，我们研究的相同模式（半图、余匹配和匹配）表现为分支分解中割两侧之间的禁半诱导子图。基于这一框架， [2], 宽度度量*cham*-宽度（“链-反匹配宽度”）被定义，用于度量割两侧的余匹配指数和半图指数。有界 cham-宽度类严格推广了半梯形无关类。文献 [2] 中提出了一个问题：独立集在有界 cham-宽度类上是否为固定参数可解。我们针对半梯形无关类的固定参数算法让人们对得到肯定答案抱有希望。

与模型论的联系。 半图模式与模型论密切相关，其中半图的缺失刻画了 稳定 理论。 单子稳定 类是指其中所有可用带颜色的一阶逻辑定义的关系均无半图的图类。针对单子稳定类的一阶模型检测算法意味着，在这些图类上，独立集、 团和 支配集 [13, 15] 均具有固定参数可处理性。要求 所有一阶可定义关系都无半图，会排除许多自然的图类。因此，一个自然的问题是，能否将可处理性扩展到仅 普通邻接关系 无半图的图类。我们的困难性结果（定理 2 和 5）表明，仅有边级无半图性不足以保证所考察的三个问题具有可处理性，这也说明了稳定性理论中所采用的更强假设确有必要。

2 预备知识

我们使用图论和模型论中的标准记号，并参阅 [9]和 [27] 以了解详尽背景。我们用 $[m]$ 表示整数集 $\{1, \dots, m\}$。对于图中的顶点 v，我们将 $N(v)$记为其开邻域（不包含 v），并将 $N[v] := N(v) \cup \{v\}$ 记为其闭邻域。

3 无半图类上独立集的难度

在本节中，我们证明存在一个图类，其半图指标有界，但在该图类上独立集问题是W[1]-困难的。我们将通过给出一个从网格铺砖问题出发的归约来证明这一点，该归约不会产生大的半图。我们的归约受到 [4]中针对相同两个问题的归约的启发。我们注意到，独立集在 [4]中构造的实例具有无界的半图指标，但余匹配指标有界（另见第7节中针对补匹配情形的另一种归约）。相反，我们所构造的实例将具有有界的半图指标，但余匹配指标无界。正如我们稍后在第5节中所证明的，在标准复杂性假设下，这种权衡是不可避免的，因为独立集在每一个半图指标与余匹配指标同时有界的图类上都是固定参数可解的。

网格铺砖问题在 [37]中被提出。其输入由整数 $k, n \in \mathbb{N}$ 以及一个集合 $\mathcal{S}$ 组成，该集合为每个网格单元 $\pi \in [k]^2$包含一个由铺砖 $S_\pi \subseteq [n] \times [n]$ 构成的非空集合。目标是判定是否存在铺砖选取 $s(\pi) \in S_\pi$，对所有 $\pi \in [k]^2$ 满足：

- 铺砖 $s(\pi)$与 $s(\pi_\blacktriangleright)$对所有单元格 $\pi = (i, j) \in [k-1] \times [k]$ 与 $\pi_\blacktriangleright := (i+1, j)$具有相同的第一分量；并且
- 铺砖 $s(\pi)$与 $s(\pi_\triangledown)$对所有单元格 $\pi = (i, j) \in [k] \times [k-1]$ 与 $\pi_\triangledown := (i, j+1)$具有相同的第二分量。

参见表 2中的一个实例示例。已知网格铺砖是 W[1]-困难的，其参数为网格大小 k [8, 定理 14。28]。

定理 2。 存在一个半图指标至多为256 的图类，在该图类上，独立集是 *W[1]*-困难的。

证明。 给定一个网格铺砖实例$((\mathcal{S}, k, n)\ k)$ 我们通过如下方式构造独立集实例$(G_\mathcal{S}, 4k^2)$，从而将其归约为 $G_\mathcal{S}$。（构造示意图参见图 2。）

对于每个网格单元格 $\pi \in [k]^2$，我们通过首先创建四个互不相交的团来构造图 H_π

1. $U_\pi := \{u(\pi, \tau) : \tau \in S_\pi\}$，
2. $R_\pi := \{r(\pi, \tau) : \tau \in S_\pi\}$，
3. $D_\pi := \{d(\pi, \tau) : \tau \in S_\pi\}$，
4. $L_\pi := \{\ell(\pi, \tau) : \tau \in S_\pi\}$，

以四个方向命名：上、右、下和左。此外，对于每一对不同的铺砖$\tau \neq \tau' \in S_\pi$，我们向 H_π 添加边

- 在 $u(\pi, \tau)$与 $r(\pi, \tau')$之间，
- 在 $d(\pi, \tau)$与 $\ell(\pi, \tau')$之间，
- 在 $r(\pi, \tau)$与 $d(\pi, \tau')$之间，
- 在 $\ell(\pi, \tau)$与 $u(\pi, \tau')$之间。

这意味着 U_π 和 R_π 半诱导出一个补匹配，(R_π, D_π)、(D_π, L_π)和(L_π, U_π)也同样如此。我们通过对所有 H_π 取不交并来构造 $G_\mathcal{S}$（其中 $\pi \in [k]^2$），并额外添加边连接

当且仅当对于所有 $\pi \in [k-1] \times [k]$、$\tau \in S_\pi$、$\tau' \in S_{\pi_\blacktriangleright}$，$\tau$和 τ'的第一分量不同，
- $r(\pi, \tau)$与 $\ell(\pi_\blacktriangleright, \tau')$之间才有边；并且
- $d(\pi, \tau)$ 和 $u(\pi_\triangledown, \tau')$ 当且仅当 τ和 τ'的第二分量不同，对所有 $\pi \in [k] \times [k-1]$、$\tau \in S_\pi$、$\tau' \in S_{\pi_\triangledown}$均成立。

至此完成 $G_\mathcal{S}$ 的构造。

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	$\{(4,4),(5,4)\}$	$\{(4,5),(4,4),(5,5)\}$	$\{(4,6),(5,4)\}$
$i=2$	$\{(5,4),(6,4),(5,5)\}$	$\{(5,5),(4,5),(5,4),(6,5)\}$	$\{(5,6),(4,6),(6,6)\}$
$i=3$	$\{(6,4),(6,5)\}$	$\{(6,5),(5,5),(6,6)\}$	$\{(6,6),(5,5)\}$

表 2：带有 $k=3$ 和 $n=6$ 的网格铺砖正实例。该表展示单元格 $\pi=(i,j)$，并列出 $S_\pi \subseteq [6]^2$ 中包含的铺砖。一个可行解以粗体标出。

