判定图的外层厚度是 NP-困难的

Pin-HsianLee 国立台湾大学，台湾**Te-ChengLiu** 中央研究院，台湾**Meng-Tsung Tsai** 中央研究院，台湾

arXiv:2602.07607v1 [cs.CC] 7 Feb 2026

摘要

我们给出一个简短、自成一体且易于验证的证明，表明判定一般图的外层厚度是 NP-困难的。这解决了关于外层厚度计算复杂性的长期悬而未决问题。

此外，我们的困难性结果适用于一个更一般的覆盖问题 $P_{\mathcal{F}}$，定义如下。固定一个成员资格可判定的真图类 $\mathcal{F}$ 。给定一个无向简单图$G = (V, E)$和一个整数 k，任务是用至多 k 个子集 E_1、.....、E_k覆盖边集 $E(G)$，使得对于每个 $i \in [k]$，相应的子图 $(V(G), E_i)$ 都属于 $\mathcal{F}$。注意，如果 $\mathcal{F}$ 是单调的（特别是当 $\mathcal{F}$ 为所有外平面图构成的图类时），任何这样的覆盖都可以通过删除重叠部分转换为边划分；因此，在这种情况下，覆盖与划分是等价的。

我们的结果表明，对于每一个成员资格可判定且满足以下所有条件的真图类 $\mathcal{F}$：(a) $\mathcal{F}$ 对拓扑子式封闭，(b) $\mathcal{F}$ 对 1-和封闭，且 (c) $\mathcal{F}$ 包含一个长度为 3 的圈，对于每个固定整数 $k \geq 3$，问题 $P_{\mathcal{F}}$ 都是 NP-困难的。特别是：

- 当$\mathcal{F}$ 取为所有外平面图构成的图类时，我们的结果解决了关于确定外厚度这一长期悬而未决的问题。当$\mathcal{F}$ 取为所有平面图构成的图类时，我们的结果补充了 Mansfield 关于厚度的 NP 困难性结
- 果（1983年）；该结果仅适用于 $k = 2$ 的情形。

还值得注意的是，上述三个条件缺一不可。若$\mathcal{F}$ 是所有欧拉图构成的图类，则条件 (a) 不成立。若 $\mathcal{F}$ 是所有伪森林构成的图类，则条件 (b) 不成立。若 $\mathcal{F}$ 是所有森林构成的图类，则条件 (c) 不成立。对于这三个图类 $\mathcal{F}$中的每一个，问题 $P_{\mathcal{F}}$ 对每个固定整数 $k \geq 3$ 都可在多项式时间内求解，这表明三个条件中的任何一个都不能省略。

2012年 ACM 学科分类 计算理论 → 问题、归约与完备性

关键词和短语 外厚度、外平面图、边划分

资助 *Meng-Tsung Tsai*：本研究部分由国家科学及技术委员会根据合约 NSTC 114-2221-E-001-023 资助。

1 引言

Guy（1974年） [13] 将外厚度定义为图 G 的边划分中所需的最少部分数， G 且每个部分都诱导出一个外平面子图；也就是说，该子图是一个平面图，并且存在一种平面嵌入，使每个节点都位于外面。外厚度是厚度的一种类似概念，区别在于每个部分都必须是外平面，而不只是平面。尽管 Mansfield（1983年）证明，判定图的厚度是 NP-困难的， [21],判定外厚度的复杂性仍未有定论 [25, 24, 26, 3, 20, 27, 15, 2]。

外厚度的算法研究部分源于 Chartrand等人（1971年）提出的一个猜想。他们提出的主张之一是，每个平面图都可以划分边集，使其分成两个外平面图；等价地说，每个平面图的外厚度至多为 2。Elmallah 和 Charles（1988年）引用了这一猜想，并针对 4 节点连通平面图进行了研究，提出了一种算法，可以将其划分为两个外平面子图。尽管他们没有明确分析运行时间，但根据当时所需子程序的最先进水平 [17, 12], ，他们的算法可以在 $O(n^3)$ 时间内实现，其中 n 表示输入图中的节点数（本文通篇采用这一约定）。

随后，Heath（1991年）声称证明了 Chartrand等人提出的猜想，并给出一种运行时间为 $O(n^2 \log n)$ 的算法，可将任意平面图的边划分为至多两个外平面图 [14]。后来，Gonçalves（2005年）以最优的 $O(n)$ 时间构造 [11]确立了同一结论。值得注意的是，Gonçalves 指出，此前一些声称成立的证明后来被发现有误；后续研究则将 Chartrand等人猜想的解决归功于 Gonçalves [9, 29, 8, 4]。

与平面图研究取得的显著进展不同，关于确定一般图的外厚度，进展甚微。Mäkinen和Poranen（2004年）在 [25, 24]猜想，判定一般图的外厚度是否为NP-困难。此后，后续研究 [26, 3, 20, 27],一再强调这一问题仍未解决；Hlinený和Masaríkf于2023年 [15] 、Balko等人于2024年 [2]也再次指出了这一点。我们还注意到，Balko等人证明，在假设计算外厚度是NP-困难的前提下，计算无交叉数也是NP 困难性的 [2]。

本文确定了一般图外厚度判定问题的计算复杂性。自1974年外厚度这一概念提出以来，这个问题一直悬而未决。形式化地，我们考虑以下判定问题。

▶**问题 1** （外厚度）。**输入：** 一个 n节点的无向简单图 $G = （V， E）$以及一个整数 $k \geq 1$。**问题：** 是否 G 存在边划分 $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k$ 使得（V， E_i）对每个 $i \in [k]$均为外平面图?

