arXiv:2602.07619v1 [math.RA] 7 Feb 2026

克罗内克差

KEEGAN DOIG ANDERSON、YORICK HARDY 和 BERTIN ZINSOU

Abstract. 在实数域上，克罗内克和是唯一一种能够通过求指数映射得到克罗内克积的矩阵运算。克罗内克商从代数角度描述了如何将矩阵分解为克罗内克积。本文探讨了一类运算族——克罗内克差，它是克罗内克和的一种“逆运算”。本文还探讨了克罗内克差与克罗内克商之间的对应关系。此外，我们证明，某一类克罗内克差可以通过具有特定性质的矩阵族来刻画，而这些矩阵族本身也可表示为克罗内克积。这种方法为张量分解提供了另一种“非线性”视角。

1. Introduction

令 $\mathbb{F}_m$ 表示域 $\mathbb{F}$ 上特征为 $\mathsf{char}(\mathbb{F})$ 的 $m \times m$ 矩阵构成的向量空间，其中 $m \in \mathbb{N}$。我们用 $\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n = \mathbb{F}_{mn}$ 表示 $\mathbb{F}_m$ 与 $\mathbb{F}_n$ 的张量积。矩阵 E_{ij} 表示 $\mathbb{F}_m$ 中这样一个矩阵：第 i 行第 j 列的元素为 1，其余元素均为 0。通常，矩阵 E_{ij} 的阶数可由上下文明确。矩阵 $A \in \mathbb{F}_m$ 的迹 $\mathsf{tr}(A)$ 是 A 主对角线上各元素之和。

1.1. 克罗内克积与克罗内克商。 设 $A \in \mathbb{F}_m$ 和 $B \in \mathbb{F}_s$。克罗内克积 [3, 6, 12] $A \otimes B \in \mathbb{F}_{ms}$ 是一个在 F 上的 $ms \times ms$ 矩阵，其元素为（此处：$=$ 表示定义）

$$(A \otimes B)_{(i-1)s+p,(j-1)s+q} := (A)_{i,j}(B)_{p,q}, \tag{1}$$

其中 $i,\ j \in \{1, \ldots, m\}$ 和 $p,\ q \in \{1, \ldots, s\}$。换言之，我们可以写成分块矩阵形式

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} (A)_{1,1}B & (A)_{1,2}B & \ldots & (A)_{1,n}B \\ (A)_{2,1}B & (A)_{2,2}B & \ldots & (A)_{2,n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A)_{m,1}B & (A)_{m,2}B & \ldots & (A)_{m,n}B \end{bmatrix}.$$

注意，克罗内克积可以看作一族作用于方阵向量空间上的运算（由所涉及矩阵的阶数索引），也可以看作作用于所有方阵构成的分次向量空间上的运算。换言之，克罗内克积是运算族 $\otimes$：$\mathbb{F}_m \times \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_{mn}$，由$m,\ n \in \mathbb{N}$索引。

正如克罗内克积是定义在各种矩阵向量空间（或所有方阵构成的分次向量空间）上的一族运算，克罗内克商也可以看作定义在各种矩阵向量空间上的一族运算（或定义在所有

方阵构成的分次向量空间上的部分定义运算）。换言之，我们考虑由 $\oslash$：$\mathbb{F}_{mn} \times \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_m$ 确定的一族运算，其指标为 $m,\ n \in \mathbb{N}$，并满足以下定义。

定义 1（克罗内克商 [4, 7]）。（右）克罗内克商是一种满足以下条件的运算 $\oslash$

$$(A \otimes B) \oslash B = A$$

对于所有矩阵 $A \in \mathbb{F}_m$ 和 $B \in \mathbb{F}_n$（B 非零）以及 $m,\ n \in \mathbb{N}$。

一般而言，$(M \oslash A) \otimes A \neq M$ 对于 $mn \times mn$ 矩阵 M 和 $n \times n$ 非零矩阵 A。关于克罗内克商的详细研究见 [4]。本文中，我们只讨论右克罗内克商与差；显而易见，左克罗内克商与差也有类似结果。一致克罗内克商尤其值得关注，因为这一系列运算通过代数方程彼此关联。更确切地说，整个系列都可以通过一种生成运算以代数上显而易见的方式生成：

定义 2. 如果克罗内克商 $\oslash$满足

$$(A \otimes C) \oslash B = A \otimes (C \oslash B)$$

对所有矩阵 $A \in \mathbb{F}_m$、$B \in \mathbb{F}_n$、$C \in \mathbb{F}_p \otimes \mathbb{F}_n$ 和 $m,\ n,\ p \in \mathbb{N}$，以及

$$(A + B) \oslash C = (A \oslash C) + (B \oslash C), \qquad (kA) \oslash C = k(A \oslash C)$$

对所有矩阵 A、B 和 C以及标量 $k \in \mathbb{F}$，只要相关运算有定义。

注 1. 只需在定义 2 中令 $p = 1$，即可得到一致克罗内克商的一个等价定义：如果克罗内克商 $\oslash$ 满足（$A \otimes C$）$\oslash B = A \otimes$（$C \oslash B$），对所有矩阵 $A \in \mathbb{F}_m$、$B,\ C \in \mathbb{F}_n$ 和$m,\ n \in \mathbb{N}$，以及（$A + B$）$\oslash C =$（$A \oslash C$）$+$（$B \oslash C$），（kA）$\oslash C = k$（$A \oslash C$），对所有矩阵 A、B 和 C以及标量 $k \in \mathbb{F}$，只要相关运算有定义。

在 [4], 中给出了实数和复数域上一致克罗内克商的示例。下面的引理证明了任意域 $\mathbb{F}$ 上都存在一致克罗内克商。

引理 1. 设 $\mathbb{F}$ 为一个域。那么在$\mathbb{F}$上存在一致克罗内克商。

证明。设 $B, C \in \mathbb{F}_m$ 满足 $C \neq 0$。那么存在一个非零元素 $(C)_{i,j} \neq 0$，属于 C。现在令 $f\colon \mathbb{F}_m \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$由 $f(C) = (i, j)$ 和 $f(0_m) = (1, 1)$ 定义，即f 选取 C的一个非零元素，除非 C 是零矩阵。将 $-\!\!-\oslash C$ 定义为以下映射的线性扩张：

$$(A \otimes B) \oslash C := A\frac{(B)_{f(C)}}{(C)_{f(C)}}$$

对所有 $A \in \mathbb{F}_s$, $s \in \mathbb{N}$ 均成立。于是根据构造，$\oslash$ 是一致克罗内克商。□

1.2. 克罗内克和与克罗内克差。 矩阵 $m \times m$ A 与矩阵 $n \times n$ B 的克罗内克和 $A \oplus B$ 定义为 [6, 第 268] 页

$$A \oplus B = A \otimes I_n + I_m \otimes B.$$

在实数和复数上，我们有

$$\exp(A \oplus B) = \exp(A) \otimes \exp(B).$$

克罗内克和唯一满足上述方程。克罗内克和也出现在形如以下形式的矩阵方程的研究中

$$BX + XA^T = Y$$

其中 X 是该方程的对象。对方程两边取向量化（vec），并利用 $\mathrm{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\,\mathrm{vec}(B)$ 这一事实，得到[6,第 268] 页。

$$(A \oplus B)\,\mathrm{vec}(X) = \mathrm{vec}(Y).$$

本文定义并研究克罗内克差及其与克罗内克商 [4]的联系。与克罗内克商的定义类似，我们考虑族 $\ominus$： $\mathbb{F}_{mn} \times \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_m$，其由 $m,\ n \in \mathbb{N}$ 索引，并满足如下定义：

定义 3. 克罗内克差是一种运算 $\ominus$，满足

$$(A \oplus B) \ominus B = A$$

对所有矩阵 $A \in \mathbb{F}_m$ 和 $B \in \mathbb{F}_n,\ \ m,\ n \in \mathbb{N}$。

每个克罗内克商都以下述方式诱导出一个克罗内克差。

定义 4. 设 $\oslash$ 是一个克罗内克商。由 $\oslash$ 诱导的克罗内克差 $\ominus$ 由下式给出

$$M \ominus B := (M - I_m \otimes B) \oslash I_n$$

对于所有的 $M \in \mathbb{F}_{mn}$、 $B \in \mathbb{F}_n$ 和 $m,\ n \in \mathbb{N}$。

注 2。 容易验证，该表达式满足克罗内克差的条件，即对于每个 $A \in \mathbb{F}_m$、 $B \in \mathbb{F}_n$ 和 $m,\ n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(A \oplus B) \ominus B &= (A \otimes I_n + I_m \otimes B) \ominus B \\ &= (A \otimes I_n + I_m \otimes B - I_m \otimes B) \oslash I_n \\ &= (A \otimes I_n) \oslash I_n \\ &= A.\end{aligned}$$

注 3（对偶性 1）。 定义 4 有一个弱对偶，具体如下：设 $\oslash$ 是一个满足以下条件的克罗内克商

$$M \oslash B = (M(0_m \oplus B)^{-1}) \ominus 0_n$$

对于所有的 $M \in \mathbb{F}_{mn}$、可逆的 $B \in \mathbb{F}_n$ 和 $m,\ n \in \mathbb{N}$，其中 $\ominus$ 是一个克罗内克差。事实上，对于可逆的 B，$(0_m \oplus B)^{-1} = (I_m \otimes B)^{-1} = I_m \otimes B^{-1}$ 并且

$$\begin{aligned}(A \otimes B) \oslash B &= ((A \otimes I_n)(I_m \otimes B)) \oslash B \\ &= ((A \otimes I_n)(I_m \otimes B)(I_m \otimes B)^{-1}) \ominus 0_n \\ &= (A \oplus 0_n) \ominus 0_n \\ &= A.\end{aligned}$$

克罗内克商中的均匀性概念在克罗内克差中也有对应概念。

定义5。 克罗内克差 $\ominus$是一致克罗内克差，当且仅当

$$(A \oplus C) \ominus B = A \oplus (C \ominus B)$$

对于所有矩阵 $A \in \mathbb{F}_m$、 $B \in \mathbb{F}_n$、 $C \in \mathbb{F}_p \otimes \mathbb{F}_n$ 和 $m, n, p \in \mathbb{N}$，以及

$$(A + B) \ominus (C + D) = (A \ominus C) + (B \ominus D), \qquad (kA) \ominus (kC) = k(A \ominus C)$$

对所有矩阵 A、 B、 C 和 D，以及标量 $k \in \mathbb{F}$ ，只要这些运算有定义，均成立。

再一次，我们立即得到一致克罗内克商与一致克罗内克差之间的联系。

命题 1. 设 $\oslash$是一致克罗内克商，则其诱导的克罗内克差 $\ominus$ 是一致的。

证明. 根据定义 4 中的定义，

$$M \ominus B := (M - I_m \otimes B) \oslash I_n$$

对所有 $M \in \mathbb{F}_{mn}$、 $B \in \mathbb{F}_n$ 和 m， $n \in \mathbb{N}$，其中 $\oslash$ 是一致克罗内克商。注 2 已证明 $\ominus$是克罗内克差；接下来需要证明这个克罗内克差是一致的。对于所有 $A \in \mathbb{F}_m$、 $B \in \mathbb{F}_n$和$C \in \mathbb{F}_p \otimes \mathbb{F}_n$，我们有，

$$\begin{aligned}
(A \oplus C) \ominus B &= (A \otimes I_p \otimes I_n + I_m \otimes C - I_m \otimes I_p \otimes B) \oslash I_n \\
&= (A \otimes I_p \otimes I_n) \oslash I_n + (I_m \otimes C) \oslash I_n - (I_m \otimes I_p \otimes B) \oslash I_n \\
&= A \otimes I_p + I_m \otimes (C \oslash I_n) - I_m \otimes I_p \otimes (B \oslash I_n) \\
&= A \otimes I_p + I_m \otimes [(C \oslash I_n) - I_p \otimes (B \oslash I_n)] \\
&= A \otimes I_p + I_m \otimes [(C - I_p \otimes B) \oslash I_n] \\
&= A \otimes I_p + I_m \otimes (C \ominus B) \\
&= A \oplus (C \ominus B).
\end{aligned}$$

最后，对于所有 A， $B \in \mathbb{F}_{mn}$ 和 C， $D \in \mathbb{F}_n$，

$$\begin{aligned}
(A + B) \ominus (C + D) &= (A + B - I_m \otimes C - I_m \otimes D) \oslash I_n \\
&= (A - I_m \otimes C + B - I_m \otimes D) \oslash I_n \\
&= (A - I_m \otimes C) \oslash I_n + (B - I_m \otimes D) \oslash I_n \\
&= A \ominus C + B \ominus D
\end{aligned}$$

对于任意标量 $k \in \mathbb{F}$,

$$\begin{aligned}
(kA) \ominus (kC) &= (kA - I_m \otimes (kC)) \oslash I_n \\
&= [k(A - I_m \otimes C)] \oslash I_n \\
&= k[(A - I_m \otimes C) \oslash I_n] \\
&= k(A \ominus C).
\end{aligned}$$

□

在进一步研究克罗内克差之前，我们还需要一些补充定义和技术性结果。这些定义和技术细节将在附录 A 和附录 B 中介绍。

2. Properties of Kronecker sums and Kronecker differences

克罗内克和满足以下恒等式。参见例如 [11, 12] 及其推论。

$$(A \oplus B)^T = A^T \oplus B^T \tag{S1}$$

$$\operatorname{tr}(A \oplus B) = n \operatorname{tr} A + m \operatorname{tr} B \tag{S2}$$

$$(kA) \oplus (kB) = k(A \oplus B) \tag{S3}$$

$$(A + B) \oplus (C + D) = (A \oplus C) + (B \oplus D) \tag{S4}$$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) \tag{S5}$$

$$[A \oplus B, C \oplus D] = [A, C] \oplus [B, D] \tag{S6}$$

$$\exp(A \oplus B) = \exp(A) \otimes \exp(B) \tag{S7}$$

设 $\sigma(A,\ B) := A \oplus B$。则 (S3) 和 (S4) 变为

$$\sigma(k(A, B)) = k\sigma(A, B), \qquad \sigma((A, C) + (B, D)) = \sigma(A, C) + \sigma(B, D).$$

换言之，当且仅当 (S3) 和 (S4) 成立时，σ 是线性的。

我们将研究克罗内克差对应的方程。一般而言，这些方程并不成立，但如果 $\ominus$ 的左侧自变量是适当的克罗内克差，则每个方程都成立。例如，当 $A = C \oplus B$ 时，下面的 (D1) 成立，即

$$((C \oplus B) \ominus B)^T = C^T = (C^T \oplus B^T) \ominus B^T = (C \oplus B)^T \ominus B^T.$$

$$(A \ominus B)^T = A^T \ominus B^T \tag{D1}$$

$$\operatorname{tr}(A \ominus B) = \frac{1}{n}(\operatorname{tr} A - m \operatorname{tr} B) \tag{D2}$$

$$(kA) \ominus (kB) = k(A \ominus B) \tag{D3}$$

$$(A + B) \ominus (C + D) = (A \ominus C) + (B \ominus D) \tag{D4}$$

$$(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (C \oplus B) \tag{D5}$$

$$[A \ominus B, C \ominus D] = [A, C] \ominus [B, D] \tag{D6}$$

$$\exp(A \ominus B) = \exp(A) \oslash \exp(B) \tag{D7}$$

设 $\delta(A,\ B) := A \ominus B$。因此，$\delta\colon \mathbb{F}_{mn} \times \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_m$ 满足

$$\delta(A \oplus B, B) = A.$$

方程 (D3) 和 (D4) 变为

$$\delta(k(A, B)) = k\delta(A, B), \qquad \delta((A, C) + (B, D)) = \delta(A, C) + \delta(B, D). \tag{2}$$