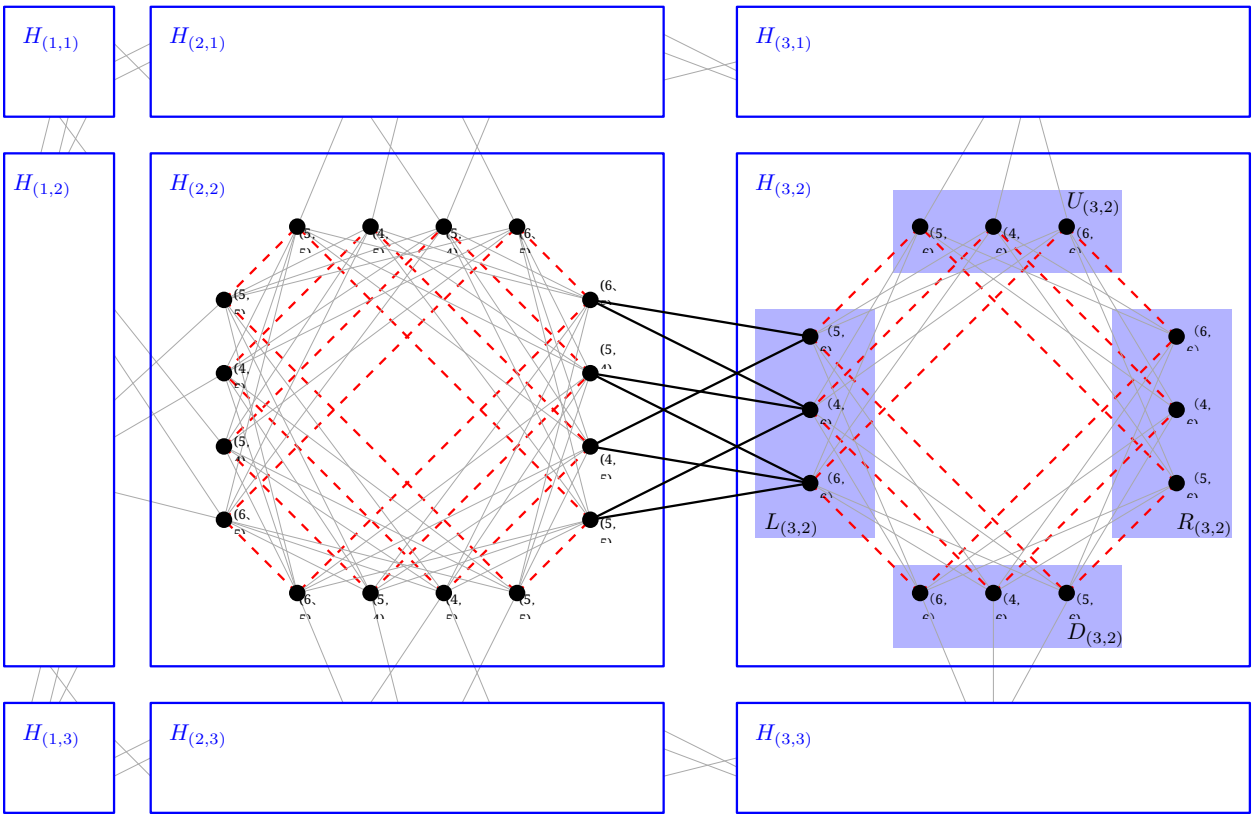


图 2：网格铺砖 $G_{\mathcal{S}}$ 实例 $\mathcal{S}$ 来自表 2。仅如实绘出了子图 $H_{2,\,2}$ 和 $H_{3,\,2}$ 内部及彼此之间的边。为清晰起见，省略了其他子图中的顶点。红色虚线边是我们特别标出的非边，用于说明每个 H_π 内部的补匹配连接。

断言 1。$(\mathcal{S},k,n)$ 是一个正网格铺砖实例，当且仅当 $(G_{\mathcal{S}},4k^2)$ 是一个正独立集实例。

证明。假设 存在一个使用瓦片 $s(\pi) \in S_\pi$ 为 $\pi \in [k]^2$ 求得的 $(\mathcal{S},\ k,\ n)$ 的解。我们声称 t

$$I = \bigcup_{\pi\in[k]^2} I_\pi \quad \text{with} \quad I_\pi := \{u(\pi,s(\pi)), r(\pi,s(\pi)), d(\pi,s(\pi)), \ell(\pi,s(\pi))\}$$

是一个大小为 $4k^2$ 的独立集。显然，I 具有所需的大小。对于每个单元格 π，我们有 I_π 是一个独立集，因为其中包含的所有顶点都属于同一瓦片 s（π）。根据构造，两个属于不同集合 $x \in I_\pi$ 和 $y \in I_{\pi'}$ 的顶点只有在对称意义下满足以下任一情况时才可能相邻：

- $\pi' = \pi_{\blacktriangleright}$、 $x = r(\pi,\ s(\pi))$ 、 $y = \ell(\pi_{\blacktriangleright},\ s(\pi_{\blacktriangleright}))$，
  以及 $s(\pi)$ 和 $s(\pi_{\blacktriangleright})$ 具有不同的第一分量；或者
- $\pi' = \pi_{\triangledown}, x = d(\pi,\ s(\pi))$、 $y = u(\pi_{\triangledown},\ s(\pi_{\triangledown}))$,
  以及$s(\pi)$和 $s(\pi_{\triangledown})$的第二分量各不相同。

由于 $s(\pi)$构成了网格铺砖问题的一个解，因此这两种可能性都可以排除。因此， I 确实是一个独立集。

反过来，假设存在一个大小为 $4k^2$的独立集 I。由于我们构造的 k^2 图H_π 各由四个团组成， I 必须从每个 H_π中恰好包含四个顶点。由于这四个顶点两两不相邻，它们必定具有以下形式

$$\{u(\pi, s(\pi)), r(\pi, s(\pi)), d(\pi, s(\pi)), \ell(\pi, s(\pi))\}$$

对于某个共同的 $s(\pi) \in S_\pi$。现在我们证明，瓦片 $s(\pi)$构成了$(\mathcal{S},\ k,\ n)$的一个网格铺砖解。对于每个 $\pi \in [k-1]\times[k]$， $r(\pi,\ s(\pi))$和 $\ell(\pi_{\blacktriangleright},\ s(\pi_{\blacktriangleright}))$都属于同一个独立集 I，因此彼此不相邻。根据构造， $s(\pi)$和 $s(\pi_{\blacktriangleright})$的第一分量必须相同。类似地，对于每个 $\pi \in [k] \times [k-1]$，瓦片 $s(\pi)$和 $s(\pi_{\triangledown})$的第二分量相同。至此，归约的证明完成。■

B根据上述断言，我们得出结论：独立集在图类 ss

$$\mathscr{C} := \{G_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \text{ is a Grid Tiling instance}\}.$$

只需给半图指标设定上界。

断言 2. $G_{\mathcal{S}}$ 中的最大半诱导半图的阶至多为256。

证明。 取 A_0 和 B_0 为在 $G_{\mathcal{S}}$ 中半诱导半图的最大规模集合。考虑划分

$$\mathcal{P} = \bigcup_{\pi \in [k]^2} \{U_\pi, R_\pi, D_\pi, L_\pi\}$$

将 $V(G_{\mathcal{S}})$ 划分为团。两次应用抽屉原理后，我们可以取大小为$|A| = |B| \geq \sqrt{\sqrt{m}}$ 的子集 $A \subseteq A_0$ 和 $B \subseteq B_0$，使得 A 和 B 仍然半诱导半图，并且满足以下情况之一：

1. A 的所有顶点都包含在 $\mathcal{P}$ 的同一个部分中；或者
2. A 的所有顶点都包含在 $\mathcal{P}$ 中两两不同的部分里，

并且这两种情况之一也适用于 B。

首先，假设第二种情况至少适用于其中一个集合。根据对称性，不妨假设它适用于 B。由于 A和 B半诱导一个半图，因此存在一个顶点 $a \in A$，它与 B中的所有顶点都相邻。注意，在 $G_{\mathcal{S}}$ 中，每个顶点至多与 4 个不同部分中的顶点相邻。4 例如，部分 $L_{(3,2)} \in \mathcal{P}$ 中的顶点只能与 $L_{(3,2)}$、$U_{(3,2)}$、 $D_{(3,2)}$、 $R_{(2,2)}$ 中的顶点相邻（参见 图 2）。由此可得 $|A| = |B| \leq 4$。

否则，第一种情况同时适用于 A 和 B：存在部分 X、$Y \in \mathcal{P}$，满足 $A \subseteq X$ 和 $B \subseteq Y$。如果 X 和 Y 属于同一个子图 H_π，那么由于 X 和 Y 之间有边，若 $X = Y$，它们要么半诱导一个补匹配，要么构成一个团。在这两种情况下， A 中的每个顶点在 B 中至多有 1 个非邻点。于是， A 和 B 之间半诱导的半图大小至多为 $|A| = |B| \leq 2$。

如果 X 和 Y属于不同的子图，那么在交换 X 和 Y的角色后，存在$\pi \in [k]^2$，使得以下两种情况之一成立：

$$(X = R_\pi \text{ and } Y = L_{\pi_{\blacktriangleright}}) \quad \text{or} \quad (X = D_\pi \text{ and } Y = U_{\pi_{\triangledown}}).$$

我们假设第一种情况成立，因为第二种情况的论证类似。我们声称 A 的大小至多为 2。反设 $|A| \geq 3$成立。于是，由于 A 和 B 半诱导半图，存在一些顶点

$$r(\pi, \alpha_1), r(\pi, \alpha_2), r(\pi, \alpha_3) \in A \subseteq R_\pi \quad \text{and} \quad \ell(\pi_\blacktriangleright, \beta_1), \ell(\pi_\blacktriangleright, \beta_2), \ell(\pi_\blacktriangleright, \beta_3) \in B \subseteq L_{\pi_\blacktriangleright},$$

使得当且仅当对所有 $i,\ j \in [3],\ r(\pi,\ \alpha_i)$ 和 $\ell(\pi_\blacktriangleright,\ \beta_j)$ 相邻。这意味着瓦片 α_3 必须与铺砖 β_1 和 β_2 具有相同的第一分量。然而，瓦片 α_2 必须与 β_1 具有相同的第一分量，却必须与 β_2 具有不同的第一分量。这与“具有相同的第一分量”是等价关系这一事实相矛盾。因此，$|A| = |B| \leq 2$。

Havi在穷举有界的 $|A| = |B| \leq 4$ 后，我们得出 $m \leq (|A|^2)^2 \leq 4^4 = 256$。 ■

定理的证明至此完成。 □

4 无半图类上独立集的近似

定理 3. 存在一种算法，对于给定的图 G，可在 $O(n^{2h+2})$ 时间内找到一个大小至少为 $k^{1/h}$ 的独立集，其中 h是 G 的半图指标，k 是 G的最大独立集的大小。