我们用 外厚度(G, k) 简记输入图 G 和参数k 时的问

▶ **定理 2**。 对于每个固定的整数 $k \geq 3$，一般图的外厚度(G, k) G i是 *NP* 完全的。

此外，我们的困难性结果也适用于更一般的覆盖问题 $P_{\mathcal{F}}$，其定义如下。固定一个成员资格可判定的真图类 $\mathcal{F}$ 。给定一个无向简单图 $G = (V， E)$ 和一个整数 k，任务是用至多 k 个子集 E_1，……， E_k 覆盖边集 $E(G)$，使得每个子图 $(V(G)$ $E_i)$ 都属于 $\mathcal{F}$。请注意，如果 $\mathcal{F}$ 是

单调的[1]（特别是当 $\mathcal{F}$ 是所有外平面图构成的图类时），那么任何这样的覆盖都可以通过删除重叠部分转化为边划分；因此，在这种情况下，覆盖与划分是等价的。

我们将 外层厚度(G,k) 的 NP 困难性推广到 $P_{\mathcal{F}}$ 适用于每个真[2] $\mathcal{F}$，其中成员资格可判定，且满足下文所述的三个条件：

▶**定理 3**。 对于每个成员资格可判定且满足以下所有条件的真图类 F:

(a) $\mathcal{F}$ 对拓扑子式封闭[3],(b) $\mathcal{F}$ 对 1-和封闭[4], 且(c) $\mathcal{F}$ 包含一个长度为 3的环，则问题 $P_{\mathcal{F}}$ 对于每个固定整数 $k \geq 3$，都是 *NP*-困难的。

此外，若可通过算法 $M_{\mathcal{F}}$ 在多项式时间内判定 F 中的成员资格，则$P_{\mathcal{F}}$ ∈ 属于 NP。证书是 $E(G)$ 的一个边覆盖，由 k 个子集 E_i 组成，其中每个子集对应 $i \in [k]$; 我们可以通过对每个部分运行 $M_{\mathcal{F}}$，在多项式时间内验证 $(V(G)\ E_i)$ ∈ 属于 F。因此，该证书证明 G 的 F-厚度至多为 k。因此，如果能在多项式时间内判定 F 中的成员资格，定理 3 也可推出 NP 完全性。

作为定理3的推论，令$\mathcal{F}$ 为所有平面图组成的类，我们得到推论4，这补充了 Mansfield 关于厚度的 NP 困难性结果（1983年），该结果仅在 [21],这一情形下得出 $k = 2$。

▶ **推论4**。 对于每个固定的整数 $k \geq 3$，一般图的厚度(G, k) 是 *NP*-困难的。

值得指出的是，Mansfield 关于厚度的 NP 困难性证明是通过从 Lichtenstein（1982 年）提出的平面3-SAT [19] 归约得到的，技术性较强。相比之下，我们的困难性证明使用了更直接的来源：对于 $k = 3$，我们从 Holyer（1981年）提出的3-正则图的色指数问题 [16], 进行归约；对于每个固定的整数 $k \geq 3$，我们从 Leven 和 Galil（1983年）提出的 k-正则图的色指数问题 [18]进行归约。

如表 1所示，定理3 中提到的三个条件各自都是必要的。若 $\mathcal{F}$ 是所有欧拉图（包括非连通图）组成的图类，则条件 (a) 不成立。若 $\mathcal{F}$ 是所有伪森林组成的图类，则条件 (b) 不成立。若 $\mathcal{F}$ 是所有森林组成的图类，则条件 (c) 不成立。对于这三个图类 $\mathcal{F}$，问题 $P_{\mathcal{F}}$ 对于每个固定的整数 $k \geq 3$ （情形 P_{eulerian} 由 Alon 和 Tarsi [1],给出，而情形 P_{forests} 和 $P_{\text{pseudoforests}}$ 可由 Edmonds [10]推出），这表明这三个条件都不可省略。

1.1 论文结构

在第2节，我们介绍我们的符号。在第3节，我们给出一个最简证明，表明外厚度是NP-困难的，从而解决了长期以来关于其

[1] 若 $G \in$ F 且 H 是 G的子图，则 $H \in$F。[2] 若图类 F 不包含所有图，则称其为真图类。[3] 若对于每个 $G \in$ F 以及每个作为 G拓扑 minor 的图 H，都有 $H \in$F，则称图类 F 对拓扑子式封闭。这里，若 G 的某个细分是 G 的子图（等价地，若可通过反复平滑度为 2 的节点，从 G 的某个子图得到 H），则称 H 是 G 的拓扑 minor。[4] 若对于任意 G_1、$G_2 \in$ F，以及任意节点选择 $v_1 \in V(G_1)$ 和 $v_2 \in V(G_2)$，将不交并 $G_1 \uplus G_2$ 中的 v_1 和 v_2 识别为同一个节点后所得的图也属于 F，则称图类 F 对 1-和封闭。

$\mathcal{F}$	条件 (a)	条件 (b)	条件 (c)	$k=1$	$k=2$	每个 $k \geq 3$
森林	Y	Y	N	P	P [10]	P [10]
伪森林	Y	N	Y	P	P [10]	P [10]
欧拉图	N	Y	Y	P	NP-困难 [23]	P [1]
仙人掌图	Y	Y	Y	P		NP-困难
外平面图	Y	Y	Y	P [22]		NP-困难
平面图	Y	Y	Y	P [17]	NP-困难 [21]	NP-困难
图的 $tw(G) \leq t$	Y	Y	Y	P [5]		NP-困难

表 1 图类 $\mathcal{F}$。请注意，此处的欧拉图包括非连通图，并且 tw（G）表示 G的树宽。蓝色标出的结果已在定理 3中证明。

计算复杂性的开放性问题。然后，在第4节，我们证明我们的主要定理（定理3），该定理特别地确立了定理2 对每一个固定整数 $k > 3$ 成立，并加强了第3节中的最简证明。我们在第5节以评注作结。

2 预备知识

本文所讨论的所有图和子图都是有限、无向且简单的。对于图 G，我们分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示其节点集和边集。为方便起见，我们有时使用边子集 $E' \subseteq E(G)$ 表示由 E' 在 G 中诱导的子图。

固定一个图性质 $\mathcal{P}$。如果图 G 满足以下条件，则称其关于 P 是边极大的：$\mathcal{P}$ 若 G满足 $\mathcal{P}$，但对于每一对不相邻的节点 u，$v \in V$（G），将边 $\{u, v\}$ 添加到 G 后所得的图不满足图性质 $\mathcal{P}$。

对于每个整数 $m \geq 1$，我们使用符号 $[m]$ 表示整数集合$\{1, \ldots, m\}$。我们的问题的归约源问题定义如下。

▶ 定理 *5*（边染色 [16, 18]）。固定一个整数 $k \geq 3$。无向图 $G = (V, E)$ 的一个真 k-边着色是映射 $c: E \to \{1, 2, \ldots, k\}$，满足对于每一对共享端点的边 $e, f \in E$，都有 $c(e) \neq c(f)$。给定一个 k-正则无向简单图 G，判定 G 是否存在真 k-边着色是 *NP* 完全问题。