换言之，若 $\ominus$ 满足 (D3) 和 (D4)，则 δ 是线性的。在第 3 节中，我们将讨论线性 δ 的典范形式及其对 (D1)、(D2) 和 (D5) 的影响。

命题 2. 设 $\oslash$ 为克罗内克商，设 $\ominus$为诱导的克罗内克差

$$X \ominus B := (X - I_m \otimes B) \oslash I_n$$

对所有 $X \in \mathbb{F}_{mn}$ 和 $B \in \mathbb{F}_n$。

(*a*) 若$(A \oslash B)^T = A^T \oslash B^T$则$(A \ominus B)^T = A^T \ominus B^T$。 (*b*) 若 $\operatorname{tr}(A \oslash B) = \operatorname{tr}(A)\ \underline{\operatorname{tr}(B)}$ 则$\operatorname{tr}(A \ominus B) = \frac{1}{n}(\operatorname{tr}(A) - m\operatorname{tr}(B))$。

(c) 若 $\oslash$ 是均匀的，则 $\ominus$是均匀的。

(d) 若 $(kA) \oslash B = k(A \oslash B)$，则 $(kA) \ominus (kB) = k(A \ominus B)$。*(e)* 若 $(A+C) \oslash B = A \oslash B + C \oslash B$，则 $(A+C) \ominus (B+D) = A \ominus B + C \ominus D$。

证明。 (c) 的证明见命题 1，该命题也证明了 (d) 和 (e)。(*a*) 和 (*b*) 的证明均可通过直接计算得到：

$$\begin{aligned}(A \ominus B)^T = ((A - I_m \otimes B) \oslash I_n)^T &= (A - I_m \otimes B)^T \oslash I_n \\ &= (A^T - I_m \otimes B^T) \oslash I_n = A^T \ominus B^T,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A \ominus B) &= \operatorname{tr}((A - I_m \otimes B) \oslash I_n) \\ &= \frac{\operatorname{tr}(A - I_m \otimes B)}{n} = \frac{1}{n}(\operatorname{tr}(A) - m\operatorname{tr}(B)). \quad \square\end{aligned}$$

注记 4（对偶性2）。 在某种程度上，注记3中描述的对偶性在这里也同样存在。设 $\oslash$ 为一个克罗内克商，使得

$$M \oslash B = (M(0_m \oplus B)^{-1}) \ominus 0_n$$

对所有 $M \in \mathbb{F}_{mn}$、可逆的 $B \in \mathbb{F}_n$ 和 $m,\ n \in \mathbb{N}$，其中 $\ominus$ 为一个克罗内克差。若 $\operatorname{char}(\mathbb{F}) \neq 2$，令 $\oslash_s$ 为一个克罗内克商，使得

$$M \oslash_s B = \frac{1}{2}\left[(M(0_m \oplus B)^{-1}) \ominus 0_n + ((0_m \oplus B)^{-1}M) \ominus 0_n\right]$$

对所有 $M \in \mathbb{F}_{mn}$、可逆的 $B \in \mathbb{F}_n$ 和 $m,\ n \in \mathbb{N}$。

(a) If $(kA) \ominus (kB) = k(A \ominus B)$ then $(kA) \oslash B = k(A \oslash B)$.

（b）若（$A+C$）$\ominus$（$B+D$）$= A \ominus B + C \ominus D$，则（$A+C$）$\oslash B = A \oslash B + C \oslash B$。（c）若（$A \ominus B$）$^T = A^T \ominus B^T$，则（$A \oslash_s B$）$^T = A^T \oslash_s B^T$。（d）若（$kA$）$\ominus$（$kB$）$= k$（$A \ominus B$），则（$kA$）$\oslash_s B = k$（$A \oslash_s B$）。（e）若（$A+C$）$\ominus$（$B+D$）$= A \ominus B + C \ominus D$，则（$A+C$）$\oslash_s B = A \oslash_s B + C \oslash_s B$。

3. A canonical form

现在我们转而关注满足 (D3) 和 (D4) 的克罗内克差。由此可知，根据 (2)，这样的克罗内克差由一个线性映射 $\delta : (\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n) \times \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_m$ 给出。在命题之前，我们先提醒读者第 27 页定义 6 中分块迹以及定义 7 中偏迹的定义。

命题 3. 设 $\delta : (\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n) \times \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_m$ 是一个满足以下条件的线性映射$\delta(A \oplus B, B) = A$ 对所有 $A \in \mathbb{F}_m$和 $B \in \mathbb{F}_n$均成立。那么存在 $\alpha \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m$

使得

$$\delta(A,B)=\mathrm{tr}_{12}(\alpha^T(A\otimes I_m-I_m\otimes B\otimes I_m)),\qquad \mathrm{tr}_{12}(\alpha^T(X\otimes I_n\otimes I_m))=X,$$

对所有 $A\in\mathbb{F}_m\otimes\mathbb{F}_n$、$B\in\mathbb{F}_n$ 和 $X\in\mathbb{F}_m$。

证明。$(\mathbb{F}_m\otimes\mathbb{F}_n)\times\mathbb{F}_n$ 的一组基为 $(E_{ij}\otimes E_{kl},0)$ 和 $(0,E_{kl})$，其中 $i,j\in\{1,\dots,m\}$ 和 $k,l\in\{1,\dots,n\}$。于是 δ 由其在这组基上的作用定义：

$$\delta(E_{ij}\otimes E_{kl},0):=\sum_{r,s=1}^{m}\alpha_{ij;kl;rs}E_{rs},\qquad \delta(0,E_{kl}):=\sum_{r,s=1}^{m}\beta_{kl;rs}E_{rs}.$$

定义

$$\alpha=\sum_{i,j,r,s=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{n}\alpha_{ij;kl;rs}E_{ij}\otimes E_{kl}\otimes E_{sr},\qquad \beta=\sum_{k,l=1}^{n}\sum_{r,s=1}^{m}\beta_{kl;rs}E_{kl}\otimes E_{sr},$$

使得

$$\delta(E_{ij}\otimes E_{kl},0)=\mathrm{tr}_{12}(\alpha^T(E_{ij}\otimes E_{kl}\otimes I_m)),\qquad \delta(0,E_{kl})=\mathrm{Btr}(\beta^T(E_{kl}\otimes I_m)).$$

由于 $(A\oplus B,B)=(A\oplus 0,0)+(0\oplus B,B)$，条件

$$\delta(A\oplus B,B)=\delta(A\oplus 0,0)+\delta(0\oplus B,B)=\delta(A\otimes I_n,0)+\delta(I_m\otimes B,B)=A$$

由线性性可化简为

$$\delta(E_{ij}\otimes I_n,0)=E_{ij},\qquad \delta(I_m\otimes E_{kl},E_{kl})=0.$$

由第二个方程可得

$$\delta(I_m\otimes E_{kl},E_{kl})=0\quad\Longleftrightarrow\quad\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ii;kl;rs}+\beta_{kl;rs}=0.$$

由此可得 $\beta=-\mathrm{tr}_1(\alpha)$。将 A 和 B 写成以下形式

$$A=\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{n}a_{ij;kl}E_{ij}\otimes E_{kl},\qquad B=\sum_{k,l=1}^{n}b_{kl}E_{kl}$$

得到

$$\begin{aligned}
&\delta(A,B)\\
&=\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{n}a_{ij;kl}\delta(E_{ij}\otimes E_{kl},0)+\sum_{k,l=1}^{n}b_{kl}\delta(0,E_{kl})\\
&=\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{n}a_{ij;kl}\,\mathrm{tr}_{12}(\alpha^T(E_{ij}\otimes E_{kl}\otimes I_m))-\sum_{k,l=1}^{n}b_{kl}\,\mathrm{Btr}(\mathrm{tr}_1(\alpha)^T(E_{kl}\otimes I_m))\\
&=\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{n}a_{ij;kl}\,\mathrm{tr}_{12}(\alpha^T(E_{ij}\otimes E_{kl}\otimes I_m))-\sum_{k,l=1}^{n}b_{kl}\,\mathrm{tr}_{12}(\alpha^T(I_m\otimes E_{kl}\otimes I_m))\\
&=\mathrm{tr}_{12}(\alpha^T(A\otimes I_m-I_m\otimes B\otimes I_m)).
\end{aligned}$$

将此公式应用于条件 $\delta(E_{ij}\otimes I_n,0) = E_{ij}$ 可得

$$\delta(E_{ij}\otimes I_n,0)=E_{ij} \quad \iff \quad \mathrm{tr}_{12}(\alpha^T(E_{ij}\otimes I_n\otimes I_m-0))=E_{ij}.$$

因此，对所有 $A\in\mathbb{F}_m$，$\mathrm{tr}_{12}(\alpha^T(X\otimes I_n\otimes I_m)) = X$。 □

注记 5. 当 δ 具有如下形式时

$$\begin{aligned}\delta(A,B) &= \mathrm{tr}_{12}(\alpha^T(A\otimes I_m - I_m\otimes B\otimes I_m))\\ &= \mathrm{tr}_{12}(\alpha^T[(A-I_m\otimes B)\otimes I_m]) = \delta(A-I_m\otimes B,0)\end{aligned}$$

对于所有 $A\in\mathbb{F}_m\otimes\mathbb{F}_n$ 和 $B\in\mathbb{F}_n$，δ 完全由其在子空间上的作用决定

$$\{\,(A,0)\,:\,A\in\mathbb{F}_m\otimes\mathbb{F}_n\,\}.$$

于是我们可以写成

$$A\ominus B = (A-I_m\otimes B)\ominus 0.$$

因此，性质 (D1)–(D5) 中的某些性质可以用$n\times n$ 零矩阵 $0_n\in\mathbb{F}_n$重新表述，

(D1-0) $$(A\ominus 0_n)^T = A^T\ominus 0_n$$

(D2-0) $$\mathrm{tr}(A\ominus 0_n) = \frac{1}{n}(\mathrm{tr}\,A)$$

(D5-0) $$(A\ominus 0_m)\ominus 0_n = A\ominus 0_{mn}$$

引理 2. 若 $\ominus:(\mathbb{F}_m\otimes\mathbb{F}_n)\times\mathbb{F}_n\to\mathbb{F}_m$ 使得 (D3) 与 (D4) 成立，则，

(a) $(A\ominus B)^T = A^T\ominus B^T$ *(for all* A,B*)* $\iff$ $(A\ominus 0_n)^T = A^T\ominus 0_n$ *(for all* A*),*

(b) $\mathrm{tr}(A\ominus B) = \frac{1}{n}(\mathrm{tr}(A) - m\,\mathrm{tr}(B))$ *(for all* A,B*)* $\iff$ $\mathrm{tr}(A\ominus 0_n) = \frac{1}{n}(\mathrm{tr}\,A)$ *(for all* A*),*

(c) $(A\ominus B)\ominus C = A\ominus(C\oplus B)$ *(for all* A,B,C*)* $\iff$ $(A\ominus 0_m)\ominus 0_n = A\ominus 0_{mn}$ *(for all* A*),*

证明. 我们将证明 (Dj) $\iff$ (Dj-0)。显然，我们只需证明 (Dj-0)$\implies$ (Dj)，因为 (Dj) $\implies$ (Dj-0) 可通过在每个公式中代入 $B=0$ 与 $C=0$ 而得到。每个证明均由注 5 得出。

(D1-0) $\implies$ (D1):

$$\begin{aligned}(A\ominus B)^T &= ((A-I_m\otimes B)\ominus 0_m)^T = (A-I_m\otimes B)^T\ominus 0_m\\ &= (A^T - I_m\otimes B^T)\ominus 0_m = A^T\ominus B^T.\end{aligned}$$

(D2-0) $\implies$ (D2):

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A\ominus B) &= \mathrm{tr}((A-I_m\otimes B)\ominus 0_m)\\ &= \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(A-I_m\otimes B) = \frac{1}{n}(\mathrm{tr}\,A - m\,\mathrm{tr}\,B).\end{aligned}$$

(D5-0) $\Longrightarrow$ (D5):

对于 $A \in \mathbb{F}_{pnm}$、 $B \in \mathbb{F}_m$ 和 $C \in \mathbb{F}_n$,

$$\begin{aligned}(A \ominus B) \ominus C &= ((A - I_{pn} \otimes B) \ominus 0_m) \ominus C \\ &= (((A - I_{pn} \otimes B) \ominus 0_m) - I_p \otimes C) \ominus 0_n \\ &= (((A - I_{pn} \otimes B) \ominus 0_m) - ((I_p \otimes C) \oplus 0_m) \ominus 0_m) \ominus 0_n \\ &= ((A - I_{pn} \otimes B - (I_p \otimes C) \oplus 0_m) \ominus 0_m) \ominus 0_n \\ &= (A - I_{pn} \otimes B - (I_p \otimes C) \oplus 0_m) \ominus 0_{mn} \\ &= (A - (I_p \otimes I_n \otimes B + I_p \otimes C \otimes I_m)) \ominus 0_{mn} \\ &= (A - I_p \otimes (C \oplus B)) \ominus 0_{mn} \\ &= A \ominus (C \oplus B).\end{aligned}$$ □

引理 3. 设 $\gamma_1 \in \mathbb{F}_n$ 和 $\gamma_0 \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m$ 满足$\mathrm{tr}(\gamma_1) = 1$ 且 $\mathrm{tr}_2(\gamma_0) = 0$。则 $\delta : (\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n) \times \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_m$ 定义为

$$\delta(A, B) = \mathrm{tr}_{12}(\alpha^T(A \otimes I_m - I_m \otimes B \otimes I_m)), \qquad \alpha := \sum_{i,j=1}^{m} E_{ij} \otimes \gamma_1 \otimes E_{ji} + \gamma_0$$

对所有 $A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ 和 $B \in \mathbb{F}_n$，均满足 $\delta(A \oplus B, B) = A$。

证明。根据命题 3，只需证明对所有 $X \in \mathbb{F}_m$，$\mathrm{tr}_{12}(\alpha^T(X \otimes I_n \otimes I_m)) = X$。设 $X = (x_{kl})$ 由元素 x_{kl} 给出，其中 x_{kl} 位于第 k 行和第 l 列，且 $k, l \in \{1, \ldots, m\}$。利用引理 10，得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}_{12}(\alpha^T(X \otimes I_n \otimes I_m)) \\ &\quad= \mathrm{tr}_{12}\left(\left(\sum_{i,j=1}^{m} E_{ji} \otimes \gamma_1^T \otimes E_{ij} + \gamma_0^T\right)\left(\sum_{k,l=1}^{m} x_{kl} E_{kl} \otimes I_n \otimes I_m\right)\right) \\ &\quad= \mathrm{tr}_{12}\left(\left(\sum_{k,l=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n} x_{kl}\delta_{ik} E_{jl} \otimes \gamma_1^T \otimes E_{ij}\right)\right) \\ &\qquad+ \mathrm{tr}_{12}\left(\gamma_0^T\left(\sum_{k,l=1}^{m} x_{kl} E_{kl} \otimes I_n \otimes I_m\right)\right) \\ &\quad= \sum_{k,l=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{jl} x_{kl} E_{ij} = \sum_{k,l=1}^{m} x_{kl} E_{kl} = X.\end{aligned}$$ □

