部分识别的模糊性

Cheaheon Lim*

2026年2月10日

arXiv:2602.07634v1 [econ.TH] 7 Feb 2026

摘要

本文构建了一套模糊性下的学习理论，其中的模糊性源于决策者对与真实世界状态相关的数据集合所持的信念。在我们的框架中，贝叶斯学习的两个经典结果可推广至存在模糊性的情形：实验等价于后验信念的分布，且 Blackwell 信息量更大与价值更高的排序彼此一致。将这些结果应用于稳健贝叶斯分析时，我们阐明了 Gamma 极小极大问题中时间不一致性的根源，并为条件伽马极小极大准则提供了论据。我们还将这些结果应用于说服博弈，以说明我们的模型为模糊性下的沟通提供了一个自然的基准。

*哈佛大学经济系。谨向 Tomasz Strzalecki 和 Davide Viviano 致谢，他们提出的详尽意见显著改进了本稿早期版本。我还要感谢 Francesco Fabbri、Shengwu Li、Yechan Park、Matthew Rabin、Elie Tamer、Vitalii Tubdenov、Weijie Zhong，以及哈佛大学所有研讨会参与者提出的真知灼见和建议。

1 引言

我们在现实世界中遇到的数据很少能让我们作出精确推断。血液检测结果呈阳性，却无法区分同一种疾病的两种相关变体；法证分析揭示嫌疑人与犯罪有关，却无法说明该行为是故意还是意外；政策评估显示，教育补贴改变了平均结果，却无法揭示若没有这项政策会发生什么，因此平均治疗效应无法确定。在每种情况下，决策者（DM）可用的“实验”都是部分识别的，而数据只是将可能的状态范围缩小，却无法唯一识别真实世界状态。

本文研究决策者（DM）在状态空间上感知到的模糊性与其对实验的部分识别性质的信念之间的联系。在多重先验框架下，我们将由此产生的模糊性形式称为<style id='1'>部分识别的模糊性。我们的方法与部分识别下稳健贝叶斯推断的相关文献密切联系；该文献将部分识别的实验作为基本对象，并为贝叶斯推断“反推出”一类先验。[1] 特别是，Giacomini 和 Kitagawa（2021年）表明，使用我们所考虑的部分识别先验集进行贝叶斯推断，可以调和部分识别下频率学派推断与贝叶斯推断之间众所周知的不一致性（例如 Moon 和 Schorfheide，2012年）。从公理化决策理论的角度来看，决策者是否具有与部分识别的模糊性相容的信念，可以根据其对状态依赖结果的偏好来判定。更具体地说，部分识别的模糊性是将主观期望效用（SEU）理论推广到“更小”域时产生的模糊性的一种特殊情形；关于这种推广的公理基础，已有大量研究。[2] 据我们所知，我们是首个将这两个不同文献领域之间的联系形式化的研究。

我们首先提出一种新的解读：多重先验模型对决策者认为可能的实验集合施加了一致性约束。这一限制与信念的鞅性质理念相近，体现了这样一种直觉：如果可以根据某个无歧义样本空间的实现值区分不同先验，那么决策者事前就不应对数据生成过程一无所知（除其属于先验集合之外）。在后验信念层面，我们引入*Aumann*可信性，将贝叶斯可行性推广到模糊性情形。该条件在 Aumann 期望下施加了鞅性质的集值版本，要求那些事前感知到更多模糊性的决策者，在实验实现后平均而言仍然如此。

[1]综述请参见 Giacomini 等人（2025年）。[2]这类公理化研究并未详尽列举，包括 Epstein 和 Zhang（2001年）；Zhang（2002年）；Kopylov（2007年）；Lehrer（2012年）；Gul 和 Pesendorfer（2014年）。

我们的第一个主要结果表明，在逐先验更新下，一致的实验会诱导后验信念上的Aumann可行分布，当且仅当先验集合是部分识别的。回顾一下，在单一先验的贝叶斯设定中，无论先验为何，所有实验都会诱导后验上的贝叶斯可信分布。[3]因此，我们的结果说明，只有在关于实验和先验集合的特定结构性假设下，信念的鞅性质才能推广到集值情形。事实证明，这一结构极大地简化了模糊性下学习的分析。例如，我们表明，当价值函数采取 Gilboa 和 Schmeidler（1989）的最大最小期望效用（MEU）形式时，Blackwell（1951，1953）的信息量更大与价值更高这两个排序之间的等价关系，可以轻松推广到部分识别的模糊性情形。

我们也对部分识别下贝叶斯决策的计量经济学文献作出了贡献。在这类文献中，通常假设拥有部分识别先验集的决策者会按照 Giacomini and Kitagawa (2021) 的方法进行稳健贝叶斯推断 、。[4] 在这一框架下，会出现两种最优性概念：Gamma-极小极大准则选择事前最优的依样本而定的决策规则，而条件伽马极小极大准则则选择在样本空间实现值给定时的最优行动。除非先验集合是单元素集合，否则这两种准则通常并不一致，对于应采用哪种准则也没有明确共识（例如，Kitagawa，2012年）。利用我们对 Aumann 合理分布的刻画，我们通过证明时间一致的事前准则（称为 Gamma*-极小极大）在部分识别下保留了 Gamma-极小极大准则的理想性质，来解决这一问题。由于 Gamma*-极小极大规则也与条件 Gamma-极小极大行动一致，我们将结果解读为支持后者的一种论据。

我们的第二个主要结果刻画了一致实验与 Aumann可行分布完全等价的条件：一致实验不仅会诱导出 Aumann可行分布，而且每个 Aumann可行分布也都能由一致实验生成。我们将这一条件称为最大部分识别，它要求先验集合能够分解为支撑集互不相交的先验极端集合的闵可夫斯基和。该条件将稳健贝叶斯推断中使用的先验集合类作为一种特殊情形纳入其中；在这种情形下，分解由一些低维单纯形构成，且这些单纯形分别支撑于状态空间某种划分的各个单元上。我们的结果可被理解为将 Aumann 和 Maschler（1995）的“分裂”刻画扩展到了 Aumann可信性下的多重先验情形。[5]

[3]请注意，对于单元素先验集合，一致性条件总是成立的。[4]例如，参见 Christensen等人（2022年）；Fern´andez 等人（2024年）；Giacomini 等人（2025年）。[5]Laclau and Renou（2017年）证明，逐个先验的贝叶斯可行性版本与一项额外的似然比约束，刻画了可由实验诱导的后验信念剖面。尽管表面上相似，我们的结果却截然不同，因为后验分布剖面的凸包的 Aumann期望通常并不对应于先验剖面的凸包。

本文还通过考察最大部分识别在一场说服博弈中的影响，为近期关于信念具有模糊性时信息设计的文献作出贡献。我们表明，一致性与 Aumann可信性都可以解释为对发送者可用策略集合的约束。以说服博弈中的经典例子为例：检察官（发送者）试图说服法官（接收者）定罪一名被告。法律和技术约束限制了检察官能够生成的“数据”类型：法证检验可以确定被告是否参与了犯罪，却无法说明其心理状态或恶意程度，尽管这些因素对法官的裁决至关重要。我们的部分识别说服理论说明了此类限制如何影响主体的信念与策略，从而更真实地描述模糊性下的沟通。此外，一致实验与Aumann可行分布之间的等价性结果，使我们能够运用 Kamenica 和 Gentzkow（2011）的标准凹化逻辑来求解均衡。

1.1 相关文献

越来越多的文献将模糊性引入经济理论中的经典问题。在这类情境中，模糊性既可以外生地进入模型（例如，Wolitzky，2016年；Kosterina，2022年；Auster等人，2024年），也可以内生地产生于模糊沟通工具的使用（例如，Beauchˆene等人，2019年；D¨utting等人，2024年；Frick等人，2025年）。我们为模糊性的存在提供了另一种解释，其依据是决策者对可能数据事件集合的信念，并与部分识别下的贝叶斯推断这一计量经济学文献相关（例如，Kline和Tamer，2016年；Giacomini and Kitagawa，2021年；Giacomini 等人，2025年）。

从字面上看，我们的决策者可以视为一位计量经济学家，按照Kitagawa (2011)和Giacomini and Kitagawa (2021)的方式，在集合识别模型下进行稳健贝叶斯推断 `。更一般地说，我们研究这样的情境：决策者对一个“较小”的事件集合持有概率信念，该集合由状态空间上的识别集所生成。由于我们关于部分识别的模糊性的理论本质上是动态的，我们的结果将动态模糊性文献（例如，Epstein and Schneider，2003年a、b、2007年；Siniscalchi，2011年）与关于决策者对较小范围内“无模糊性”事件持有概率信念的模糊性文献联系起来（例如，Epstein and Zhang，2001年；Zhang，2002年；Kopylov，2007年；Lehrer，2012年；Gul 和 Pesendorfer，2014年）。

我们还为部分识别下最优统计决策的稳健贝叶斯分析文献作出了贡献（例如，Chamberlain，2020年；Christensen等人，2022年；Fern´andez等人，2024年；Giacomini 等人，2025年）。我们关于部分识别的模糊性的理论阐明了伽马极小极大规则众所周知的动态不一致性（例如，Vidakovic，2000年；Stoye，2012年），而我们提出的 Gamma*-极小极大准则

当决策者在集合识别模型下按照 Giacomini and Kitagawa (2021) 的方法进行稳健贝叶斯推断 `时，该准则与条件伽马极小极大准则一致。

我们的部分识别说服模型对近期文献作出了贡献。这些文献将 Kamenica 和 Gentzkow（2011）的说服博弈推广，使其允许存在模糊性（例如，Laclau and Renou，2017年；Beauchˆene 等，2019年；Dworczak and Pavan，2022年；Kosterina，2022年；Cheng 等，2024年；Pahlke，2024年；Cheng，2025年）。据我们所知，我们首次将事前模糊性解释为对发送者策略集合施加约束。[6] 此外，我们的 Aumann 可信性概念根据主体在事前感知到的模糊性程度，限制其在整个博弈过程中对模糊性的认知。这与 Beauchˆene 等（2019年）提出的模糊说服模型及其后续研究（例如，Pahlke，2024年；Cheng，2025年）有显著区别；在那些研究中，主体的概率信念会通过模型不确定性这一渠道发生扩张。

本文其余部分组织如下。第2节阐述我们关于部分识别的模糊性的理论，第3节给出我们的两个主要等价刻画。第4节和第5节分别将我们的第一个刻画结果应用于 Blackwell 信息性定理和Gamma极小极大问题。第 6 节将我们的第二个刻画结果应用于说服博弈。第 7 节讨论部分识别的模糊性与其他形式的模糊性之间的关系，第8节作结。除非另有说明，所有证明均见附录。

2 模型

2.1 部分识别的先验集合

考虑某个有限状态空间 Θ 和划分 Φ，其中 $\phi(\theta)$表示每个 $\theta \in \Theta$ 所属的划分单元。集合 Δ(Θ)和 Δ(Φ)分别对应于支撑在 Θ和 Φ上的概率质量函数的全体。 Δ(Θ)的闭凸子集空间记为$\mathcal{K}$(ΔΘ)，我们赋予其豪斯多夫拓扑、相应的博雷尔 σ-代数，以及由闵可夫斯基加法给出的混合运算。测度 $p_0 \in \Delta(\Theta)$和测度集合$\mathcal{P}_0 \in \mathcal{K}(\Delta\Theta)$分别称为先验和先验集合。遵循计量经济学中的部分识别文献，我们将 $\phi \in \Phi$ 称为约化形式参数，将 $\tau \in \Delta(\Phi)$称为约化形式先验。[7]

划分 Φ 可以理解为决策者在状态空间 Θ中认为“可识别”的事件集合，因为约化形式先验 $\tau \in \Delta(\Phi)$的存在意味着决策者对 Φ具有精确的概率信念。因此，当

[6]一篇相关论文是 Balland Esp´ín-S´ánchez (2021)，该文对贝叶斯设定下发送者的策略集施加了额外约束。[7]例如参见 Kudo (1967)；Manski (1981)；Giacomini and Kitagawa (2021)。

Φ 比离散划分$\{\theta\}_{\theta\in\Theta}$更粗略时，就会产生模糊性。令 $\Delta(\phi) \subseteq \Delta(\Theta)$表示以 ϕ为支撑集的测度集合。以下定义阐释了决策者感知到的模糊性（由先验集合刻画）与约化形式先验之间的关系。

定义 1（部分识别）。集合 $P \in K(\Delta\Theta)$ 由（τ, Φ）部分识别 *if*

$$\mathcal{P} = \sum_{\phi\in\Phi} \tau(\phi)\mathcal{P}_\phi,$$

其中 $P_\phi \subseteq \Delta(\phi)$ 且 维数(P_ϕ) =维数($\Delta(\phi)$) 对每个 $\phi \in \Phi$.[8]

单纯形 $\Delta(\Theta)$ 由平凡划分 $\Phi = \{\Theta\}$和约化形式先验 $\tau(\Theta) = 1$部分识别。另一极端情况下，单元素先验集合 $\mathcal{P}_0 = \{p_0\}$ 由离散划分 $\Phi = \{\theta\}_{\theta\in\Theta}$ 和 $\tau = p_0$部分识别。我们称前一种情形下的先验集合为平凡识别；后一种情形下，则称其为唯一识别。更一般地，部分识别集合的定义意味着 $\dim(\mathcal{P}_0) = |\Theta| - |\Phi|$，因为每个划分单元都对应于 $\Delta(\Theta)$ 上的一个线性约束。[9] 注意，无损一般性地，我们可以假设 $\text{supp}(\tau) = \Phi$；当 $\text{supp}(\tau) \neq \Phi$ 时，将 Θ重新定义为 $\text{supp}(\tau)$ 中各集合的并集即可。

下面这个熟悉的例子考察一种中间情形：先验集合既非显然识别，也非唯一识别。

例 1（埃尔斯伯格 urn）。假设 $\Theta = \{R, G, B\}$，其中每个状态对应于从一只瓮中抽出的球的颜色。决策者被告知，三分之一的球是红色，其余为绿色和蓝色；在这种情况下，相应的先验集合为 $\mathrm{P}_0 = \{p \in \Delta(\Theta) : p(R) = 1\ 3, p(G) + p(B) = \frac{2}{3}\}$。容易看出，$\mathrm{P}_0$由划分$\Phi = \{\{R\},\{G, B\}\}$和约化形式先验 $\tau(\{R\}) = \frac{1}{3}$, $\tau(\{G, B\}) = \frac{2}{3}$部分识别。注意，$\mathrm{P}_0$与$(\tau, \Phi)$“相容”，其含义是，对于每个 $\phi \in \Phi$ 和 $p_0 \in \mathrm{P}_0$，均有 $-\sum_{\theta\in\phi} p_0(\theta) = \tau(\phi)$。根据定义很容易得出，对于由$(\tau, \Phi)$部分识别的先验集合，这种相容性一般都成立。

迄今为止我们所考察的部分识别集合还有一个共同的特殊性质：它们是通过对所有 $\phi \in \Phi$ 设定 $\mathcal{P}_\phi = \Delta(\phi)$ 而生成的。这类集合在贝叶斯计量经济学文献中发挥着重要作用。具体而言，Giacomini and Kitagawa (2021) 表明，在集合识别模型下，以 $\mathcal{P}_0 = \sum_\phi \tau(\phi)\Delta(\phi)$ 作为先验集合进行稳健贝叶斯推断，可以消除贝叶斯推断与频率学派推断之间的渐近分歧。这通常被称为稳健贝叶斯推断的“完全模糊性”方法，因为 $\sum_\phi \tau(\phi)\Delta(\phi)$ 包含由 (τ, Φ) 部分识别的每个集合，且这些集合均为其子集（例如，Giacomini 等人，2025年）。

[8] $\mathcal{P}$ 的凸性意味着，我们可以不失一般性地假设$\mathcal{P}_\phi$ 是凸集。这是因为凸包运算与闵可夫斯基加法可交换，即$\mathcal{P} = \text{co}(\mathcal{P}) = \text{co}(\sum_\phi \tau(\phi)\mathcal{P}_\phi) = \sum_\phi \tau(\phi)\,\text{co}(\mathcal{P}_\phi)$。[9]精确地说，$\dim(\Delta(\Theta)) = |\Theta| - 1$ 且划分 Φ 对应于 $|\Phi| - 1$ 线性约束。