3 外厚度的 NP 困难性

给定一个关于 3-正则图上的边染色问题的输入实例 G，其定义见定理 5。我们在多项式时间内计算如下标号函数 L 和一个辅助图 H。然后，使用标号函数 L 将 G 与 H 合并，得到超图 G'，使得 G 存在 3-边着色，当且仅当 G' 可划分为 3 个外平面子图（引理 7）。这证明了定理 2 中关于 $k = 3$ 的 NP 困难性。此外，OuterThickness(G, 3) $\in$ NP：一个证书是将 $E(G)$ 划分为 3 个子集 E_i，其中 $i \in [3]$，并且我们可以通过对每个部分运行 Mitchell [22] 的线性时间外平面性测试，在多项式时间内验证 ($V(G)$ E_i) 对每个$i \in [3]$ 都是外平面的。因此，该证书证明 G 的外厚度至多为 3。

设 φ： $E(G) \to \mathcal{L}$ 是一个标记函数，其中 $\mathcal{L} = \{1、2、\ldots\ldots、|\mathcal{L}|\}$ 是一个大小为常数的（不一定是最小大小的）标号集，使得对于 G 中长度至多为 3 的每条路径，该路径上的边在 φ 下都获得两两不同的标记。φ 的存在性，以及

在 G的输入规模下运行时间为多项式的构造，由命题 11保证。

我们选取一个足够大的常数 C，使得每个有 C 个节点且外厚度为 3 的图都包含一个大小为 $\alpha \geq |\mathbb{L}|$ 个节点的独立集（不一定是最大独立集）。然后我们构造一个有 C 个节点的图 H，使其在外厚度为 3 的条件下边极大；也就是说，添加任何一条不属于 $E(H)$ 的边都会增加 H 的外厚度。由 C 的承诺可知，令w_1、w_2、…、w_α表示 H 中独立集里的 α 个节点。命题 12 保证了 H 的存在，并且保证存在一个运行时间关于 G 输入规模为多项式的构造。

我们通过取 G 和 H 的副本来初始化 G'，这些副本的节点集互不相交，然后将 G' 与它们的并集相识别。接着，对于 $\in E(G)$ 中的每条边 $e := \{u, v\}$，我们向 G' 添加边 $\{u,^{w_{\varphi(e)}}\}$ 和 $\{v,^{w_{\varphi(e)}}\}$，如图 1 所示。注意，G' 仍然是一个简单图：由于 G 中关联于同一节点的任意两条边在 φ 下都会获得不同的标记，因此不会产生平行边。

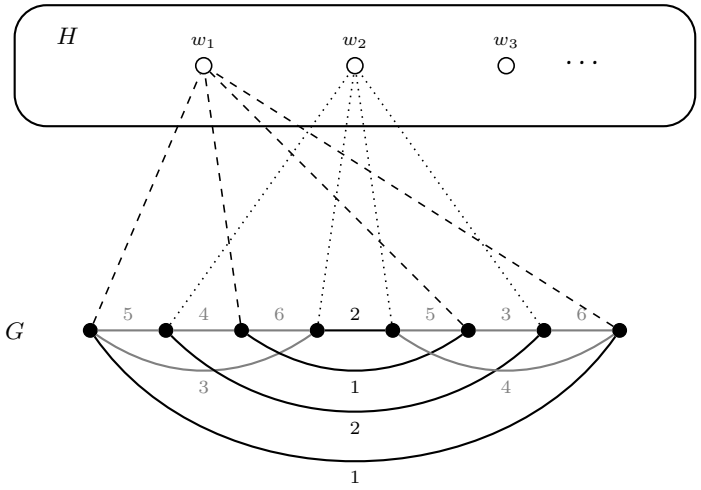


图 1 对 G' 构造的示意图。对于每条边 $e := \{u, v\} \in E(G)$，我们向 G' 添加边 $\{u, {}^{w_{\varphi(e)}}\}$ 和 $\{v, {}^{w_{\varphi(e)}}\}$。在此例中，我们有 $\mathcal{L} = \{1, 2, \ldots, 6\}$，并用 $\varphi(e) \in \{1,2\}$ 表示与 e 对应的新增边。

我们的主要引理需要以下观察。

▶**观察 6.** 固定一个整数 $z \geq 1$。设 Q 是一个外厚度为 z 的边极大图，且 $E_1, E_2, \ldots, E_z$ 是 $E(Q)$ 的一个边划分，划分为 z 个外平面子图。设 P 是一条端点为 x 和 x' 的路径，满足 $V(P) \cap V(Q) = \varnothing$。对于任意节点 $y, y' \in V(Q)$，定义

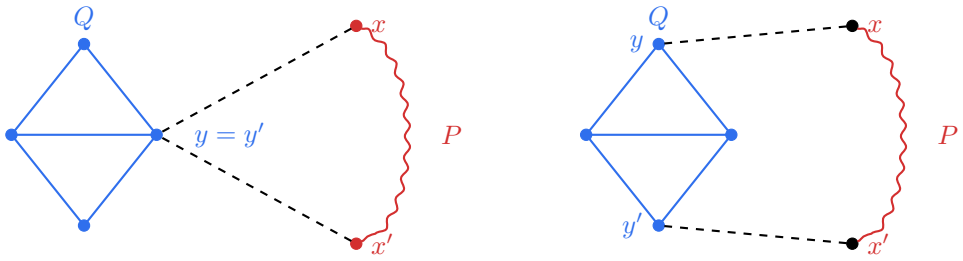
$$S_{y,y'} := E_1 \cup P \cup \big\{\{x, y\}, \{x', y'\}\big\}.$$

(a) 如果 $y = y'$，那么 $S_{y,\ y'}$ 是外平面图。**(b)** 如果 $y \neq y'$ 和 $\{y, y'\} \notin E(Q)$，那么 $S_{y,\ y'}$ 不是外平面图。

证明。 固定 Q 的一个外平面嵌入，其中所有节点，尤其是 y，都位于外面。在外面无交叉地绘制路径 P，然后将 P 的两个端节点分别连接到 y，在外面内绘制这两条边，使它们相交

仅在 Q 处的嵌入 y。这就得到了 S_y 的外平面嵌入y'，如图 2 所示。

若 $y \neq y'$ and $\{y, y'\} \notin E(Q)$，反设 $S_{y,y'}$ 是外平面图，则会产生矛盾。P 中的每个节点在 $S_{y,y'}$ 中的度数均为 2。在外平面图中平滑一个度为 2 的节点会保留外平面性：给定一个所有节点都位于外面的外平面嵌入，平滑这样的节点后得到的嵌入仍使所有剩余节点位于外面。因此，我们可以在 $S_{y,y'}$ 中平滑 P 的所有节点，同时保留 $S_{y,y'}$ 的外平面性，从而将 $S_{y,y'}$ 中的路径 P 与 $\{\{x, y\}, \{x', y'\}\}$ 的并替换为单边 $\{y, y'\}$。由此可知，$Q \cup \{\{y, y'\}\}$ 的外厚度为 z。由于 $\{y, y'\} \notin E(Q)$，这为 Q 添加了一条边，与 Q 是外厚度为 z 的边极大图这一假设矛盾。因此，$S_{y,y'}$ 不是外平面图。◀