定理 1. 设 $\mathbb{F}$ 表示一个域， $\delta : (\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n) \times \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_m$ 是一个线性映射，满足对所有 $A \in \mathbb{F}_m$ 和 $B \in \mathbb{F}_n$，都有 $\delta(A \oplus B, B) = A$。则存在$\gamma \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m$ 使得 $\mathrm{tr}_2(\gamma) = 0$，并且，

$$\delta(A, B) = \mathrm{tr}_{12}(\alpha^T(A \otimes I_m - I_m \otimes B \otimes I_m)), \qquad \alpha := \sum_{i,j=1}^{m} E_{ij} \otimes E_{11} \otimes E_{ji} + \gamma,$$

对所有 $A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ 和 $B \in \mathbb{F}_n$。

证明。 根据命题 3，存在 $\alpha \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m$ 使得

$$\delta(A, B) = \mathrm{tr}_{12}(\alpha^T(A \otimes I_m - I_m \otimes B \otimes I_m)), \qquad \mathrm{tr}_{12}(\alpha^T(X \otimes I_n \otimes I_m)) = X,$$

对所有的 $A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$、 $B \in \mathbb{F}_n$ 和 $X \in \mathbb{F}_m$均成立。将 α 写成以下形式

$$\alpha = \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{u,v=1}^{m} E_{ij} \otimes \alpha_{ij;uv} \otimes E_{uv}, \qquad \alpha_{ij;uv} \in \mathbb{F}_n,$$

对 $X = E_{kl}$，可得

$$\mathrm{tr}_{12}(\alpha^T(E_{kl} \otimes I_n \otimes I_m)) = \sum_{u,v=1}^{m} \left(\sum_{i,j=1}^{m} \delta_{ki}\delta_{lj} \,\mathrm{tr}(\alpha_{ij;uv}) \right) E_{vu} = E_{kl}.$$

因此，

$$\mathrm{tr}(\alpha_{kl;uv}) = \delta_{vk}\delta_{ul}.$$

由此可知

$$\alpha = \sum_{i,j=1}^{m} E_{ij} \otimes \alpha_{ij;ji} \otimes E_{ji} + \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{\substack{u,v=1 \\ (i,j)\neq(v,u)}}^{m} E_{ij} \otimes \alpha_{ij;uv} \otimes E_{uv}$$

其中 $\mathrm{tr}(\alpha_{ij;ji}) = 1$ 且 $\mathrm{tr}(\alpha_{ij;uv}) = 0$ 对于 $(i,\ j) \neq (v,\ u)$。现在令 $\gamma_{ij} := \alpha_{ij;ji} - E_{11}$，从而 $\mathrm{tr}(\gamma_{ij}) = 0$ ，并注意到

$$\alpha = \sum_{i,j=1}^{m} E_{ij} \otimes E_{11} \otimes E_{ji} + \gamma$$

其中

$$\gamma := \sum_{i,j=1}^{m} E_{ij} \otimes \gamma_{ij} \otimes E_{ji} + \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{\substack{u,v=1 \\ (i,j)\neq(v,u)}}^{m} E_{ij} \otimes \alpha_{ij;uv} \otimes E_{uv}$$

证明至此完成。 □

注 6. 在上述证明中，矩阵 E_{11} 的选取是任意的；若用任意其他单位迹矩阵替换 E_{11}，证明同样成立。

注 7. 当 $m = 1$时，定理 1 化为：对于所有 $A, B \in \mathbb{F}_n$，

$$\delta(A, B) = \mathrm{tr}(\alpha^T(A - B))$$

其中 $\mathrm{tr}(\alpha) = 1$。当 $n = 1$时，则 $\mathrm{tr}_2(\gamma) = \gamma = 0$ 且 $B = b$ 是一个标量。定理 1 化为：对于所有 $A \in \mathbb{F}_m$ 和 $b \in \mathbb{F}$，

$$\delta(A, b) = \mathrm{tr}_1(\alpha^T[(A - bI_m) \otimes I_m]), \qquad \alpha = \sum_{i,j=1}^{m} E_{ij} \otimes E_{ji},$$

i.e.

$$A \ominus b = \delta(A, b) = \sum_{i,j=1}^{m} \mathrm{tr}(E_{ij}^T(A - bI_m))E_{ij} = A - bI_m.$$

接下来我们给出一个类似于注 7 的一般结果，它表明，每个 Kronecker 差都是（部分）矩阵迹之差，模去典范表示中矩阵 γ 的作用。

定理 2。 设 $\mathbb{F}$ 表示一个具有 $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \nmid n$ 的域，并设 $\delta : (\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n) \times \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_m$ 是一个满足以下条件的线性映射：对于所有 $A \in \mathbb{F}_m$ 和 $B \in \mathbb{F}_n$，都有 $\delta(A \oplus B, B) = A$。则存在 $\gamma \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m$，使得 $\mathrm{tr}_2(\gamma) = 0$，并且

$$\delta(A, B) = \mathrm{tr}_{12}(\alpha^T (A \otimes I_m - I_m \otimes B \otimes I_m)), \qquad \alpha := \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{m} E_{ij} \otimes I_n \otimes E_{ji} + \gamma,$$

对所有 $A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ 和 $B \in \mathbb{F}_n$均成立。此外，

$$\delta(A, B) = \frac{1}{n}(\mathrm{Ptr}(A) - \mathrm{tr}(B) I_m) + \mathrm{tr}_{12}(\gamma^T (A \otimes I_m - I_m \otimes B \otimes I_m)).$$

证明。 通过令……，证明与定理 1 的证明相同

$$\gamma_{ij} := \alpha_{ij;ji} - \frac{1}{n} I_n.$$

设 $A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ 写成如下形式

$$A = \sum_{k,l=1}^{m} E_{kl} \otimes A_{kl}.$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}_{12}((\alpha - \gamma)^T (A \otimes I_m - I_m \otimes B \otimes I_m)) \\
&\quad = \frac{1}{n} \mathrm{tr}_{12} \left(\sum_{i,j=1}^{m} ((E_{ij} \otimes I_n) A) \otimes E_{ji} - E_{ij} \otimes B \otimes E_{ji} \right) \\
&\quad = \frac{1}{n} \sum_{i,j,k,l=1}^{m} \mathrm{tr}((E_{ij} E_{kl}) \otimes A_{kl}) \otimes E_{ji} - \delta_{ij} \mathrm{tr}(B) E_{ji} \\
&\quad = \frac{1}{n} \sum_{i,j,k,l=1}^{m} \delta_{jk} \delta_{il} \mathrm{tr}(A_{kl}) E_{ji} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{tr}(B) E_{ii} \\
&\quad = \frac{1}{n} \sum_{k,l=1}^{m} \mathrm{tr}(A_{kl}) E_{kl} - \frac{1}{n} \mathrm{tr}(B) I_m \\
&\quad = \frac{1}{n}(\mathrm{Ptr}(A) - \mathrm{tr}(B) I_m).
\end{aligned}$$

□

定理 3。 设 $\alpha \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \times \mathbb{F}_m$，并令 $\delta : (\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n) \times \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_m$ 为线性映射

$$\delta(A, B) = \mathrm{tr}_{12}(\alpha^T (A \otimes I_m - I_m \otimes B \otimes I_m))$$

对所有 $A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ 和 $B \in \mathbb{F}_n$均成立。于是

$$\delta(A^T, B^T) = \delta(A, B)^T \quad \textit{for all } A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \textit{ and } B \in \mathbb{F}_m$$

当且仅当 $T_3(\alpha) = T_3(\alpha^T)$。等价地，如果 $A \ominus B = \delta(A, B)$，

$$(A \ominus B)^T = A^T \ominus B^T \quad \textit{if and only if} \quad T_3(\alpha) = T_3(\alpha^T).$$

证明。 根据引理 2，我们可以假设 $B = 0_n$。现在，利用转置的恒等映射： $A^T = T_3(T_{12}(A)) = T_{12}(T_3(A))$，可得

$$\begin{aligned}
&\delta(A^T, 0_n) = \delta(A, 0_n)^T \\
&\quad \iff \quad \mathrm{tr}_{12}(\alpha^T (A^T \otimes I_m)) = \mathrm{tr}_{12}(\alpha^T (A \otimes I_m))^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \quad \operatorname{tr}_{12}(\alpha^T(A^T \otimes I_m)) = \operatorname{tr}_{12}(T_3(\alpha^T(A \otimes I_m))) \quad \text{[by Lem. 11]} \\
&\iff \quad \operatorname{tr}_{12}(\alpha^T(A^T \otimes I_m)) = \operatorname{tr}_{12}(T_3(\alpha^T)(A \otimes I_m)) \quad \text{[by Lem. 13]} \\
&\iff \operatorname{tr}_{12}(T_3(\alpha)(A \otimes I_m)) = \operatorname{tr}_{12}(T_3(\alpha^T)(A \otimes I_m)) \quad \text{[by Lems 12, 13]} \\
&\iff \qquad T_3(\alpha) = T_3(\alpha^T). \qquad \text{[by Lem. 14]} \qquad \square
\end{aligned}$$

定理 4。 令 $\mathbb{F}$ 表示一个域，并令 $\gamma \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m$ 满足 $\operatorname{tr}_2(\gamma) = 0$。令 $\delta : (\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n) \times \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_m$ 为线性映射

$$\delta(A, B) = \operatorname{tr}_{12}(\alpha^T(A \otimes I_m - I_m \otimes B \otimes I_m)), \qquad \alpha := \sum_{i,j=1}^{m} E_{ij} \otimes E_{11} \otimes E_{ji} + \gamma,$$

对所有 $A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ 和 $B \in \mathbb{F}_n$。于是

$$\delta(A^T, B^T) = \delta(A, B)^T \quad \textit{for all } A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \textit{ and } B \in \mathbb{F}_m$$

当且仅当 $T_3(\gamma) = T_3(\gamma^T)$。等价地，若 $A \ominus B = \delta(A, B)$，

$$(A \ominus B)^T = A^T \ominus B^T \quad \textit{if and only if} \quad T_3(\gamma) = T_3(\gamma^T).$$

证明。 由定理 3，$\delta(A^T, B^T) = \delta(A, B)^T$ 当且仅当 $T_3(\alpha) = T_3(\alpha^T)$，即

$$\sum_{i,j=1}^{m} E_{ij} \otimes E_{11} \otimes E_{ij} + T_3(\gamma) = \sum_{i,j=1}^{m} E_{ji} \otimes E_{11} \otimes E_{ji} + T_3(\gamma^T),$$

因此结论得证。 $\square$

定理 5. 设 $\mathbb{F}$ 表示一个域，其 特征$(\mathbb{F}) \nmid n$，并设 $\gamma \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m$ 满足 $\operatorname{tr}_2(\gamma) = 0$。设 $\delta : (\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n) \times \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_m$ 为线性映射

$$\delta(A, B) = \operatorname{tr}_{12}(\alpha^T(A \otimes I_m - I_m \otimes B \otimes I_m)), \qquad \alpha := \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{m} E_{ij} \otimes I_n \otimes E_{ji} + \gamma,$$

对所有 $A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ 和 $B \in \mathbb{F}_n$ 均成立。则

$$\delta(A^T, B^T) = \delta(A, B)^T \quad \textit{for all } A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \textit{ and } B \in \mathbb{F}_m$$

当且仅当 $T_3(\gamma) = T_3(\gamma^T)$。等价地，若 $A \ominus B = \delta(A, B)$，

$$(A \ominus B)^T = A^T \ominus B^T \quad \textit{if and only if} \quad T_3(\gamma) = T_3(\gamma^T).$$

证明。 证明与定理 4 的证明类似。 $\square$

定理 6. 设 $\mathbb{F}$ 表示一个域，其 特征$(\mathbb{F}) \nmid n$，并设 $\gamma \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m$ 满足 $\operatorname{tr}_2(\gamma) = 0$。设 $\delta : (\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n) \times \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_m$ 为线性映射

$$\delta(A, B) = \operatorname{tr}_{12}(\alpha^T(A \otimes I_m - I_m \otimes B \otimes I_m)), \qquad \alpha := \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{m} E_{ij} \otimes I_n \otimes E_{ji} + \gamma,$$

对所有 $A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ 和 $B \in \mathbb{F}_n$ 均成立。则

$$\operatorname{tr}(\delta(A, B)) = \frac{1}{n}(\operatorname{tr}(A) - m \operatorname{tr}(B)) \quad \textit{for all } A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \textit{ and } B \in \mathbb{F}_m$$

当且仅当$\operatorname{tr}_3(\gamma) = 0$。等价地，若 $A \ominus B = \delta(A, B)$，

$$\operatorname{tr}(A \ominus B) = \frac{1}{n}(\operatorname{tr}(A) - m \operatorname{tr}(B)) \quad \textit{if and only if} \quad \operatorname{tr}_3(\gamma) = 0.$$

证明。 由引理 2 直接计算可得

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\delta(A,\ 0)) &= \operatorname{tr}(\operatorname{tr}_{12}(\alpha^T(A\otimes I_m)))\\ &= \operatorname{tr}(\alpha^T(A\otimes I_m))\\ &= \frac{1}{n}\operatorname{tr}_{12}\left(\operatorname{tr}_3\left(\sum_{i,j=1}^{m}[(E_{ij}\otimes I_n)A]\otimes E_{ji}\right)\right)+\operatorname{tr}(\gamma^T(A\otimes I_m))\\ &= \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(\sum_{i,j=1}^{m}\delta_{ij}[(E_{ij}\otimes I_n)A]\right)+\operatorname{tr}(\gamma^T(A\otimes I_m))\\ &= \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{m}[(E_{ii}\otimes I_n)A]\right)+\operatorname{tr}(\gamma^T(A\otimes I_m))\\ &= \frac{1}{n}\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(\gamma^T(A\otimes I_m)).\end{aligned}$$

因此，$\operatorname{tr}(\delta(A,\ 0))=\frac{1}{n}(\operatorname{tr}(A))$ 当且仅当

$$\operatorname{tr}(\gamma^T(A\otimes I_m))=0.$$

由于该等式必须对任意 A 成立，因此我们必须有

$$\operatorname{tr}(\gamma^T(A\otimes I_m))=0\quad \text{for all } A\in\mathbb{F}_m\otimes\mathbb{F}_n.$$

将 γ 写成如下形式

$$\gamma=\sum_{i,j=1}^{m}\gamma_{ij}\otimes E_{ij},$$

并注意到

$$\operatorname{tr}_3(\gamma)=\sum_{i,j=1}^{m}\operatorname{tr}(E_{ij})\gamma_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\gamma_{ii},\qquad \operatorname{tr}(\gamma^T(A\otimes I_m))=\operatorname{tr}(\operatorname{tr}_3(\gamma^T(A\otimes I_m))),$$

表明

$$\operatorname{tr}(\gamma^T(A\otimes I_m))=0\quad \text{for all } A\in\mathbb{F}_m\otimes\mathbb{F}_n.$$

当且仅当

$$\operatorname{tr}\left(\left(\sum_{i=1}^{m}\gamma_{ii}^T\right)A\right)=\operatorname{tr}\left(\operatorname{tr}_3(\gamma)A\right)=0\quad \text{for all } A\in\mathbb{F}_m\otimes\mathbb{F}_n.$$

因此，$\operatorname{tr}(\delta(A,\ B))=\frac{1}{n}(\operatorname{tr}(A)\ -m\operatorname{tr}(B))$ 当且仅当 $\operatorname{tr}_3(\gamma)\ =0$。 □