定义 2（完全模糊性）。 如果对所有 $\phi \in \Phi$ 均有 $P_\phi = \Delta(\phi)$，则部分识别集合 $P = \sum_{\phi\in\Phi} \tau(\phi)P_\phi$ 体现了完全模糊性，其中

$$\mathcal{P} = \left\{ p \in \Delta(\Theta) : \sum_{\theta\in\phi} p(\theta) = \tau(\phi) \ \ for\ all\ \ \phi \in \Phi \right\}.$$

当然，并非所有部分识别集合都反映完全模糊性。纳入关于 Θ 上分布的额外信息的部分识别集合，往往允许表示为$\mathcal{P} = \sum_\phi \tau(\phi)\mathcal{P}_\phi$，其中对某个 $\phi \in \Phi$有$\mathcal{P}_\phi \subsetneq \Delta(\phi)$。下面这个简单例子回到埃尔斯伯格 urn 的情形，但增加了关于绿球和蓝球相对构成的额外知识。

例 2（埃尔斯伯格 urn，v2）。除三分之一的球为红色、其余为蓝色和绿色之外，假设决策者还知道绿球多于蓝球。相应的先验集合为 $\mathrm{P}_0 = \{p \in \Delta(\Theta) : \ p(R) = \frac{1}{3}, p(G) + p(B) = \frac{2}{3}, p(G) \geq p(B)\}$，其分解为 $\mathrm{P}_0 = \frac{1}{3}\mathrm{P}_{\{R\}} + \frac{2}{3}\mathrm{P}_{\{G,B\}}$，其中 $\mathrm{P}_{\{R\}} = \Delta(\{R\})$ 且 $\mathrm{P}_{\{G,B\}} = \{p \in \Delta(\{G, B\}) : \ p(G) \geq p(B)\} \subsetneq \Delta(\{G, B\})$。

公理化决策理论中有大量文献研究与部分识别信念相一致的偏好（例如，Epstein 和 Zhang，2001年；Zhang，2002年；Kopylov，2007年；Lehrer，2012年；Gul 和 Pesendorfer，2014年）。这些论文的主要目标是根据偏好，识别每位决策者主观上“无歧义”的事件集合。因此，由 (τ, Φ) 部分识别的先验集合对应于这样一种特殊情形：由 Φ 生成的 σ-代数就是无歧义事件的集合，这意味着除约化形式先验所包含的信息之外，人们对 Θ 上的数据生成过程完全没有可量化的了解。我们在第 7 节更全面地讨论这方面文献与部分识别的模糊性之间的联系。

2.2 一致实验

设 Y 是某个有限样本空间，令 $\Delta(Y)$ 表示支撑集包含于 Y 的概率质量函数集合。Blackwell 实验，即似然函数，是一个映射$\pi : \Theta \to \Delta(Y)$，它指定了在每个状态 $\theta \in \Theta$ 下 Y 的条件分布。我们假设，先验集合为 $\mathcal{P}_0$ 的决策者在观察到 Y 的实现值后，会依据贝叶斯规则逐一更新先验对应的信念，因此每个结果 $y \in Y$ 都会导出一个后验集合 $\mathcal{P}_y \in \mathcal{K}(\Delta\Theta)$。如果某个实验对至少一个 $y \in Y$ 导出了后验集合$\mathcal{P}_y \neq \mathcal{P}_0$，则称该实验为非平凡 实验。

在多重先验假设下，模糊性意味着，除了知道数据生成过程属于先验集合之外，对其并没有可量化的认识。基于这一点，我们认为，能够让决策者区分$\mathcal{P}_0$ 中的不同先验的实验，与多重先验模型不一致 。正如

信念的鞅性质所示，如果可以根据某个无模糊性样本空间的实现值区分不同先验，那么决策者事前就不应完全一无所知。这一直觉促使我们给出以下一致实验的定义；对于单元素集合$\mathcal{P}$，该定义显然成立。

定义 3（一致）。实验 $\pi\colon\ \Theta \to \Delta(Y)$ 与 $P \in K(\Delta\Theta)$ 一致，当且仅当对每个 $p, p' \in P$,

$$\sum_{\theta} \pi(\cdot|\theta)p(\theta) = \sum_{\theta} \pi(\cdot|\theta)p'(\theta).$$

如果某个实验与先验集合 $\mathcal{P}_0$, 一致，那么每个先验 $p_0 \in \mathcal{P}_0$ 都会在样本空间 Y 上诱导相同的先验预测分布，即边际分布。因此，不失一般性，可以使用任意一个 $p_0 \in \mathcal{P}_0$ 来定义 $\mu(\cdot) \equiv \sum_{\theta} \pi(\cdot|\theta)p_0(\theta) \in \Delta(Y)$，并假设其具有全支撑。注意， μ 也可以等价地解释为后验集合族 $\{\mathcal{P}_y\}_{y\in Y} \subseteq \mathcal{K}(\Delta\Theta)$上的一个测度。因此，我们将实验 π所诱导的信息结构称为 μ 。如果 μ的支撑集是由单元素后验集合构成的，则称其精确；否则称其为粗略。

注释 1（一致性与二阶信念）。为理解一致性与多重先验模型背后隐含假设之间的联系，反过来假设决策者具有二阶信念 $F \in \Delta(\mathcal{P}_0)$，如 Klibanoff 等人（2005 年）的平滑模型所示。[10] 由于 F 规定了决策者赋予$\mathcal{P}_0$, 中每个先验的相对似然，平滑模型的假设与多重先验模型的假设截然不同。给定与某个一致实验 π对应的样本空间实现值后，决策者的二阶信念为

$$F(p_0|y) = \frac{F(p_0)\sum_{\theta} \pi(y|\theta)p_0(\theta)}{\int_{\Delta(\Delta\Theta)} \sum_{\theta'} \pi(y|\theta')p_0'(\theta')\,\mathrm{d}F(p_0')} = \frac{F(p_0)\mu(y)}{\mu(y)} = F(p_0),$$

其中，第一个和第二个等式分别由贝叶斯规则和 π的一致性得出。因此，实际上并未发生学习，一致实验也无法让决策者区分$\mathcal{P}_0$中的不同先验。尽管在存在二阶信念的情况下，这似乎是一个极端假设，但它相当直观地反映了多重先验模型中$\mathcal{P}_0$ 所包含的不同先验缺乏可量化知识这一点。

注意，任何平凡实验 $\pi(\cdot|\theta)$，只要在 θ 上为常数，就与任意$\mathcal{P} \in \mathcal{K}(\Delta\Theta)$一致。以下结果表明，非平凡一致实验的集合非空，当且仅当先验集合的维数严格小于概率单纯形的维数。

[10] $\Delta(\mathcal{P}_0)$表示 $\Delta(\Theta)$上的博雷尔测度集合，其支撑集包含于$\mathcal{P}_0$.

引理 1. 设 $P \in K(\Delta\Theta)$。存在一个与 P 一致的非平凡实验，当且仅当$\dim(P) < \dim(\Delta\Theta)$。

证明。 参见附录 A.1。 □

在部分识别的背景下，一致性也有直观的解释。以下引理说明，对于部分识别先验集，一致性恰好与计量经济学中的经典集合识别概念相吻合：似然$\pi(\cdot|\theta)$在划分 Φ 的单元上为平坦函数。[11] 为避免与我们对部分识别先验集的定义混淆，当这一性质成立时，我们称 π 是 Φ-可测的 。

引理 2。 假设 $P \in K(\Delta\Theta)$。若 P 由(τ, Φ)部分识别，则以下条件等价：

1. $\pi: \Theta \to \Delta(Y)$ 与 P 一致；
2. $\pi: \Theta \to \Delta(Y)$ 是 Φ-可测的。

证明。 参见附录 A.2。 □

因此，我们可以将部分识别先验集合解释为编码了决策者对数据类型（即她认为可设想的 Blackwell 实验）的信念。相对于完全模糊性基准，如果决策者的先验集合反映了她对数据生成过程的额外了解，同时仍与相应的约化形式参数相容，那么这类额外信息便独立于她对可设想实验集合的信念。

在完全先验模糊性下$\mathcal{P}_0 = \Delta(\Theta)$，只有平凡实验与$\mathcal{P}_0$, 一致，决策者也不期望能学到平凡划分所含信息以外的任何内容。如果$\mathcal{P}_0$ 是单元素集合，那么所有实验都一致，决策者相信，只要在样本空间上进行信息足够丰富的实验，她就能获知真实状态 $\theta \in \Theta$ 。在前述埃尔斯伯格罐子例中，当且仅当 $\pi(\cdot|G) = \pi(\cdot|B)$时，某个实验才与先验集合一致；样本空间的实现值使决策者能够了解约化形式参数$\{R\}$ 和$\{G, B\}$的相对似然。

注 2 （部分识别导致的模糊性）。 到目前为止，我们的分析都将先验集合$\mathcal{P}_0$ 视为关注的基本对象，并探讨它对决策者认为可能的 Blackwell 实验类别施加了哪些限制。不过，我们也可以反过来，以实验为原始对象，并考虑与之相一致的先验集合。在计量经济学文献中，Kitagawa (2011) 和 Giacomini and Kitagawa (2021) 为了得到部分识别

[11]如果我们在部分识别集合的定义中去掉 $\dim(\mathcal{P}_\phi) = \dim(\Delta(\phi))$ 条件，那么 π 的一致性是 Φ-可测性的必要条件，但并非充分条件。

先验集合，从而体现完全模糊性，隐含地采用了这种方法。按照这种解释，状态空间上的模糊性源于对计量经济学家能够获取的数据类型所施加的约束。

2.3 信念更新

本节探讨部分识别和一致性在模糊性下学习情境中的含义。为说明核心思想，我们先重新考察例 1 中的埃尔斯伯格 urn。

例 3（埃尔斯伯格 urn，续）。决策者的先验集合 $\mathrm{P}_0 = \{p \in \Delta(\Theta) : p(R) = 1/3, p(G) + p(B) = 2/3\}$ 由划分 $\Phi = \{\{R\}, \{G, B\}\}$ 和约化形式先验 $\tau_0(\{R\}) = 1/3$，$\tau_0(\{G, B\}) = 2/3$ 部分识别。令 $Y = \{a, b\}$，并考虑实验 $\pi : \Theta \to \Delta(Y)$，

$$\pi(a|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } \theta \in \{R\} \\ \frac{3}{4} & \text{if } \theta \in \{G, B\}. \end{cases}$$

引理 2 意味着 π 与 $\mathcal{P}_0$，一致，并诱导出边际分布 $\mu(a) = 2/3, \mu(b) = 1/3$。在逐先验更新下，与 a 对应的后验集合为

$$\mathcal{P}_a = \left\{ p \in \Delta(\Theta) : p(R) = \frac{1}{4},\ p(G) + p(B) = \frac{3}{4} \right\}.$$

一个重要的观察是，$\mathcal{P}_a$ 由（τ_a，Φ）部分识别，其中 τ_a 是在给定 a的条件下对 τ_0进行的贝叶斯更新，使得 $\tau_a(\{R\}) = 1/4$，且 $\tau_a(\{G, B\}) = 3/4$。

在前面的例子中，我们看到，给定 $y \in Y$的实现值，对由（τ，Φ）部分识别的集合进行逐先验更新，可以等价地通过考虑在相同划分下由约化形式后验 τ_y 部分识别的集合来获得。下面的引理表明，当先验集合被部分识别时，对于一致实验，这一性质普遍成立。

引理3。 假设 $P_0 \in K(\Delta\Theta)$ 由(τ_0, Φ)部分识别，并令 P_y 表示在给定 $y \in Y$的条件下，由实验 π： $\Theta \to \Delta(Y)$ 得到的后验集合。若 π 与 P_0，一致，则

$$\mathcal{P}_y = \sum_{\phi \in \Phi} \tau_y(\phi) \mathcal{P}_\phi$$

对于每个 $y \in Y$，其中 τ_y 是在给定 y的条件下对 τ_0 进行的贝叶斯更新。

证明。 参见附录 A.3。 □

对于任意 $\phi \in \Phi$，令 $p_0(\cdot|\phi) \equiv p_0(\cdot)\mathbb{1}_{\{\cdot \in \phi\}}/\tau_0(\phi)$ 表示给定 ϕ 时关于Θ 的条件分布，使得对于每个 $\theta \in \phi$ 和 $p_0 \in \mathcal{P}_0$，$p_0(\theta) = p_0(\theta|\phi)\tau_0(\phi)$。前一个结果的一个重要推论是，$\mathcal{P}_0$ 中的先验仅通过约化形式测度进行更新。更精确地，令 $p_y(\cdot)$ 为后验测度，$\tau_y(\cdot)$ 为分别对应于 $p_0(\cdot)$ 和 $\tau_0(\cdot)$的约化形式后验。那么，在给定 ϕ 的条件下，关于 Θ 的后验分布为

$$p_y(\cdot|\phi) \equiv \frac{p_y(\cdot)}{\tau_y(\phi)}\mathbb{1}_{\{\cdot \in \phi\}} = \frac{\pi(y|\phi)p_0(\cdot)/\mu(y)}{\pi(y|\phi)\tau_0(\phi)/\mu(y)}\mathbb{1}_{\{\cdot \in \phi\}} = p_0(\cdot|\phi),$$

这意味着 $p_y(\theta) = p_0(\theta|\phi(\theta))\tau_y(\phi(\theta))$，也就是说，一致实验的实现值只会通过约化形式先验影响信念。[12]

3 主要等价刻画

3.1 Aumann 可信性

在贝叶斯设定中，实验与信息结构之间的等价性众所周知：给定某个先验，实验会在贝叶斯更新下诱导出关于后验的贝叶斯可信信息结构；反过来，任何贝叶斯可信信息结构都可以由定义在足够丰富的样本空间上的实验诱导出来。本节将这一等价结果推广到模糊性设定。

我们首先将 Aumann 可信性引入为贝叶斯可信性的集合值推广。它自然地将信念鞅性质的直觉扩展到多先验模型，要求实验实现后模糊性的预期“程度”与事前存在的模糊性程度相一致。

定义4 (Aumann可信性)。信息结构 $\mu \in \Delta(K(\Delta\Theta))$ 以 $\{P_y\}_{y\in Y}$ 为支撑集，若相对于先验集合 $P_0 \in K(\Delta\Theta)$ 满足以下条件，则称其为奥曼可行：

$$\mathcal{P}_0 = \sum_{y\in Y} \mu(y)\mathcal{P}_y.$$

换言之，μ 相对于$\mathcal{P}_0$ 是奥曼可行的，当且仅当该后验集合 $\mathcal{P}_Y$ 的 μ-Aumann期望等于$\mathcal{P}_0$。以下备注从Epstein and Schneider（2003b）所提出的矩形性视角，并结合不确定性消解时机，对奥曼可行性作出另一种解释。

[12]因此，在部分识别的完全模糊集合背景下，Giacomini and Kitagawa (2021) 将约化形式先验 τ_0 称为可修正先验知识，并将条件先验的集合$\{p_0(\cdot|\phi)\}_{\phi\in\Phi}$ 称为不可修正先验知识。引理3将这一观察略微推广至所有部分识别先验集。

备注 3（矩形性）。给定某个先验集合$\mathcal{P}_0 \in \mathcal{K}(\Delta\Theta)$以及一致的实验 $\pi:\ \Theta \to \Delta(Y)$, 以下两个扩展域 $\Theta \times Y$上的信念集合看起来自然:

$$\mathcal{P}_0 \otimes \pi \equiv \{\gamma \in \Delta(\Theta \times Y) : \forall y \in Y,\ \gamma(\cdot, y) = p_0(\theta)\pi(y|\theta) \ \text{ for some } \ p_0 \in \mathcal{P}_0\}$$
$$\mathcal{P}_Y \otimes \mu \equiv \{\gamma \in \Delta(\Theta \times Y) : \forall y \in Y,\ \gamma(\cdot, y) = p_y(\cdot)\mu(y) \quad \text{ for some } \ p_y \in \mathcal{P}_y\}.$$