(a) 情形 $y = y'$。　　(b) 情形 $y \neq y'$ 和 $\{y, y'\} \notin E(Q)$。

图2 S_y的示意图，$_{y'}$ 其中包含 $Q = K_4 - \{e\}$ 和 $z = 1$。

我们已准备好证明主要引理。

▶**引理 7。** *G 可进行 3-边着色，当且仅当 G' 的外厚度至多为3。*

证明。如果 G 可进行 3-边着色，那么 $E(G)$ 可划分为三个匹配M_1、M_2和 M_3。固定 $i \in [3]$ 和 $\ell \in$ L。边 $e := \{u, v\} \in M_i$ 与 $\varphi(e) = \ell$ 共同产生一个由 $T_{i,\ell}$ 组成的点不交三角形集合，每个三角形的节点为 $\{u, v, w_\ell\}$，这些三角形唯一共享的节点是公共节点 w_ℓ。设 H 的边划分为三个外平面子图 H_1、H_2和 H_3。根据观察6(a)，对于每个 $i \in [3]$，子图

$$H_i \cup \bigcup_{\ell \in \mathcal{L}} T_{i,\ell}$$

是外平面图。因此，G' 的外厚度至多为3。

否则，G 不允许进行3-边着色。假设 $E(G')$可以划分为三个外平面子图 E_i，则对 $i \in [3]$，以下断言成立。

▷ 断言8. 存在某个 $i \in [3]$，使得 G 中的某条长度为2的路径完全包含在某个外平面子图 E_i 中，其中 $i \in [3]$。

证明。现在，$E(G')$ 被划分为三个外平面子图 E_i，对应于 $i \in [3]$。将此划分限制到 $E(G) \subseteq E(G')$，所得到的部分 $E(G) \cap E_i$ 对于 $i \in [3]$ 不可能全都是匹配；否则，它们将构成 G 的一个 3-边着色。因此，对于某个 $i \in [3]$，子图 E_i 在 G 中包含一条长度为2的路径。◁

▷ 断言9。对于每个节点 $v \in V(G)$，令 $w_{v,\ j}$ 为 $j \in [3]$ 中 v 的邻接节点。则，对于 H，边 $\{v,\ w_{v,\ j}\}$ 必须被分配到两两不同的外平面子图E_i，对应于 $i \in [3]$。

证明。 节点 $w_{v,j}$ for $j \in [3]$ 两两不同，因为与 v 关联的 G 的三条边在构造 φ 中被赋予了不同的标记 $\mathcal{L}$。回想一下， $w_1, w_2, \ldots, w_\alpha$（因此 $w_{v,j}$ for $j \in [3]$）构成一个独立集。

假设对于某个 $i \in [3]$，子图 $(V(G)\ E_i)$ 至少包含$\{\{v,w_{v,j}\} : j \in [3]\}$中的两条边，不妨设它们是 $\{v, w_{v,1}\}$ 和 $\{v, w_{v,2}\}$。令

$$E' := (E(H) \cap E_i) \cup \{\{v, w_{v,j}\} : j \in [2]\}.$$

根据观察 6(b)，图 $(V(H) \cup \{v\}\ E')$ 不是外平面图：将该观察应用于 (Q, E_1, P, y, y') $_{\text{Observation 6}} = (H, E_i, (v)\ w_{v,1}, w_{v,2})_{\text{here}}$。另一方面， E' 是外平面图 E_i的一个子图，矛盾。

因此，三条边 $\{v、\ w_{v、\ j}\}$ 对于 $j \in [3]$ 必须分配到三个不同的外平面子图 E_i 中，针对 $i \in [3]$。◁

▷ 断言10. 对于每条边 $e := \{x、\ y\} \in E(G)$，三条边 $\{x、\ w_{\varphi(e)}\}$、$\{y、\ w_{\varphi(e)}\}$、$\{x、\ y\}$必须分配到同一个外平面子图 E_i 中，对某个 $i \in [3]$。

证明。 由于 E_1、E_2、E_3 构成 $E(G)$ 的一个划分，我们不妨假设 $\{x、\ y\} \in E_1$。令

$$W_x := \{w_{x,1},\ w_{x,2},\ w_{\varphi(e)}\} \qquad \text{and} \qquad W_y := \{w_{y,1},\ w_{y,2},\ w_{\varphi(e)}\}$$

表示 H 中与 x 和 y 在 G'中分别相邻的节点集。根据 φ的构造， W_x 和 W_y 均由三个不同的节点组成，且 $W_x \cap W_y = \{w_{\varphi(e)}\}$。根据断言 9，存在边 $\{x、\ w\}$ 满足 $w \in W_x$，以及边 $\{y、\ w'\}$ 满足 $w' \in W_y$，且这两条边都属于 E_1。

如果 $w \neq w'$，那么根据观察6(b)，由路径 $P := (w, x, y, w')$ 与 $E_1 \cap E(H)$ 的并所诱导的子图不是外平面图：将观察应用于 $(Q, E_1, P, y, y')_{\text{Observation 6}} = (H, E_1, (x, y)\ w, w')_{\text{here}}$。

因此 $w = w' = w_{\varphi(e)}$，或者等价地说，三条边 $\{x,\ w_{\varphi(e)}\}$、$\{y,\ w_{\varphi(e)}\}$ 和$\{x,\ y\}$ 都被分配给 E_1。◁

根据断言8，不失一般性，假设 E_1 包含一条长度为2的路径，记为 (a, b, c)，其中有 $a, b, c \in V(G)$ 和 $e_1 := \{a, b\}$ $e_2 := \{b, c\} \in E(G)$。根据断言10， E_1 也包含这四条边 $\{a,w_{\varphi(e_1)}\}$、$\{b, w_{\varphi(e_1)}\}$、$\{b, w_{\varphi(e_2)}\}$、$\{c, w_{\varphi(e_2)}\}$。然而，根据断言9，$\{b, w_{\varphi(e_1)}\}$ 和 $\{b,w_{\varphi(e_2)}\}$ 必须分配给不同的 E_i，这与矛盾相悖。