命题 4. 设 $\mathbb{F}$ 表示一个域，$\delta_1,\delta_2:(\mathbb{F}_m\otimes\mathbb{F}_n)\times\mathbb{F}_n\to\mathbb{F}_m$ 是两个线性映射，满足 $\delta_i(A\oplus B,B)=A$，对所有 $i\in\{1,2\}$, $A\in\mathbb{F}_m$ 和 $B\in\mathbb{F}_n$ 均成立。假设存在 $\beta_1,\beta_2\in\mathbb{F}_n$，使得 $tr(\beta_1)=tr(\beta_2)=1$，并且存在 $\gamma_1,\gamma_2\in\mathbb{F}_m\otimes\mathbb{F}_n\otimes\mathbb{F}_m$，使得 $tr_1(\gamma_1)=tr_1(\gamma_2)=0$，且

$$\delta_1(C,D)=\operatorname{tr}_{12}(\alpha_1^T(C\otimes I_m-I_m\otimes D\otimes I_m)),\qquad \alpha_1:=\sum_{i,j=1}^{m}E_{ij}\otimes\beta_1\otimes E_{ji}+\gamma_1,$$

$$\delta_2(C,D)=\operatorname{tr}_{12}(\alpha_2^T(C\otimes I_m-I_m\otimes D\otimes I_m)),\qquad \alpha_2:=\sum_{i,j=1}^{m}E_{ij}\otimes\beta_2\otimes E_{ji}+\gamma_2,$$

对所有 $C \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ 和 $D \in \mathbb{F}_n$均成立。那么 $\delta_1 = \delta_2$ 当且仅当 $(\beta_1, \gamma_1) = (\beta_2, \gamma_2)$。证明。我们有，

$$\delta_1 = \delta_2 \iff \forall C \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n,\ D \in \mathbb{F}_m : \operatorname{tr}_{12}((\alpha_1 - \alpha_2)^T (C \otimes I_m - I_m \otimes D \otimes I_m)) = 0.$$

我们定义，

$$\begin{aligned}
\Lambda(C, D) &:= \operatorname{tr}_{12}((\alpha_1 - \alpha_2)^T (C \otimes I_m - I_m \otimes D \otimes I_m)) \\
&= \operatorname{tr}_{12}\left(\left(\sum_{i,j=1}^{m} E_{ji} \otimes (\beta_1 - \beta_2)^T \otimes E_{ij} + (\gamma_1 - \gamma_2)^T\right)(C \otimes I_m)\right) \\
&\quad - \operatorname{tr}_{12}\left(\left(\sum_{i,j=1}^{m} \left(E_{ji} \otimes (\beta_1 - \beta_2)^T \otimes E_{ij}\right)(I_m \otimes D \otimes I_m)\right)\right),
\end{aligned}$$

这里用到了 $\operatorname{tr}_1(\gamma_1) = \operatorname{tr}_1(\gamma_2) = 0$，此外

$$\begin{aligned}
\Lambda(C, D) &= \operatorname{tr}_{12}\left(\sum_{i,j=1}^{m} \left[\left(E_{ji} \otimes (\beta_1 - \beta_2)^T\right) C\right] \otimes E_{ij} + (\gamma_1 - \gamma_2)^T (C \otimes I_m)\right) \\
&\quad - \operatorname{tr}_{12}\left(\sum_{i,j=1}^{m} E_{ji} \otimes \left[(\beta_1 - \beta_2)^T D\right] \otimes E_{ij}\right) \\
&= \operatorname{tr}_{12}\left(\sum_{i,j=1}^{m} \left[\left(E_{ji} \otimes (\beta_1 - \beta_2)^T\right) C\right] \otimes E_{ij} + (\gamma_1 - \gamma_2)^T (C \otimes I_m)\right) \\
&\quad - \operatorname{tr}\left((\beta_1 - \beta_2)^T D\right) I_m.
\end{aligned}$$

由此可知，$\delta_1 = \delta_2$ 当且仅当对于所有 $C \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$，$D \in \mathbb{F}_m$ 我们有$\Lambda(C, D) = 0$。注意到，对于所有 D，$\operatorname{tr}((\beta_1 - \beta_2)^T D) = 0$ 当且仅当 $(\beta_1 - \beta_2)^T = 0$；并且，根据引理 14，对于所有 C，$\operatorname{tr}_{12}((\gamma_1 - \gamma_2)^T (C \otimes I_m)) = 0$ 当且仅当 $(\gamma_1 - \gamma_2)^T = 0$。因此，$\delta_1 = \delta_2$ 当且仅当 $\beta_1 = \beta_2$ 且 $\gamma_1 = \gamma_2$。□

4. Uniform Kronecker differences

在注 7 中，我们指出，若 A 和 B 是同阶 $n \in \mathbb{N}$的矩阵，则对于某个满足 $\operatorname{tr}(\upsilon_n) = 1$的矩阵 $\upsilon_n \in \mathbb{F}_n$，线性克罗内克差可表示为 $A \ominus B = \operatorname{tr}(\upsilon_n^T (A - B))$。这些矩阵 υ_n 可视为一致克罗内克差的生成元。根据定义5，一致克罗内克差是线性的，因此具有定理 1 给出的典范形式。引理 3 中给出的形式启发了以下引理。

引理 4. 设 $\upsilon_n \in \mathbb{F}_n$，$n \in \mathbb{N}$ 是一个矩阵序列，且满足 $\operatorname{tr}(\upsilon_n) = 1$。那么，下文定义的克罗内克差是一致的，其中

$$A \ominus B = \operatorname{tr}_{12}(\alpha_{m,n}^T (A \otimes I_m - I_m \otimes B \otimes I_m)), \qquad \alpha_{m,n} := \sum_{i,j=1}^{m} E_{ij} \otimes \upsilon_n \otimes E_{ji},$$

对所有 $A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ 和 $B \in \mathbb{F}_n$、m、$n \in \mathbb{N}$。

证明。 根据引理 3，运算 $\ominus$是线性克罗内克差。令$\sigma_{m,\ p}$ 为满足 $\sigma_{m,\ p}\sigma_{m,\ p}^T = \sigma_{m,\ p}^T\sigma_{m,\ p} = I_{mp}$的 vec置换矩阵 [5] ，并且

$$\sigma_{m,p}(A \otimes B)\sigma_{m,p}^T = B \otimes A$$

对所有 $A \in \mathbb{F}_m$ 和 $B \in \mathbb{F}_p$。对于 $A \in \mathbb{F}_m$、 $B \in \mathbb{F}_n$、 $C \in \mathbb{F}_p \otimes \mathbb{F}_n$ 和$m,\ n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\begin{aligned}(A \oplus C) \ominus B &= \delta(A \oplus C, B)\\ &= \mathrm{tr}_{12}(\alpha_{m,n}^T(A \otimes I_p \otimes I_n \otimes I_{mp} + I_m \otimes C \otimes I_{mp} - I_{mp} \otimes B \otimes I_{mp}))\\ &= \mathrm{tr}_{12}(\alpha_{m,n}^T(A \otimes I_p \otimes I_n \otimes I_{mp}))\\ &\quad + \mathrm{tr}_{12}(\alpha_{m,n}^T(I_m \otimes C \otimes I_{mp} - I_{mp} \otimes B \otimes I_{mp})).\end{aligned}$$

然后，将右侧的两项展开可得

$$\mathrm{tr}_{12}(\alpha_{m,n}^T(A \otimes I_p \otimes I_n \otimes I_{mp})) = \sum_{i,j=1}^{mp} \mathrm{tr}_{12}((E_{ji}(A \otimes I_p)) \otimes v_n \otimes E_{ij} = A \otimes I_p,$$

and

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}_{12}(\alpha_{m,n}^T(I_m \otimes C \otimes I_{mp} - I_{mp} \otimes B \otimes I_{mp}))\\ &= \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{u,v=1}^{p} \mathrm{tr}_{12}\left((E_{ji} \otimes E_{vu} \otimes v_n^T \otimes E_{ij} \otimes E_{uv})(I_m \otimes [C - I_p \otimes B] \otimes I_m \otimes I_p))\right)\\ &= \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{u,v=1}^{p} \mathrm{tr}_{12}\left((E_{vu} \otimes v_n^T \otimes \delta_{ij}E_{ij} \otimes E_{uv})([C - I_p \otimes B] \otimes I_m \otimes I_p))\right),\end{aligned}$$

其中我们利用了 $\mathrm{tr}(E_{ji}) \otimes E_{ij} = \delta_{ij}E_{ij}$。注意到 $\sigma_{m,\ p}^T\sigma_{m,\ p} = I_{mp}$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}_{12}(\alpha_{m,n}^T(I_m \otimes C \otimes I_{mp} - I_{mp} \otimes B \otimes I_{mp}))\\ &\quad= \sum_{u,v=1}^{p} \mathrm{tr}_{12}\left((E_{vu} \otimes v_n^T \otimes I_m \otimes E_{uv})([C - I_p \otimes B] \otimes I_p \otimes I_m))\right)\\ &\quad= \sum_{u,v=1}^{p} \mathrm{tr}_{12}\left((I_p \otimes I_n \otimes \sigma_{m,p}^T)(I_p \otimes I_n \otimes \sigma_{m,p})(E_{vu} \otimes v_n^T \otimes I_m \otimes E_{uv})\right.\\ &\qquad\left.\times([C - I_p \otimes B] \otimes I_m \otimes I_p))(I_p \otimes I_n \otimes \sigma_{m,p}^T)(I_p \otimes I_n \otimes \sigma_{m,p})\right)\\ &\quad= \sum_{u,v=1}^{p} \mathrm{tr}_{12}\left((I_p \otimes I_n \otimes \sigma_{m,p}^T)(E_{vu} \otimes v_n^T \otimes E_{uv} \otimes I_m)\right.\\ &\qquad\left.\times([C \otimes I_p - I_p \otimes B \otimes I_p] \otimes I_m))(I_p \otimes I_n \otimes \sigma_{m,p})\right),\end{aligned}$$

因为 $\sigma_{m,\ p}(A \otimes B)\sigma_{m,\ p}^T = B \otimes A$，所以

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}_{12}(\alpha_{m,n}^T(I_m \otimes C \otimes I_{mp} - I_{mp} \otimes B \otimes I_{mp}))\\ &\quad= \sum_{u,v=1}^{p} \mathrm{tr}_{12}\left((I_p \otimes I_n \otimes \sigma_{m,p}^T)\right.\\ &\qquad\left.\times(([E_{vu} \otimes v_n^T \otimes E_{uv}][C \otimes I_p - I_p \otimes B \otimes I_p]) \otimes I_m))(I_p \otimes I_n \otimes \sigma_{m,p})\right)\end{aligned}$$

因此,

$$\mathrm{tr}_{12}(\alpha_{m,n}^T(I_m \otimes C \otimes I_{mp} - I_{mp} \otimes B \otimes I_{mp}))$$

$$= \sum_{u,v=1}^{p} \sigma_{m,p}^T(\mathrm{tr}_{12}([E_{vu} \otimes \upsilon_n^T \otimes E_{uv}][C \otimes I_p - I_p \otimes B \otimes I_p]) \otimes I_m))\sigma_{m,p}$$
$$= \sigma_{m,p}^T((C \ominus B) \otimes I_m)\sigma_{m,p}.$$

利用这些信息，进而可得

$$\begin{aligned}(A \oplus C) \ominus B &= \delta(A \oplus C, B) \\ &= \mathrm{tr}_{12}(\alpha_{m,n}^T(A \otimes I_p \otimes I_n \otimes I_{mp})) \\ &\quad + \mathrm{tr}_{12}(\alpha_{m,n}^T(I_m \otimes C \otimes I_{mp} - I_{mp} \otimes B \otimes I_{mp})) \\ &= A \otimes I_p + \sigma_{m,p}^T((C \ominus B) \otimes I_m)\sigma_{m,p} \\ &= A \otimes I_p + I_m \otimes (C \ominus B) \\ &= A \oplus (C \ominus B).\end{aligned}$$ □

定理 7. 设 $\ominus$ 是一致克罗内克差。那么存在一个矩阵序列 $\upsilon_n \in \mathbb{F}_n$、 $n \in \mathbb{N}$，满足 $\mathrm{tr}(\upsilon_n) = 1$，以及矩阵 $\gamma_{m,n} \in \mathbb{F}_{m^2n}$、 m、 $n \in \mathbb{N}$，满足 $\mathrm{tr}_1(\gamma_{m,n}) = 0$ 和 $\mathrm{tr}_2(\gamma_{m,n}) = 0$，并且

$$A \ominus B = \mathrm{tr}_{12}(\alpha_{m,n}^T(A \otimes I_m - I_m \otimes B \otimes I_m)), \qquad \alpha_{m,n} := \sum_{i,j=1}^{m} E_{ij} \otimes \upsilon_n \otimes E_{ji} + \gamma_{m,n},$$

对所有 $A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ 和 $B \in \mathbb{F}_n$、 m、 $n \in \mathbb{N}$。

证明。 根据注 7，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个矩阵 $\upsilon_n \in \mathbb{F}_n$，使得 $\mathrm{tr}(\upsilon_n) = 1$，且对所有 $A, B \in \mathbb{F}_n$，均有 $A \ominus B = \mathrm{tr}(\upsilon_n^T(A - B))$。按照定理 1 的证明（ E_{11} 的选择是任意的——我们要求一个具有单位迹的矩阵），存在 $\gamma_{m,n} \in \mathbb{F}_{m^2n}$ （依赖于 υ_n），使得 $\mathrm{tr}_2(\gamma_{m,n}) = 0$，并且

$$A \ominus B = \mathrm{tr}_{12}(\alpha_{m,n}^T(A \otimes I_m - I_m \otimes B \otimes I_m)), \qquad \alpha_{m,n} := \sum_{i,j=1}^{m} E_{ij} \otimes \upsilon_n \otimes E_{ji} + \gamma_{m,n}$$

对所有 $A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ 与 $B \in \mathbb{F}_n$， m， $n \in \mathbb{N}$。尚需证明$\mathrm{tr}_1(\gamma_{m,\ n}) = 0$。首先考虑 B， $C \in \mathbb{F}_n$。由于 $\ominus$ 是一致的，并遵循引理 4的证明，$(A \oplus C) \ominus B = A \oplus (C \ominus B)$可得（回顾$\mathrm{tr}_2(\gamma_{m,\ n}) = 0$，并利用引理 16）

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}_{12}(\gamma_{m,n}^T(A \otimes I_n \otimes I_m + I_m \otimes C \otimes I_m - I_m \otimes B \otimes I_m)) \\ &\quad = \mathrm{Btr}(\mathrm{tr}_2(\gamma_{m,n})^T(A \otimes I_m)) + \mathrm{Btr}(\mathrm{tr}_1(\gamma_{m,n})^T((C - B) \otimes I_m)) \\ &\quad = \mathrm{Btr}(\mathrm{tr}_1(\gamma_{m,n})^T((C - B) \otimes I_m)) \\ &\quad = 0,\end{aligned}$$

对所有 $A \in \mathbb{F}_m$、 B， $C \in \mathbb{F}_n$与 m， $n \in \mathbb{N}$。将$\mathrm{tr}_1(\gamma_{m,\ n})$写成如下形式

$$\mathrm{tr}_1(\gamma_{m,n}) = \sum_{i,j=1}^{n} E_{ij} \otimes G_{ij}$$

并令 $C - B = E_{kl}$ 可得

$$\sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{Btr}((E_{ji} \otimes G_{ij}^T)(E_{kl} \otimes I_m)) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Btr}(E_{jl} \otimes G_{kj}^T) = G_{kl}^T = 0.$$