假设决策者在样本空间 Y 实现之前和之后，均依据 Gilboa 和 Schmeidler（1989）的最大最小准则，对取决于 $\Theta \times Y$ 的或有结果作出决策。容易验证，集合 $\mathcal{P}_0 \otimes \pi$ 相对于划分 $\{\{\theta\} \times Y\}_{\theta\in\Theta}$ 是矩形的，而集合 $\mathcal{P}_Y \otimes \mu$ 相对于划分 $\{\Theta \times \{y\}\}_{y\in Y}$ 是矩形的。假设 $\mathcal{P}_0$ 是非单点集合，这意味着，只有当决策者在扩展域上的事前信念由后一个集合 $\mathcal{P}_y \otimes \mu$ 描述时，她的偏好才是动态一致的。[13]

对于任意 $\Gamma \subseteq \Delta$（$\Theta \times Y$），用 $\sum_y \Gamma$ 和 $\sum_\theta \Gamma$ 分别表示通过对 $\Theta \times Y$ 中的一个维度进行边缘化，从而得到的关于 Θ 和 Y 的测度集合。根据定义可直接得出，$\mathcal{P}_0 \otimes \pi$ 满足 $\sum_\theta \mathcal{P}_0 \otimes \pi = \{\mu\}$，并且 $\sum_y \mathcal{P}_0 \otimes \pi = \mathcal{P}_0$。尽管 $\mathcal{P}_Y \otimes \mu$ 也满足前一个性质，但对 Y 进行边缘化会得到 $\sum_y \mathcal{P}_Y \otimes \mu \supseteq \mathcal{P}_0,$，而后一个等式只有在 Aumann 式可信性下才成立，因为

$$\begin{aligned}\sum_y \mathcal{P}_Y \otimes \mu &\equiv \left\{p(\cdot) = \sum_y \mu(y)p_y(\cdot) : p_y \in \mathcal{P}_y \text{ for all } y \in Y\right\} \\ &= \sum_y \mu(y)\mathcal{P}_y.\end{aligned}$$

因此，我们可以将 Aumann 可信性理解为：对于时间一致的决策者，Θ-可测结果的事前估值与平均事中估值相同。[14]

当先验集合是单元素集合时，Aumann可信性就等同于贝叶斯可行性，所有 Aumann 可行信息结构的支撑集都必须是单元素后验集合。一旦考虑非单点先验集合，将贝叶斯可信的精确信息结构推广为 Aumann 可行的粗略信息结构后，贝叶斯设定中的等价结果就不再双向成立。后续章节将说明，将讨论范围限制在一致实验和部分识别先验集上，即可恢复这种等价性。

[13]正如 Ellis（2018）所示，只有单元素集合相对于 $\{\{\theta\} \times Y\}_{\theta\in\Theta}$ 和$\{\Theta \times \{y\}\}_{y\in Y}$都是矩形的。[14]第 5 节在统计决策理论的背景下对这一解释作了更详细的讨论。第 6 节中的命题 1 说明，Aumann 可信性也可以被解释为说服博弈中发送方问题的参与约束。

3.2 一致实验与奥曼可行信息结构

我们的第一个刻画结果证明，先验集合 $\mathcal{P}_0$ 是部分识别的当且仅当每个与$\mathcal{P}_0$ 一致的实验都会诱导出 Aumann 可行信息结构。我们强调，单独来看，实验的一致性与信息结构的 Aumann可信性都与基础先验集是否具有部分识别性质无关。只有在逐先验更新下同时考察这两项性质时，二者才会产生联系。

由于任何满维先验集合都可由平凡划分$\Phi = \{\Theta\}$ 及相应的约化形式先验部分识别，我们将注意力限制在由某个非平凡的 (τ, Φ) 部分识别的先验集合上。在先验集合$\mathcal{P}_0 = \{p_0\}$ 为单元素集合这一特殊情形下，$\mathcal{P}_0$ 由 $(p_0,\{\theta\}_{\theta\in\Theta})$ 部分识别，我们的结果便归结为标准结论：在贝叶斯更新下，实验会诱导出关于后验的贝叶斯可信分布。

定理1. 对于任意 $P_0 \in K(\Delta\Theta)$，以下条件等价：

1. P_0 由某个非平凡的 (τ, Φ) 部分识别；

2. 任何与 P_0 一致的实验 $\pi : \Theta \to \Delta(Y)$ 都会诱导出奥曼可行信息结构，并且至少存在一个这样的非平凡实验。

证明。 见附录A.4。 □

值得注意的是，一致实验仅当基础先验集是部分识别的时，才会诱导出奥曼可行信息结构；而后一条件大幅限制了允许的先验集合。我们将这一结果解读为：它凸显了定义明确的概率信念（由约化形式先验刻画）在维系鞅性质逻辑方面所发挥的根本作用，即便将这种逻辑扩展至其集值类比时亦然。我们还将在第4节和第5节进一步讨论这一刻画结果的意义。

必要性的证明首先依赖于证明无歧义事件的集合是非平凡的，将 Φ 定义为相应的原子集合，随后使用揭示划分的实验 $\pi : \Theta \to \Delta(\Phi)$, $\pi(\phi|\theta) = \mathbb{1}_{\{\theta\in\phi\}}$ 和Aumann可信性，得出 $\mathcal{P}_0 = \sum_{\phi\in\Phi} \tau(\phi)\mathcal{P}_\phi$。充分性的证明则更为直接。回顾引理3，对 $\mathcal{P}_0 = \sum_\phi \tau(\phi)\mathcal{P}_\phi$ 逐个先验进行更新，等价于先得到约化形式后验 τ_y，再使用由 τ_y 给出的新权重，对 $\mathcal{P}_\phi$ 取闵可夫斯基和。由 π 诱导的信息结构具有 Aumann可信性，是因为 π 在约化形式后验 $\{\tau_y\}_{y\in Y}$ 上诱导出贝叶斯可置信信息结构。

3.3 从 Aumann-可信信息结构到一致实验

鉴于定理1给出的等价结果，一个自然的问题是：对部分识别先验集施加完全模糊性条件，是否是贝叶斯设定下两项等价结果推广成立的必要条件和／或充分条件。也就是说，除了要求每个一致实验都诱导出奥曼可行信息结构之外，我们现在还考虑这样一种情形：每个奥曼可行信息结构都可以由一致实验诱导。事实证明，完全模糊性是完整等价刻画的充分条件，但不是必要条件。

回顾一下，若 P_0 可以分解为 $(\tau,\Phi)\mathrm{P}_0 = \sum_\phi \tau(\phi)\mathrm{P}_\phi$，其中 $\mathrm{P}_\phi \subseteq \Delta(\phi)$ 且 $\dim(\mathrm{P}_\phi) = |\phi| - 1$，则称 P_0 被部分识别。若集合 P_ϕ 不能写成 $\mathrm{K}(\Delta\Theta)$ 中其他闭凸集的非平凡凸组合（即加权闵可夫斯基和），则称它在 $\mathrm{K}(\Delta\Theta)$ 中是极端的。也就是说，若 P_ϕ 是极端的，且 $\alpha\mathrm{Q}+(1-\alpha)\mathrm{Q}' = \mathrm{P}_\phi$ 对某个 $\alpha \in [0,1]$ 和 Q 成立，其中 $\mathrm{Q}' \in \mathrm{K}(\Delta\Theta)$，则 $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}' = \mathrm{P}_\phi$。这体现了这样的直觉：$\mathrm{K}(\Delta\Theta)$ 中的极端集合无法被“拆分”为 $\mathrm{K}(\Delta\Theta)$ 中的不同集合。若先验集合 $\mathrm{P}_0 = \sum_\phi \tau(\phi)\mathrm{P}_\phi$ 中的每个 P_ϕ 都是极端的，则称该先验集合为最大程度部分识别。

定义5 （最大程度部分识别）。 集合 $P \in K(\Delta\Theta)$ 由 (τ,Φ) 部分识别；若对于每个 $\phi \in \Phi$，P_ϕ 在 $K(\Delta\Theta)$ 中都是极端的，则称其为最大程度部分识别。

容易看出，形如 $\Delta(\phi)$ 的子单纯形在 $\mathcal{K}(\Delta\Theta)$ 中是极端的。因此，完全模糊先验集 $\mathcal{P}_0 = \sum_\phi \tau(\phi)\Delta(\phi)$ 由 $(\tau,\ \Phi)$ 最大程度部分识别。在 $|\phi| \le 2$ 对每个 $\phi \in \Phi$ 都成立的特殊情形下，以下引理说明，最大部分识别等价于施加完全模糊性。

引理4。 假设对于每个 $\phi \in \Phi,\ |\phi| \le 2$。集合 $P \in K(\Delta\Theta)$ 由 (τ,Φ) 最大程度部分识别，当且仅当它是由 (τ,Φ)部分识别的完全模糊集。

证明。 见附录A.5 □

一个直接推论是，在（非平凡的）部分识别下，只要 $|\Theta| \le 3$，极大性与完全模糊性就等价。然而，正如下例所示，当 $|\Theta| > 3$ 时，这种等价关系并不适用于一般状态空间。

例4（最大部分识别）。令 $\Theta = \{R,G,B,Y\}$，并考虑先验集合 $\mathrm{P}_0 = \frac{1}{2}\mathrm{P}_a + \frac{1}{2}\mathrm{P}_b$，其中 $\mathrm{P}_a = \Delta(\{R\})$，且 $\mathrm{P}_b = \{p \in \Delta(\{G,B,Y\}) :\ p(G) \le p(B)\}$。对于 $\tau(\{R\}) = \tau(\{G,B,Y\}) = \frac{1}{2}$ 且 $\Phi = \{\{R\},\{G,B,Y\}\}$，注意到 P_0 由 (τ,Φ) 最大程度部分识别。特别地，$\mathrm{P}_b \subsetneq \Delta(\{G,B,Y\})$ 是 $\mathrm{K}(\Delta\Theta)$ 中的极点集，因为三角形的闵可夫斯基分解只包含与其正向相似的多胞体。[15]

[15]集合 $\mathcal{P}'$ 与 $\mathcal{P}$ 正齐次，当且仅当 $\mathcal{P}' = \alpha\mathcal{P}$，其中 $\alpha \ge 0$。关于闵可夫斯基分解的经典参考文献，可参见 Gr¨unbaum（2003）的第15章。

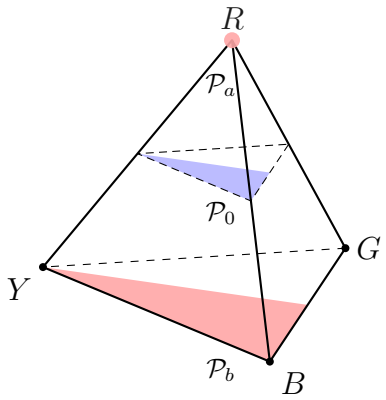

图1：例4中先验集合与后验集合的图示。

下述定理证明，基础先验集的最大部分识别，是一致实验与 Aumann-合理信息结构完全等价的充要条件。由于完全模糊先验集的集合是最大程度部分识别集合的真子集，因此可立即得出：完全模糊性是充分条件，但并非必要条件；只有在对每个 $\phi \in \Phi$ 都有 $|\phi| \leq 2$ 的特殊情形下例外。

定理 2. 对于任意 $P_0 \in K(\Delta\Theta)$，以下条件等价：

1. P_0 可由某个非平凡(τ, Φ)实现最大程度部分识别；

2. 以下陈述成立：

> ***(a)*** 任何与 P_0 一致的实验 $\pi : \Theta \to \Delta(Y)$ 都会诱导一个奥曼可行的信息结构，且至少存在一个这样的非平凡实验；***(b)*** 对于任何相对于 P_0,奥曼可行的信息结构 $\mu \in \Delta(Y)$，都存在一个与 P_0 一致的实验 $\pi : \Theta \to \Delta(Y)$，它会诱导出 μ。

证明。 见附录A.6。 □

回顾定理1，$\mathcal{P}_0$ 部分识别意味着满足性质 2(a)。极大部分识别足以保证性质 2(b)，其直觉在于：$\{\mathcal{P}_\phi\}_{\phi\in\Phi}$ 构成了这样一类集合空间中的一个“基”：这些集合包含在相对于 $\mathcal{P}_0$为奥曼可行的信息结构的支撑集中。也就是说，若$\mathcal{P}_y \in$ 属于 supp(μ)，且 μ 相对于某个极大$\mathcal{P}_0 = \sum_\phi \tau(\phi)\mathcal{P}_\phi$是奥曼可行的，那么对每个$\mathcal{P}_y$，都存在某个 $\tau_y \in \Delta(\Phi)$，使其可分解为$\mathcal{P}_y = \sum_\phi \tau_y(\phi)\mathcal{P}_\phi$。事实证明，我们可以将 μ 理解为定义在此类$\{\tau_y\}_{y\in Y}$上的贝叶斯可置信信息结构；在这种情况下，可以通过贝叶斯设定下性质 2(b) 的相应版本，恢复诱导 μ 的实验。

至于最大部分识别的必要性，我们已从定理1得知，2(a) 意味着$\mathcal{P}_0$ 可由某个 (τ, Φ) 部分识别。现在反设 $\mathcal{P}_0$ 不是极大的，此时存在某个 $\mathcal{P}_\phi$ ，它在 $\mathcal{K}(\Delta\Theta)$ 中不是极端点。于是，我们可以构造一个奥曼可行的信息结构，其支撑点为$\mathcal{Q},\mathcal{Q}' \subseteq \Delta(\phi)$，且这些点的加权平均为$\mathcal{P}_\phi$。与我们在第 2.3 节中讨论条件测度的思路类似，可以证明，在逐先验更新下，没有一致实验能够诱导这样的$\mathcal{Q},\mathcal{Q}'$ ，这与性质 2(b) 矛盾。

在第 6 节中，我们说明，当主体的先验集合是最大程度部分识别的时，定理 2 如何大幅简化说服博弈的分析。其直觉与标准贝叶斯设定中的情形相似：将问题改写为关于 Aumann-可信信息结构的问题后，便可应用 Kamenica 和 Gentzkow（2011）式的凹化技巧 `。

4 信息价值

4.1 预备知识

本节将按照 Blackwell（1951，1953）的意义，研究部分识别的模糊性下的信息价值。[16] 我们的主要结果表明，Blackwell 原始设定中的许多见解，在模糊性源于部分识别时同样直接适用。关键步骤是利用约化形式参数，在标准贝叶斯设定下重新表述问题。因此，我们的结果证明相对简单，在思路上也有别于现有的大量研究；那些研究将 Blackwell 原始的信息性定理扩展到允许模糊性存在的情形。[17]

给定某个先验集合 $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{K}(\Delta\Theta)$ 和实验 $\pi: \Theta \to \Delta(Y)$ 与 $\mathcal{P}_0$,一致，令 $\mathcal{P}_y^\pi$ 表示通过逐先验更新得到的后验集合， $\mu^\pi \in \Delta(Y)$ 表示由此诱导的信息结构。对于某个行动空间 $\mathcal{A}$，令 $A \subseteq \mathcal{A}$ 为有限行动集合。决策者对 A 的效用可以是状态依赖的，即 $u: A \times \Theta \to \mathbb{R}$。假设决策者依据最大最小准则进行决策，则实验 π 所包含的信息的价值可定义如下。

定义 6（价值函数）。 固定某个先验集合 P_0，、行动集合 A、状态依赖效用 u，并假设 $\pi: \Theta \to \Delta(Y)$ 与 P_0一致。 π 的价值为

$$V_{\mathcal{P}_0,A,u}(\pi) = \mathbb{E}_{\mu^\pi}\left[\max_{a\in A}\min_{p_y^\pi \in \mathcal{P}_y^\pi}\sum_\theta u(a,\theta)p_y^\pi(\theta)\right].$$

请注意，价值函数在以下情况下对应于通常的信息价值。

[16]我们不要求部分识别是极大 的，因为我们的结果仅依赖于能够诱导 Aumann 可行信息结构的一致实验；参见定理 1。[17]例如，参见 C.elen（2012年）；Gensbittel 等人（2015）；Li 和 Zhou（2016）；Wang（2024）。