证明。 我们对 G的半图指标 h 进行归纳。若 $h = 0$，则 G 没有边，因此 $V(G)$ 本身就是一个独立集，我们返回该集合。否则，算法遍历所有 $u, v \in V(G)$，使得$uv \in E(G)$，并递归处理这些图

$$G_{uv} := G[N(v) \setminus N[u]],$$

并递归地为所有 $uv \in E(G)$ 计算独立集 D_{uv}。根据构造，$D_{uv} \cup \{u\}$ 也是一个独立集。最后，算法通过贪心方式计算一个包含极大的独立集 D，并返回 D 与 $uv \in E(G)$ 对应的 $D_{uv} \cup \{u\}$ 中较大的集合。

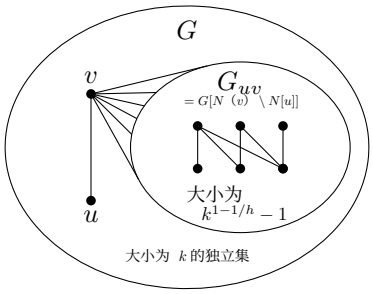


图 3：我们猜测一个顶点 v，其邻域包含独立集中的很大一部分；再猜测一个与之相邻且属于该独立集的顶点 u。我们递归处理图 $G_{uv} = G[N(v) \setminus N[u]]$，其半图指标有所降低。

如 图 3所示，G_{uv} 中的任意半诱导半图都可以通过加入 u 和 v，扩展为 G中的一个阶数更大的半诱导半图。因此，G_{uv}的半图指标至多为 $h-1$，递归深度因而不超过 h。在每个节点，我们枚举 $O(n^2)$ 种 u的选择，v，并花费 $O(n^2)$ 的时间来构造 D。因此，总运行时间为 $O(n^{2h+2})$。

为论证正确性，假设 G 有一个大小为 k的独立集 I。若 $|D| \geq k^{1/h}$，则 D 已达到所需的界。注意 D 被选为包含极大的，因此是 G中的支配集，故 $v \in D$ 的闭邻域 $N[v]$ 覆盖 I。若 $|D| < k^{1/h}$，则由抽屉原理，存在 $v \in D$ 满足 $|N[v] \cap I| \geq |I|/|D| > k^{1-1/h}$。

由于 $|I|/|D| > 1$，顶点 v 在 I 中有一个邻居，因此 $v \notin I$。于是，由于 $v \notin I$，我们有$|N(v) \cap I| = |N[v] \cap I|$。存在 $u \in N(v) \cap I$。显然， G_{uv}有一个独立集$(N(v) \cap I) \setminus \{u\}$，其大小至少为 $k^{1-1/h} - 1$。由归纳法，对半图指标至多为 $h-1$的 G_{uv} 进行的递归调用返回一个大小至少为的独立集 D_{uv}

$$\left(k^{1-1/h} - 1\right)^{1/(h-1)}.$$

利用不等式（$x-1$）$^a \geq x^a - 1$，对于 $x \geq 1$ 和 $0 < a \leq 1$，可得其至少为

$$\left(k^{1-1/h}\right)^{1/(h-1)} - 1 = k^{1/h} - 1.$$

加回 u后，集合 $D_{uv} \cup \{u\}$ 具有所需的下界 $k^{1/h}$，从而证明了该命题。 □

5 无半梯子图类上的独立集固定参数可解性

本节证明，在半图指标和余匹配指标均有界的图类上，独立集问题是固定参数可解的。我们的固定参数算法基于一条可在固定参数时间内计算的归约规则；穷尽地应用该规则后，会得到一个等价的有界规模实例，然后我们通过暴力搜索求解。该归约规则基于提取不可区分序列，这些序列与图的其余部分以高度规则的方式相互作用。作为关键引理，我们证明如下结果。

引理 1。 存在（可计算的）函数 f, g: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$，使得对每个 $t \in \mathbb{N}$，以下结论成立。设 G 是一个具有 n 个顶点、半图指标为 $< t$ 且余匹配指标为 $< t$的图。对于每个 $L \in \mathbb{N}$，若$n \geq f(t, L)$，则 G 包含一个大小为 $|S| = L$ 的集合 $S \subseteq V(G)$，使得

1. S 要么是团，要么是独立集，并且
2. 对于每个顶点 $w \in V(G) \setminus S$，我们有

$$|N(w) \cap S| < 2t \qquad \text{or} \qquad S \subseteq N(w).$$

此外，这样的集合 S 可以在时间 $g(t, L) \cdot n$内计算出来。

我们将引理 1的证明推迟到下一小节，并继续介绍算法。关键的是，引理 1将使我们能够应用以下核化规则。

引理 2. 设 G是 一个图，设 $S \subseteq V(G)$ 是一个团，并设 $q \in \mathbb{N}$。假设对于每个 $v \in V(G) \setminus S$

$$|N(v) \cap S| \leq q \qquad \text{or} \qquad S \subseteq N(v). \tag{$*$}$$

设 $k \in \mathbb{N}$ 并假设 $|S| \geq (k-1)q + 2$。则对每个 $s \in S$，实例 (G, k) 与 $(G - s, k)$ 对于独立集是等价的。

证明。固定 $s \in S$。 $G - s$ 中任何大小为 k 的独立集也是 G中大小为 k 的独立集 .

反之，设 I 是 G中大小为 k 的独立集。若 $s \notin I$，则 I 是$G - s$ 中大小为 k 的独立集，即得证。因此，假设 $s \in I$。由于 S 是一个团，我们有 $I \cap S = \{s\}$。令 $J := I \setminus \{s\}$。则 $|J| = k - 1$ 且 $J \cap S = \varnothing$。

对每个 $x \in J$，我们有 $xs \notin E(G)$，因此 x 与 S并非完全邻接。由 $(*)$ 可得 $|N(x) \cap S| \leq q$。定义

$$F := \bigcup_{x \in J} \big(N(x) \cap S\big).$$

于是 $|F| \leq (k-1)q$。由于 $|S| \geq (k-1)q + 2$，存在 $s' \in S \setminus F$使得 $s' \neq s$。对于每个 $x \in J$，都有 $s' \notin N(x) \cap S$，因此 $xs' \notin E(G)$。所以， $J \cup \{s'\}$ 是 $G - s$中大小为 k 的独立集。 □

现在很容易得出一个固定参数算法。

定理 4。 存在一个可计算函数 $H(t,k)$，使得对每个 $t \in \mathbb{N}$，以下结论均成立。给定一个有 n 个顶点、半图指标为 $< t$ 且余匹配指标为 $< t$ 的图 G，以及一个整数 k，可以在 $H(t,k) \cdot n^2$ 时间内判定 G 是否包含大小至少为 k 的独立集。

证明。 设 (G,k) 是一个实例。令 $q := 2t-1$，令 f 为 引理 1中的函数，并定义

$$K := (k-1)q+2, \qquad N_0 := f(t,K).$$

我们穷尽地应用归约：若 $|V(G)| \geq N_0$，则（利用参数为 引理 1 中的 K）计算一个大小为 $S \subseteq V(G)$ 的集合 $|S| = K$，使其满足该引理的条件 (1) 和 (2)。

- 若 S 是一个独立集，则回答“是”并停止。
- 否则， S 是一个团。任意删除一个顶点 $s \in S$ 从 G中并继续迭代。根据引理 2，实例 (G,k) 和 $(G-s,k)$ 等价。

每次应用归约规则都会从 G 中删除一个顶点。因此，经过至多 n 次迭代后，过程终止，并得到一个大小为 $|V(G)| < N_0$ 的图（仍记为 G）。终止时，我们输出当前实例（G， k）。由于 $|V(G)| < N_0 = f(t, K)$ 且 $K = (k-1)(2t-1)+2$，这是一个等价实例，其大小仅取决于 t 和 k。

在每次迭代中，我们都调用引理 1，参数为 K，作用于当前含有 n_i 个顶点的图上。这需要 $\mathcal{O}\big(g(t, K) \cdot n_i\big)$ 的时间，其中 g 是引理中的第二个函数。每次迭代中的其他工作都是关于 n_i 线性的。对所有迭代求和，并利用 $n_i \leq n$对所有 i均成立，可得运行时间

$$\sum_i \mathcal{O}\big(g(t,K) \cdot n_i\big) = \mathcal{O}\big(g(t,K) \cdot n^2\big).$$