由于 j 和 k 是任意的，因此对所有 $m, n \in \mathbb{N}$.， $\mathrm{tr}_1(\gamma_{m,n}) = 0$ □

现在，根据命题 4可知，对于给定的 $n \times n$ 矩阵序列 (υ_n)，这些矩阵$\gamma_{m,n}$ 唯一确定一个一致克罗内克差。

推论 1. 设 $\ominus$ 是一致克罗内克差，给定矩阵序列 (υ_n) $n\times n$ ，且 $\mathrm{tr}(\upsilon_n) = 1$ 如定理 7 所示。则存在唯一的矩阵$\gamma_{m,n} \in \mathbb{F}_{m^2n}$, $m, n \in \mathbb{N}$，满足 $\mathrm{tr}_1(\gamma_{m,n}) = 0$ 和 $\mathrm{tr}_2(\gamma_{m,n}) = 0$ ，并且

$$A \ominus B = \mathrm{tr}_{12}(\alpha_{m,n}^T(A \otimes I_m - I_m \otimes B \otimes I_m)), \qquad \alpha_{m,n} := \sum_{i,j=1}^{m} E_{ij} \otimes \upsilon_n \otimes E_{ji} + \gamma_{m,n},$$

对所有 $A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ 和 $B \in \mathbb{F}_n$, $m, n \in \mathbb{N}$均成立。

注意，由引理 4 可得以下推论。

推论 2. 设 $\ominus$ 是一致克罗内克差，由矩阵对 $(\upsilon_n, \gamma_{m,n})$ $m, n \in \mathbb{N}$给出，如推论 *1* 所述。则矩阵对 $(\upsilon_n, 0)$构成一致克罗内克差 $\ominus_0$。

尽管推论 1 中的矩阵 $\gamma_{m,\ n}$ 唯一确定了一致克罗内克差，但克罗内克和 (S5) 的结合性体现在矩阵序列 (υ_n) 中。

定理 8。 设 $\ominus$ 是由矩阵对 $(\upsilon_n, \gamma_{m,\ n})$给出的一致克罗内克差，其中矩阵为 $m, n \in \mathbb{N}$，如推论 *1* 所示。若对所有 $X \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_p \otimes \mathbb{F}_q$, $Y \in \mathbb{F}_q$, $Z \in \mathbb{F}_p$ 以及 $m, p, q \in \mathbb{N}$，以下条件均成立

$$(X \ominus Y) \ominus Z = X \ominus (Z \oplus Y),$$

则对所有 $p, q \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{Btr}(\upsilon_{pq}) = \upsilon_q, \qquad \mathrm{Ptr}(\upsilon_{pq}) = \upsilon_p.$$

证明。 设 p， $q \in \mathbb{N}$。根据引理 2(c)，只需证明以下条件成立：若对所有 $m \in \mathbb{N}$ 和 $X \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_p \otimes \mathbb{F}_q$,

$$(X \ominus 0_q) \ominus 0_p = X \ominus (0_p \oplus 0_q) = X \ominus 0_{pq},$$

则:

$$\mathrm{Btr}(\upsilon_{pq}) = \upsilon_q, \qquad \mathrm{Ptr}(\upsilon_{pq}) = \upsilon_p.$$

为得到结果 $\mathrm{Btr}(\upsilon_{pq}) = \upsilon_q$，只需考虑满足$Y \in \mathbb{F}_q$的 $X = I_m \otimes I_p \otimes Y$。我们有

$$\begin{aligned} X \ominus 0_{pq} &= \mathrm{tr}_{12}(\alpha_{m,pq}^T(X \otimes I_m)) \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} \mathrm{tr}((E_{ji} \otimes \upsilon_{pq}^T)(I_m \otimes I_p \otimes Y))E_{ij} + \mathrm{tr}_{12}(\gamma_{m,pq}^T(I_m \otimes I_p \otimes Y \otimes I_m)) \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} \mathrm{tr}((E_{ji} \otimes \upsilon_{pq}^T)(I_m \otimes I_p \otimes Y))E_{ij} \\ &= \mathrm{tr}(\upsilon_{pq}^T(I_p \otimes Y))I_m, \end{aligned}$$

利用引理15以及 $\mathrm{tr}_1(\gamma_{m,pq}^T) = 0$ 这一事实。另一方面,

$$(X \ominus 0_q) \ominus 0_p = \left[\mathrm{tr}_{12}(\alpha_{mp,q}^T(I_m \otimes I_p \otimes Y \otimes I_{mp}))\right] \ominus 0_p$$

$$= \left[\sum_{i,j=1}^{mp} \operatorname{tr}((E_{ji} \otimes \upsilon_q^T)(I_{mp} \otimes Y)) E_{ij} \right] \ominus 0_p$$

$$= \operatorname{tr}(\upsilon_q^T Y)(I_{mp} \ominus 0_p),$$

mp这里我们用到了 $\sum_{i,\ j=1}^{mp} \operatorname{tr}(E_{ji}) = 1$，因此。

$$(X \ominus 0_q) \ominus 0_p = \operatorname{tr}(\upsilon_q^T Y) \operatorname{tr}_{12}(\alpha_{m,p}^T(I_{mp} \otimes I_m))$$

$$= \operatorname{tr}(\upsilon_q^T Y) \left[\sum_{i,j=1}^{m} \operatorname{tr}(E_{ji}) \operatorname{tr}(\upsilon_p^T) E_{ij} \right]$$

$$= \operatorname{tr}(\upsilon_q^T Y) \operatorname{tr}(\upsilon_p^T) I_m$$

$$= \operatorname{tr}((\upsilon_p \otimes \upsilon_q)^T (I_p \otimes Y)) I_m,$$

这里我们再次使用了引理15，$\operatorname{tr}_1(\gamma_{mp,q}^T) = 0$ 和 $\operatorname{tr}_1(\gamma_{m,p}^T) = 0$。因此，根据引理18，$\operatorname{Btr}(\upsilon_{pq}) = \operatorname{Btr}(\upsilon_p \otimes \upsilon_q) = \operatorname{tr}(\upsilon_p)\upsilon_q = \upsilon_q$.

为了得到结果 $\operatorname{Ptr}(\upsilon_{pq}) = \upsilon_p$，只需考虑 $X = I_m \otimes Z \otimes I_q$ 其中$Z \in \mathbb{F}_p$。我们有

$$X \ominus 0_{pq} = \operatorname{tr}_{12}(\alpha_{m,pq}^T(X \otimes I_m))$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \operatorname{tr}((E_{ji} \otimes \upsilon_{pq}^T)(I_m \otimes Z \otimes I_q)) E_{ij}$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{m} \operatorname{tr}_{12}(\gamma_{m,pq}^T(I_m \otimes Z \otimes I_q \otimes I_m))$$
$$= \sum_{i,j=1}^{m} \operatorname{tr}((E_{ji} \otimes \upsilon_{pq}^T)(I_m \otimes Z \otimes I_q)) E_{ij}$$

$$= \operatorname{tr}(\upsilon_{pq}^T(Z \otimes I_q)) E_{ij},$$

利用引理15以及 $\operatorname{tr}_1(\gamma_{m,pq}) = 0$ 这一事实。现在，

$$(X \ominus 0_q) \ominus 0_p = \left[\operatorname{tr}_{12}(\alpha_{mp,q}^T(I_m \otimes Z \otimes I_q \otimes I_{mp})) \right] \ominus 0_p$$

$$= \left[\sum_{i,j=1}^{mp} \operatorname{tr}((E_{ji} \otimes \upsilon_q^T)(I_m \otimes Z \otimes I_q)) E_{ij} \right] \ominus 0_p$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{tr}(\upsilon_q^T) \left[\sum_{i,j=1}^{mp} \operatorname{tr}(E_{ji}(I_m \otimes Z)) E_{ij} \right] \ominus 0_p \\
&= \operatorname{tr}(\upsilon_q^T)(I_m \otimes Z) \ominus 0_p \\
&= \operatorname{tr}(\upsilon_q^T) \operatorname{tr}_{12}(\alpha_{m,p}^T (I_m \otimes Z \otimes I_m)) \\
&= \operatorname{tr}(\upsilon_q^T) \left[\sum_{i,j=1}^{m} \operatorname{tr}(E_{ji}) \operatorname{tr}(\upsilon_p^T Z) E_{ij} \right] \\
&= \operatorname{tr}(\upsilon_q^T) \operatorname{tr}(\upsilon_p^T Z) I_m \\
&= \operatorname{tr}((\upsilon_p \otimes \upsilon_q)^T (Z \otimes I_q)) I_m.
\end{aligned}
$$

因此，根据引理18，$\mathrm{Ptr}(\upsilon_{pq}) = \mathrm{Ptr}(\upsilon_p \otimes \upsilon_q) = \mathrm{tr}(\upsilon_q)\upsilon_p = \upsilon_p$. □

我们考虑定理 8 的一个特殊情形，即每个$\gamma_{m,n}$ =0 的情形。

命题 5. 设 $\ominus$ 是由矩阵对 $(\upsilon_n, 0)$ $m, n \in \mathbb{N}$给出的一致克罗内克差，如推论 *1* 所述。若对所有 $X \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_p \otimes \mathbb{F}_q$, $Y \in \mathbb{F}_q$, $Z \in \mathbb{F}_p$和 $m, p, q \in \mathbb{N}$均满足以下条件

$$(X \ominus Y) \ominus Z = X \ominus (Z \oplus Y),$$

则对所有 $p, q \in \mathbb{N}$:

$$\upsilon_{pq} = \upsilon_p \otimes \upsilon_q = \upsilon_q \otimes \upsilon_p.$$

证明。 设 $p, q \in \mathbb{N}$。根据引理 2(c)，只需证明以下条件成立：若对所有 $m \in \mathbb{N}$ 和 $X \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_p \otimes \mathbb{F}_q$,

$$(X \ominus 0_q) \ominus 0_p = X \ominus (0_p \oplus 0_q) = X \ominus 0_{pq},$$

则:

$$\upsilon_{pq} = \upsilon_p \otimes \upsilon_q.$$

我们有

$$
\begin{aligned}
X \ominus 0_{pq} &= \operatorname{tr}_{12}(\alpha_{m,pq}^T (X \otimes I_m)) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \operatorname{tr}_{12}((E_{ji} \otimes \upsilon_{pq}^T \otimes E_{ij})(X \otimes I_m)) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \operatorname{tr}((E_{ji} \otimes \upsilon_{pq}^T) X) E_{ij}.
\end{aligned}
$$

另一方面，注意到（根据下文的上下文） E_{ij}表示一个 $m \times m$矩阵，而 E_{kl} 表示一个(mp) ×(mp)矩阵，

$(X \ominus 0_q) \ominus 0_p$

$$= \left[\mathrm{tr}_{12}(\alpha_{mp,q}^T(X \otimes I_{mp}))\right] \ominus 0_p$$

$$= \left[\sum_{k,l=1}^{mp} \mathrm{tr}_{12}((E_{lk} \otimes v_q^T \otimes E_{kl})(X \otimes I_{mp}))\right] \ominus 0_p$$

$$= \sum_{k,l=1}^{mp} \mathrm{tr}((E_{lk} \otimes v_q^T)X)\,\mathrm{tr}_{12}(\alpha_{m,p}^T(E_{kl} \otimes I_m))$$

由于 $\mathrm{tr}_{12}((E_{lk} \otimes v_q^T)X \otimes E_{kl}) = \mathrm{tr}((E_{lk} \otimes v_q^T)X)E_{kl}$，因此

$$\begin{aligned}
&(X \ominus 0_q) \ominus 0_p \\
&= \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{mp} \mathrm{tr}((E_{lk} \otimes v_q^T)X)\,\mathrm{tr}_{12}((E_{ji} \otimes v_p^T \otimes E_{ij})(E_{kl} \otimes I_m)) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{mp} \mathrm{tr}((E_{lk} \otimes v_q^T)X)\,\mathrm{tr}((E_{ji} \otimes v_p^T)E_{kl})E_{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{s,t=1}^{m}\sum_{u,v=1}^{p} \mathrm{tr}((E_{ts} \otimes E_{vu} \otimes v_q^T)X)\,\mathrm{tr}((E_{ji} \otimes v_p^T)(E_{st} \otimes E_{uv}))E_{ij},
\end{aligned}$$

对于每个 $k,\ l \in \{1,\dots,mp\}$ 都存在唯一的 $s,\ t \in \{1,\dots,m\}$ 以及 $u,\ v \in \{1,\dots,p\}$ 使得 $E_{lk} = E_{ji} \otimes E_{vu}$，

$$\begin{aligned}
&(X \ominus 0_q) \ominus 0_p \\
&= \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{u,v=1}^{p} \mathrm{tr}((E_{ji} \otimes E_{vu} \otimes v_q^T)X)\,\mathrm{tr}(v_p^T E_{uv}))E_{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \mathrm{tr}\left(\left(E_{ji} \otimes \left(\sum_{u,v=1}^{p} \mathrm{tr}(v_p^T E_{uv})E_{vu}\right) \otimes v_q^T\right)X\right)E_{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \mathrm{tr}((E_{ji} \otimes v_p^T \otimes v_q^T)X))E_{ij}.
\end{aligned}$$

由此可知，对于所有 $i,\ j \in \{1,\dots,m\}$ 以及对于所有 $X \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_p \otimes \mathbb{F}_q$

$$\mathrm{tr}((E_{ji} \otimes v_{pq}^T)X) = \mathrm{tr}((E_{ji} \otimes v_p^T \otimes v_q^T)X).$$

我们得出结论，$E_{ji} \otimes v_{pq}^T = E_{ji} \otimes v_p^T \otimes v_q^T$因此

$$v_{pq} = v_p \otimes v_q. \qquad \square$$

引理 5. 设 $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \mathbb{F}^2$ 和 $\mathbf{0} \neq \mathbf{b} \in \mathbb{F}^q$，其中 q 是一个素数。当且仅当$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$

(a) $q = 2$ 且某个 $\beta \in \mathbb{F}$ 下有一个 $= \beta b$，*(b)* $q \neq 2$ 且 a 和 b 具有以下形式之一（对某个 $\beta \in \mathbb{F}$）：*(i)* $a = (1, 0)^T$，$b = \beta(1, 0, \dots, 0)^T$，*(ii)* $a = (0, 1)^T$，$b = \beta(0, \dots, 0, 1)^T$，*(iii)* $a = (1, 1)^T$，$b = \beta(1, 1, \dots, 1)^T$。

证明。(a) 若 $q=2$，则 $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}=\mathbf{b}\otimes\mathbf{a}$ 当且仅当

$$\begin{pmatrix} a_1\mathbf{b} \\ \vdots \\ a_p\mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1\mathbf{a} \\ \vdots \\ b_p\mathbf{a} \end{pmatrix}.$$

由于$\mathbf{b}$ 有非零项，令 $b_j\neq 0$。则$\mathbf{a}=\beta\mathbf{b}$，其中 $\beta=a_j/b_j$。

(b) 令 $k\in 1,\ldots,2q$。则存在唯一的 $Q_{q,k},R_{2,k}\in\{1,2\}$ 和 $Q_{2,k},R_{q,k}\in\{1,\ldots,q\}$，使得

$$k-1=(Q_{q,k}-1)q+(R_{q,k}-1)=(Q_{2,k}-1)2+(R_{2,k}-1).$$

$\mathbf{a}$ 和$\mathbf{b}$ 的各项满足

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_k=a_{Q_{q,k}}b_{R_{q,k}}=a_{R_{2,k}}b_{Q_{2,k}}=(\mathbf{b}\otimes\mathbf{a})_k.$$