先验集合$\mathcal{P}_0$, 和相应的后验集合$\mathcal{P}_y^\pi$均为单元素集合时，价值函数就对应于通常的信息价值。接下来，我们在 Blackwell 实验的集合上定义劣化序。该定义与标准贝叶斯设定中的定义相同，体现了这样一种直觉：只要 π_2 是 π_1的劣化，就可以通过向 π_1 添加噪声来生成π_2 中的任何信息。

定义 7 (劣化)。 *Blackwell 实验* $\pi_2 : \Theta \to \Delta(Y_2)$ 是$\pi_1 : \Theta \to \Delta(Y_1)$ 的劣化，当且仅当存在一个马尔可夫核 $k : Y_1 \to \Delta(Y_2)$，使得

$$\pi_2(y_2|\theta) = \sum_{y_1} k(y_2|y_1)\pi_1(y_1|\theta)$$

对所有 $y_2 \in Y_2$ 和 $\theta \in \Theta$ 均成立。

若 π_2 是π_1的劣化，我们称 π_1 比 π_2信息量更大，记作 $\pi_1 \triangleright \pi_2$。当先验集合 $\mathcal{P}_0$ 为单元素集合时，回想一下 Blackwell 信息性定理：信息量更大的实验与价值函数序等价。即使定义价值函数时允许使用混合策略 $\sigma \in \Delta(A)$，这一结果仍然成立，因为 $\arg\max_{\sigma\in\Delta(A)} \sum_{\theta,a} u(a,\theta)\sigma(a)p_y^\pi(\theta)$ 总是包含一个纯策略。

4.2 实验比较

现在，我们将 Blackwell 的原始结果推广到允许存在部分识别模糊性的情形。令$\mathcal{K}_{PI}$ 表示由某个（τ_0，Φ）部分识别的先验集合构成的集合，其中 Φ 是 Θ 的任意划分，而 $\tau_0 \in \Delta(\Phi)$是任意相应的约化形式先验。由于每个单元素先验集合$\mathcal{P}_0 = \{p_0\}$ 都由（$\{\theta\}_{\theta\in\Theta}$，$p_0$）部分识别，因此我们知道$\mathcal{K}_{PI} \supseteq \Delta(\Theta)$。对于某个与$\mathcal{P}_0 = \sum_\phi \tau_0(\phi)\ \mathcal{P}_\phi \in \mathcal{K}_{PI}$一致的实验 $\pi : \Theta \to \Delta(Y)$，令 τ_y^π为相应的约化形式后验。根据引理3，每个后验集合$\mathcal{P}_y^\pi$都由（τ_y^π，Φ）部分识别。

定义 $\underline{u} : A \times \Phi \to \mathbb{R}$ 为 $\underline{u}(a, \phi) \equiv \min_{p\in\mathcal{P}_\phi} \sum_\theta u(a, \theta)\, p(\theta)$，此时价值函数可改写为

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{P}_0,A,u}(\pi) &= \mathbb{E}_{\mu^\pi}\left[\max_{a\in A} \sum_\phi \tau_y^\pi(\phi) \min_{p\in\mathcal{P}_\phi} \sum_\theta u(a,\theta)p(\theta)\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mu^\pi}\left[\max_{a\in A} \sum_\phi \tau_y^\pi(\phi)\underline{u}(a,\phi)\right], \end{aligned}$$

现在将 $\mu^\pi \in \Delta(Y)$ 解释为约化形式后验上的一个分布 $\{\tau_y^\pi\}_{y\in Y} \subseteq \Delta(\Phi)$。根据引理 2，我们知道 $\pi(\cdot|\theta)$ 在 Φ 的单元上为常数。于是，我们可以将 Φ 视为状态空间来重新表述这个问题，使得上述价值函数与 $V_{\{\tau_0\}\ A,u}(\pi)$ 相一致。

由于根据 Blackwell 的原始定理，我们知道 $\pi_1 \triangleright \pi_2$ 蕴含 $V_{\{\tau_0\},A,u}(\pi_1) \geq V_{\{\tau_0\},A,u}(\pi_2)$ 对所有 (τ_0, A, u) 都成立，前面的讨论证明了以下引理的正向结论。反向结论也可由 Blackwell 的原始定理推出，因为π_1, π_2 与任意单元素集合 $\mathcal{P}_0$一致。

引理 5. 以下各项等价：

1. π_1 比 π_2更具信息性；

2. $V_{\mathcal{P}_0,A,u}(\pi_1) \geq V_{\mathcal{P}_0,A,u}(\pi_2)$ 对所有(A, u) 以及$P_0 \in K_{PI}$，使得 π_1、 π_2 与之相一致。

此外，对于单元素集合 A，该不等式以等式成立。

证明。 尚需证明第二条陈述中的不等式对单元素行动集以等式成立。这直接由定理1得出，该定理指出，当$\mathcal{P}_0$ 被非平凡地部分识别时，一致实验所诱导的信息结构相对于先验集合是奥曼可行的。若$\mathcal{P}_0$ 被平凡地部分识别，则只有平凡实验与$\mathcal{P}_0$, 一致，并且我们同样有$V_{\mathcal{P}_0,A,u}(\pi_1) = V_{\mathcal{P}_0,A,u}(\pi_2)$。

□

回顾一下，对于单元素集合$\mathcal{P}_0$, ，无论是否允许决策者使用混合策略 $\sigma \in \Delta(A)$, 价值函数都保持不变。对于非单点$\mathcal{P}_0$, ，将注意力仅限于纯策略不再是不失一般性的，因为采用如下形式的价值函数进行对冲可能存在严格收益

$$W_{\mathcal{P}_0,A,u}(\pi) \equiv \mathbb{E}_{\mu^\pi}\left[\max_{\sigma\in\Delta(A)} \min_{p_y^\pi \in \mathcal{P}_y^\pi} \sum_{\theta,a} u(a,\theta)\sigma(a)p_y^\pi(\theta)\right].$$

尽管如此，重复前述练习的一个略作修改的版本，可以让我们以 $W_{\mathcal{P}_0,A,u}(\cdot)$ 为价值函数，证明引理 5 的对应结论。[18] 这意味着，尽管 $V_{\mathcal{P}_0,A,u}(\cdot) \neq W_{\mathcal{P}_0,A,u}(\cdot)$，由这两个价值函数所诱导的实验排序是等价的。

定理 3。 以下各项等价：

1. π_1 比 π_2更具信息量；*2.* 对所有满足与 π_1, π_2 一致的(A, u)和$P_0 \in K_{PI}$，$V_{\mathcal{P}_0,A,u}(\pi_1) \geq V_{\mathcal{P}_0,A,u}(\pi_2)$；*3.* 对所有满足与 π_1, π_2 一致的(A, u)和$P_0 \in K_{PI}$，$W_{\mathcal{P}_0,A,u}(\pi_1) \geq W_{\mathcal{P}_0,A,u}(\pi_2)$。此外，当 A为单元素集合时，不等式取等号。

证明。 参见附录 A.7。 □

[18]如引理 5 的证明所示，关键步骤是定义 $u : \Delta(A) \times \Phi \to \mathbb{R}$, $u(\sigma, \phi) = \min_{p\in\mathcal{P}_\phi} \sum_{\theta,a} u(a,\theta)\sigma(a)p(\theta)$，并将 Φ 解释为状态空间。

5 应用：稳健贝叶斯分析

5.1 预备知识

近年来，统计决策理论中的稳健贝叶斯方法作为分析集合识别模型下决策问题的一种工具，在计量经济学文献中日益受到关注。这类问题在许多应用场景中都很常见，例如存在未观测异质性时的定价，以及治疗效应部分识别情形下的治疗选择（例如，Kitagawa，2012年；Stoye，2012年；Christensen等人，2022年；Fern´andez等人，2024年）。与贝叶斯情形不同，实现稳健贝叶斯意义下最小风险的决策规则，通常并不等同于使后验期望损失最小的行动（例如，Vidakovic，2000年；Giaco mini 等人，2025年）。本节将详细分析这一现象，并提出一种替代性的最优性准则，同时保留贝叶斯决策的时间一致性。

沿用上一节的记号，我们将决策规则 定义为由映射 $\delta : Y \to A$ 给出的、依赖于样本的行动，其中行动集合 A有限。我们令$\mathcal{D}$ 表示所有决策规则的集合，并令$\mathcal{D}_A$ 表示常值规则这一特殊类别，它们确定性地映射到 A。损失函数 是一个映射 $L : \Theta \times A \to \mathbb{R}$，其中 $L(\theta, a)$ 表示负效用，即决策者在真实状态为 θ 且采取行动 $a \in A$ 时所承受的损失。给定某个 Blackwell 实验，即似然函数 $\pi : \Theta \to \Delta(Y)$，决策规则 δ 的风险 $R(\theta, \delta)$ 是在$\theta \in \Theta$处的期望损失，因此 $R(\theta, \delta) \equiv \sum_y \pi(y|\theta)L(\theta, \delta(y))$。

对于某个先验 $p_0 \in \Delta(\Theta)$，决策规则的贝叶斯风险 为

$$r(p_0, \delta) \equiv \sum_\theta R(\theta, \delta)p_0(\theta),$$

这是 $R(\theta, \delta)$ 的 p_0-期望。给定某个 $y \in Y$ 的实现值，行动 $a \in A$ 的后验期望损失定义为

$$\rho_y(p_0, a) \equiv \sum_\theta L(\theta, a)p_y^\pi(\theta).$$

贝叶斯规则 $\delta^* = \text{arginf}_{\delta \in \mathcal{D}} r(p_0, \delta)$ 在每个 $y \in Y$ 处使 $\rho_y(p_0, a)$ 最小，正如我们所见

$$\begin{aligned}
\inf_{\delta \in \mathcal{D}} r(p_0, \delta) &= \inf_{\delta \in \mathcal{D}} \sum_{\theta, y} L(\theta, \delta(y))\pi(y|\theta)p_0(\theta) \\
&= \inf_{\delta \in \mathcal{D}} \sum_y \mu^\pi(y) \sum_\theta L(\theta, \delta(y))p_y^\pi(\theta) \\
&= \sum_y \mu^\pi(y) \inf_{a \in A} \sum_\theta L(\theta, a)p_y^\pi(\theta),
\end{aligned}$$

其中，第二个等式成立是因为对于所有 $(y, \theta) \in Y \times \Theta$，$\pi(y|\theta)p_0(\theta) = \mu^\pi(y)p_y^\pi(\theta)$。

5.2 伽马极小极大与条件伽马极小极大

在由某个先验集合 $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{K}(\Delta\Theta)$ 描述的模糊先验信念情形下，存在两种最优性概念。一种采用事前视角，根据贝叶斯风险的极小极大类比来评估决策规则；另一种采用中期视角，根据样本空间实现值对行动进行条件评估。遵循 Vidakovic（2000年）和 Giacomini 等人（2025年）的做法，我们分别将它们称为伽马极小极大准则和条件伽马极小极大准则。

定义 8 (伽马极小极大**)**。 给定某个 $P_0 \in K(\Delta\Theta)$，伽马极小极大决策规则为

$$\delta^* = \operatorname*{arginf}_{\delta\in\mathcal{D}} \sup_{p_0\in\mathcal{P}_0} r(p_0, \delta).$$

定义 9 (条件伽马极小极大**)**。 给定某个 $P_0 \in K(\Delta\Theta)$ 和 $y \in Y$，条件伽马极小极大行动为

$$a^* = \operatorname*{arginf}_{a\in A} \sup_{p_0\in\mathcal{P}_0} \rho_y(p_0, a).$$

请注意，当$\mathcal{P}_0$ 是单元素集合时，伽马极小极大规则与贝叶斯规则一致。然而，对于非单点$\mathcal{P}_0$, ，伽马极小极大规则并不具备贝叶斯规则的时间一致性（例如，Vidakovic，2000年；Stoye，2012年；Giacomini 等人，2025年）。结合我们此前在备注 3 中关于矩形性的讨论，可以观察到，伽马极小极大规则可改写为

$$\delta^* = \operatorname*{arginf}_{\delta\in\mathcal{D}} \sup_{\gamma\in\mathcal{P}_0\otimes\pi} \sum_{\theta,y} L(\theta, \delta(y))\gamma(\theta, y).$$

由于条件伽马极小极大准则对应于一位在观察到样本空间 Y 的实现值后作出选择的决策者，因此， δ^* 的动态不一致性直接源于这样一个事实：对于非单点 $\mathcal{P}_0 \otimes \pi$ ，联合先验集并非$\{\Theta \times \{y\}\}_{y\in Y}$-矩形。$\mathcal{P}_0$.[19]

原则上，先验集合 $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{K}(\Delta\Theta)$ 和实验 $\pi : \Theta \to \Delta(Y)$ 并未对如何构造关于 $\Theta \times Y$ 的联合先验集施加任何结构限制。也就是说，只需重新定义最优性准则，并针对 $\gamma \in \mathcal{P}_Y^\pi \otimes \mu^\pi$（相对于划分 $\{\Theta \times \{y\}\}_{y\in Y}$ 为矩形的联合先验集）取最大期望损失，就能恢复最优决策规则的时间一致性。然而，正如备注 3 所暗示、并将在下一节说明的那样，依据这一最优性准则对行动进行事前估值存在另一项缺陷——除非先验集合属于部分识别这一特殊情形。

[19]回想一下，这是因为$\mathcal{P}_0 \otimes \pi$ 是$\{\{\theta\} \times Y\}_{\theta\in\Theta}$-矩形的，并且只有单元素集合相对于两个划分都是矩形的（Ellis，2018）。

5.3 部分识别下的一种新最优性准则 n

假设决策者可以使用一个 Φ-可测实验 $\pi : \Theta \to \Delta(Y)$，该实验将 Θ 集合识别至约化形式参数 Φ。她按照 Giacomini and Kitagawa (2021) 的方法进行稳健贝叶斯推断`，其先验信念由先验集合 $\mathcal{P}_0 = \sum_\phi \tau_0(\phi)\mathcal{P}_\phi$ 描述，其中约化形式先验为 $\tau_0 \in \Delta(\Phi)$，且 $\mathcal{P}_\phi \subseteq \Delta(\phi)$，$\dim(\mathcal{P}_\phi) = |\phi| - 1$ 对所有 $\phi \in \Phi$ 均成立。[20]回顾一下，引理 2 意味着实验π 与$\mathcal{P}_0$一致。

如上一节所述，以下事前最优性准则使贝叶斯规则在稳健贝叶斯设定下恢复时间一致性。该定义仅通过改变扩展空间 $\Theta \times Y$ 上联合先验集的构造方式，对伽马极小极大准则作出修改；当$\mathcal{P}_0$为单元素集合时，该准则便退化为贝叶斯规则。

定义10 (伽马*-极小极大)。 给定某个 $P_0 \in K(\Delta\Theta)$，伽马*-极小极大决策规则为

$$\delta^* = \operatorname*{arginf}_{\delta\in\mathcal{D}} \sup_{\gamma\in\mathcal{P}_Y^\pi\otimes\mu^\pi} \sum_{\theta,y} L(\theta,\delta(y))\gamma(\theta,y).$$

尽管伽马*-极小极大规则与条件 Gamma 极小极大行动一致，但它仍存在另一种不一致性：常数决策规则（即行动）的事前估值与$\mathcal{P}_0$上的最大贝叶斯风险并不一致。这是因为

$$\begin{aligned}
\inf_{\delta\in\mathcal{D}_A} \sup_{\gamma\in\mathcal{P}_Y^\pi\otimes\mu^\pi} \sum_{\theta,y} L(\theta,\delta(y))\gamma(\theta,y) &= \inf_{a\in A} \sup_{\gamma\in\mathcal{P}_Y^\pi\otimes\mu^\pi} \sum_\theta L(\theta,a) \sum_y \gamma(\theta,y) \\
&= \inf_{a\in A} \sup_{p\in\sum_y \mu^\pi(y)\mathcal{P}_y^\pi} \sum_\theta L(\theta,a)p(\theta) \\
&\geq \inf_{a\in A} \sup_{p_0\in\mathcal{P}_0} \sum_\theta L(\theta,a)p_0(\theta),
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式成立是因为 $\sum_y \mu^\pi(y)\mathcal{P}_y^\pi \supseteq \mathcal{P}_0$。$\mu^\pi$ 的 Aumann可信性正是要求这一关系取等号的条件。