在所得实例上，我们通过暴力搜索求解该问题，并据此定义 $H(t, k)$。 □

在本节余下部分，我们将证明引理 1。

5.1 不可区分序列

我们假设读者熟悉一阶逻辑的基础知识，例如可参见教科书 [27, 42]。不可区分序列是模型论中的核心工具。下面回顾其定义。设 G是一个图，$\varphi(x_1, \ldots, x_\kappa)$ 是一阶逻辑中的一个公式，且 $I = (a_i)_{i \in [n]}$ 是 G 的一个顶点序列。我们称 I 是-不可区分的，如果对所有指标

$$1 \leq i_1 < \cdots < i_\kappa \leq n \quad \text{and} \quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_\kappa \leq n$$

我们有

$$G \models \varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_\kappa}) \iff G \models \varphi(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\kappa}).$$

对于有限公式集 Δ，我们称 I 是-不可区分的，如果它对所有 $\varphi \in \Delta$ 都是 φ-不可区分的。在下文中，我们有时会将不可区分序列视为集合，例如考虑诱导子图 $G[I]$ 或与其他集合取交时。

例 1。 设 G 是一个图，且 $\eta(x,y) := E(x,y)$。若 $I = (v_1, \ldots, v_n)$ 是 η 中的一个不可区分序列，则诱导子图 $G[I]$要么是一个团，要么是一个独立集。

根据拉姆齐定理 [39]，，任意足够长的顶点序列都包含一个很长的不可辨子序列，以下引理对此作了形式化说明。（关于现代表述，请参见 [30, 定理 4。18]）

引理 3。 存在一个（可计算的）函数 f，使得对于每个有限公式集 Δ 以及任意一个长度至少为 $f(k, m)$ 的元素序列，该序列都包含一个长度为 m的 Δ-不可区分子序列，其中

$$k := |\Delta| \cdot \textit{maximum number of free variables appearing in a formula of } \Delta.$$

5.2 基于不可区分元素的邻域二分

已有多处研究指出，在处理性质良好的图类并选择适当的公式集时，不可区分序列可以对其邻域施加大量结构 [3, 31, 34,17, 14, 18]。我们将为无半图且无补匹配的图类证明一个具有这种精神的引理（引理 5）。Malliaris 和 Shelah 使用了一个几乎满足我们需求的公式集 [34]，以便为性质良好的图类建立强正则性引理。我们将使用一个与该公式集略有不同的公式集，因为他们对半图的定义并不要求构成半图的顶点a_1、……、 a_t、 b_1、……、 b_t 两两不同。我们必须将这一假设纳入公式中。令

$$\chi_{2t}(x_1,\dots,x_{2t}) := \exists y\Big(\bigwedge_{1\le i\le t} E(x_i,y) \wedge \bigwedge_{t+1\le i\le 2t} \neg E(x_i,y) \wedge \bigwedge_{1\le i\le 2t} y\neq x_i\Big),$$
$$\chi^\star_{2t}(x_1,\dots,x_{2t}) := \exists y\Big(\bigwedge_{1\le i\le t} \neg E(x_i,y) \wedge \bigwedge_{t+1\le i\le 2t} E(x_i,y) \wedge \bigwedge_{1\le i\le 2t} y\neq x_i\Big).$$

公式 χ_{2t} 表示存在一个顶点 y 与所有 x_i 不同，且该顶点恰好与前t 个元素 $x_1,\dots,x_t$ 相邻，而不与后 t 个元素 $x_{t+1},\dots,x_{2t}$相邻。公式 $\chi^\star_{2t}$ 则对称地表示 y 与后 t 个元素相邻，而不与前 t 个元素 x_i相邻。示意图见图 4 。

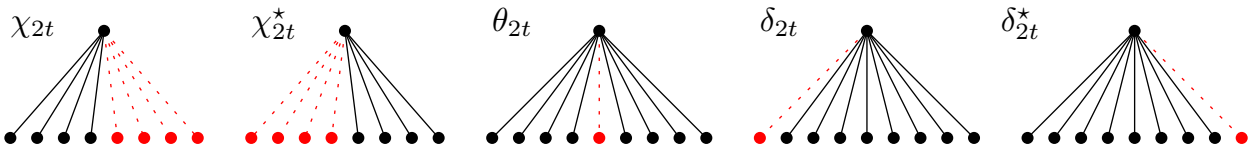


图 4：顶点 y （上方）与不可区分序列中的一个元组（下方）的连接模式，由公式 $\chi_{2t},\chi^\star_{2t},\theta_{2t},\delta_{2t},\delta^\star_{2t}$ 验证，其中 $t=4$。

我们得到 [34, 引理3.2]的以下变体。

引理4。 设 G 是一个半图指标为 $<t$ 的图。设 $I=(v_1,\dots,v_n)$ 是 G 中一个长度为 $n\ge 4t$ 的 $\{\chi_{2t},\chi^\star_{2t}\}$-不可区分序列。那么对于每个顶点 $w\in V(G)\setminus I$,

$$|N(w)\cap I|<2t \qquad or \qquad |I\setminus N(w)|<2t.$$

证明。 固定 $w\in V(G)\setminus I$，并反设

$$|N(w)\cap I|\ge 2t \qquad \text{and} \qquad |I\setminus N(w)|\ge 2t. \tag{1}$$

令 $A:=(v_1,\dots,v_{2t})$ 为 I的长度为 $2t$的前缀。由 (1，两个集合 $A\cap N(w)$ 和$A\setminus N(w)$ 中至少有一个的大小不小于 t。不失一般性，假设

$$|A\cap N(w)|\ge t, \tag{2}$$

否则，我们用 $\chi^\star_{2t}$ 代替 χ_{2t}，对称地进行论证。

由于 (1) 中的第二个不等式保证整个序列中至少有 $2t$ 个与 w 不相邻的元素，并且 A的长度为 $2t$，我们可以选取指标 $1\le i_1<\dots<i_t\le 2t$和 $2t<j_1<\dots<j_t\le n$，使得$v_{i_1},\dots,v_{i_t}\in N(w)$ 以及 $v_{j_1},\dots,v_{j_t}\notin N(w)$。因此

$$G\models \chi_{2t}(v_{i_1},\dots,v_{i_t},v_{j_1},\dots,v_{j_t})$$

wit h 见证 $y=w$。注意到 $w\notin I$，因此合取项 $\bigwedge_{1\le i\le 2t} y\neq x_i$ 也成立 l.

由于 I 是 χ_{2t}-不可区分的，因此 I 中每个递增的 $2t$-元组都满足 χ_{2t}。特别地，对于每个 $i \in [t]$，我们有

$$G \models \chi_{2t}(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+2t-1}). \tag{3}$$

对每个 $i \in [t]$固定一个见证 $y_i \in V(G)$，使其满足 (3)。于是

$$y_i v_{i+j} \in E(G) \text{ for } 0 \le j \le t-1, \qquad \text{and} \qquad y_i v_{i+j} \notin E(G) \text{ for } t \le j \le 2t-1,$$

并且，根据合取项 $\bigwedge_{1\le i\le 2t} y \neq x_i$，对所有 $0 \le j \le 2t-1$，$y_i \neq v_{i+j}$。

对于 $j \in [t]$，定义 $r_j := v_{t+j-1}$，因此 $(r_1, \ldots, r_t) = (v_t, \ldots, v_{2t-1})$。由于 y_i 恰好与窗口 $(v_i, \ldots, v_{i+2t-1})$ 中的前 t 个顶点相邻，即与 $v_i, \ldots, v_{i+t-1}$ 以及 $r_j = v_{t+j-1}$ 相邻，因此当且仅当

$$r_j \in \{v_i, \ldots, v_{i+t-1}\} \;\Leftrightarrow\; t+j-1 \le i+t-1 \;\Leftrightarrow\; j \le i.$$

注意到，y_i 与 r_j 不同，这是由构造得出的；它们两两不同，因为它们的邻域不同；而 v_i 两两不同，因为它们是 I中的不同顶点。因此，$(r_1, \ldots, r_t)$ 和$(y_1, \ldots, y_t)$ 构成一个阶为 t 的半图（至多交换两侧），这与 G的半图指标为 $< t$的假设矛盾。这个矛盾表明 (1) 不成立，从而引理得证。 □

我们加入余匹配指标有界这一假设，并考虑关于更多公式的不可区分性。令

$$\theta_{2t}(x_1, \ldots, x_{2t+1}) := \exists y \Big(\bigwedge_{1\le i\le t} E(x_i, y) \wedge \neg E(x_{t+1}, y) \wedge \bigwedge_{t+2\le i\le 2t+1} E(x_i, y) \wedge \bigwedge_{1\le i\le 2t+1} y \neq x_i \Big),$$

$$\delta_{2t}(x_1, \ldots, x_{2t+1}) := \exists y \Big(\neg E(x_1, y) \wedge \bigwedge_{2\le i\le 2t+1} E(x_i, y) \wedge \bigwedge_{1\le i\le 2t+1} y \neq x_i \Big),$$

$$\delta^\star_{2t}(x_1, \ldots, x_{2t+1}) := \exists y \Big(\neg E(x_{2t+1}, y) \wedge \bigwedge_{1\le i\le 2t} E(x_i, y) \wedge \bigwedge_{1\le i\le 2t+1} y \neq x_i \Big),$$