因此， $E(G')$ 无法划分为三个外平面子图 E_i， $i \in [3]$；等价地， G' 的外厚度大于 3。这就完成了证明。◀

3.1 延后命题的证明

▶ **命题 11.** 固定一个整数 $k \geq 3$。设 G 是一个 k-正则图。存在一个标记函数 $\varphi : E(G) \to L$，其中 $|L| \leq 2k(k-1)+1$，且可在多项式时间内计算，使得 G 中任意长度至多为 3 的路径上的边所获标记两两不同。

证明。 在一个 k-正则图 G中，固定一条边 $e = \{u,\ v\}$。任何其他边 $f \neq e$ 若能与 e 同时出现在一条长度至多为 3 的路径上，则要么与 u 相邻，要么与 v 相邻（至多有$2(k-1)$ 种选择），要么与 u 和 v 的四个邻点之一相邻（至多有 $2(k-1)^2$

种额外选择）。因此，对于每条边 e，能与 e 同时出现在某条长度至多为 3 的路径上的边 $f \neq e$ 数量至多为 $2k(k-1)$。所以，我们可以为每条边 e 贪心地分配一个来自 $\{1, 2, \ldots, 2k(k-1)+1\}$ 的标记，使得任何这样的边 f 都不会与 e 获得相同的标记；由于每一步至多有 $2k(k-1)$ 个标记被禁止，至少还剩下一个可用标记。上述贪心标记的运行时间与输入规模呈线性关系。◀

▶ **命题 12。** 对于每个整数 $|\mathcal{L}| \geq 1$，存在一个常数 C，使得每个 C 个节点的图 H（该图关于外厚度 3 是边极大的）都包含一个大小至少为 $\alpha \geq |\mathcal{L}|$ 的独立集。此外，这样的图 H 以及其中大小为 α 的独立集 H 都可以在常数时间内计算得到。

证明。 固定 $|\mathcal{L}| \geq 1$，并选取一个常数 C 使得

$$\binom{C}{2} > 3(2C-3). \tag{1}$$

每个 C 个节点的外平面图至多有 $2C-3$ 条边，因此任何外厚度至多为 3 的图至多有 $3(2C-3)$ 条边。选取 C 使得 $\binom{C}{2} > 3(2C-3)$，这意味着 K_C 的外厚度大于 3。令 H 为 K_C 的一个子图，在 K_C 的所有外厚度至多为 3 的子图中，其边数最多；这样的 H 存在，因为空图的外厚度为 0。根据极大性，从 $E(K_C) \setminus E(H)$ 中添加任意一条边到 H 都会得到一个外厚度大于 3 的图。此外，添加一条边至多会使外厚度增加 1。因此，H 是一个外厚度（恰好）为 3 的边极大图。

根据 Caro–Wei 界 [7, 28]，每个 C节点 m边图都有一个大小至少为 $\left\lceil \frac{C^2}{C+2m} \right\rceil$的独立集。由于 H 有 $m \leq 3(2C-3)$ 条边，依照我们对 C的选择，可得 H 有一个大小至少为

$$\left\lceil \frac{C^2}{C+6(2C-3)} \right\rceil > |\mathcal{L}| \text{ for some sufficiently large } C. \tag{2}$$

如果我们设 $C > 13|\mathcal{L}|$，那么方程（1）和（2）均成立。

最后，由于 C 是常数，我们可以通过穷举，在常数时间内计算出这样的 H 以及一个大小至少为 $|\mathcal{L}|$ 的独立集，所用方法为外平面性测试算法 [22]。◀

4 $\mathcal{F}$ 厚度的 NP 困难性

我们将第 3 节中关于外厚度的 NP 困难性证明推广到每个真图类 $\mathcal{F}$，其成员资格可判定且满足以下所有条件：
(a) $\mathcal{F}$ 对拓扑子式封闭，**(b)** $\mathcal{F}$ 对 1-和封闭，并且**(c)** $\mathcal{F}$ 包含一个长度为 3 的环。

根据条件 (a)，F 是单调的。因此，对于问题 $P_{\mathcal{F}}$，输入图边集的任何覆盖都可以通过删除重叠转化为边划分；因此，在此设定下，覆盖与划分是等价的。因此，在本节中，我们将 $P_{\mathcal{F}}$视为一个划分问题：固定一个真图类 F，其成员资格可由算法 $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}$判定。我们将无向简单图 G的 F-厚度定义为最小整数 k，记为 $\theta_{\mathcal{F}}(G)$，使得 $E(G)$ 可划分为至多 k个子集 $E_1, E_2, \ldots, E_k$，并且对所有 $i \in [k]$ 均有 $(V(G)\ E_i) \in \mathrm{F}$。因此，问题 $P_{\mathcal{F}}$询问：给定一个无向简单图 G 和一个整数 k，是否 $\theta_{\mathcal{F}}(G) \leq k$。

8 判定图的外层厚度是 NP-困难的

我们的 NP 困难性归约如下进行。固定一个整数 $k \geq 3$。给定定理 5 中定义的、关于 k-正则图的边染色的一个输入实例 G。我们在多项式时间内计算如下标号函数 L 以及一个辅助图 H。然后，我们利用标号函数 L 将 G 与 H 连接，得到一个超图 G'，使得 G允许一个k-边染色当且仅当 G' 满足 $\theta_{\mathcal{F}}(G') \leq k$（引理 16）。这证明了定理 3 中对每个固定整数 $k \geq 3$所声称的 NP 困难性。

- 设 $\varphi\colon E(G) \to \mathrm{L}$ 是一个标记函数，其中 $\mathrm{L} = \{1, 2, \ldots, |\mathrm{L}|\}$ 是一个大小为常数的标号集（不一定是最小大小），且对于 G 中长度至多为 3 的每条路径，该路径上的边在 φ 下获得两两不同的标记。命题 11 保证了此类函数 φ 的存在，并保证可以用关于 G 输入规模的多项式时间构造该函数。由此得到的标号集 L 满足$|\mathrm{L}| = 2k(k-1)+1 = O(1)$，如所需。
- 我们选取一个充分大的常数 C，使得每个 C节点图都具有$\mathcal{F}$-厚度k，并包含一个含有 $\alpha \geq |\mathcal{L}|$ 个节点的独立集（不一定是最大独立集）。然后我们构造一个 C节点图 H，它在$\mathcal{F}$-厚度 k下是边极大的。根据 C的保证，设 w_1、w_2、……、w_α 是 α 中某个独立集里的节点 H。引理13证明了 H的存在，并证明可以用关于 G输入规模的多项式时间构造。