回顾定理1可知，由任意一致实验诱导的信息结构是奥曼可行的，当且仅当基础先验集是部分识别的。因此，Gamma*-极小极大准则恢复了贝叶斯决策的时间一致性，同时与部分识别下稳健贝叶斯范式中的先验集 $\mathcal{P}_0$, 保持相容。

注释4. 正如 Kitagawa（2012年）所指出的，在求解 Gamma 极小极大问题时，是否应对数据进行条件化尚无共识。由于 Gamma*-极小极大规则——它与先验集合$\mathcal{P}_0$ 保持同样的一致性，正如 Gamma 极小极大规则一样

[20]从技术上讲，该设定比Giacomini and Kitagawa (2021)的设定略为一般，因为我们不施加完全模糊性假设。

当$\mathcal{P}_0$ 是部分识别时——在每个 $y \in Y$ 下都与条件 Gamma 极小极大行动相一致，因此，我们将结果解释为：在使用集合识别模型进行稳健贝叶斯推断时，应支持采用条件 Gamma 极小极大准则。

6 应用：部分识别的说服

6.1 预备知识

在 Kamenica 和 Gentzkow（2011）式的说服博弈中，接收者同意被发送者“说服”，因为任何非平凡实验都比不会引发先验更新的平凡实验包含更多信息，因此也更有价值。我们认为，这反映了为说服建立微观基础的两个重要特征：

(i) 接收者在观察到实验的实现值后选择行动，其期望收益（弱）高于其在先验下的期望收益；

(ii) 无论接收者是否同意被说服，她对行动（即单元素行动集）的估值都相同。

本节的主要贡献是发展一种说服理论，在保留这两项性质的同时，允许存在可由对可用数据的可能集合施加限制来合理解释的模糊性。

沿用前几节的记号，假设发送者和接收者共享一个共同先验集合 $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{K}(\Delta\Theta)$，该集合在某个非平凡的 (τ, Φ) 下达到最大程度部分识别。[21] 发送者和接收者的效用函数分别为 $v\colon A \times \Theta \to \mathbb{R}$ 和 $u\colon A \times \Theta \to \mathbb{R}$，它们取决于 Θ 的实现值以及接收者采取的行动 $a \in A$。我们假设两个主体都按照 Gilboa 和 Schmeidler（1989）的方式具有模糊厌恶倾向 `。在 Θ实现之前，发送者可以选择一个与$\mathcal{P}_0$ 一致的实验 π :$\Theta \to \Delta(Y)$ 来说服接收者。在观察到信号实现值$y \in Y$后，接收者从集合 $a^*(\mathcal{P}_y)$ 中采取一个行动，该行动为 $=$最大值自变量集合$_{a \in A}$最小化$_{p \in \mathcal{P}_y} \mathbb{E}_p[u(a, \theta)]$,，其中 $\mathcal{P}_y$ 是对 $\mathcal{P}_0$进行逐先验更新后得到的集合。与 Kamenica 和 Gentzkow（2011）一样，我们采用发送者偏好的子博弈完美均衡作为解概念。[22]

注释5 （一致性）。 发送方可用实验集合上的一致性约束有多种解释。在注释 1的语境下，一致性体现了多重先验模型所隐含的假设，即不存在能够让接收者区分先验集合中不同先验的信息。在$\mathcal{P}_0$ 被（τ, Φ）部分识别的语境下，引理 2意味着

[21]当$\mathcal{P}_0 = \{p_0\}$时，这意味着 p_0 位于 $\Delta(\Theta)$ 的内部，因为 τ 具有全支撑。[22]当$\mathcal{P}_0 = \{p_0\}$ 时，我们对说服博弈的描述与 Kamenica 和 Gentzkow（2011）的描述一致，因为在单元素先验集合下，发送者的一致性约束变得无关紧要。

一致性等价于将发送方限制在由 Φ可测的实验集合中。正如我们将在命题 1中所证明的，一致性还等价于对发送方问题施加性质（i）和（ii）作为额外约束。

假设发送者选择某个实验 π，并令 $\mu \in \Delta(\mathcal{K}(\Delta\Theta))$ 为在后验集合 $\{\mathcal{P}_y\}_{y\in Y}$ 上诱导出的相应信息结构。发送者与接收者的期望收益分别为

$$V(A,\mu) \equiv \mathbb{E}_\mu \left[\min_{p\in\mathcal{P}_y} \mathbb{E}_p[v(\hat{a}(\mathcal{P}_y),\theta)]\right]$$
$$U(A,\mu) \equiv \mathbb{E}_\mu \left[\min_{p\in\mathcal{P}_y} \mathbb{E}_p[u(\hat{a}(\mathcal{P}_y),\theta)]\right],$$

其中 $\hat{a}(\mathcal{P})$ 表示接收者持有信念 $\mathcal{P} \in \mathcal{K}(\Delta\Theta)$ 时的均衡行动。令 μ_0 表示由平凡实验诱导的、确定性映射到$\mathcal{P}_0$ 的退化信息结构。用符号表示，性质 (i) 和 (ii) 则分别转化为：对每一个行动集合 A和行动 a，$U(A,\mu) \geq U(A,\mu_0)$ 以及 $U(\{a\}\ \mu) = U(\{a\}\ \mu_0)$。下述命题表明，$\mu$ 的 Aumann可信性等价于这两个性质。

命题 1. 对任意 $\mu \in \Delta(\mathcal{K}(\Delta\Theta))$，下列陈述等价：

1. 对每一个行动集合 A、行动 a 以及状态依赖效用 u，

   (i) $U(A,\mu) \geq U(A,\mu_0)$;

   (ii) $U(\{a\},\mu) = U(\{a\},\mu_0)$.

2. μ 相对于 P_0 是奥曼可行的。

证明。 参见附录 A.8。 □

由于先验集合 $\mathcal{P}_0$ 是最大程度部分识别的，因此定理 2 中关于一致实验与Aumann-可信信息结构之间的等价刻画适用。换言之，将发送者限制在一致实验的集合内，等价于要求满足性质 (i) 和 (ii)，而且可以为接收者参与说服博弈这一决策提供微观基础。[23]

6.2 化简为贝叶斯劝说

与第4节一样，求解说服博弈的关键策略是用约化形式参数来表述问题。由于先验集合 $\mathcal{P}_0$ 由 (τ_0,Φ) 最大程度部分识别，引理3意味着后验集合$\mathcal{P}_y$ 是部分

[23]也可以通过运用定理 3 比较平凡实验与发送者选择的实验，直接证明性质 (i) 和 (ii)。命题 1 证明了一个更一般的结果，因为相对于非部分识别的先验集合，信息结构也可能是奥曼可行的。

识别的，依据的是同一划分上的约化形式后验 τ_y 。发送者的期望收益因此可以写为

$$V(A,\mu)=\mathbb{E}_\mu\left[\sum_\phi \tau_y(\phi)\min_{p\in\mathcal{P}_\phi}\mathbb{E}_p[v(\hat{a}(\tau_y),\theta)]\right],$$

其中 $\hat{a}(\tau_y)\equiv\hat{a}(\mathcal{P}_y)$，而 μ 现在被解释为定义在约化形式后验集合$\{\tau_y\}_{y\in Y}$上的信息结构。接收者的期望收益也可以类似地表示。

定义 $\underline{v}(a,\phi)\equiv\min_{p\in\mathcal{P}_\phi}\mathbb{E}_p[v(a,\theta)]$ 和 $\underline{u}(a,\phi)\equiv\min_{p\in\mathcal{P}_\phi}\mathbb{E}_p[u(a,\theta)]$,，并分别将其解释为发送者和接收者在 $A\times\Phi$上的效用函数。注意，现在我们可以完全通过 Φ 以及约化形式测度 $\tau_0,\tau_y\in\Delta(\Phi)$来表述说服博弈。令 $\hat{v}(\tau)\equiv\sum_\phi\tau(\phi)v(\hat{a}(\tau),\phi)$，使得发送者的期望收益为 $V(A,\mu)=\mathbb{E}_\mu[\hat{v}(\tau_y)]$。以下命题中对发送方问题的刻画与标准贝叶斯劝说设定中的刻画相对应。

命题 2。 发送者的最优收益为

$$\begin{aligned}&\sup_{\mu\in\Delta(\Delta\Phi)}\ \mathbb{E}_\mu[\hat{v}(\tau)]\\&\text{subject to}\ \ \mathbb{E}_\mu[\tau]=\tau_0.\end{aligned}$$

证明。 见附录 A.9。 □

定义曲线 $K=\{(\tau,\ \hat{v}(\tau)):\ \tau\in\Delta(\Phi)\}$。$\hat{v}$ 关于 $\Delta(\Phi)$ 的凹化为$\overline{V}(\tau)\equiv\sup\{z:(\tau,\ z)\in\text{co}(K)\}$，根据 Kamenica 和 Gentzkow（2011），可直接推出发送者的最优收益为

$$\overline{V}(\tau_0)=\sup\{z:(\tau_0,z)\in\text{co}(K)\}.$$

贝叶斯设定下所有现有的均衡刻画也直接适用于我们的框架，只需将所有内容解释为关于约化形式参数的内容。

示例 5 （检察官—法官）。 假设检察官（发送者）希望说服法官（接收者）判处受审被告有罪。被告可能是因故意 实施犯罪而有罪、因意外 实施犯罪而有罪，或者是无罪的，这由状态空间 $\Theta=\{GP、\ GA、\ I\}$表示。行动集合为 $A=\{$定罪、 宣告无罪$\}$，法官和检察官的收益矩阵如下，对于 $g\in[0,1]$.

$(S,\ R)$	有罪，目的	有罪，意外	无罪
定罪	$(1,\ 1)$	$(1,\ g)$	$(1,0)$
宣告无罪	$(0,\ 0)$	$(0,\ 1-g)$	$(0,1)$

假设先验集合为 $\mathcal{P}_0 = \{p \in \Delta(\Theta)\colon\ p(GP) + p(GA) = \tau_0、\ p(I) = 1 - \tau_0\}$ 对于某个 $\tau_0 \in [0,1]$，这反映了关于被告有罪的概率先验信念，但在被告有罪的条件下，完全不确定犯罪是故意还是意外。注意，$\mathcal{P}_0$ 由（τ_0、Φ）部分识别，其中 $\Phi = \{\{GP、GA\}、\{I\}\}$，其中 τ_0 表示分配给$\{GP、GA\}$的概率质量。接收者在信念 τ 下的均衡行动和发送者的期望收益为

$$\hat{a}(\tau) = \begin{cases} \text{Convict} & \text{if } \tau \geq \frac{1}{1+g} \\ \text{Acquit} & \text{if } \tau < \frac{1}{1+g}. \end{cases}, \qquad \hat{v}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{if } \tau \geq \frac{1}{1+g} \\ 0 & \text{if } \tau < \frac{1}{1+g}, \end{cases}$$

且发送者的最优收益由凹化 $V(\tau_0)$ 刻画。如图 2 所示，当 $g = 1$ 时，该凹化与 Kamenica 和 Gentzkow（2011）的凹化一致。

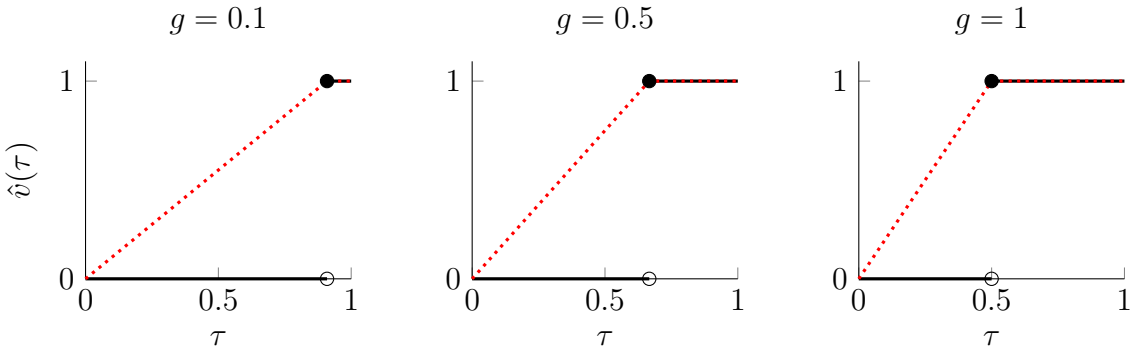

图 2：不同 g 下，$\hat{v}(\tau)$（黑色）及其凹化 $V(\tau)$（红色）的图示。

7 讨论

7.1 效用表示

本节讨论部分识别的模糊性与公理化文献之间的联系，该文献研究如何根据偏好识别此类信念。为简便起见，我们将讨论限制在完全模糊先验集这一类上，使得先验集合具有如下分解形式：$\mathcal{P}_0 = \sum_\phi \tau(\phi)\Delta(\phi)$。

令$\mathcal{F}$ 为行动的集合 $f\colon\ \Theta \to X$ 映射到某个结果空间 X。决策者对$\mathcal{F}$ 的偏好由二元关系 $\succsim$定义，并且我们假设效用函数 $u\colon\ X \to \mathbb{R}$ 表示她对常值行动集合的偏好，这些常值行动确定性地映射到某个 $x \in X$。对于 $f,\ g \in \mathcal{F}$，如果对所有 $\theta \in \Theta$都有 $f(\theta) \succsim g(\theta)$，我们记作 $f \geq g$[24]。如果我们假设先验集合为$\mathcal{P}_0$ 的决策者根据

[24]此处我们采用惯常的记号滥用，将 $x \succsim y$ 写作 $x, y \in X$，以表示对常值行动的偏好；这类行动会确定性地映射到结果。

最大最小准则评估备选方案，则相应的效用表示为 $\succsim$

$$\begin{aligned} U_{MEU(\tau,\Phi)}(f) &\equiv \min_{p\in\mathcal{P}_0} \mathbb{E}_p[u(f)] \\ &= \sum_{\phi\in\Phi} \tau(\phi) \min_{\theta\in\phi} u(f(\theta)). \end{aligned}$$

下文将说明，在 Savage 框架和 Anscombe-Aumann框架中，$U_{MEU(\tau,\Phi)}(\cdot)$分别可解释为 Zhang（2002）和 Lehrer（2012）表示结果的一个特例。

基于内概率的 *Choquet*期望效用（*CEU*）。在 Savage 框架中，Zhang（2002）为 Schmeidler（1989）的 CEU 表示的一个特例建立了公理体系，其中相应的容量是内测度。从偏好中可以恢复一个主观的 λ“无歧义”事件系统$\mathcal{L}$，且决策者在$\mathcal{L}$-可测行动$\mathcal{F}^{\mathcal{L}}$的集合上具有主观期望效用偏好。令 p 为相应的主观期望效用测度，则表示形式为

$$U_{Zhang}(f) = \sup\left\{\int g \ \mathrm{d}p : g \leq f,\ g \in \mathcal{F}^{\mathcal{L}}\right\}.$$

在$\mathcal{L}$是由约化形式参数Φ生成的 σ-代数这一特例中，可得 $U_{MEU(p,\Phi)}(\cdot) = U_{Zhang}(\cdot)$。

部分指定概率。在 Anscombe-Aumann框架中，Lehrer（2012）为效用表示建立了公理体系

$$U_{Lehrer}(f) = \sup\left\{\sum_{i\in I}\lambda_i \mathbb{E}_p[u(g_i)] \leq f : \sum_{i\in I}\lambda_i g_i \leq f,\ \lambda_i \in \mathbb{R}\right\},$$

其中，$p \in \Delta(\Theta)$ 和 $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in I}$ 张成了决策者知道 $\mathbb{E}_p[u(g_i)]$ 取值的行为集合。令 $\mathbb{1}_\phi \equiv \mathbb{1}_{\{\cdot\in\phi\}}$ 为每个约化形式参数 $\phi \in \Phi$ 对应的指示变量，则当$\mathcal{G} = \{\mathbb{1}_\phi\}_{\phi\in\Phi}$ 时，$U_{Lehrer}(\cdot) = U_{MEU(\tau,\Phi)}(\cdot)$。