公式 θ_{2t} 表示存在一个元素 y，它与所有 x_i 都不同，并且与除中间的 x_{t+1} 之外的所有 x_i都相邻。公式 δ_{2t} 表示存在一个元素 y，它与所有 x_i都不同，对于 $i \ge 2$，它与 x_1 非相邻、与 x_i 相邻；对称地，$\delta^\star_{2t}$ 表示存在 y，它与所有 x_i 都不同，且仅与最后一个元素 x_{2t+1}非相邻。特别地，当满足 δ_{2t} 或 $\delta^\star_{2t}$ 时，y 在 x_1，……，x_{2t+1}中有一个非邻点和 $2t$ 个邻点。示意见图 4。

以下引理将针对更受限的单调稳定无余匹配图类所作的一项观察从 [14] 推广到更一般的无半图、无余匹配图类。令

$$\Gamma_t := \{\eta, \chi_{2t}, \chi^\star_{2t}, \theta_{2t}, \delta_{2t}, \delta^\star_{2t}\}.$$

引理 5。设 $t \in \mathbb{N}$ 且设 G 为一个半图指标为 $< t$、补匹配指标为 $< t$的图。设$I = (v_1, \ldots, v_n)$ 是 G 中一个长度为 $n \ge 8t+1$ 的 Γ_t- 不可区分序列。那么，对于每个顶点 $w \in V(G)\setminus I$，我们有

$$|N(w) \cap I| < 2t \qquad \text{or} \qquad I \subseteq N(w).$$

证明。固定 $w \in V(G) \setminus I$。根据 引理4，我们有 $|N(w) \cap I| < 2t$或 $|I \setminus N(w)| < 2t$。第一种情况已证毕，因此假设

$$|I \setminus N(w)| < 2t. \tag{1}$$

若 $I \subseteq N(w)$，我们也就完成了；因此反设存在

$$u \in I \setminus N(w). \tag{2}$$

不失一般性，假设 u 出现在该序列的前 $4t+1$ 个顶点中，即$u = v_p$ 且 $p \le 4t+1$；否则，我们对称地讨论 $\delta^\star_{2t}$。由于 $n \ge 8t+1$，在 I之后至少有$4t$ 个顶点 u。根据（1），这些顶点中至多有 $2t-1$ 个与 w互为非邻点的顶点，因此在 u 之后的后缀中至少有 $2t$ 个与 w相邻的顶点。选取指标

$$p < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{2t} \le n \qquad \text{with} \qquad v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_{2t}} \in N(w).$$

接着，递增的（2t+1）元组

$$(u,\, v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_{2t}})$$

s满足 δ_{2t}，其见证为 $y = w$（其中 $w \notin I$ 确保合取项 $y \ne x_i$ 得到满足 d).

由于 I 是 δ_{2t}-不可区分的，因此 δ_{2t} 对来自 I 的每个递增（2t+1）元组都成立。特别地，我们有

$$G \models \delta_{2t}(v_{4t+1}, v_{4t+2}, \ldots, v_{6t+1}). \tag{3}$$

固定一个见证 $w' \in V(G)$ 用于 (3)（它满足 $w' \ne v_i$ 对所有 $i \in \{4t+1, \ldots, 6t+1\}$，因为合取项 $\bigwedge_{1 \le i < 2t+1} y \ne x_i$ 属于 δ_{2t} 且已满足）。令 $u' = v_{4t+1}$，对于它，w' 与之不相邻，因为 δ_{2t} 成立。

由于 w' 并不与 I 的所有顶点相邻，且在其中至少有 $2t$ 个邻点，因此再次根据引理4，$|I \setminus N(w')| < 2t$。由于 u 在序列中足够居中，我们可以选取 t 个 w' 的邻点，它们出现在 u' 之前，并选取 t个出现在 u'之后的邻点。因此，我们得到一个递增的(2t+1)元组

$$(c'_1, \ldots, c'_t,\, u',\, c'_{t+2}, \ldots, c'_{2t+1})$$

来自 I，使得对于所有 $i \in [2t+1] \setminus \{t+1\}$，$w'c'_i \in E(G)$，而 $w'u' \notin E(G)$。因此，对于这个元组，$G \models \theta_{2t}$。由于 I 是 θ_{2t}-不可区分的，可知对于每个 $i \in [t]$，我们都有

$$G \models \theta_{2t}(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+2t}). \tag{4}$$

对每个 $i \in [t]$，固定一个见证 $y_i \in V(G)$，对于（4）。于是

$$y_i v_{i+j} \in E(G) \text{ for } j \in \{0, \ldots, t-1\} \cup \{t+1, \ldots, 2t\}, \qquad \text{and} \qquad y_i v_{i+t} \notin E(G),$$

并且由 θ_{2t}中的最后一个合取项可知，对于所有 $0 \le j \le 2t$，$y_i \ne v_{i+j}$。

定义

$$c_j := v_{t+j} \qquad (j = 1, \ldots, t+1),$$

于是 $(c_1, \ldots, c_{t+1}) = (v_{t+1}, v_{t+2}, \ldots, v_{2t+1})$。根据与之前相同的滑动窗口论证，对于所有$i,\ j \in [t]$ 都有

$$E(y_i, c_j) \iff i \ne j. \tag{5}$$

根据构造，所有涉及的顶点也两两不同。因此，$\{c_1, \ldots, c_t\}$ 与 $\{y_1, \ldots, y_t\}$ 之间的二部图模式半诱导出一个阶数为 t的补匹配，这与 G 的补匹配指标为 $< t$的假设矛盾。这一矛盾表明我们的假设（2）是错误的，因此 $I \subseteq N(w)$。

□

我们现在可以推导出引理 1，为方便起见，我们将其重述如下。

引理 1. 存在（可计算的）函数 f、g：$\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$，使得对每个 $t \in \mathbb{N}$，下列结论成立。设 G 是一个有 n个顶点的图，其半图指标为 $< t$，余匹配指标为 $< t$。对每个 $L \in \mathbb{N}$，若$n \ge f(t,\ L)$，则 G 包含一个集合 $S \subseteq V(G)$，其大小为 $|S| = L$，使得

1. S 要么是一个团，要么是一个独立集，并且

2. 对于每个顶点 $w \in V(G) \setminus S$，我们有

$$|N(w) \cap S| < 2t \qquad or \qquad S \subseteq N(w).$$

此外，这样的集合 S 可以在 $g(t, L) \cdot n$ 时间内计算出来。

证明。令 $h\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 为引理 3 中的函数，并令 $k = |\Gamma_t| \cdot (2t+1)$。于是，根据该引理，任何长度至少为 $h(k, m)$ 的顶点序列都包含一个长度为 m 的 Γ_t-不可区分子序列。令$L_0 := \max(L, 8t+1)$，并定义 $f(t, L) := h(k, L_0)$。

假设 $n \geq f(t, L)$。取 $V(G)$ 的任意一个排序 $(v_1, \ldots, v_n)$，并考虑其长度为 $f(t, L)$ 的前缀 P。由于 f 是可计算的，我们可以选取这样的前缀。根据 $f(t, L)$ 的定义，P 包含一个长度为 L_0 的递增 Γ_t-不可区分子序列 $S = (u_1, \ldots, u_{L_0})$。

1. 由于 $\eta \in \Gamma_t$，序列 S 是 η-不可区分的。根据 例 1，$G[S]$要么是一个团，要么是一个独立集。
2. 引理 5 适用于 S，并得出 $|N(w) \cap S| < 2t$ 或 $S \subseteq N(w)$。

若 $L_0 > L$，取 $S' \subseteq S$ 中任意一个大小为 L 的子集。S' 上的诱导子图仍是一个团或独立集，并且对于每个 $w \in V(G) \setminus S'$，都有 $|N(w) \cap S'| < 2t$ 或 $S' \subseteq N(w)$。

对于运行时间，我们只需应用一个蛮力算法。我们遍历 P 中所有大小为 L 的子集 S，并验证 S 是否满足这两个条件。生成所有这样的 S 需要时间 $\mathcal{O}(2^{f(t,L)})$。检查 S 是否诱导出一个团或独立集，可以在时间 $\mathcal{O}(L^2 \cdot n)$ 内完成，因为在假设采用邻接表编码的情况下，检查 S 中任意两个顶点是否相邻需要时间 $\mathcal{O}(n)$。此外，测试每个顶点 $w \in V(G) \setminus S$ 是否在 S 中有少于 $2t$ 个邻居，或与 S 中所有顶点相邻，可以在时间 $\mathcal{O}(L \cdot n)$ 内完成。为此，为每个顶点 $w \in V(G)$ 配置一个计数器。我们遍历所有顶点 $s \in S$，并在考察 s 时，将其每个邻居的计数器加一。完成后，我们遍历一次 $V(G)$ 中的所有顶点 $\setminus S$，检查它们的计数器是否不大于 $2t$ 或等于 $|S|$。据此定义 g，即可得到所声称的运行时间。

□

6 半图自由类上支配集问题的困难性

本节证明，存在一个半图指标有界的图类，但在该图类上，支配集问题是 W[1]-困难的。

定理 5. 存在一　　个半图指标至多为 *16* 的图类，在该图类上，支配集是 *W[1]*-困难的　　.