给定 $k\in\{1,\ldots,2q\}$，令 k'定义如下

$$k'-1=(R_{q,k}-1)2+(Q_{q,k}-1).$$

Then

$$Q_{q,k}=R_{2,k'},\quad R_{q,k}=Q_{2,k'}.$$

由此可得

$$a_{Q_{q,k'}}b_{R_{q,k'}}=a_{R_{2,k'}}b_{Q_{2,k'}}=a_{Q_{q,k}}b_{R_{q,k}}=a_{R_{2,k}}b_{Q_{2,k}}. \tag{3}$$

定义由以下关系生成的 $\sim$在 $\{1,\ldots,2q\}$上的等价关系

$$k\sim k' \qquad \text{if} \qquad Q_{q,k}=R_{2,k'} \text{ and } R_{q,k}=Q_{2,k'}.$$

此外，令 $n\colon\{1,\ldots,2q\}\to\{1,\ldots,2q\}$为由下式给出的双射

$$n(k):=(R_{q,k}-1)2+Q_{q,k}.$$

因此，$k\sim n(k)$当且仅当存在 $j\in\mathbb{N}$使得$k'=n^j(k)$。特别地，$n(1)=1$ 且 $n(2q)=2q$。令 $[k]_\sim$ 表示一个等价类。由等式 (3) 可得，对于所有$k'\in[k]_\sim$，$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_k=(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_{k'}$。现在假设 $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_k\neq 0$。那么，对于所有 $k'\in[k]_\sim$，$a_{Q_{q,k'}},a_{R_{2,k'}},b_{Q_{2,k'}},b_{R_{q,k'}}\neq 0$，并且由等式 (3)，

$$\frac{a_{R_{2,k'}}}{a_{R_{2,k}}}=\frac{b_{Q_{2,k}}}{b_{Q_{2,k'}}},\qquad \frac{a_{Q_{q,k'}}}{a_{Q_{q,k}}}=\frac{b_{R_{q,k}}}{b_{R_{q,k'}}}.$$

分为三种情况：$a_1,a_2\neq 0$, $a_1\neq 0$, $a_2=0$ 和 $a_1=0$, $a_2\neq 0$。因此，(i) $a_1\neq 0,a_2=0$：由于 $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}=\mathbf{b}\otimes\mathbf{a}$,

$$a_1(b_1,b_2,\ldots,b_q,0,\ldots,0,0)=a_1(b_1,0,\ldots,b_{\frac{q+1}{2}},0,\ldots,b_q,0).$$

设 $k\in\{2,\ldots,q\}$。那么 $Q_{q,k}=1$ 和 $R_{q,k}=k$ 且 $n(k)=2(k-1)+1$。若 $n(k)>q$，则 $a_1b_k=(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_{n(k)}=0$。一般而言，若 $n^{j-1}(k)\leq q$，则 $n^j(k)=2^j(k-1)+1$。存在一个 $J\in\mathbb{N}$ 使得 $n^J(k)>q$，因此 $a_1b_k=(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_{n^J(k)}=0$。由此可得

$$\mathbf{a}=a_1(1,0)^T,\qquad \mathbf{b}=b_1(1,0,\ldots,0)^T.$$

取 $\beta=b_1/a_1$ 得到形式 (i)。

(ii) $a_1 = 0,\ a_2 \neq 0$: 我们有

$$a_2(0,0,\dots,0,b_1,\dots,b_{q-1},b_q) = a_2(0,b_1,\dots,0,b_{\frac{q+1}{2}},\dots,0,b_q).$$

设 $k \in \{1,\dots,q-1\}$。则 $Q_{q,\ q+k} = 2$ 且 $R_{q,\ q+k} = k$ 且 $n(q+k) = 2k$。若 $n(q+k) \leq q$，则 $a_2 b_k = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{n(q+k)} = 0$。一般而言，若 $n^{j-1}(q+k) > q$，则 $n^j(q+k) = 2^j k$。由于 n 的值域有界于 $2q$，因此存在一个 $J \in \mathbb{N}$，使得 $n^J(q+k) \leq q$，从而 $a_2 b_k = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{n^J(q+k)} = 0$。由此可得

$$\mathbf{a} = a_2(0,1)^T, \qquad \mathbf{b} = b_q(0,\dots,0,1)^T.$$

取 $\beta = b_q/a_2$，得到形式 (ii)。

(iii) $a_1,\ a_2 \neq 0$: 我们有

$$\begin{aligned}&\big(a_1b_1,\ \ a_1b_2,\ a_1b_3,\ \dots,\ \ a_1b_q,\ \ \ a_2b_1,\ \ \dots,\ a_2b_{q-2},\ a_2b_{q-1},\ a_2b_q\big)\\ &= \big(a_1b_1,\ a_2b_1,\ a_1b_2,\ \dots,\ a_1b_{\frac{q+1}{2}},\ a_2b_{\frac{q+1}{2}},\ \dots,\ a_2b_{q-1},\ \ a_1b_q,\ \ a_2b_q\big)\end{aligned}$$

沿箭头依次推导，可得等式序列

$$\begin{aligned}a_1b_q = a_2b_{q-1} = a_2b_{q-2} = \cdots = a_2b_{\frac{q+1}{2}} &= a_2b_1\\ &= a_2b_1 = a_1b_2 = a_1b_3 = \cdots = a_1b_{\frac{q+1}{2}}.\end{aligned}$$

由此可知，对某些 α、β、$\gamma \in \mathbb{F}$，有 $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (\alpha,\beta,\beta,\dots,\beta,\beta,\gamma)$。若 $\beta = 0$，则 $\alpha = 0$ 或 $\gamma = 0$（即得到非零向量的克罗内克积 $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$）。两种情形均与 a_1、$a_2 \neq 0$ 矛盾。因此$\beta \neq 0$。由于 $a_1\mathbf{b} = (\alpha,\beta,\dots,\beta)$ 与 $a_2\mathbf{b} = (\beta,\dots,\beta,\gamma)$ 线性相关，故 $\alpha = \gamma = \beta$。于是我们得出

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (\beta,\dots,\beta) = (1,1) \otimes \beta(1,\dots,1). \qquad \square$$

引理 6. 设 $A \in \mathbb{F}_2$ 与 $B \in \mathbb{F}_q$，其中 q 为素数，且 $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) = 1$。设 J_q 为每个元素均等于 *1* 的 $q \times q$ 矩阵。元素为 *0* 或 *1* 的矩阵将被假定具有使该陈述有意义所需的全部元素，且这些元素等于零或一；并且在每种情形下，下述形式都是唯一的。则$A \otimes B = B \otimes A$ 当且仅当

(a) $q = 2$ 和 $A = B$, ***(b)*** $q \neq 2$、A 和 B 具有以下形式（取决于 $\mathbb{F}$的特征）

$$\begin{aligned}&(i)\ A = \frac{1}{2}I_2,\ B = \frac{1}{q}I_q, && (ii)\ A = \frac{1}{2}J_2,\ B = \frac{1}{q}J_q.\\ &(iii)\ A = E_{11},\ B = E_{11}, && (iv)\ A = E_{22},\ B = E_{qq},\\ &(v)\ A = \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}1&1\\0&0_{q-1}\end{pmatrix}, && (vi)\ A = \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}0_{q-1}&0\\1&1\end{pmatrix},\\ &(vii)\ A = \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}1&0\\1&0_{q-1}\end{pmatrix}, && (viii)\ A = \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}0_{q-1}&1\\0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

证明。 (a) 若 $q=2$，则 $A\otimes B=B\otimes A$ 当且仅当

$$\begin{pmatrix}(A)_{1,1}B & (A)_{1,2}B\\ (A)_{2,1}B & (A)_{2,2}B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(B)_{1,1}A & (B)_{1,2}A\\ (B)_{2,1}A & (B)_{2,2}A\end{pmatrix}.$$

由于 B 有非零元素（$\mathrm{tr}(B)=1$），设$(B)_{i,\ j}\neq 0$。于是 $A=\alpha B$其中 $\alpha=(A)_{i,\ j}/(B)_{i,\ j}$。由于 $1=\mathrm{tr}(A)=\alpha\mathrm{tr}(B)=\alpha$，我们有 $A=B$。

(b) 注意到，(vii) 和 (viii) 可由 (v) 和 (vi) 转置得到；并且 $A\otimes B=B\otimes A$ 成立，当且仅当 $A^T\otimes B^T=B^T\otimes A^T$成立。令 $\mathrm{diag}(X)$ 表示 X主对角线元素构成的向量。那么

$$\begin{aligned}\mathrm{diag}(A)\otimes\mathrm{diag}(B)&=\mathrm{diag}(A\otimes B)\\ &=\mathrm{diag}(B\otimes A)=\mathrm{diag}(B)\otimes\mathrm{diag}(A).\end{aligned}$$

令 $\mathrm{cdiag}(X)$ 表示矩阵X副对角线元素构成的向量。同理,

$$\mathrm{cdiag}(A)\otimes\mathrm{cdiag}(B)=\mathrm{cdiag}(B)\otimes\mathrm{cdiag}(A).$$

设$\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_2$为 A的列向量，并设$\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_q$为 B的列向量。那么

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\otimes\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1\otimes\mathbf{b}_q & \mathbf{a}_2\otimes\mathbf{b_1} & \cdots & \mathbf{a}_2\otimes\mathbf{b}_{q-1} & \mathbf{a}_2\otimes\mathbf{b}_q\end{pmatrix}\\ &\quad=A\otimes B=B\otimes A\\ &\quad=\begin{pmatrix}\mathbf{b}_1\otimes\mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1\otimes\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{b}_q\otimes\mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_q\otimes\mathbf{a}_2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

或者等价地,

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{b}_{2j}=\mathbf{b}_j\otimes\mathbf{a}_2 \qquad j\in\left\{1,\ldots,\frac{q-1}{2}\right\},\\ &\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{b}_{2j-1}=\mathbf{b}_j\otimes\mathbf{a}_1 \quad j\in\left\{2,\ldots,\frac{q+1}{2}\right\}\end{aligned}\tag{4}$$

行向量也同理。因此， A 的主副对角线、主对角线、第一列和最后一列的列向量及行向量，都必须是引理 5 中的某种形式，或为零。由于 $\mathrm{tr}(A)=1$, A 将具有以下形式

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

我们有 $\mathrm{rank}(A)\in\{1,2\}$。假设 $\mathrm{rank}(A)=2$，那么 A 具有以下形式之一

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

例如，考虑 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的情形，此时很容易证明 B必定具有以下形式

$$B = \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & * & \cdots & * & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & * & 0 \\ 1 & * & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & * & \cdots & * & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（其中 $*$ 表示任意取值，每个条目可以取不同的值）；又由于根据引理 5， B 的主反对角线必须全部为 1，而主对角线必须呈现 $(1, 0, \ldots, 0)$ 的形式（同样根据引理 5），它与主反对角线恰好有一个条目相同（$q > 2$ 是素数），因此不存在满足 $A \otimes B = B \otimes A$ 且 $\operatorname{tr}(B) = 1$的 B。其余所有例子同样会导出矛盾，唯有$A = \frac{1}{2} I_2$例外。若 $A = \frac{1}{2} I_2$，则 B 的主对角线条目仅由单个数 β 构成，因此 $1 = \operatorname{tr}(B) = \beta q$；结合引理 5 中关于首末行和首末列的形式，可得如下形式：

$$B = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & * & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \iddots & * & 0 \\ 0 & * & \iddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & * & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由于

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{a}_2 = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

我们得到 $\mathbf{b}_2 = \frac{1}{q}(0,\ 1,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)^T$，类似地，$\mathbf{b}_{q-1} = \frac{1}{q}(0,\ \ldots\ldots,\ 0,\ 1,\ 0)^T$。对于 B 的第二个和第 $(q-1)$ 个行向量，同样成立。现在

$$\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{a}_1 = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

这表明 $\mathbf{b}_3 = \frac{1}{q}(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0)^T$。对$\mathbf{b}_{q-2}$ 也可作类似论证，并以同样方式继续下去，最终由方程（4）得出$B = \frac{1}{q} I_q$。如果秩$(A) = 1$，那么 A 的形式之一为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

例如，如果 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，那么 B 必定具有以下形式

$$B=\beta\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&\cdots&0\\0&0&*&\cdots&\cdots&*\\0&*&\ddots&\ddots&\cdots&*\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&*&\cdots&\ddots&\ddots&*\\0&*&\cdots&\cdots&*&0\end{pmatrix}.$$

由此可见，由于$\mathbf{a}_1\neq\mathbf{0}$ 且$\mathbf{a}_2=\mathbf{0}$，$\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{b}_2=\mathbf{b}_1\otimes\mathbf{a}_2$ 当且仅当$\mathbf{b}_2=\mathbf{0}$。这些方程及其推论如下图所示:

$$\begin{array}{c}(\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{b}_1,\ \mathbf{a}_1\otimes\mathbf{b}_2,\ \mathbf{a}_1\otimes\mathbf{b}_3,\ \ldots,\ \mathbf{a}_1\otimes\mathbf{b}_q,\quad \mathbf{a}_2\otimes\mathbf{b}_1,\quad \ldots,\ \mathbf{a}_2\otimes\mathbf{b}_{q-1},\ \mathbf{a}_2\otimes\mathbf{b}_q)\\ \updownarrow\quad\ \updownarrow\ \searrow\ \updownarrow\qquad\qquad\updownarrow\qquad\qquad\qquad\qquad\updownarrow\\ =(\mathbf{b}_1\otimes\mathbf{a}_1,\ \mathbf{b}_1\otimes\mathbf{a}_2,\ \mathbf{b}_2\otimes\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{b}_{\frac{q+1}{2}}\otimes\mathbf{a}_1,\ \mathbf{b}_{\frac{q+1}{2}}\otimes\mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_q\otimes\mathbf{a}_1,\quad \mathbf{b}_q\otimes\mathbf{a}_2)\\ \Downarrow\quad\ \Downarrow\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Downarrow\\ \mathbf{b}_2=\mathbf{0}\quad\mathbf{b}_3=\mathbf{0}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\mathbf{b}_q=\mathbf{0}\end{array}$$

照此继续，我们由 (4) 得出

$$\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{b}_{2j}=\mathbf{b}_j\otimes\mathbf{a}_2\iff\mathbf{b}_{2j}=\mathbf{0},\qquad j\in\left\{1,\ldots,\frac{q-1}{2}\right\}.$$

现在$\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{b}_3=\mathbf{b}_2\otimes\mathbf{a}_1=\mathbf{0}$从而$\mathbf{b}_3=\mathbf{0}$。然后由$\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{b}_5=\mathbf{b}_3\otimes\mathbf{a}_1=\mathbf{0}$我们得到$\mathbf{b}_5=\mathbf{0}$。一般地，对于 $1\le k\le\dfrac{q+1}{4}$，——

$$\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{b}_{2(2k)-1}=\mathbf{b}_{2k}\otimes\mathbf{a}_1=\mathbf{0}\iff\mathbf{b}_{2(2k)-1}=\mathbf{0},$$

并且（由于$2k-1<2(2k-1)-1$，归纳地使用上述方程与下述方程），对于 $1\le k\le\dfrac{q-1}{4}$，——

$$\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{b}_{2(2k-1)-1}=\mathbf{b}_{2k-1}\otimes\mathbf{a}_1=\mathbf{0}\iff\mathbf{b}_{2(2k-1)-1}=\mathbf{0}.$$