Lehrer（2012）和 Zhang（2002）的表述都体现出某种悲观倾向：无法用主观期望效用测度评估的行动，会由能够评估的行动“从下方近似”。由于第2节和第3节的结果是在信念层面陈述的，因此适用于一类更广泛的模型；这类模型所识别出的领域更小，而决策者在该领域内满足主观期望效用公理。例如，Gul和Pesendorfer（2014）的期望不确定效用模型能够容纳部分识别的模糊性，而无需主体具有悲观的模糊态度。

7.2 与部分识别不相容的模糊性

只有当存在一个状态空间的划分，使得决策者对该划分具有概率信念时，先验集合才是部分识别的。“无歧义”事件的集合随之对应于该划分所生成的 σ-代数。然而，一般而言，无歧义事件的集合未必生成 a σ-代数，甚至未必生成 a λ-系统（例如，Epstein 和 Zhang，2001年；Zhang，2002年；Kopylov，2007年）。

例6 （四色 urn）。 假设 $\Theta = \{R, G, B, Y\}$分别表示从一个瓮中抽出的球的颜色。决策者知道，红球与绿球的总数，以及红球与蓝球的总数，均占瓮中球总数的一半。相应的先验集合为

$$\mathcal{P}_0 = \left\{ p \in \Delta(\Theta) : p(R) + p(G) = \frac{1}{2},\ p(R) + p(B) = \frac{1}{2} \right\},$$

在这种情况下，无歧义事件的集合不包含对 Θ 的划分。正如 Zhang（2002）第1.2.1节所讨论的，无歧义事件的集合构成一个λ-系统，但不是一个 σ-代数。

我们的部分识别的模糊性理论并未涉及此类情形。这反映出，只有某些形式的模糊性可以被合理化为源于人们对实验的部分识别性质所持的信念。

8 结论

本文提出了一种部分识别的模糊性理论，并将其与计量经济学文献中关于部分识别下稳健贝叶斯推断的研究联系起来。我们提出了对多重先验模型的一种新颖解读：该模型对可设想的实验集合施加了一致性约束；同时引入 Aumann可信性，作为信念鞅性质的集合值推广。在此框架下，我们将 Blackwell 实验与后验信念上的贝叶斯可信分布之间的标准等价关系扩展到模糊性情形，并严格刻画了该等价关系成立所需的先验集合类的充要条件。我们还证明，在部分识别的模糊性下，由最大最小期望效用所诱导的更有价值次序，与 Blackwell 实验上信息量更大的次序相对应。最后，我们将部分识别的模糊性理论应用于稳健贝叶斯分析中的 Gamma极小极大问题，以及说服博弈背景下的信息设计问题，以此展示研究结果在不同领域的价值。

A 省略的证明

对于 Θ的任意划分 Φ，回忆一下，$\Delta(\phi) \subseteq \Delta(\Theta)$表示支撑集包含于划分单元 $\phi \in \Phi$ 上的测度集合。如果实验 $\pi: \Theta \to \Delta(Y)$是$\Phi$-可测的，我们记 $\pi(\cdot|\phi)$，表示对任意 $\theta \in \phi$，$\pi(\cdot|\theta)$均成立，不失一般性。接下来的初步结果将在本节余下部分多次用到。

引理 A.1. 假设 $P = \sum_{\phi\in\Phi} \tau(\phi)P_\phi$，其中 $\tau \in \Delta(\Phi)$ 且 $P_\phi \subseteq \Delta(\phi)$ 对每个$\phi \in \Phi$都成立。那么，

1. $\sum_{\theta\in\phi} p(\theta) = \tau(\phi)$ 对任意 $p \in P$ 和 $\phi \in \Phi$都成立；
2. 如果 $\pi: \Theta \to \Delta(Y)$ 是 Φ-可测的，那么 $\sum_{\theta\in\Theta} \pi(y|\theta)p(\theta) = \sum_{\phi\in\Phi} \pi(y|\phi)\tau(\phi)$ 对任意 $p \in P$ 都成立。

证明。*1.* 固定某个 $\phi \in \Phi$ 和 $p \in \mathcal{P}$。根据$\mathcal{P}$的定义，存在某个$\{p_{\phi'}\}_{\phi'\in\Phi} \in \{\mathcal{P}_{\phi'}\}_{\phi'\in\Phi}$ 使得

$$\sum_{\theta\in\phi} p(\theta) = \sum_{\theta\in\phi}\sum_{\phi'\in\Phi} \tau(\phi')p_{\phi'}(\theta) = \sum_{\theta\in\phi} \tau(\phi)p_\phi(\theta) = \tau(\phi),$$

其中第二个等号是由注意到对所有 $\theta \notin \phi$，$p_\phi(\theta) = 0$ 而得出的。

2. 根据 π 的 Φ-可测性以及前面的结果，我们得到

$$\sum_{\theta\in\Theta} \pi(y|\theta)p(\theta) = \sum_{\phi\in\Phi} \pi(y|\phi)\sum_{\theta\in\phi} p(\theta) = \sum_{\phi\in\Phi} \pi(y|\phi)\tau(\phi),$$

如所需。 □

A.1 引理 1 的证明

定义 $D \equiv \text{span}\{p - p' : p, p' \in \text{P}\}$，并令 $V \equiv D^\perp$ 表示其正交补。设 $\pi: \Theta \to \Delta(Y)$是一个与P一致的非平凡实验。一致性的定义意味着，对于每个 $p, p' \in \text{P}$以及 $y \in Y$，都有 $\sum_\theta \pi(y|\theta)[p(\theta) - p'(\theta)] = 0$。换言之，$V \supseteq \text{span}\{\mathbf{1}, \{\pi(y|\cdot)\}_{y\in Y}\}$；并且我们知道 $\dim(V) \geq 2$，因为至少存在一个 $y \in Y$，使得$\{\pi(y|\cdot)\}_{y\in Y}$与常向量 $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^\Theta$ 不共线，这由非平凡性可知。注意到 $\dim(\text{P}) = \dim(D) = \dim(\Theta) - \dim(V) = \dim(\Delta\Theta) - \dim(V) + 1$，即可得到所需结论。

接下来，固定 $Y = \{y_1, y_2\}$ 并假设 $\dim(\mathcal{P}) \leq \dim(\Delta\Theta) - 1$，使得 $\dim(V) \geq 2$。选取某个 $e \in V$，使其不与 $\mathbf{1}$ 共线。定义

$$\pi(y_1|\theta) \equiv \frac{1}{2}\mathbf{1} + \epsilon e(\theta)$$
$$\pi(y_2|\theta) \equiv \frac{1}{2}\mathbf{1} - \epsilon e(\theta),$$

对于某个足够小的 $\epsilon > 0$，使得对每个 $\theta \in \Theta$，$\pi(\cdot|\theta) \in \Delta(Y)$。根据构造，$\pi$ 是一个非平凡实验。观察到对于任意 $p, p' \in \mathcal{P}$，即可得出 π 与 $\mathcal{P}$ 一致，

$$\begin{aligned}\sum_{\theta} \pi(y_i|\theta)[p(\theta) - p'(\theta)] &= \sum_{\theta} \left(\frac{1}{2}\mathbf{1} \pm \epsilon e(\theta)\right)[p(\theta) - p'(\theta)] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\theta} \mathbf{1}[p(\theta) - p'(\theta)] \pm \epsilon \sum_{\theta} e(\theta)[p(\theta) - p'(\theta)] \\ &= 0,\end{aligned}$$

其中，最后一个等式是由注意到 $\mathbf{1}$，$e \in V$ 根据构造所得出的。 ■

A.2 引理 2 的证明

2 $\Rightarrow$ *1*。由引理 A.1 的第二个陈述立即可得。

1 $\Rightarrow$ *2*。假设 π：$\Theta \to \Delta(Y)$ 与 $\mathcal{P}$ 一致。由于 $\mathcal{P}$ 由 (τ, Φ) 部分识别，因此它可以分解为 $\mathcal{P} = \sum_{\phi} \tau(\phi)\mathcal{P}_{\phi}$。固定 $\phi \in \Phi$ 并任取 p_{ϕ}，$\tilde{p}_{\phi} \in \mathcal{P}_{\phi}$ 以及 $\{p_{\phi'}\}_{\phi' \neq \phi} \in \{\mathcal{P}_{\phi'}\}_{\phi' \neq \phi}$。定义

$$\begin{aligned}p(\cdot) &= \tau(\phi)p_{\phi}(\cdot) + \sum_{\phi' \neq \phi} \tau(\phi')p_{\phi'}(\cdot) \\ \tilde{p}(\cdot) &= \tau(\phi)\tilde{p}_{\phi}(\cdot) + \sum_{\phi' \neq \phi} \tau(\phi')p_{\phi'}(\cdot),\end{aligned}$$

它们都是 $\mathcal{P}$ 的元素。因此，π 的一致性意味着

$$0 = \sum_{\theta \in \Theta} \pi(\cdot|\theta)[p(\theta) - \tilde{p}(\theta)] = \tau(\phi)\sum_{\theta \in \phi} \pi(\cdot|\theta)[p_{\phi}(\theta) - \tilde{p}_{\phi}(\theta)].$$

由于 τ 具有全支撑，因此可得 $\sum_{\theta \in \phi} \pi(\cdot|\theta)[p_{\phi}(\theta) - \tilde{p}_{\phi}(\theta)] = 0$。

对于 $\theta', \theta'' \in \phi$，定义 $d_{\theta',\theta''}(\cdot) = \mathbb{1}_{\{\cdot = \theta'\}} - \mathbb{1}_{\{\cdot = \theta''\}}$。由于 $\dim(\mathcal{P}_{\phi}) = \dim(\Delta(\phi))$，我们可以将 $d_{\theta',\theta''}(\cdot)$ 表示为$\{p - p' : p, p' \in \mathcal{P}_{\phi}\}$中各元素的线性组合，这意味着

$$0 = \sum_{\theta \in \phi} \pi(\cdot|\theta)d_{\theta',\theta''}(\theta) = \pi(\cdot|\theta') - \pi(\cdot|\theta'').$$

这证明了，对于每个 $\phi \in \Phi$，$\pi(\cdot|\theta)$ 在 $\theta \in \phi$ 上为常数，正如所需。 ■

A.3 引理3的证明

设 π 所诱导的信息结构为 $\mu \in \Delta(Y)$，并定义 $\mathcal{P}_y \equiv \sum_{\phi} \tau_y(\phi)\mathcal{P}_{\phi}$。由于 π 与 $\mathcal{P}_0$，一致，引理 2 表明它是 Φ-可测的。于是，根据引理 A.1，$\mu(y) \equiv \sum_{\theta} \pi(y|\theta)p_0(\theta) = \sum_{\phi} \pi(y|\phi)\tau_0(\phi)$。对于任意 $p_y \in \mathcal{P}_y$，存在某个

$p_0 \in \mathrm{P}_0$，使得 $p_y(\cdot) = \pi(y|\phi(\cdot))p_0(\cdot)\mu(y)$。由于 P_0 由 (τ_0, Φ) 部分识别，我们有$p_0(\cdot) = \sum_\phi \tau_0(\phi)p_\phi(\cdot) = \tau_0(\phi(\cdot))p_{\phi(\cdot)}(\cdot)$，其中某个 $\{p_\phi\}_{\phi\in\Phi} \in \{\mathrm{P}_\phi\}_{\phi\in\Phi}$。化简后，得到

$$p_y(\cdot) = \frac{\pi(y|\phi(\cdot))p_0(\cdot)}{\mu(y)} = \frac{\pi(y|\phi(\cdot))\tau_0(\phi(\cdot))}{\sum_\phi \pi(y|\phi)\tau_0(\phi)} p_{\phi(\cdot)}(\cdot) = \tau_y(\phi(\cdot))p_{\phi(\cdot)}(\cdot).$$

~这意味着 $p_y = \sum_\phi \tau_y(\phi)p_\phi \in \mathcal{P}_y$，从而证明 $\mathcal{P}_y \subseteq \mathcal{P}_y$。

~现在假设 $p_y \in \mathcal{P}_y$，使得存在某个 $\{p_\phi\}_{\phi\in\Phi} \in \{\mathcal{P}_\phi\}_{\phi\in\Phi}$ 满足$p_y(\cdot) = \sum_\phi \tau_y(\phi)p_\phi(\cdot) = \tau_y(\phi(\cdot))p_{\phi(\cdot)}(\cdot)$。与上文相同的一系列等式表明，存在某个 $p_0 \in \mathcal{P}_0$，使得 p_y 是 p_0 在 π 下的逐先验更新，~从而证明 $\mathcal{P}_y \supseteq \mathcal{P}_y$，如所求。■

A.4 定理1的证明

*1 ⇒ 2. </style}*假设 *: ()* 与 P_0，一致，因此我们可以在不失一般性的前提下，对某个 $p_0 \in \mathcal{P}_0$ 定义 $\mu(\cdot) \equiv \sum_\theta \pi(\cdot|\theta)p_0(\theta)$。根据引理3，$\mathcal{P}_0$ 的逐先验更新具有如下形式：$\mathcal{P}_y = \sum_\phi \tau_y(\phi)\mathcal{P}_\phi$，对每个 $y \in Y$ 均成立。于是，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_y \mu(y)\mathcal{P}_y &= \sum_y \mu(y) \sum_\phi \tau_y(\phi)\mathcal{P}_\phi \\
&= \sum_\phi \sum_y \mu(y)\tau_y(\phi)\mathcal{P}_\phi \\
&= \sum_\phi \left(\sum_y \mu(y)\tau_y(\phi)\right)\mathcal{P}_\phi && \text{(by convexity of } \mathcal{P}_\phi) \\
&= \sum_\phi \left(\sum_y \pi(y|\phi)\tau_0(\phi)\right)\mathcal{P}_\phi \\
&= \sum_\phi \tau_0(\phi)\mathcal{P}_\phi \\
&= \mathcal{P}_0,
\end{aligned}$$

如所需。注意，第三个等式源于凸分析中的标准事实：如果 A 是凸集，且 $\alpha, \beta \geq 0$，那么 $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A$。观察到揭示划分的实验 $\pi: \Theta \to \Delta(\Phi)$，$\pi(\phi|\theta) = \mathbb{1}_{\{\theta\in\phi\}}$ 与$\mathcal{P}_0$一致，由此可知非平凡一致实验的存在。

2 ⇒ 1. 令 $D \equiv$ 为$p - p'$：$p, p' \in \mathcal{P}_0\}$ 的张成空间，并令 $V \equiv D^\perp$ 为 D的正交补。对于任意与$\mathcal{P}_0$，一致的实验 $\pi: \Theta \to \Delta(Y)$，我们有$\sum_\theta \pi(y|\theta)[p_0(\theta) - p_0'(\theta)] = 0$，对每个 $p_0, p_0' \in \mathcal{P}_0$均成立。这意味着，对于每个$y \in Y$，$\pi(y|\cdot) \in V$。

根据假设，每个由一致实验 π 诱导的信息结构 μ 都是奥曼可行的。对于.....的任意 $\{p_0^y\}_{y\in Y} \subseteq \mathcal{P}_0$，后验测度

form $\frac{\pi(y|\cdot)p_0^y(\cdot)}{\mu(y)}\ \mu(y)$ 都包含在后验集合 $\mathcal{P}_y$ 中。因此，Aumann可信性意味着 es

$$\sum_y \mu(y)\frac{\pi(y|\cdot)p_0^y(\cdot)}{\mu(y)} = \sum_y \pi(y|\cdot)p_0^y(\cdot) \in \mathcal{P}_0 \qquad (*)$$

对每个 $\{p_0^y\}_{y\in Y} \subseteq \mathcal{P}_0$。

引理 A.2. 对于任意与 P_0, 一致的 $v \in V$ 和 $\pi:\ \Theta \to \Delta(Y)\ v_{\pi,y}(\cdot)\ \equiv v(\cdot)\pi(y|\cdot)\ \in V$。