证明。 我们遵循 Cygan 等人提出的从多色独立集到支配集的标准参数化归约（见 [8, 定理 13.9]）。给定一个多色独立集实例 $(G, k, (V_1, \ldots, V_k))$，该归约按如下方式构造图 G'：

1. 对于每个顶点 $v \in V(G)$，在 G' 中引入 v。 2. 对于每个 $1 \leq i \leq k$，在 G' 中构造一个 V_i 团。 3. 对于每个 $1 \leq i \leq k$，在 G' 中引入两个新顶点 x_i, y_i，并使它们与 V_i 中的每个顶点相邻。记作 $V_i^* = V_i \cup \{x_i, y_i\}$。 4. 对于每条边 $e \in E(G)$，其端点为 $u \in V_i$ 和 $v \in V_j$，在 G' 中引入一个顶点 w_e，并使其与 $(V_i \cup V_j) \setminus \{u, v\}$ 中的每个顶点相邻。记作 $W = \{w_e \mid e \in E(G)\}$。

Cygan 等人 [8] 论证了这一归约的正确性。接下来需要证明 G' 的半图指标至多为 16。反设存在一个半诱导半图，由 a_1、……、a_{17}和 b_1、……、b_{17}组成。由于 W是一个独立集，且每对 a_i、b_i都相邻，因此 a_i、b_i 中至多有一个可以属于 W。因此，W中至多有 17 个半图顶点。根据对称性，不妨设 a侧包含至多

8 W个顶点。因此， V_1^*、……、 V_k^*中至少有 9 a个顶点。如果某个 V_i^*包含 5 a个顶点，那么某个 b顶点将与 V_i^*中的一个顶点相邻，而与其余四个顶点不相邻。这不可能发生，因为 V_i^*中的每个顶点要么没有邻点，要么至多有 3 个非邻点。因此，每个 V_i^*至多包含 4 a个顶点，所以这些 9 a个顶点必须分布在至少三个不同的 V_i^*集中。但这样一来， b_{17}就必须与至少三个不同V_i^*集中的顶点相邻，因为它与所有 a 个顶点都相邻。这就产生了矛盾，因为 G' 中的任何顶点都不会与超过两个 V_i^*集中的顶点相邻。 □

7 无补匹配类的困难性结果

本节根据已有文献，推导出无补匹配类的困难性结果。如果一个图是轴平行单位正方形的交图，则称其为单位正方形图 。以下两项困难性结果由 Marx 证明。

定理 6 ([36, 定理 1])。 支配集在单位正方形图上是 *W[1]*-困难的。

T定理 7 ([35, 定理 1])。 独立集在单位正方形图上是 *W[1]*-困难的。

令 $\overline{3K_2}$ 为三个 K_2的不交并的补图，即阶数为 3 的匹配的补图。Neuen 指出了单位正方形图的以下障碍。

引理 6 ([38, 引理 3.3])。 每个单位正方形图都不包含 $K_{1,\ 5}$ 和 $3K_2$ 作为诱导子图。

推论 2. 单位正方形图类的补匹配指标有界。

证明。 令 $R(k)$ 表示拉姆齐数，即使得每个含有 $R(k)$ 个顶点的图都包含一个大小为 k 的独立集或团的最小数。反设， G有一个大小为 $R(R(6))$、两侧分别为 A 和 B 的半诱导补匹配。根据拉姆齐定理，存在一个大小为 $R(6)$ 的 $A' \subseteq A$ ，它是团或独立集。将其限制到 B 中相应的匹配顶点，并对该子集应用拉姆齐定理，可得一个大小为 6、两侧均为齐性的半诱导补匹配。

如果一侧是独立集 $\{a_1, \ldots, a_6\}$，那么另一侧的任意 b_j都与这五个独立顶点 $\{a_i$ 相邻： $i \neq j\}$，因此 G 包含 $K_{1,\ 5}$。如果两侧都是团，那么任意三对匹配对 $(a_1,\ b_1)$，$(a_2,\ b_2)$，$(a_3,\ b_3)$ 诱导 $3K_2$。两种情况都与 引理 6矛盾。 □

8 无余匹配类中独立集的近似

图 G 的正常 k着色 是一个赋值 $\lambda: V(G) \to [k]$ ，使得 G 中任意两个相邻顶点u 和 v 满足 $\lambda(u) \neq \lambda(v)$。色数 $\chi(G)$ 表示使得存在 G 的正常 k- 着色的最小整数 k 。团数 $\omega(G)$ 表示 G 中最大团的大小。若存在一个函数 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ，将这两个参数联系起来，则图类 $\mathscr{C}$ 称为 χ有界 的:

$$\chi(G) \leq f(\omega(G)) \quad \text{for all } G \in \mathscr{C}.$$

有关 χ-有界性的综述，请参阅 [40] 。我们将基于 Gyárfás 的以下经典论证，为无余匹配类上的独立集问题推导出一种近似算法。这里， P_t 表示含有 t 个顶点的路径。

定理 8 ([25]的定理 2.4。 P_t-自由图是 χ-有界的。特别地，每个图 G 都包含一个诱导 K_k、一个诱导 P_t，或一个适当的 t^k着色 G。

上述结论是构造性的，而且众所周知，它可以转化为一个能够生成见证的多项式时间算法。由于我们不知道文献中是否有明确的运行时间分析，因此我们在附录中给出以下结论的证明。

定理 9 (民间结果)。 存在一个运行时间为 $O(n^3)$的算法，给定一个图 G 和整数 k、$t \in \mathbb{N}$，返回一个诱导 K_k、一个诱导 P_t，或一个 G的真 t^k-着色。

推论 3。 存在一个算法，给定一个图 G，可在 $O(n^3\log(n))$ 的时间内，找到一个大小至少为$\log_{2m+2}(k) - 2$的团，其中 m 是 G 的匹配指数， k 是 G的团数。

证明。一个 P_{2m+2} 的匹配指数为 $m+1$，因此 G 不包含诱导 P_{2m+2}。于是，定理 9 对给定的 k' 和 $t = 2m+2$ ，会计算出一个诱导 $K_{k'}$ 或一个 G的真 $(2m+2)^{k'}$-着色。由于 $\omega(G) = k$，我们有 $\chi(G) \geq k$。因此，对于满足 $(2m+2)^{k'} < k$ 的 k' ，定理 9 必须返回一个团 $K_{k'}$。这样的最大 k' 为 $\lfloor \log_{2m+2}(k-1) \rfloor \geq \log_{2m+2}(k) - 2$。对 $k' \in \{1, \ldots, n\}$进行二分搜索，可在 $O(n^3\log(n))$ 的时间内得到结果。 □

在补图上运行上述算法，可以为余匹配指标有界的图类中的独立集提供一种近似算法。

推论 4. 存在一种算法，对于给定的图 G，可在 $O(n^3\log(n))$ 时间内找到一个大小至少为 $\log_{2m+2}(k) - 2$ 的独立集，其中 m 是 G 的余匹配指标， k 是 G 中最大独立集的大小。