▶ **引理 13.** 对于每个整数 $|\mathcal{L}| \geq 1$，都存在一个常数 C，使得每个具有 k $\mathcal{F}$-厚度、且边极大的 C节点图 H 都包含一个至少有$\alpha \geq |\mathcal{L}|$ 个节点的独立集。可以在常数时间内计算出这样的 H 以及 H 中一个有 α 个节点的独立集。

证明。 由于$\mathcal{F}$ 是一个真且对拓扑子式封闭的类，因此存在一个整数 t，使得 $K_t \notin \mathcal{F}$。根据 Bollobás 和 Thomason 的一个定理 [6]，，存在一个常数 D_t，使得每个图 F若其边数大于 $D_t|V(F)|$，就包含 K_t的一个细分，因此不属于 $\mathcal{F}$。因此，每个 $F \in \mathcal{F}$都满足 $|E(F)| \leq D_t|V(F)|$。

固定 $|\mathcal{L}| \geq 1$，并选取一个常数 C，使得

$$\binom{C}{2} > k(D_t C). \tag{3}$$

▷断言 14. 对于每个 $F \in \mathcal{F}$和 $e \notin E(F)$，$\theta_{\mathcal{F}}(F \cup \{e\}) \leq \theta_{\mathcal{F}}(F) + 1$。

证明。 由于 $C_3 \in \mathcal{F}$ (条件 (c)) 且 $\mathcal{F}$ 在拓扑 minor 下封闭（条件 (a)），我们有 $P_2 \in \mathcal{F}$。因此，我们有 $\theta_{\mathcal{F}}(F \cup \{e\}) \leq \theta_{\mathcal{F}}(F) + \theta_{\mathcal{F}}(\{e\}) \leq \theta_{\mathcal{F}}(F) + 1$。 ◁

由于 $\theta_{\mathcal{F}}(\emptyset) = 0$，该族

$$\mathcal{S} := \{S \subseteq K_C : \theta_{\mathcal{F}}(S) \leq k\}$$

非空。令 S^* 是 S 中边数最多的一个成员。因此，S^* 的 F-厚度至多为 k，且它是边极大的。理由如下：对于每条边 $e \in E(K_C) \setminus E(S^*)$，必有 $\theta_{\mathcal{F}}(S^* \cup \{e\}) > k$；否则，$S^* \cup \{e\} \in$ S，这与 S^* 的选取矛盾。此外，根据断言 14，我们有 $\theta_{\mathcal{F}}(S^*) = k$。

根据 Caro–Wei 界 [7, 28]，，每个 C-节点 m-边图都至少有一个大小为 $\left\lceil \frac{C^2}{C+2m} \right\rceil$ 的独立集。由于 H 对于我们选取的 $m \leq k(D_t C)$ 有 C 条边，因此我们得到 H至少有一个大小为以下数值的独立集

$$\left\lceil \frac{C^2}{C + 2k(D_t C))} \right\rceil > |\mathcal{L}| \text{ for some sufficiently large } C. \tag{4}$$

如果我们设 $C > (1 + 2kD_t)|\mathcal{L}|$，那么方程 (3) 和 (4) 均成立。

最后，由于 C 是常数，我们可以通过穷举在常数时间内计算出这样的 H 以及一个大小至少为 $|\mathcal{L}|$ 的独立集，并使用算法 $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ 判定其是否属于$\mathcal{F}$。◀

▶**观察 15**。固定一个整数 $z \geq 1$。设 Q 是一个 F-厚度为 z 的边极大图，并设 E_1、E_2、. . .、E_z 是 $E(Q)$ 的一个边划分，其划分出的 z 个子图均属于 F。设 P 是一条端点为 x 和 x' 的路径，使得 $V(P) \cap V(Q) = \varnothing$。对于任意节点 y、$y' \in V(Q)$，定义

$$S_{y,y'} \coloneqq E_1 \cup P \cup \big\{\{x, y\}, \{x', y'\}\big\}.$$

若 $y \neq y'$ 和 $\{y, y'\} \notin E(Q)$，则 $S_{y,y'}$ 不属于 F。

证明。若 $y \neq y'$ 和 $\{y, y'\} \notin E(Q)$，反设 $S_{y,\ y'}$ 属于 F。P 中的每个节点在 $S_{y,\ y'}$ 中的度均为 2。由于 F 对拓扑子式封闭（条件 (a)），平滑一个度为 2 的节点不会改变其属于 F 的成员资格。因此，我们可以在 S_y 中平滑 P 的所有节点，同时保持 $S_{y,\ y'} \in$ 属于 F，从而将 $S_{y,\ y'}$ 中路径 P 与 $\{\{x, y\}, \{x', y'\}\}$ 的并替换为单条边 $\{y, y'\}$。由此可得，$Q \cup \{\{y, y'\}\}$ 的 F-厚度为 z。由于 $\{y, y'\} \notin E(Q)$，这就向 Q 添加了一条边，与 Q 是 F-厚度为 z 的边极大图这一假设矛盾。因此，$S_{y,y'}$ 不属于 F。◀

我们通过取 G 和 H 的副本（其节点集互不相交）来初始化 G'，然后将 G' 与它们的并集识别。接着，对每条边 $e \coloneqq \{u,\ v\} \in E(G)$，我们将边 $\{u,\ w_{\varphi(e)}\}$和 $\{v,\ w_{\varphi(e)}\}$ 加入 G'。注意，G' 仍是简单图：由于 G 中与同一节点关联的任意两条边在 φ下获得不同的标记，因此不会产生平行边。

现在可以证明这个关键引理了。

▶ **引理 16.** G 存在 k-边染色，当且仅当 G' 具有 $\theta_{\mathcal{F}}(G') \leq k$。

证明。若 G 存在 k-边染色，则 $E(G)$ 可划分为 $i \in [k]$对应的 k 个匹配 M_i。固定 $i^* \in [k]$ 和 $\ell^* \in$ L。边 $e \coloneqq \{u, v\} \in M_{i^*}$ 与 $\varphi(e) = \ell^*$ 共同构成一组 T_{i^*,ℓ^*} 点不交三角形，每个三角形的节点为 $\{u, v, w_{\ell^*}\}$，这些三角形唯一共有的节点是公共节点 w_{ℓ^*}。由于 H 是具有 F-厚度 k的边极大图，H 可以划分为 k 个属于 F 的子图，记为 H_i，其中 $i \in [k]$。由于 F 对 1-和封闭（条件 (b)），且 F 包含 C_3 （条件 (c)），对于每个$i \in [k]$，子图

$$H_i \cup \bigcup_{\ell \in \mathcal{L}} T_{i,\ell}$$

包含于$\mathcal{F}$中。为说明原因，对于每个 $\ell \in \mathcal{L}$，我们通过进行一次 1-和（将节点 w_ℓ识别为同一节点），把$T_{i,\ell}$ 中的每个三角形附加到 H_i 上。对$T_{i,\ell}$中的所有三角形重复这一 1-和操作，然后对所有满足 $\ell \in \mathcal{L}$的$T_{i,\ell}$ 重复此操作，恰好得到$H_i \cup \bigcup_{\ell \in \mathcal{L}} T_{i,\ell}$，因此它属于$\mathcal{F}$。此论证对每个 $i \in [k]$均成立，因此 G' 的$\mathcal{F}$-厚度至多为 k。