证明。 固定某个 $y \in Y$，以及 $\{p_0^{y'}\}_{y'\neq y} \subseteq \mathcal{P}_0$。定义 $q(p)(\cdot) \equiv \pi(y|\cdot)p(\cdot)+\sum_{y'\neq y}\pi(y'|\cdot)$ $p_0^{y'}(\cdot)$，使得 $q(p_0) \in \mathcal{P}_0$ 对任意 $p_0 \in \mathcal{P}_0$，由 $(*)$ 可知。由于 $v \in V$，我们知道

$$\begin{aligned}\sum_\theta v(\theta)q(p_0)(\theta) &= \sum_\theta v(\theta)\pi(y|\theta)p_0(\theta) + \sum_\theta v(\theta)\left(\sum_{y'\neq y}\pi(y'|\theta)p_0^{y'}(\theta)\right)\\ &= \sum_\theta v_{\pi,y}(\theta)p_0(\theta) + \sum_\theta v(\theta)\left(\sum_{y'\neq y}\pi(y'|\theta)p_0^{y'}(\theta)\right)\end{aligned}$$

在 p_0 上关于$\mathcal{P}_0$是常数。由于第二项与 p_0无关，第一项必定在 p_0 上关于 $\mathcal{P}_0$, 是常数，这意味着 $v_{\pi,y} \in V$。 □

一个重要推论是，在$\mathcal{P}_0$上取常值的线性泛函集合 V 在乘法下是封闭的。

引理 A.3. 对任意 $v,\ v' \in V,\ k(\cdot) \equiv v(\cdot)v'(\cdot)\ \in V$。

证明。 固定 $v \in V$，并选取某个 $a,\ b \in \mathbb{R}$、 $b \neq 0$ 来定义 $\tilde{v} = a\mathbf{1} + bv$，使得对所有 $\theta \in \Theta$都有$\tilde{v}(\cdot) \in [0,1]$。由于 V在仿射变换下是封闭的， $\tilde{v} \in V$。注意到实验 $\pi:$ $\Theta \to \Delta(\{y_1,\ y_2\})$, $\pi(y_1|\theta) = \tilde{v}(\theta)$与$\mathcal{P}_0$ 一致，因为

$$\sum_\theta \pi(y_1|\theta)[p(\theta) - p'(\theta)] = \sum_\theta \tilde{v}(\theta)[p(\theta) - p'(\theta)] = 0$$

对任意 $p,\ p' \in \mathcal{P}_0$。于是前述引理蕴含$v_{\pi,\ y_1}(\cdot) \equiv \tilde{v}(\cdot)v'(\cdot) \in V$ 对任意$v' \in V$成立，在此情形下

$$\begin{aligned}0 &= \sum_\theta \tilde{v}(\theta)v'(\theta)[p(\theta) - p'(\theta)]\\ &= a\sum_\theta v'(\theta)[p(\theta) - p'(\theta)] + b\sum_\theta v(\theta)v'(\theta)[p(\theta) - p'(\theta)]\\ &= b\sum_\theta k(\theta)[p(\theta) - p'(\theta)]\end{aligned}$$

对于任意 $p, p' \in \mathcal{P}_0$。由于 $b \neq 0$，我们可知 $k \in V$，如所需。 □

定义等价关系

$$\theta \sim \theta' \quad \Leftrightarrow \quad v(\theta) = v(\theta') \quad \text{for all } v \in V$$

在 Θ 上，并令 Φ 为由 $\sim$ 给出的等价类在 Θ 上所诱导的划分。对于任意 $v \in V$，令 $v(\phi)$ 表示任意 $\theta \in \phi$ 下 $v(\theta)$ 的值。固定 $\phi \in \Phi$，并注意到对于每个 $\phi' \in \Phi \backslash \{\phi\}$，都存在某个 $v_{\phi,\phi'} \in V$，使得根据 Φ 的定义，$v_{\phi,\phi'}(\phi) \neq v_{\phi,\phi'}(\phi')$。

由于 $\frac{v_\phi,_{\phi'}(\theta)-v_{\phi},_{\phi'}(\phi')}{v_{\phi},_{\phi'}(\phi)-v_{\phi},_{\phi'}(\phi')} = 1$ 对 $\theta \in \phi$ 以及 $\frac{v_{\phi},_{\phi'}(\theta)-v_{\phi},_{\phi'}(\phi')}{v_{\phi},_{\phi'}(\phi)-v_{\phi},_{\phi'}(\phi')} = 0$ 对 $\theta \in \phi'$，我们可以构造拉格朗日基多项式

$$\xi_\phi(\cdot) \equiv \prod_{\phi' \in \Phi \backslash \{\phi\}} \frac{v_{\phi,\phi'}(\cdot) - v_{\phi,\phi'}(\phi')}{v_{\phi,\phi'}(\phi) - v_{\phi,\phi'}(\phi')} = \mathbb{1}_{\{\cdot \in \phi\}},$$

它充当划分单元 ϕ 的示性函数。引理 A.3 蕴含 $\xi_\phi \in V$，并且对每个 $\phi \in \Phi$ 重复该论证可得张成空间 $\{\mathbb{1}_{\{\cdot \in \phi\}}\}_{\phi \in \Phi} \subseteq V$。由于每个 $v \in V$ 在 Φ 中的划分单元上均为常数，我们同样有张成空间 $\{\mathbb{1}_{\{\cdot \in \phi\}}\}_{\phi \in \Phi} \supseteq V$。因此，我们可以得出张成空间 $\{\mathbb{1}_{\{\cdot \in \phi\}}\}_{\phi \in \Phi} = V$，并且

$$0 = \sum_\theta \mathbb{1}_{\{\theta \in \phi\}}[p(\theta) - p'(\theta)] = \sum_{\theta \in \phi} p(\theta) - \sum_{\theta \in \phi} p'(\theta).$$

对每个 p，$p' \in \mathcal{P}_0$ 和 $\phi \in \Phi$。

引理 A.4. Φ 是 Θ 的一个非平凡划分。

证明。反设 $\Phi = \{\Theta\}$，此时 $V =$ 张成空间 $\{\mathbb{1}_{\{\cdot \in \phi\}}\}^{\phi \in \Phi}$ 是常函数的集合。这立即导出矛盾，因为根据假设，至少存在一个非平凡的一致实验 $\pi : \Theta \to \Delta(Y)$，且对每个 $y \in Y$，$\pi(y|\cdot) \in V$。

□

定义约化形式先验 $\tau \in \Delta(\Phi)$：对于任意 $p \in \mathcal{P}_0$，不失一般性地取 $\tau(\phi) = \sum_{\theta \in \phi} p(\theta)$。前述引理表明，揭示划分的实验 $\pi : \Theta \to \Delta(\Phi)$，$\pi(\phi|\theta) = \mathbb{1}_{\{\theta \in \phi\}}$ 是非平凡的。注意，π 与 $\mathcal{P}_0$ 一致，因为对于任意 $p \in \mathcal{P}_0$，$\sum_\theta \mathbb{1}_{\{\theta \in \phi\}} p(\theta) = \tau(\phi)$。于是，约化形式先验 τ 可解释为由 π 诱导的信息结构，在这种情况下，Aumann可信性蕴含

$$\mathcal{P}_0 = \sum_{\phi \in \Phi} \tau(\phi) \mathcal{P}_\phi,$$

其中，$\mathcal{P}_\phi \in \mathcal{K}(\Delta\Theta)$ 是给定 ϕ 时对 $\mathcal{P}_0$ 进行的逐先验更新。注意到，每个 $p(\cdot|\phi) \in \mathcal{P}_\phi$ 都具有如下形式：$p(\cdot|\phi) = {}^{p(\cdot)\mathbb{1}\{\cdot \in \phi\}}\,\tau(\phi)$，其中某个 $p \in \mathcal{P}_0$ 满足该形式。

尚需证明，对每个 $\phi \in \Phi$，均有 $\dim(\mathcal{P}_\phi) = \dim(\Delta(\phi))$。当 ϕ 为单元素集合时，这一点立即成立，此时 $\dim(\mathcal{P}_\phi) = \dim(\Delta(\phi)) = 0$。此后我们

假设 $|\phi| \geq 2$。

引理 A.5. 若 $|\phi| \geq 2$, 则 $\dim(\mathcal{P}_\phi) \geq \dim(\Delta(\phi))$。

证明。反设 $\dim(\mathrm{P}_\phi) \leq \dim(\Delta(\phi)) - 1$。滥用记号，将 P_ϕ 和 $\Delta(\phi)$ 视为 $\mathbb{R}^\phi$ 的子集，而非 $\mathbb{R}^\Theta$。定义 $D_\phi = \{p - p' : p \in \mathrm{P}_\phi\} \subseteq \mathbb{R}^\phi$，使得 $\dim(D_\phi) = \dim(\mathrm{P}_\phi)$ 且 $\dim(D_\phi^\perp) = \dim(\Delta(\phi)) + 1 - \dim(D_\phi) \geq 2$。这意味着存在某个非常数 $v \in D_\phi^\perp$，满足对每个 $p_\phi, p'_\phi \in \mathrm{P}_\phi$，都有 $\sum_{\theta\in\phi} v(\theta)[p_\phi(\theta) - p'_\phi(\theta)] = 0$。由于 $D_\phi^\perp$ 在仿射变换下封闭，我们可以构造 $\tilde{v} = a\mathbf{1} + bv \in D_\phi^\perp$，使得对所有 $\theta \in \Theta$, $\tilde{v}(\cdot) \in [0,1]$。于是，实验 $\pi_\phi : \phi \to \Delta(\{z_1, z_2\})$（定义为 $\pi_\phi(z_1|\theta) = \tilde{v}(\theta)$）与 P_ϕ 一致，且在 ϕ 上关于 θ 非常数。

考虑由 $\tilde{\pi} : \Theta \to \Delta((\Phi \setminus \{\phi\}) \cup \{z_1, z_2\})$ 定义的复合实验 y

$$\tilde{\pi}(y|\theta) = \begin{cases} \mathbb{1}_{\{\theta\in y\}} & \text{if } y \in \Phi \setminus \{\phi\} \\ \mathbb{1}_{\{\theta\in\phi\}}\pi_\phi(y|\theta) & \text{if } y \in \{z_1, z_2\}, \end{cases}$$

其中，我们令 $\pi_\phi(\cdot|\theta) = \frac{1}{2}$，这对所有 $\theta \notin \phi$ 均不失一般性。注意，$\tilde{\pi}$ 不是 Φ-可测的，因为存在 $\theta', \theta'' \in \phi$，使得由于 $\tilde{v}$ 在 ϕ 上不是常数，$\tilde{\pi}(z_1|\theta') = \tilde{v}(\theta') \neq \tilde{v}(\theta'') = \tilde{\pi}(z_1|\theta'')$。此外，$\tilde{\pi}$ 与 $\mathcal{P}_0$, 一致，因为对每个 $p_0, p'_0 \in \mathcal{P}_0$,

$$\begin{aligned} \sum_{\theta\in\Theta} \tilde{\pi}(y|\theta)[p_0(\theta) - p'_0(\theta)] &= \tau(y) - \tau(y) = 0 && (\text{if } y \in \Phi \setminus \{\phi\}) \\ \sum_{\theta\in\Theta} \tilde{\pi}(y|\theta)[p_0(\theta) - p'_0(\theta)] &= \sum_{\theta\in\phi} \pi_\phi(y|\theta)[p_0(\theta) - p'_0(\theta)] \\ &= \sum_{\theta\in\phi} \pi_\phi(y|\theta)[\tau(\phi)p_\phi(\theta) - \tau(\phi)p'_\phi(\theta)] \\ &= 0. && (\text{if } y \in \{z_1, z_2\}) \end{aligned}$$

注意，对于 $p_\phi(\cdot) \equiv {}^{p_0(\theta)}\tau^{\mathbb{1}_{\{\theta\in\phi\}}}(\phi)$、$p'_\phi(\cdot) \equiv {}^{p'_0(\theta)}\tau^{\mathbb{1}_{\{\theta\in\phi\}}}(\phi) \in \mathrm{P}_\phi$, 第三行成立；最后一个等号则由 π_ϕ 相对于 P_ϕ 的一致性得出。这意味着，对于每个 $y \in (\Phi \setminus \{\phi\}) \cup \{z_1, z_2\}$，都有 $\tilde{\pi}(y|\cdot) \in V$，这与以下事实矛盾：$\tilde{\pi}(z_1|\cdot)$ 不是 Φ-可测的，但 $V =$ 张成空间 $\{\mathbb{1}_{\{\cdot\in\phi\}}\}_{\phi\in\Phi}$。 □

由于 $\mathcal{P}_\phi \subseteq \Delta(\phi)$，我们还得到 $\dim(\mathcal{P}_\phi) \leq \dim(\Delta(\phi))$。结合前述引理，我们由此可以得出 $\dim(\mathcal{P}_\phi) = \dim(\Delta(\phi))$，如所需。■

A.5 引理4的证明

由于所有由 (τ, Φ) 部分识别的完全模糊集合，都是由 (τ, Φ) 最大程度部分识别的，因此只需证明当 $|\phi| \leq 2$ 时，反向结论也成立。假设 $\mathcal{P} \in \mathcal{K}(\Delta\Theta)$ 由 (τ, Φ) 最大程度部分识别，且 $\mathcal{P} = \sum_\phi \tau(\phi)\mathcal{P}_\phi$。只需证明：若 $\mathcal{P}_\phi$ 在 $\mathcal{K}(\Delta\Theta)$ 中是极端的，则 $\mathcal{P}_\phi = \Delta(\phi)$。

由于 $\mathcal{P}_\phi \subseteq \Delta(\phi)$，若 $|\phi| = 1$，所需结论便立即成立。现在假设 $|\phi| = 2$，并将 $\mathcal{P}_\phi$ 与其赋予 $\theta \in \{\theta, \theta'\} \equiv \phi$ 的取值范围联系起来。反设 $\mathcal{P}_\phi = [a, b] \neq [0, 1]$。若 $a \neq 0$，则存在一个足够小的 $\epsilon > 0$，使得以 a 为中心、半径为 ϵ 的球包含于 $[0, 1]$。于是可以定义区间$\mathcal{Q} = [a - \epsilon, b]$、$\mathcal{Q}' = [a + \epsilon, b]$，使得 $\frac{1}{2}\mathcal{Q} + \frac{1}{2}\mathcal{Q}' = \mathcal{P}_\phi$，这就产生了矛盾。对 $b \neq 1$ 的情形重复同样的论证，即可得到所需结论。■

A.6 定理 2 的证明

1 $\Rightarrow$ *2.* 假设存在某个非平凡的（τ, Φ），使得 $\mathcal{P}_0$ 达到最大程度部分识别。根据定理1中部分识别的充分性，任何与 $\mathcal{P}_0$ 一致的实验都会导出 Aumann 可行信息结构，这一点可立即得出。剩下需要证明的是，任何 Aumann 可行信息结构都能由一致实验导出。

设 $\mu \in \Delta(Y)$ 是一个 Aumann 可行信息结构，且 $\text{supp}(\mu) = \{\mathcal{P}_y\}_{y \in Y}$。下面的预备结果将有助于我们的分析。

引理 A.6. 对于任意 $A \in K(\Delta\Theta)$ 和线性泛函 $f\colon \mathbb{R}^\Theta \to \mathbb{R}$，令 $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ 表示集合 A 在 f 作用下的像集。以下陈述成立：

1. $f\left(\sum_y \mu(y)\mathcal{P}_y\right) = \sum_y \mu(y) f(\mathcal{P}_y)$;
2. $f\left(\sum_y \mu(y)\mathcal{P}_y\right) = \left[\sum_y \mu(y) \min_{p \in \mathcal{P}_y} f(p),\ \sum_y \mu(y) \max_{p \in \mathcal{P}_y} f(p)\right]$.