最后，$\mathbf{0}=\mathbf{a}_2\otimes\mathbf{b}^{q-1}=\mathbf{b}_q\otimes\mathbf{a}_1$ 从而$\mathbf{b}_q=\mathbf{0}$。按照引理 5(iii) 的图示论证，并结合如上所述$\mathbf{b}_{2j}=\mathbf{0}$ 这一事实，我们得到对于 $j\in\{2,\ldots,q\}$ 有$\mathbf{b}_j=\mathbf{0}$。由此可得

$$B=\beta\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&\cdots&0\\0&0&\ddots&\ddots&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\ddots&\ddots&0\\0&0&\cdots&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

从而得到 (iii)。其他秩一矩阵同理可得其余情形。□

现在我们引入以下记号

$$x^{\otimes^j} = \underbrace{x \otimes \cdots \otimes x}_{j \text{ terms}}.$$

我们有如下素数分解定理的类比。

推论 3. 设 $\ominus$ 是由矩阵对 $(\upsilon_n, 0)$ $m, n \in \mathbb{N}$给出的一致克罗内克差，如命题 *5* 所述。以下条件等价：

(a) 对所有 $X \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_p \otimes \mathbb{F}_q$, $Y \in \mathbb{F}_q$, $Z \in \mathbb{F}_p$和 $m, p, q \in \mathbb{N}$:

$$(X \ominus Y) \ominus Z = X \ominus (Z \oplus Y),$$

(b) 对每个素数 $p \in \mathbb{N}$，都存在唯一的 $\pi_p \in \mathbb{F}_p$，使得 $\operatorname{tr}(\pi_p) = 1$，满足：若 $n \in \mathbb{N}$ 的素数分解为

$$n = p_1^{j_1} \cdots p_r^{j_r}$$

其中 $r \in \mathbb{N}$、j_1、……、$j_r \in \mathbb{N}$ 和 p_1、……、p_r 是互不相同的素数，则 υ_n 具有唯一分解

$$\upsilon_n = \pi_{p_1}^{\otimes^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \pi_{p_r}^{\otimes^{j_r}},$$

其中 $\mathbb{F}_n = \mathbb{F}_{p_1}^{\otimes^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \mathbb{F}_{p_r}^{\otimes^{j_r}}$，对于每个形如 $q_1 \cdots q_k$ 的素数乘积，使得 $n = q_1 \cdots q_k$、$k = j_1 + \cdots + j_r$，

$$\upsilon_n = \pi_{p_1}^{\otimes^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \pi_{p_r}^{\otimes^{j_r}} = \pi_{q_1} \otimes \cdots \otimes \pi_{q_k}.$$

5. 结论

我们以显而易见的方式定义了克罗内克差，并确立了克罗内克商与克罗内克差之间的基本关系。与克罗内克商理论类似，克罗内克差的均匀性构成了丰富的数学结构。通过矩阵表示研究克罗内克差，可以发现它们与克罗内克积和克罗内克和之间存在紧密联系，这些联系反映了克罗内克和的性质。

仍有许多悬而未决的问题，尤其是：我们期待能够更具体地建立克罗内克差各类与克罗内克商各类之间的联系。此外，由克罗内克差（在实数范围内）取指数而得到的克罗内克商

$$\exp(A \ominus B) = \exp(A) \oslash \exp(B)$$

仍未得到探索。在本文中，我们仅考虑了线性克罗内克商与克罗内克差，而非线性克罗内克差则提供了一种截然不同的视角，这对于研究由克罗内克差取指数所诱导的克罗内克商似乎是必要的。

References

1. Dagmar Bruß 和 Chiara Macchiavello, *How the first partial transpose was written*, 《物理学基础》**35** (2005), 第11期, 1921–1926。2. Katarzyna Filipiak、Daniel Klein 和 Erika Vojtkov´a, *The properties of partial trace andblock trace operators of partitioned matrices*, 《电子线性代数期刊》**33** (2018), 3–15。3. Alexander Graham, *Kronecker products and matrix calculus with applications*, Ellis Horwood有限公司，纽约，1981年。

4. YORICK HARDY, *On Kronecker quotients*, 《电子线性代数期刊》**27** (2014), 172–189。5. Harold V. Henderson 和 Shayle R. Searle, *The vec-permutation matrix the vec operator and Kronecker products: A review* , , **9** 1981 271 288 《线性与多重线性代数》 () , –。6. Roger A. Horn 和 Charles R. Johnson, *Topics in matrix analysis*, 剑桥大学出版社, 1991。7. Paul Leopardi, *A generalized FFT for Clifford algebras*, 《比利时数学学会通报》**11** (2005), 663–688。8. Ottmar Loos, *Bimodule-valued hermitian and quadratic forms*, 《数学档案》**62** (1994), 第2期, 134–142。9. Asher Peres, *Separability criterion for density matrices*, 《物理评论快报》**77** (1996), 1413–1415。10. Robert Piziak, *Orthostructures from sesquilinear forms. a primer*, 《国际理论物理学杂志》**31** (1992), 第5期, 871–879。11. Kathrin Sch ¨ *On the Kronecker product* `http://orion.math.uwaterloo.ca/~hwolkowi/henry/reports/kronessaykathrin.ps` 2004 acke, , , 。12. Willi-Hans Steeb 和 Yorick Hardy, *Matrix calculus, Kronecker product and tensor product*, 第3版, 世界科技出版公司, 新加坡, 2019。

Appendix A. Trace, transpose and orthogonality structures in tensor products

本节给出用于证明第 3 节中定理的定义和技术结果。技术引理见附录 B。后续结果将用到 [2] 中定义的分块迹与偏迹。

定义 6（分块迹与偏迹）。 记 $\mathrm{Btr}:\ \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m \to \mathbb{F}_m$ 为如下定义的线性映射:

$$\mathrm{Btr}(B \otimes C) = \mathrm{tr}(B)C, \quad \text{for all } B \in \mathbb{F}_n, C \in \mathbb{F}_m$$

并记 $\mathrm{Ptr}:\ \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m \to \mathbb{F}_n$ 为如下定义的线性映射:

$$\mathrm{Ptr}(B \otimes C) = \mathrm{tr}(C)B, \quad \text{for all } B \in \mathbb{F}_n, C \in \mathbb{F}_m$$

并作线性延拓。

我们还需要对三阶张量及其组合给出类似的定义，如下所示。

定义 7. 记 $\mathrm{tr}_1:\ \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m \to \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m$ 为如下线性映射:

$$\mathrm{tr}_1(A \otimes B \otimes C) = \mathrm{tr}(A)B \otimes C, \quad \text{for all } A, C \in \mathbb{F}_m,\ B \in \mathbb{F}_n$$

并作线性延拓。类似地，定义映射 $\mathrm{tr}_2:\ \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m \to \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_m$、$\mathrm{tr}_3:\ \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m \to \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$、$\mathrm{tr}_{12}:\ \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m \to \mathbb{F}_m$，如下:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_1(A \otimes B \otimes C) &= \mathrm{tr}(A)B \otimes C, && \text{for all } A, C \in \mathbb{F}_m,\ B \in \mathbb{F}_n,\\
\mathrm{tr}_2(A \otimes B \otimes C) &= \mathrm{tr}(B)A \otimes C, && \text{for all } A, C \in \mathbb{F}_m,\ B \in \mathbb{F}_n,\\
\mathrm{tr}_3(A \otimes B \otimes C) &= \mathrm{tr}(C)A \otimes B, && \text{for all } A, C \in \mathbb{F}_m,\ B \in \mathbb{F}_n,\\
\mathrm{tr}_{12}(A \otimes B \otimes C) &= \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)C, && \text{for all } A, C \in \mathbb{F}_m,\ B \in \mathbb{F}_n,
\end{aligned}$$

其中每个映射都作线性延拓。

与分块迹和偏迹类似，我们可以按照 [1, 9] 中的定义来定义块转置和部分转置。

定义 8（块转置和部分转置）。 将线性映射 BT：$\mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m \to \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m$ 记为

$$\mathrm{BT}(B \otimes C) = (B^T) \otimes C, \quad \text{for all } B \in \mathbb{F}_n,\, C \in \mathbb{F}_m$$

以及线性映射 PT： $\mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m \to \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m$ by

$$\mathrm{PT}(B \otimes C) = B \otimes (C^T), \quad \text{for all } B \in \mathbb{F}_n,\, C \in \mathbb{F}_m$$

以及线性延拓。

我们还将使用张量积不同模式下的转置，类似于部分转置，其定义如下。

定义 9. 记 T_3： $\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m \to \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m$ 为如下定义的线性映射

$$T_3(A \otimes B \otimes C) = A \otimes B \otimes (C^T), \quad \text{for all } A, C \in \mathbb{F}_m,\, B \in \mathbb{F}_n$$

以及线性扩张。类似地，用 T_{12}： $\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m \to \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m$表示由下式定义的映射

$$T_{12}(A \otimes B \otimes C) = (A^T) \otimes (B^T) \otimes C, \quad \text{for all } A, C \in \mathbb{F}_m,\, B \in \mathbb{F}_n$$

以及线性扩张。

注 8. 设 $\mathrm{Id}_m : \mathbb{F}_m \to \mathbb{F}_m$ 表示 $\mathbb{F}_m$ 上的恒等映射， $T : \mathbb{F}_m \to \mathbb{F}_m$ 表示矩阵转置。于是我们可以写成 $\mathrm{tr}_1 = \mathrm{tr} \otimes \mathrm{Id}_n \otimes \mathrm{Id}_m$、$\mathrm{tr}_{12} = \mathrm{tr} \otimes \mathrm{tr} \otimes \mathrm{Id}_m$,$T_3 = \mathrm{Id}_m \otimes \mathrm{Id}_n \otimes T$ 等。我们还有 $\mathrm{Btr} \circ \mathrm{tr}_1 = \mathrm{tr}_{12} = \mathrm{Btr} \circ \mathrm{tr}_2$。

注 9. 张量积 $\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ 在赋予乘积 $\cdot : \mathbb{F}_m \times (\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n) \to \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ （由 $A \cdot (B \otimes C) := (AB) \otimes C$ 及其线性扩张给出）时，成为一个左 $\mathbb{F}_m$-模。类似地， $\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ 是一个右 $\mathbb{F}_m$-模，其中 $(B \otimes C) \cdot A := (BA) \otimes C$，从而使 $\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ 成为一个 $(\mathbb{F}_m, \mathbb{F}_m)$-双模。双线性形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$： $\mathbb{F}_n \times \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}$由下式给出

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^T)$$

诱导出形式 $(\cdot, \cdot) : (\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n) \times (\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n) \to \mathbb{F}_m$,

$$(X, Y) = \mathrm{Ptr}(XY^T).$$

现在， $\mathbb{F}_m$ 是一个 $\mathbb{F}$-代数，在转置作用下同构于其对代数 $\mathbb{F}_m^{op}$(乘法为$A \cdot_{op} B = B \cdot A$)，即

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T = A^T \cdot_{op} B^T.$$

因此， $\mathbb{F}_m$ 是一个$(\mathbb{F}_m, \mathbb{F}_m^{op})$-双模，其左 $\mathbb{F}_m$-模乘法为 $A * B := A \cdot B$，右 $\mathbb{F}_m^{op}$-模乘法为 $B \odot A := B \cdot A^T$，特别是

$$(B \odot A) \odot C = (B \cdot A^T) \cdot C^T = B \cdot (A^T \cdot C^T) = B \cdot (C \cdot A)^T = B \odot (A \cdot_{op} C).$$

Now,

$$(A * B \odot C)^T = (ABC^T)^T = CB^T A^T = C * B^T \odot A.$$

这表明，转置是一个$(\mathbb{F}_m^{op}, \mathbb{F}_m)$-双模 $\mathbb{F}_m$ 上的对合，其含义如 [8]所述。此外，现在我们可以利用引理 7证明$(\cdot, \cdot)$是一个取值于 $\mathbb{F}_m$的半双线性型，其含义如 [8] 所述（这里我们使用左模 $\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ ， 而非 Loos 定义的右模；不过这两个概念是等价的）， 即:

$$(A \cdot X, B \cdot Y) = A * (X, Y) \odot B$$

我们将其表述为下一个引理。这个半双线性型在 $\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ 上诱导出一个正交关系（引理 8）。

引理 7. 设函数 $(\cdot,\cdot) : (\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n) \times (\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n) \to \mathbb{F}_m$ 由$(X,Y) = \mathrm{Ptr}(XY^T)$给出。那么对于所有的 $X, Y, Z \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$, $A \in \mathbb{F}_m$ 和 $\alpha \in \mathbb{F}$,

(a) $(X + \alpha Y, Z) = (X, Z) + \alpha(Y, Z)$, (b) $(X, Y + \alpha Z) = (X, Y) + \alpha(X, Z)$, (c) $(A \cdot X, Y) = A(X, Y)$, (d) $(X, A \cdot Y) = (X, Y)A^T$.

证明。 (a) 和 (b) 可由转置和偏迹的线性性以及矩阵乘积的分配律得到。现在 X 和 Y 可写成如下形式

$$X = \sum_{i,j=1}^{n} X_{ij} \otimes E_{ij}, \qquad Y = \sum_{k,l=1}^{n} Y_{kl} \otimes E_{kl}$$

对于某些矩阵 $X_{ij}, Y_{kl} \in \mathbb{F}_m$, $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$。直接计算可得

$$\begin{aligned}(X,Y) &= \mathrm{Ptr}\left(\left(\sum_{i,j=1}^{n} X_{ij} \otimes E_{ij}\right)\left(\sum_{k,l=1}^{n} Y_{kl} \otimes E_{kl}\right)^T\right) \\ &= \mathrm{Ptr}\left(\sum_{i,j,k,l=1}^{n} X_{ij}Y_{kl}^T \otimes (E_{ij}E_{lk})\right) \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \mathrm{tr}(E_{ij}E_{lk})X_{ij}Y_{kl}^T = \sum_{i,j=1}^{n} X_{ij}Y_{ij}^T, .\end{aligned}$$

$_n$且由于 $A \cdot X = \sum (AX_{ij})$ $\otimes E_{ij}$,$_{i,j=1}$

$$(A \cdot X, Y) = \sum_{i,j=1}^{n} (AX_{ij})Y_{ij}^T = A\left(\sum_{i,j=1}^{n} X_{ij}Y_{ij}^T\right) = A(X,Y).$$

同理,

$$(X, A \cdot Y) = \sum_{i,j=1}^{n} X_{ij}(AY_{ij})^T = \left(\sum_{i,j=1}^{n} X_{ij}Y_{ij}^T\right) A^T = (X,Y)A^T.$$

因此，(c) 和 (d) 成立。 □

例 1. 众所周知，复数的 Möbius 矩阵表示由 $a + ib \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ 和复共轭 $a - ib \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)^T$ 给出，产生函数 $\phi : \mathbb{C}_n \to \mathbb{R}_2 \otimes \mathbb{R}_n$，即

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij})E_{ij} \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} \begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ -b_{ij} & a_{ij} \end{pmatrix} \otimes E_{ij}.$$

那么， $\mathbb{R}_2 \otimes \mathbb{R}_n$ 上的半双线性型 $(\cdot,\cdot)$ 等价于 $\mathbb{C}_n$上的希尔伯特-施密特内积（也称为弗罗贝尼乌斯内积），其中希尔伯特-施密特内积定义为 $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$，而 * 表示逐元素的

转置矩阵的复共轭。很容易证明,

$$\phi(\langle A, B\rangle) = (\phi(A), \phi(B)).$$

例 1 中的表示也刻画了 $\mathbb{C}_n$中的正交性，而一般而言，半双线性型（$\cdot$, $\cdot$）会导出更一般的正交结构。

引理 8. 设 $\perp$ 是左 $\mathbb{F}_m$-模 $\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ 上的关系，当且仅当 $X \perp Y$时成立（X, Y） = （Y, X） $= 0$。则