否则，G 不允许进行 k-边染色。假设 E（G'）可以划分为$\mathcal{F}$中的 k个子图，记为 E_i（$i \in [k]$），则以下结论成立。

▷ 断言17。存在某个 $i \in [k]$，其中有一条长度为2的路径完全位于某个子图 E_i （在$\mathcal{F}$中）内，适用于某个 $i \in [k]$。

10 确定图的外层厚度是 NP-困难的

证明。现在， $E(G')$ 被划分为 k 个子图 E_i ，它们位于 F 中，适用于 $i \in [k]$。将此划分限制到 $E(G) \subseteq E(G')$ 后，对于 $i \in [k]$ ，由此得到的部分 $E(G) \cap E_i$ 不可能全都是匹配；否则，它们将给出 G 的 k-边染色。因此，对于某个 $i \in [k]$，子图E_i 在 G 中包含一条长度为2的路径。◁

▷ 断言18. 对于每个节点 $v \in V(G)$，令 $w_{v,j}$ 为 $j \in [k]$ 在 H中的邻接节点，其中 v 。那么，对于 $j \in [k]$ ，边 $\{v,w_{v,j}\}$ 必须被分配给两两不同的子图 E_i （在$\mathcal{F}$中），其中 $i \in [k]$。

证明。 对于 $j \in [k]$ ，节点 $w_{v,j}$ 两两不同，因为 G 中与 v关联的 k 边依据 φ的构造，在$\mathcal{L}$ 中被赋予了不同的标记。回想一下， $w_1, w_2, \ldots, w_\alpha$ （因此对于 $j \in [k]$， $w_{v,j}$ ）构成一个独立集。

假设对于某个 $i \in [k]$，子图 E_i 包含来自$\{\{v, w_{v,j}\}$ 的至少两条边： $j \in [k]\}$。不失一般性，设它们是 $\{v,w_{v,1}\}$ 和 $\{v, w_{v,2}\}$。令

$$E' \coloneqq (E(H) \cap E_i) \cup \{\{v, w_{v,j}\} : j \in [2]\}.$$

根据观察 15，图 $(V(H) \cup \{v\}\ E')$ 不属于 $\mathcal{F}$：事实上，应用该观察并令

$$(Q, E_1, P, y, y')_{\text{Observation 15}} = (H, E_i, (v), w_{v,1}, w_{v,2})_{\text{here}}.$$

另一方面， E' 是 E_i的子图，而 E_i属于$\mathcal{F}$。这与条件 (a) 矛盾，因为$\mathcal{F}$ 对拓扑子式封闭（因此也对取子图封闭）。

因此， k 的边$\{v,\ w_{v,\ j}\}$ 必须为 $j \in [k]$ 分配到 k 个不同的子图中E_i ， 以供 $i \in [k]$使用。◁

▷ 断言19。对于每条边 $e \coloneqq \{x,\ y\} \in E(G)$，这三条边$\{x,\ w_{\varphi(e)}\}$、$\{y,\ w_{\varphi(e)}\}$、$\{x,\ y\}$ 必须分配到同一个子图 E_i （属于$\mathcal{F}$），其中 $i \in [k]$满足某条件。

证明。 由于 E_i 对于 $i \in [k]$ 构成 $E(G)$的一个划分，因此不失一般性，我们可以假设 $\{x,\ y\} \in E_1$。令

$$W_x \coloneqq \{w_{x,1}, \ldots, w_{x,k-1}, w_{\varphi(e)}\} \text{ and } W_y \coloneqq \{w_{y,1}, \ldots, w_{y,k-1}, w_{\varphi(e)}\}$$

分别表示 G' 中与 x 和 y 相邻的 H 中的节点集。根据 φ 的构造， W_x 和 W_y 各由 k 个不同的节点组成，且 $W_x \cap W_y = \{w_{\varphi(e)}\}$。根据断言18，存在边 $\{x, w\}$，其中 $w \in W_x$ ，以及边 $\{y, w'\}$，其中 $w' \in W_y$ ，且它们都属于 E_1。

如果 $w \neq w'$，那么根据观察15 由路径$P\colon = (w,\ x,\ y,\ w')$ 和 $E_1 \cap E(H)$ 的并所诱导的子图不属于$\mathcal{F}$：对

$$(Q, E_1, P, y, y')_{\text{Observation 15}} = (H, E_1, (x, y), w, w')_{\text{here}}.$$

因此 $w = w' = w_{\varphi(e)}$，或者等价地说，这三条边 $\{x,\ w_{\varphi(e)}\}$、$\{y,\ w_{\varphi(e)}\}$ 和$\{x,\ y\}$ 都被分配给 E_1。◁

根据断言17，我们不失一般性地假设 E_1 包含长度为2的路径，记为 (a, b, c)，其中 $a, b, c \in V(G)$，且 $e_1 \coloneqq \{a, b\}$ $e_2 \coloneqq \{b, c\} \in E(G)$。根据断言19， E_1 也包含四条边 $\{a,w_{\varphi(e_1)}\}$、$\{b, w_{\varphi(e_1)}\}$、$\{b, w_{\varphi(e_2)}\}$、$\{c, w_{\varphi(e_2)}\}$。然而，根据断言18，$\{b, w_{\varphi(e_1)}\}$ 和 $\{b,w_{\varphi(e_2)}\}$ 必须被分配给不同的 E_i，这就产生了矛盾。

因此， $E(G')$无法划分为 k 个 E_i 子图，使其属于$\mathcal{F}$ ，也就是说， G' 的$\mathcal{F}$厚度大于 k。至此，证明完成。◀