参考文献

[1] VE Alekseev。关于图的遗传类格的低层。《离散分析与运筹研究》，第*1*辑，4(1):3–12，1997年。俄文。[2] Benjamin Bergougnoux、Thekla Hamm、Lars Jaffke 和 Paloma T. Lima。关于 F-分支宽度的算法应用。载于 Anne Benoit、Haim Kaplan、Sebastian Wild 和 Grzegorz Herman 编，第*33*届欧洲算法研讨会（*ESA 2025*），第351卷，莱布尼茨国际信息学论文集（*LIPIcs*），第16:1–16:17页，德国达格施图尔，2025年。Schloss Dagstuhl – Leibniz 信息学中心。[3] Achim Blumensath。简单的单子理论与不可区分元素。《数学逻辑季刊》，57(1):65–86，2011年。[4] Édouard Bonnet、Nicolas Bousquet、Pierre Charbit、Stéphan Thomassé 和 Rémi Watrigant。无 h 图中独立集的参数化复杂性。《算法学》，82(8):2360–2394，2020年。[5] Hervé Brönnimann 和 Michael T. Goodrich。有限 VC 维数下近乎最优的集合覆盖。《离散与计算几何》，14(4):463–479，1995年。[6] Binh-Minh Bui-Xuan、Jan Arne Telle 和 Martin Vatshelle。针对局部可检查的顶点子集问题和顶点划分问题的快速动态规划。《理论计算机科学》，511:66–76，2013年。精确与参数化计算。[7] Miroslav Chlebík 和 Janka Chlebíková。d 维盒交图中的优化问题的近似困难性。载于第十六届 *ACM-SIAM* 离散算法研讨会论文集，SODA ’05，第267–276页，美国，2005年。工业与应用数学学会。

[8] Marek Cygan、Fedor V Fomin、Łukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、Dániel Marx、Marcin Pilipczuk、Michał Pilipczuk 和 Saket Saurabh。参数化算法，第5卷。施普林格，2015年。[9] Reinhard Diestel。《图论》，第*4*版，第173卷，数学研究生教材。施普林格，2012年。[10] Guoli Ding、Bogdan Oporowski、James G. Oxley 和 Dirk Vertigan。大型三连通二元拟阵的不可避免的小子式。《组合理论杂志》，*B*辑，66(2):334–360，1996年。[11] Rodney G. Downey 和 Michael R. Fellows。固定参数可处理性与完备性 I：基本结果。《*SIAM*计算学报》，24(4):873–921，1995年。[12] Rodney G. Downey 和 Michael R. Fellows。固定参数可处理性与完备性 II：关于 W[1] 完备性。《理论计算机科学》，141(1–2):109–131，1995年。[13] Jan Dreier、Ioannis Eleftheriadis、Nikolas Mählmann、Rose McCarty、Michał Pilipczuk 和 Szymon Toruńczyk。单子稳定图类上的一阶模型检测。载于*2024 IEEE* 第*65*届计算机科学基础研讨会（*FOCS*），第21–30页。IEEE，2024年。[14] Jan Dreier、Nikolas Mählmann、Amer E. Mouawad、Sebastian Siebertz 和 Alexandre Vigny。单子稳定性的组合与算法方面。载于 Sang Won Bae 和 Heejin Park 编，第*33*届国际算法与计算研讨会（*ISAAC 2022*），第248卷，莱布尼茨国际信息学论文集（*LIPIcs*），第11:1–11:17页，德国达格施图尔，2022年。Schloss Dagstuhl – Leibniz信息学中心。[15] Jan Dreier、Nikolas Mählmann 和 Sebastian Siebertz。结构稀疏图类上的一阶模型检测。载于第*55*届 *ACM*计算理论研讨会论文集，第567–580页，2023年。[16] Jan Dreier、Nikolas Mählmann、Sebastian Siebertz 和 Szymon Toruńczyk。单子稳定类和单子NIP类中的不可区分元素与平坦性。载于第*50*届国际自动机、语言与程序设计学术会议（*ICALP 2023*），第261卷，*LIPIcs*，第125:1–125:18页。Schloss Dagstuhl - Leibniz信息学中心，2023年。[17] Jan Dreier、Nikolas Mählmann、Sebastian Siebertz 和 Szymon Toruńczyk。单子稳定类和单子NIP类中的不可区分元素与平坦性。载于第*50*届国际自动机、语言与程序设计学术会议（*ICALP 2023*），第261卷，莱布尼茨国际信息学论文集（*LIPIcs*），第125:1–125:18页。Schloss Dagstuhl – Leibniz信息学中心，2023年。[18] Jan Dreier、Nikolas Mählmann 和 Szymon Toruńczyk。翻转可断性：单子依赖图类的组合二分性。载于第*56*届 *ACM*计算理论研讨会论文集，第1550–1560页，2024年。[19] Eduard Eiben、Robert Ganian、Thekla Hamm、Lars Jaffke 和 O-joung Kwon。刻画与计算宽度度量的统一框架。载于 Mark Braverman 编，第*13*届理论计算机科学创新会议（*ITCS 2022*），第215卷，莱布尼茨国际信息学论文集（*LIPIcs*），第63:1–63:23页，德国达格施图尔，2022年。Schloss Dagstuhl – Leibniz信息学中心。[20] Grzegorz Fabianski、Michal Pilipczuk、Sebastian Siebertz 和 Szymon Torunczyk。关于支配与独立性的渐进式算法。载于 Rolf Niedermeier 和 Christophe Paul 编，第 *36* 届理论计算机科学国际研讨会（*STACS 2019*），第126卷，*LIPIcs*，第27:1–27:16页。Schloss Dagstuhl - Leibniz信息学中心，2019年。

[21] Michael R. Garey 和 David S. Johnson。《计算机与难解性：*NP* 完备性理论指南》。W. H. Freeman and Company，旧金山，1979年。[22] Paul Goldberg 和 Mark Jerrum。对以实数参数化的概念类的 Vapnik–Chervonenkis 维数进行界定。载于第六届计算学习理论年会论文集，COLT ’93，第 361–369 页。计算机协会，1993年。[23] Sylvain Gravier、Frédéric Maffray、Jérôme Renault 和 Nicolas Trotignon。关于大型集合族中的单点集、余单点集和单调序列的 Ramsey 型结果。《欧洲组合数学杂志》，25(5):719–734，2004年。[24] Sylvain Guillemot。无半阶梯超图中的参数化覆盖。《*ACM* 计算理论汇刊》，17(2):1–15，2025年。[25] A. Gyárfás。完美图周边的问题。《数学应用》，19(3- 4):413–441，1987年。[26] Johan Håstad。团难以在 $n^{1-\varepsilon}$ 范围内近似。载于第*37*届计算机科学基础年会（*FOCS*）论文集，第 627–636 页，1996年。[27] Wilfrid Hodges。《简明模型论》。剑桥大学出版社，1997年。[28] Tomáš Hons。一个关于有界 VC 维数的多项式 Ramsey 命题。《欧洲组合数学杂志》，133:104303，2026年。[29] David S. Johnson。组合问题的近似算法。《计算机与系统科学杂志》，9(3):256–278，1974年。[30] Stasys Jukna。《极值组合学：及其在计算机科学中的应用》，第 571 卷。施普林格，2011年。[31] Stephan Kreutzer、Roman Rabinovich 和 Sebastian Siebertz。处处稀疏图类的多项式核与宽度性质。《算法汇刊》，15(3):34:1–34:27，2019年。[32] Michael Lampis。树宽限制下的算法元定理。《算法学》，64(1):19–37，2012年。[33] Nikolas Mählmann 和 Sebastian Siebertz。稀疏图的存在正向转导。arXiv:2601.15890，2026年。[34] Maryanthe Malliaris 和 Saharon Shelah。稳定图的正则性引理。《美国数学会汇刊》，366(3):1551–1585，2014年。[35] Dániel Marx。几何问题的高效近似方案？载于 Gerth Stølting Brodal 和 Stefano Leonardi 编，《算法——*ESA 2005*》，第 448–459 页，柏林、海德堡，2005年。Springer Berlin Heidelberg。[36] Dániel Marx。几何图上独立性与支配的参数化复杂性。载于 Hans L. Bodlaender 和 Michael A. Langston 编，《第二届参数化与精确计算国际研讨会（*IWPEC 2006*）》，《计算机科学讲义》第 4169 卷，第 154– 165 页。施普林格，2006年。[37] Dániel Marx。平面与几何近似方案的最优性。载于第*48*届 *IEEE* 计算机科学基础年会（*FOCS’07*），第 338–348 页。IEEE，2007年。

[38] Daniel Neuen。单位正方形图的图同构。载于 Piotr Sankowski 和 Christos Zaro- liagis 编，《第*24*届欧洲算法年度研讨会（*ESA 2016*）》，《莱布尼茨国际信息学论文集（*LIPIcs*）》第 57 卷，第 70:1–70:17 页，德国达格施图尔，2016年。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik。

[39] Frank P. Ramsey。《形式逻辑中的一个问题》。伦敦数学学会会刊，s2-30(1):264–286，1930年01月。

[40] Alex Scott 和 Paul Seymour。《 χ有界性的综述》。图论杂志，95(3):473–504，2020年。

[41] Jan Arne Telle 和 Yngve Villanger。无双团图上的支配问题固定参数算法。载于 Leah Epstein 和 Paolo Ferragina（编），算法——*ESA 2012*——第*20*届欧洲年度研讨会，卢布尔雅那，斯洛文尼亚，*2012*年*9*月*10*日至*12*日。论文集，《计算机科学讲义》第7501卷，第802–812页。施普林格，2012年。