(a) $X \perp Y \implies Y \perp X$, *(b)* $X \perp Y$和
$X \perp Z \implies X \perp (Y + Z)$, *(c)* 对所有 $A \in \mathbb{F}_m$,
$X \perp Y \implies X \perp (A \cdot Y)$, *(d)* 对所有
$Y \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \iff X = 0, \quad X \perp Y$。

证明。 (a)由 $\perp$的定义可得，(b)和(c)由引理 7可得。对于(d)，假设对所有 $Y \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n, \quad X \perp Y$。特别地，令 $Y = I_m \otimes E_{ij}$。由于X 可写成如下形式

$$X = \sum_{k,l=1}^{n} X_{kl} \otimes E_{kl}$$

对于某些矩阵 $X_{kl} \in \mathbb{F}_m$, $k, \quad l \in \{1, \ldots, n\}$，且由于 $X \perp I_m \otimes E_{ij}$

$$\begin{aligned} 0 = (X, I_m \otimes E_{ij}) &= \operatorname{Ptr}\left(\left(\sum_{k,l=1}^{n} X_{kl} \otimes E_{kl}\right)(I_m \otimes E_{ij})^T\right) \\ &= \operatorname{Ptr}\left(\sum_{k,l=1}^{n} X_{kl} \otimes (E_{kl}E_{ji})\right) = \sum_{k,l=1}^{n} \operatorname{tr}(E_{kl}E_{ji})X_{kl} \\ &= X_{ij}. \end{aligned}$$

因此可得 $X = 0$。 □

注 10。 引理 8表明，($\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$, $\perp$)是一个正交左 $\mathbb{F}_m$-模[10]。此外， $\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ 有一个正交基

$$\{ I_m \otimes E_{ij} : i, j \in \{1, \ldots, n\}\},$$

因为

$$(I_m \otimes E_{ij}, I_m \otimes E_{kl}) = \begin{cases} I_m & \text{if } i = k \text{ and } j = l, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

类似地，显然 $\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$ 是一个具有正交基的左 $\mathbb{F}_n$ 模， $\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_p$ 是一个具有正交基的左 $\mathbb{F}_n$-模，依此类推。

引理 9。 设 $X, Y \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$，则 $X = Y$当且仅当 $(X, I_m \otimes E_{ij})$ $=(Y, I_m \otimes E_{ij})$ 对所有 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$成立。

证明。设

$$X = \sum_{i,j=1}^{n} X_{ij} \otimes E_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} X_{ij} \cdot (I_m \otimes E_{ij}), \qquad Y = \sum_{k,l=1}^{n} Y_{kl} \cdot (I_m \otimes E_{kl}).$$

由引理 7 和注 10,

$$(X, I_m \otimes E_{ij}) = X_{ij}$$

由此立即可得该引理。 □

Appendix B. Additional lemmata

本节给出用于证明第 3 节中定理的技术性结果。

引理 10. 设 $C \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m$ 满足 $\mathrm{tr}_2(C) = 0$。则对所有 A、$B \in \mathbb{F}_m$，有 $\mathrm{tr}_2(C^T) = 0$、$\mathrm{tr}_2(C(A \otimes I_n \otimes B)) = 0$ 和 $\mathrm{tr}_{12}(C(A \otimes I_n \otimes B)) = 0$。

证明。 我们将 C 写成如下形式

$$C = \sum_{i,j,k,l=1}^{m} E_{ij} \otimes C_{ijkl} \otimes E_{kl}.$$

于是 $\mathrm{tr}_2(C) = 0$ 得到

$$0 = \sum_{i,j,k,l=1}^{m} \mathrm{tr}(C_{ijkl}) E_{ij} \otimes E_{kl},$$

并且由于 $E_{ij} \otimes E_{kl}$, $i, j, k, l \in \{1, \ldots, m\}$ 是 $\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_m$ 的一组基，我们有

$$\mathrm{tr}(C_{ijkl}) = 0, \qquad i, j, k, l \in \{1, \ldots, m\}.$$

因此,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_2(C^T) &= \mathrm{tr}_2\left(\sum_{i,j,k,l=1}^{m} E_{ij}^T \otimes C_{ijkl}^T \otimes E_{kl}^T\right) \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{m} \mathrm{tr}(C_{ijkl}^T) E_{ji} \otimes E_{lk} \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{m} \mathrm{tr}(C_{ijkl}) E_{ji} \otimes E_{lk} = 0.
\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_2(C(A \otimes I_n \otimes B)) &= \mathrm{tr}_2\left(\sum_{i,j,k,l=1}^{m} E_{ij}A \otimes C_{ijkl} \otimes E_{kl}B\right) \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{m} \mathrm{tr}(C_{ijkl}) E_{ij}A \otimes E_{kl}B = 0, \\
\mathrm{tr}_{12}(C(A \otimes I_n \otimes B)) &= \mathrm{tr}_{12}\left(\sum_{i,j,k,l=1}^{m} E_{ij}A \otimes C_{ijkl} \otimes E_{kl}B\right) \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{m} \mathrm{tr}(E_{ij}A)\,\mathrm{tr}(C_{ijkl}) E_{kl}B = 0.
\end{aligned}$$

□

引理 11。设 $A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m$。则

$$\mathrm{tr}_{12}(A)^T = \mathrm{tr}_{12}(T_3(A)) = \mathrm{tr}_{12}(A^T), \qquad \mathrm{tr}_3(A)^T = \mathrm{tr}_3(T_{12}(A)).$$

证明。 我们将 A 写成以下形式

$$A = \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{n} E_{ij} \otimes E_{kl} \otimes A_{ijkl},$$

从而

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_{12}(A)^T &= \left(\mathrm{tr}_{12} \left(\sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{n} E_{ij} \otimes E_{kl} \otimes A_{ijkl} \right) \right)^T \\
&= \left(\sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{n} \mathrm{tr}(E_{ij}) \, \mathrm{tr}(E_{kl}) A_{ijkl} \right)^T \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{n} \mathrm{tr}(E_{ij}) \, \mathrm{tr}(E_{kl}) A_{ijkl}^T \\
&= \mathrm{tr}_{12} \left(\sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{n} E_{ij} \otimes E_{kl} \otimes A_{ijkl}^T \right) = \mathrm{tr}_{12}(T_3(A)).
\end{aligned}$$

证明 $\mathrm{tr}_3(A)^T = \mathrm{tr}_3(T_{12}(A))$ 的方法类似。等式 $\mathrm{tr}_{12}(T_3(A)) = \mathrm{tr}_{12}(A^T)$ 可通过注意到上述证明中的 $\mathrm{tr}(E_{ij}) = \mathrm{tr}(E_{ji})$ 得到。□

引理 12. 令 $A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m$。那么

$$\mathrm{tr}_{12}(T_{12}(A)) = \mathrm{tr}_{12}(A), \qquad \mathrm{tr}_3(T_3(A)) = \mathrm{tr}_3(A).$$

证明。 证明与证明 $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T)$ 相同，其他情况依此类推。 □

引理 13。 设 $A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m$ 和 $B \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$。则

$$T_3(A(B \otimes I_m)) = T_3(A)(B \otimes I_m).$$

证明。 我们将 A写成如下形式

$$A = \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{n} E_{ij} \otimes E_{kl} \otimes A_{ijkl},$$

使得

$$\begin{aligned}
T_3(A(B \otimes I_m)) &= T_3 \left(\sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{n} ((E_{ij} \otimes E_{kl})B) \otimes A_{ijkl} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{n} ((E_{ij} \otimes E_{kl})B) \otimes A_{ijkl}^T \\
&= \left(\sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{n} (E_{ij} \otimes E_{kl}) \otimes A_{ijkl}^T \right) (B \otimes I_m) = T_3(A)(B \otimes I_m). \, \square
\end{aligned}$$

引理 14. 设 A, $B \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_m$。则

$$A = B \iff \mathrm{tr}_{12}(A(X \otimes I_m)) = \mathrm{tr}_{12}(B(X \otimes I_m)) \text{ for all } X \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n.$$

证明。考虑 $(\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n) \otimes \mathbb{F}_m$ 作为左 $\mathbb{F}_m$-模，如注9所述。由引理 9，$A = B$ 当且仅当 $\mathsf{tr}_{12}(A(E_{ij} \otimes I_m)^T) = \mathsf{tr}_{12}(B(E_{ij} \otimes I_m)^T)$ 对所有$i,\ j \in \{1, \dots, mn\}$成立。（$\Longrightarrow$）由 tr_{12}的线性性以及矩阵E_{ij} 构成 $\mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$的一组基这一事实可得。（$\Longleftarrow$）显然，因为每个 $E_{ij} \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$。□

引理15. 令 $A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_p$ 和 $B \in \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_p$。若 $\mathrm{tr}_1(A) = 0$，则$\mathrm{tr}_1(A(I_m \otimes B)) = 0$。

$_r$证明. 我们写作 $A = \sum A_{1j} \otimes A_{2j} \otimes A_{3j}$，其中 $r \in \mathbb{N}$ 和 $A_{1j} \in \mathbb{F}_m$，$A_{2j} \in \mathbb{F}_{n^{j=1}}$和 $A_{3j} \in \mathbb{F}_p$表示 $j \in \{1, \dots, r\}$。于是

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_1(A(I_m \otimes B)) &= \mathrm{tr}_1\left(\sum_{j=1}^{r} A_{1j} \otimes ((A_{2j} \otimes A_{3j})B)\right) = \sum_{j=1}^{r} \mathrm{tr}(A_{1j})(A_{2j} \otimes A_{3j})B \\ &= \left(\sum_{j=1}^{r} \mathrm{tr}(A_{1j})(A_{2j} \otimes A_{3j})\right) B = \mathrm{tr}_1(A)B = 0. \qquad \square\end{aligned}$$

引理 16. 令 $A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_p$ 和 $B \in \mathbb{F}_m$，$C \in \mathbb{F}_n$ 和 $D \in \mathbb{F}_p$。于是

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_{12}(A(B \otimes C \otimes D)) &= \mathrm{tr}_{12}(A(B \otimes C \otimes I_p))D \\ &= \mathrm{Btr}(\mathrm{tr}_2(A(B \otimes C \otimes I_p))D \\ &= \mathrm{Btr}(\mathrm{tr}_1(A(B \otimes C \otimes I_p))D, \\ \mathrm{tr}_{12}((B \otimes C \otimes D)A) &= D\,\mathrm{tr}_{12}((B \otimes C \otimes I_p)A) \\ &= D\,\mathrm{Btr}(\mathrm{tr}_1((B \otimes C \otimes I_p)A) \\ &= D\,\mathrm{Btr}(\mathrm{tr}_2((B \otimes C \otimes I_p)A).\end{aligned}$$

证明. 我们将证明第一个结论，第二个结论的证明几乎完全相同。$_r$记 $A = \sum A_{1j} \otimes A_{2j} \otimes A_{3j}$，其中 $r \in \mathbb{N}$和 $A_{1j} \in \mathbb{F}_m$，$A_{2j} \in \mathbb{F}_n$和 $A_{3j} \in \mathbb{F}_{p^{j=1}}$表示 $j \in \{1, \dots, r\}$。于是

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_{12}(A(B \otimes C \otimes D)) &= \mathrm{tr}_{12}\left(\sum_{j=1}^{r} (A_{1j}B) \otimes (A_{2j}C) \otimes (A_{3j}D)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{r} \mathrm{tr}(A_{1j}B)\,\mathrm{tr}(A_{2j}C)A_{3j}D \\ &= \left(\sum_{j=1}^{r} \mathrm{tr}(A_{1j}B)\,\mathrm{tr}(A_{2j}C)A_{3j}\right) D \\ &= \mathrm{tr}_{12}(A(B \otimes C \otimes I_p))D.\end{aligned}$$

$\mathsf{Btr} \circ \mathsf{tr}_2 = \mathsf{Btr} \circ \mathsf{tr}_1 = \mathsf{tr}_{12}$这一事实由注8得出。 □

引理17. 设 $A \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n \otimes \mathbb{F}_p$。则 $\mathsf{tr}(\mathsf{tr}_{12}(A)) = \mathsf{tr}(A)$。

$_r$证明。 我们记作 $A = \sum A_{1j} \otimes A_{2j} \otimes A_{3j}$，其中 $r \in \mathbb{N}$ 和 $A_{1j} \in \mathbb{F}_m$，$A_{2j} \in \mathbb{F}_{n^{j=1}}$和 $A_{3j} \in \mathbb{F}_p$表示 $j \in \{1, \ldots, r\}$。那么

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\operatorname{tr}_{12}(A)) &= \operatorname{tr}\left(\sum_{j=1}^{r} \operatorname{tr}(A_{1j}) \operatorname{tr}(A_{2j}) A_{3j}\right) = \sum_{j=1}^{r} \operatorname{tr}(A_{1j}) \operatorname{tr}(A_{2j}) \operatorname{tr}(A_{3j}) \\ &= \sum_{j=1}^{r} \operatorname{tr}(A_{1j} \otimes A_{2j} \otimes A_{3j}) = \operatorname{tr}\left(\sum_{j=1}^{r} \operatorname{tr}(A_{1j} \otimes A_{2j} \otimes A_{3j}\right) \\ &= \operatorname{tr}(A). \qquad \square\end{aligned}$$

引理18. 设 A，$B \in \mathbb{F}_m \otimes \mathbb{F}_n$。如果 tr($(I_m \otimes X)A$) = tr($(I_m \otimes X)B$) 对所有$X \in F_n$，则 Btr($A$) = Btr($B$)。如果 tr($(Y \otimes I_n)A$) = tr($(Y \otimes I_n)B$) 对所有 $Y \in F_m$，则 Ptr(A) = Ptr(B)。

证明。 我们将证明第一个命题，第二个命题可类似得出。记 $A = {}_m\sum E_{ij} \otimes A_{ij}$，其中 $A_{ij} \in \mathbb{F}_n$对于 i，$j \in \{1, \ldots, m\}$。类似地，记 $B = \sum_{j=1} E_{ij} \otimes_{i,\ i,\ j=1} B_{ij}$。现在，

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}((I_m \otimes X)A) &= \operatorname{tr}\left(\sum_{i,j=1}^{m} E_{ij} \otimes (XA_{ij})\right) = \sum_{i,j=1}^{m} \operatorname{tr}(E_{ij}) \operatorname{tr}(XA_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \operatorname{tr}(XA_{ii}) = \operatorname{tr}\left(X\left(\sum_{i=1}^{m} A_{ii}\right)\right) = \operatorname{tr}(X \operatorname{Btr}(A)).\end{aligned}$$

因此，对所有 $X \in \mathbb{F}_n$，我们有 tr(XBtr(A)) = tr(XBtr(B))，从而 Btr(A) =Btr(B)。 □

(K.D.Anderson) Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Johannesburg, Auckland Park, 2006, South Africa*Email address*, K.D. Anderson: kdanderson@uj.ac.za

(Y. Hardy, B. Zinsou) School of Mathematics, University of the Witwatersrand, Jo-hannesburg 2050, South Africa*Email address* yorick.hardy@wits.ac.za , *Email address* bertin.zinsou@wits.ac.za

Y. Hardy: , B. Zinsou:

(K.D. Anderson,Y. Hardy, B. Zinsou) National Institute for Theoretical and Computational Sciences (NITheCS), South Africa