因此，定理 3得证。

5 总结

最后，我们讨论 $k = 2$ 这一情形。众所周知，根据 Gonçalves（2005年）的结果，所有平面图的外厚度至多为 2 [11], ，因此，对于平面图，外厚度$(G,\ 2)$ 只包含“是”实例。然而，对于一般图，外厚度$(G,\ 2)$ 的复杂性，据我们所知，仍是一个引人关注的开放问题。更广泛地说，在定理 3中的困难性框架下，我们尚未发现任何满足条件 (a)–(c) 的真图类 $\mathcal{F}$，使得相应问题 $P_{\mathcal{F}}$ 在$k = 2$ 上存在多项式时间算法。

还值得注意的是，定理 3中的条件 (a)–(c) 都是必要的，也就是说，放宽其中任何一个条件，都存在图类 $\mathcal{F}$ 使得 $P_{\mathcal{F}}$ 可根据 Edmonds [10]在多项式时间内求解。例如，若$\mathcal{F}$ 是森林类，则条件 (c) 不成立，而该问题属于 P。类似地，若 $\mathcal{F}$ 是伪森林类，则条件 (b) 不成立，且 $P_{\mathcal{F}}$也可在多项式时间内求解。最后，若 $\mathcal{F}$ 是树化度有界的图类，则条件 (a) 不成立[5], ，相应的划分问题也属于 P。

参考文献

1 Noga Alon 和 Michael Tarsi。用简单回路覆盖多重图。《SIAM代数与离散方法杂志》，6(3):345–350，1985年。 2 Martin Balko、Petr Hlinený、Tomás Masarík、Joachim Orthaber、Birgit Vogtenhuber 和 Mirko H. Wagner。论图的无交叉数。载于 Stefan Felsner 和 Karsten Klein 编，《第32届国际图绘制与网络可视化研讨会（GD）》，LIPIcs第320卷，第18:1–18:13页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2024年。 3 Dhruv Batra、A. C. Gallagher、Devi Parikh 和 Tsuhan Chen。超越树：通过外平面分解进行MRF推断。载于IEEE计算机学会计算机视觉与模式识别会议，第2496–2503页，2010年。 4 Michael A. Bekos、Emilio Di Giacomo、Walter Didimo、Giuseppe Liotta、Fabrizio Montecchiani 和 Chrysanthi N. Raftopoulou。最优2-平面图和3-平面图的边划分。《离散数学》，342(4):1038–1047，2019年。 doi:10.1016/j.disc.2018.12.002。 5 Hans L. Bodlaender。寻找小树宽树分解的线性时间算法。《SIAM计算杂志》，25(6):1305–1317，1996年。 6 Béla Bollobás 和 Andrew Thomason。证明关于拓扑完全子图的 Mader、Erdös 和 Hajnal 猜想。《欧洲组合学杂志》，19(8):883–887，1998年。URL： https://doi.org/10.1006/eujc.1997.0188, doi:10.1006/EUJC.1997.0188。 7 Yair Caro。关于独立数的新结果。技术报告，特拉维夫大学，1979年。 8 Emilio Di Giacomo、Walter Didimo、William S. Evans、Giuseppe Liotta、Henk Meijer、Fabrizio Montecchiani 和 Stephen K. Wismath。关于1-平面图边划分的新结果。《理论计算机科学》，713:78–84，2018年。 9 Vida Dujmović 和 David R. Wood。图树宽与几何厚度参数。《离散与计算几何》，37(4):641–670，2007年。 doi:10.1007/s00454-007-1318-7。 10 Jack Edmonds。将拟阵划分为独立子集的最小划分。《美国国家标准局研究杂志》，B辑：数学与数理物理，69B(1–2):67–72，1965年。

[5] 例如， K_5 的 1-细分的树化度至多为 2，而其拓扑 minor K_5 的树化度为 3。

12 确定图的外层厚度是 NP-困难的

11 Daniel Gonçalves。将平面图的边划分为两个外平面图。载于 Harold N. Gabow 和 Ronald Fagin 编，《第37届ACM年度计算理论研讨会（STOC）论文集》，第504–512页。ACM，2005年。 12 D. Gouyou-Beauchamps。4- 连通平面图的哈密顿回路问题可在多项式时间内求解。《 SIAM 计算杂志》，11(3):529–539，1982年。 13 R. K. Guy。图的外厚度与外粗度，第57–60页。伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社，1974年。 14 Lenwood S. Heath。用两个外平面子图对平面图进行边着色。载于第二届ACM-SIAM离散算法年度研讨会论文集，SODA '91，第195–202页，美国，1991年。工业与应用数学学会。 15 Petr Hlinený 和 Tomás Masarík。使无交叉图形集合最小化。载于 Michael A. Bekos 和 Markus Chimani 编，《第31届国际图绘制与网络可视化研讨会（GD）》，《计算机科学讲义》第14465卷，第110–123页。施普林格，2023年。 16 Ian Holyer。边着色的NP完全性。工业与应用数学学会，10:718–720，1981年。 17 John Hopcroft 和 Robert Tarjan。高效的平面性测试。《ACM杂志》，21(4):549–568，1974年10月。 18 Daniel Leven 和 Zvi Galil。求正则图色指数的NP完全性。《算法杂志》，4(1):35–44，1983年。 19 David Lichtenstein。平面公式及其用途。《SIAM计算杂志》，11(2):329–343，1982年。 20 Erkki Mäkinen 和 Timo Poranen。关于图的厚度、外厚度和树化度的注释书目。《密苏里数学科学杂志》，24(1):76–87，2012年。 21 Anthony Mansfield。判定图的厚度是NP-困难的。《剑桥哲学学会数学汇刊》，93(1):9–23，1983年。 22 Sandra L. Mitchell。识别外平面图和极大外平面图的线性算法。《信息处理快报》，9(5):229–232，1979年。 23 Mirko Petruševski 和 Riste Škrekovski。图由奇偶正则子图覆盖的可覆盖性。《数学》，9(2):182，2021年。 24 T. Poranen 和 E. Mäkinen。关于图的厚度和外厚度的评述。《计算机与应用数学》，50(1):249–254，2005年。 25 Timo Poranen。图的若干拓扑不变量的近似算法。Acta Electronica Universitatis Tamperensis第309号。2004年。 26 Timo Poranen。最大平面子图问题的两种新近似算法。《控制论学报》，18(3):503–527，2008年1月。 27 Huadong Su 和 Ling Zhu。有限群的子群交图的厚度。《AIMS数学》，6(3):2590–2606，2021年。 28 Victor K. Wei。简单图稳定数的下界。技术备忘录81-11217-9，贝尔实验室，1981年。 29 Baogang Xu 和 Xiaoya Zha。嵌入图的厚度和外厚度。《离散数学》，341(6):1688–1695，2018年。 doi:10.1016/j.disc.2018.02.024。