[42] Katrin Tent 和 Martin Ziegler。《模型论教程》，《逻辑讲义》第40卷。剑桥大学出版社，2012年。

推论的证明1

推论 1。 存在一个函数 $Q\colon\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得每个邻域多样性至少为 $Q(h)$ 的图，其匹配指数、补匹配指标或半图指标至少为 h。

证明。令 Q_{bi} 为定理 1 中的函数，令 R 为拉姆齐数，并设 $Q(h) := R\big(Q_{\mathrm{bi}}(h)\big)$。设 G 为一个邻域多样性至少为 $Q(h)$ 的图，并令 $S\subseteq V(G)$ 为大小为 $Q(h)$ 的无孪生顶点集（从每个孪生类中取一个代表）。根据拉姆齐定理，S 包含一个大小为 $Q_{\mathrm{bi}}(h)$ 的团或独立集 A。

由于 A 是齐性的，A 中的两个顶点是孪生顶点，当且仅当它们在 $V(G)\setminus A$ 中具有相同的邻域。由于 A 是无孪生顶点集，A 中的所有顶点在 $V(G)\setminus A$中均具有两两不同的邻域。令 B 包含 A中的每个不同邻域各对应的一个顶点。 A与 B 之间的二部图在两侧均无孪生顶点，因此定理 1 给出了一个阶为 h的诱导匹配、补匹配或半图，该结构在 G中是半诱导的。 □

B 定理 9 的证明

定理 9 (民间结果)。 存在一个运行时间为 $O(n^3)$ 的算法，给定一个图 G 和整数 k、$t\in\mathbb{N}$，返回一个诱导 K_k、一个诱导 P_t，或一个适当的 t^k-着色 G。

证明。定义

$$f(k,t)=\begin{cases}0 & \text{if } k=1,\\ (t-1)(f(k-1,t)+1) & \text{otherwise,}\end{cases}\qquad\text{and}\qquad g(k,t,l)=(l-1)(f(k-1,t)+1).$$

注意，$f(k,\ t)=g(k,\ t,\ t)$。此外，$f(k,\ t)<t^k$：对于 $k=1$，我们有 $f(1,\ t)=0<t$。对于 $k\geq 2$，由归纳法可得，

$$f(k,t)=(t-1)(f(k-1,t)+1)<(t-1)(t^{k-1}+1)=t^k-t^{k-1}+t-1<t^k,$$

其中最后一个不等式用到了 $t^{k-1}\geq t>t-1$。

我们描述两种相互递归算法。

- Gyárfás(G,k,t) 接受一个非空图 G 和整数 $k,t\in\mathbb{N}$，并返回一个诱导P_t或 K_k，或者返回 G 的一个正常 $f(k,t)$-着色。
- GyárfásSub$(G,\ k,\ t,\ v,\ l)$ 接受一个连通图 G、整数 $k,\ t,\ l\in\mathbb{N}$（满足 $l\le t$）以及一个起始顶点 $v\in V(G)$，并返回一个诱导 P_t或 K_k，或者一个 G 的正常着色 $g(k,\ t,\ l)$，或者一个带端点 v的诱导P_l。

描述 Gyárfás$(G,\ k,\ t)$。对 G 的每个连通分量 G' 执行以下操作：

任意选取一个 $v\in V(G')$，并调用 GyárfásSub$(G',\ k,\ t,\ v,\ t)$。如果某次子程序调用返回一个诱导P_t或 K_k，则返回该结果。否则，每个连通分量都有一个使用 $g(k,\ t,\ t)=f(k,\ t)$ 种颜色的正常着色。将各连通分量的着色合并为 G 的正常着色 $f(k,\ t)$，并返回该着色。

GyárfásSub(G,k,t,v,l) 的描述。如果 $t=1$ 或 $k=1$ 或 $l=1$，则返回单个顶点 v（分别作为P_t、K_1或带端点 v 的 P_l）。如果 G 仅由单个顶点 v 构成，则返回v 的单色着色。否则，由于 G 是连通图，$G[N(v)]$ 是一个非空图，因此我们可以调用 Gyárfás$(G[N(v)],k-1,t)$。如果调用返回一个 P_t，则返回它。如果它在 $G[N(v)]$, 中返回一个 K_{k-1}，则将v加入其中，并返回所得的 K_k。否则，我们得到 $G[N(v)]$的一个正常着色 $f(k-1,t)$。然后，对 $G[V(G)\setminus N[v]]$ 的每个连通分量 H 执行以下操作。

任取一个与 H 中某个顶点相邻的 $w\in N(v)$，并称之为 GyárfásSub$(G[V(H)\cup\{w\}],k,t,w,l-1)$。如果某次调用得到一个 P_t或 K_k，则返回它。如果某次调用得到一个端点为 w 的 P_{l-1}，则将其扩展为一个端点为 v 的 P_l，并返回它。这样做是成立的，因为 w 与 v 相邻，而 P_{l-1} 的其余部分位于 $G[V(G)\setminus N[v]]$ 的一个连通分量中，因此与 v 不相邻。否则，所有 H 都有一个正常着色的 $g(k,t,l-1)$- 着色方案。使用 $g(k,t,l-1)$ 种颜色为 $V(G)\setminus N[v]$ 着色，使用 $f(k-1,t)$ 种颜色为 $N(v)$ 着色，并为 v 使用一种颜色，从而返回 G 的一个正常着色。如所要求的，颜色总数有界于

$$\begin{aligned} g(k,t,l-1)+f(k-1,t)+1 &= (l-1-1)(f(k-1,t)+1)+f(k-1,t)+1\\ &= (l-1)(f(k-1,t)+1)\\ &= g(k,t,l). \end{aligned}$$

运行时间。令 $T(n)$ 为 GyárfásSub 在所有具有 n 个顶点的图的输入上的最大运行时间。我们通过对 n 使用归纳法来论证，对某个常数 c 有 $T(n)\le cn^3$。对于 $n=1$，这一点是显然的，因此假设 $n\ge 2$。

考虑一个具有 n 个顶点的图 G 以及参数 k,t,v,l。例程 GyárfásSub(G,k,t,v,l) 执行 $O(n^2)$ 的工作，并额外递归进入 $G[V(G)\setminus N[v]]$ 的连通分量，并且（通过对主 Gyárfás 算法的一次调用）递归进入 $G[N(v)]$ 的连通分量。对于 $G[V(G)\setminus N[v]]$ 的每个连通分量，在递归之前会额外添加一个顶点。

令 $n_1^+,\dots,n_r^+$ 为 $G[N(v)]$, 的连通分量的大小，并令 $n_1^-,\dots,n_m^-$ 为 $G[V(G)\setminus N[v]]$ 的连通分量的大小。因此，通过将 c 选得足够大，我们可以将 GyárfásSub(G,k,t,v,l) 的运行时间 T 上界为

$$T\le cn^2+\sum_{i=1}^{r}T(n_i^+)+\sum_{i=1}^{m}T(1+n_i^-).$$

设 $a=n_1^+$为第一个数，$B=\{n_2^+,\dots,n_r^+,n_1^-,\dots,n_m^-\}$ 为其余数字组成的集合。我们可以将上述项的上界设为

$$T\le cn^2+T(a)+\sum_{b'\in B}T(1+b').$$

由于 v 不属于任何一个分量，因此所有分量都严格小于 n。根据归纳法，我们可以代入

$$T \le cn^2 + ca^3 + \sum_{b' \in B} c(1+b')^3.$$

函数 $d(x) := (x+1)^3$ 对整数 $x, y \ge 1$ 是超可加的，因此

$$d(x+y) - d(x) - d(y) = (x+y+1)^3 - (x+1)^3 - (y+1)^3 = 3x^2y + 3xy^2 + 6xy - 1 \ge 0.$$

超可加性给出

$$\sum_{b' \in B} (1+b')^3 \le \left(1 + \sum_{b' \in B} b'\right)^3.$$

设 $b = 1 + \sum_{b' \in B} b'$。由于 v 不出现在任何连通分量中，$a + b = n$。因此

$$T \le c(a+b)^2 + ca^3 + cb^3.$$

对于整数 $a, b \ge 1$，有 $a + b \le 2ab \le 3ab$，因此 $(a+b)^2 \le 3ab(a+b) = 3a^2b + 3ab^2$，从而

$$T/c \le a^3 + b^3 + (a+b)^2 \le a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3 = n^3.$$

因此，GyárfásSub(G, k, t, v, l) 的运行时间为 $T \le cn^3$。由于除了$|V(G)| = n$之外，我们没有对输入作任何假设，因此 $T(n) \le cn^3$，如欲证。 □