证明。**1.** 若 $z \in f(\sum_y \mu(y)\mathrm{P}_y)$，则由 f 的线性性可知，存在某个 $\{p_y\}_{y \in Y} \in \{\mathrm{P}_y\}_{y \in Y}$，使得$z = f(\sum_y \mu(y)p_y) = \sum_y \mu(y) f(p_y)$。由于 $\sum_y \mu(y) f(p_y) \in \sum_y \mu(y) f(\mathrm{P}_y)$，这就证明了 $f(\sum_y \mu(y)\mathrm{P}_y) \subseteq \sum_y \mu(y) f(\mathrm{P}_y)$。现在假设 $z \in \sum_y \mu(y) f(\mathrm{P}_y)$，此时存在某个 $\{p_y\}_{y \in Y} \in \{\mathrm{P}_y\}_{y \in Y}$，使得由 f 的线性性可知，$z = \sum_y \mu(y) f(p_y) = f(\sum_y \mu(y) p_y)$。由于 $\sum_y \mu(y) p_y \in \sum_y \mu(y)\mathrm{P}_y$，我们有 $f(\sum_y \mu(y) p_y) \in f(\sum_y \mu(y)\mathrm{P}_y)$，因此 $f(\sum_y \mu(y)\mathrm{P}_y) \supseteq \sum_y \mu(y) f(\mathrm{P}_y)$，证毕。

2. 该结论可由第一个结果直接得出。反方向上的包含关系则由$\mathcal{P}_y$的凸性得出，因为对于任意 $z \in \left[\sum_y \mu(y) \min_{p \in \mathcal{P}_y} f(p)\ \sum_y \mu(y) \max_{p \in \mathcal{P}_y} f(p)\right]$，存在某个 $\alpha \in [0, 1]$ 使得

$$
\begin{aligned}
z &= \alpha \sum_y \mu(y) \min_{p \in \mathcal{P}_y} f(p) + (1 - \alpha) \sum_y \mu(y) \max_{p \in \mathcal{P}_y} f(p) \\
&= \sum_y \mu(y) f\left(\alpha \underline{p}_y + (1 - \alpha)\overline{p}_y\right) \\
&= f\left(\sum_y \mu(y) \left[\alpha \underline{p}_y + (1 - \alpha)\overline{p}_y\right]\right),
\end{aligned}
$$

其中 $\underline{p}_y \in$ 最小值自变量集合$_{p\in\mathcal{P}_y} f(p)$，且 $\overline{p}_y \in$ 最大值自变量集合$_{p\in\mathcal{P}_y} f(p)$。注意到 $\alpha\overline{p}_y + (1-\alpha)\underline{p}_y \in \mathcal{P}_y$，由$\mathcal{P}_y$的凸性即可得出所需结论。 □

考虑线性泛函 f_ϕ： $\mathbb{R}^\Theta \to \mathbb{R}$ 由 $f_\phi(p) = \sum_{\theta\in\phi} p(\theta)$ 定义。由于 $\mathcal{P}_0$由 (τ, Φ) 部分识别，引理 A.1 表明，对于每个 $p_0 \in \mathcal{P}_0$和$\phi \in \Phi$， $f_\phi(p_0) = \tau(\phi)$。由引理 A.6 可得

$$\begin{aligned}\{\tau(\phi)\} &= f_\phi(\mathcal{P}_0)\\ &= f_\phi\left(\sum_y \mu(y)\mathcal{P}_y\right)\\ &= \left[\sum_y \mu(y)\min_{p\in\mathcal{P}_y} f_\phi(p), \sum_y \mu(y)\max_{p\in\mathcal{P}_y} f_\phi(p)\right],\end{aligned}$$

此时 $\min_{p\in\mathcal{P}_y} f_\phi(p) = \max_{p\in\mathcal{P}_y} f_\phi(p)$，因此对于每个 p， $p' \in \mathcal{P}_y$和 $y \in Y$， $f_\phi(p) = f_\phi(p')$。于是，我们可以在不失一般性的情况下，为任意 $p \in \mathcal{P}_y$ 定义 $\tau_y(\phi) \equiv \sum_{\theta\in\phi} p(\theta)$，从而得到

$$\tau(\phi) = \sum_y \mu(y)\tau_y(\phi). \qquad (**)$$

换言之， μ 可以解释为关于 $\{\tau_y\}_{y\in Y}$ 的分布，该分布相对于 τ 是贝叶斯可信的。

引理 A.7。 令 π： $\Theta \to \Delta(\Phi)$ 为揭示划分的实验 $\pi(\phi|\theta) = \mathbb{1}_{\{\theta\in\phi\}}$。对于每个 $P_y \in \mathrm{supp}(\mu)$ 以及满足 $\tau_y(\phi) > 0$ 的 $\phi \in \Phi$，给定 ϕ 后，P_y 的逐先验更新为 P_ϕ。

证明。 回想一下，当$\mathcal{P}_0 = \sum_\phi \tau(\phi)\mathcal{P}_\phi$ 由(τ, ϕ)部分识别时，在揭示划分的实验下，给定 ϕ 后$\mathcal{P}_0$ 的逐先验更新为 $\tau^{\mathbb{1}_{\{\cdot\in\phi\}}}(\phi)\,\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_\phi$。根据 Aumann可信性，

$$\mathcal{P}_\phi = \frac{\mathbb{1}_{\{\cdot\in\phi\}}}{\tau(\phi)}\sum_y \mu(y)\mathcal{P}_y = \sum_y \frac{\mu(y)}{\tau(\phi)}\mathbb{1}_{\{\cdot\in\phi\}}\mathcal{P}_y,$$

其中，第二个等式源于这样一个事实：将对应于 $\theta \notin \phi$ 的索引置零的运算 $p \mapsto \mathbb{1}_{\{\cdot\in\phi\}}p$ 对于闵可夫斯基加法是线性的。

接下来注意，若 $\tau_y(\phi) = 0$，则对于每个 $p \in \mathcal{P}_y$， $p(\theta) = 0$ 在 $\theta \in \phi$ 上成立。这意味着，对于所有此类 y， $\mathbb{1}_{\{\cdot\in\phi\}}\mathcal{P}_y = \{\mathbf{0}\}$，此时

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\phi &= \sum_{y:\tau_y(\phi)>0} \frac{\mu(y)}{\tau(\phi)}\mathbb{1}_{\{\cdot\in\phi\}}\mathcal{P}_y\\ &= \sum_{y:\tau_y(\phi)>0} \frac{\mu(y)\tau_y(\phi)}{\tau(\phi)}\left(\frac{\mathbb{1}_{\{\cdot\in\phi\}}}{\tau_y(\phi)}\mathcal{P}_y\right).\end{aligned}$$

由 (∗∗) 我们知道，$\sum_{y:\tau_y(\phi)>0} \mu(y)\tau_y(\phi)\,\tau(\phi) = \sum_y \mu(y)\tau_y(\phi)\,\tau(\phi) = 1$。根据假设，$P_\phi$ 是 $K(\Delta\Theta)$ 中的一个极端点，因此我们可以得出 $\tau_y^{\mathbb{1}_{\{\cdot\in\phi\}}}(\cdot)\,P_y = P_\phi$，如所需。 □

揭示划分的实验与$\mathcal{P}_y$ 一致，因为对于每个 $\phi \in \Phi$，$\sum_\theta \mathbb{1}_{\{\theta\in\phi\}} p_y(\theta) = \sum_{\theta\in\phi} p_y(\theta) = \tau_y(\phi)$。此外，前述引理表明，它在$\{\mathcal{P}_\phi\}_{\phi\in\Phi}$上诱导出信息结构 $\tau_y \in \Delta(\Phi)$。现在我们证明，τ_y 相对于$\mathcal{P}_y$是奥曼可行的。

引理 A.8. 对于每个 $y \in Y$，我们有 $P_y = \sum_\phi \tau_y(\phi) P_\phi$。

证明。固定任意一个 $p_y \in \mathcal{P}_y$。前述引理表明，对于所有满足 $\tau_y(\phi) > 0$ 的 $\phi \in \Phi$，$p_\phi \equiv \frac{\mathbb{1}_{\{\cdot\in\phi\}} p_y(\cdot)}{\tau_y(\phi)} \in \mathcal{P}_\phi$。根据 τ_y 的定义，我们知道，对于任何满足 $\tau_y(\phi) = 0$ 的 $\phi \in \Phi$，都有 $p_y(\theta) = 0$ 在 $\theta \in \phi$ 上成立。对所有满足 $\phi' \in \{\phi \in \Phi : \tau_y(\phi) = 0\}$ 的 $p_{\phi'} \in \mathcal{P}_{\phi'}$，任取一个，并注意到

$$\begin{aligned}\sum_\phi \tau_y(\phi) p_\phi(\cdot) &= \sum_{\phi:\tau_y(\phi)>0} \tau_y(\phi) \frac{\mathbb{1}_{\{\cdot\in\phi\}} p_y(\cdot)}{\tau_y(\phi)} + \sum_{\phi:\tau_y(\phi)=0} \tau_y(\phi) p_\phi(\cdot) \\ &= \sum_{\phi:\tau_y(\phi)>0} \mathbb{1}_{\{\cdot\in\phi\}} p_y(\cdot) \\ &= p_y(\cdot),\end{aligned}$$

在这种情况下，$p_y \in \sum_\phi \tau_y(\phi)\mathcal{P}_\phi$，因此$\mathcal{P}_y \subseteq \sum_\phi \tau_y(\phi)\mathcal{P}_\phi$。

现在反设$\mathcal{P}_y \subsetneq \sum_\phi \tau_y(\phi)\mathcal{P}_\phi$ 对某个 $y \in Y$成立。对任意$u \in \mathbb{R}^\Theta$，令 $h_{\mathcal{P}}(u) \equiv \max_{p\in\mathcal{P}} \sum_\theta u(\theta)p(\theta)$表示与每个$\mathcal{P} \in \mathcal{K}(\Delta\Theta)$相对应的支撑函数。由于$\mathcal{P}_y$ 与 $\sum_\phi \tau_y(\phi)\mathcal{P}_\phi$ 是凸集，分离超平面定理蕴含存在某个 $u \in \mathbb{R}^\Theta$，使得 $h_{\mathcal{P}_y}(u) < h_{\sum_\phi \tau_y(\phi)\mathcal{P}_\phi}(u)$。由于支撑函数关于闵可夫斯基加法是线性的，我们有

$$\begin{aligned}h_{\mathcal{P}_0}(u) &= \sum_y \mu(y) h_{\mathcal{P}_y}(u) \\ &< \sum_y \mu(y) h_{\sum_\phi \tau_y(\phi)\mathcal{P}_\phi}(u) \\ &= h_{\sum_\phi \left(\sum_y \mu(y)\tau_y(\phi)\right)\mathcal{P}_\phi}(u) && \text{(by convexity of } \mathcal{P}_\phi) \\ &= h_{\sum_\phi \tau(\phi)\mathcal{P}_\phi}(u) && \text{(by } (**)) \\ &= h_{\mathcal{P}_0}(u),\end{aligned}$$

矛盾。 □

由（∗∗）可知，μ 可被解释为约化形式后验的集合$\{\tau_y\}_{y\in Y}$上的一个贝叶斯可置信信息结构。于是，贝叶斯设定中贝叶斯可置信信息结构与实验之间的等价性意味着

存在某个诱导 μ的实验 π_r ： $\Theta \to \Delta(Y)$。由引理3，$\mathcal{P}_0$ 在 π_r 下的逐先验更新具有形式$\mathcal{P}_y^{\pi_r} = \sum_\phi \tau_y(\phi)\mathcal{P}_\phi$。由于我们由引理 A.8可知，对每一个$\mathcal{P}_y \in \text{supp}(\mu)$，都有$\mathcal{P}_y = \sum_\phi \tau_y(\phi)\mathcal{P}_\phi$，因此对所有 $y \in Y$都有$\mathcal{P}_y = \mathcal{P}_y^{\pi_r}$。换言之，我们可以得出结论： μ 支撑在实验 π_r 于逐先验更新下所诱导的后验集合上，此即所求。

2 $\Rightarrow$ *1*。 定理1中部分识别的必要性意味着，对于每个 $\phi \in \Phi$，有$\mathcal{P}_0 = \sum_\phi \tau(\phi)\mathcal{P}_\phi$，其中$\mathcal{P}_\phi \subseteq \Delta(\phi)$且 $\dim(\mathcal{P}_\phi) = |\phi| - 1$。假设反之，$\mathcal{P}_\phi$ 对于某个 $\phi \in \Phi$不是极大的，即存在一组不同的集合$\{\mathcal{Q}_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{K}(\Delta\Theta)$，使得$\mathcal{Q}_i \neq \mathcal{P}_\phi$ 且 $\nu \in \Delta(I)$，并满足$\mathcal{P}_\phi = \sum_i \nu(i)\mathcal{Q}_i$。

引理 A.9。$\mathcal{Q}_i \subseteq \Delta(\phi)$ 对于 $i \in I$。

证明。 由于$\mathcal{P}_\phi = \sum_i \nu(i)\mathcal{Q}_i$，我们知道，对于每个$\{q_i\}_{i\in I} \subseteq \{\mathcal{Q}_i\}_{i\in I}$， $\sum_i \nu(i)q_i \in \Delta(\phi)$。这意味着，对于每个 $\theta \notin \phi$， $\sum_i \nu(i)q_i(\theta) = 0$，在这种情况下，对于每个 $\theta \notin \phi$， $q_i(\theta) = 0$。由于这对任意的 $q_i \in \mathcal{Q}_i$ 都成立，因此可得 $\mathcal{Q}_i \subseteq \Delta(\phi)$，证毕。 □

接下来，我们证明，不存在一个 Φ-可测实验能够诱导出两个不同的后验集合 $\mathcal{Q} \neq \mathcal{Q}'$，且它们都是同一个 $\Delta(\phi)$ 的子集。根据我们在第 2.3 节对 ϕ-条件测度不变性的讨论，即可得到这一结果。

引理 A.10. 假设 $\pi\colon \Theta \to \Delta(Y)$ 与 $P_0 = \sum_\phi \tau(\phi)P^\phi$ 一致，并设 $\{P^y\}_{y\in Y}$ 是 π 在逐先验更新下诱导的后验集合族。若对某个 $\phi \in \Phi$ 和 y， $y' \in Y$ 满足 $P^y, P^{y'} \subseteq \Delta(\phi)$，则 $P^y = P^{y'}$。

证明。 由于 $\mathcal{P}_0$ 由 (τ, Φ) 部分识别，引理3表明，任意后验集合都具有 $\mathcal{P}_y = \sum_\phi \tau_y(\phi)\mathcal{P}_\phi$ 的形式，其中 τ_y 是与τ对应的约化形式后验。若 $\mathcal{P}_y \subseteq \Delta(\phi)$，则立即有 $\mathcal{P}_y = \mathcal{P}_\phi$ 且 $\tau_y(\phi) = 1$。对 $\mathcal{P}_{y'}$ 重复此论证可得 $\mathcal{P}_y = \mathcal{P}_{y'} = \mathcal{P}_\phi$，证毕。

□

现在定义 $Y \equiv (\Phi \setminus \{\phi\}) \cup I$ 并考虑信息结构 $\mu \in \Delta(Y)$，

$$\mu(y) = \begin{cases} \tau(y) & \text{if } y = \phi' \in \Phi \setminus \{\phi\} \\ \tau(\phi)\nu(y) & \text{if } y \in I, \end{cases}$$

其中 $\text{supp}(\mu) = \{\mathcal{P}_{\phi'}\}_{\phi'\in\Phi\setminus\{\phi\}} \cup \{\mathcal{Q}_i\}_{i\in I}$。注意到

$$\begin{aligned} \sum_{y\in Y} \mu(y)\mathcal{P}_y &= \sum_{\phi'\neq\phi} \tau(\phi')\mathcal{P}_{\phi'} + \tau(\phi)\sum_{i\in I} \nu(i)\mathcal{Q}_i \\ &= \sum_{\phi'\neq\phi} \tau(\phi')\mathcal{P}_{\phi'} + \tau(\phi)\mathcal{P}_\phi \\ &= \mathcal{P}_0, \end{aligned}$$

这意味着， μ 相对于 $\mathcal{P}_0$是奥曼可行的。根据假设，因而存在一个实验 $\pi\colon \Theta \to \Delta(Y)$，它与 $\mathcal{P}_0$ 一致，并会诱导出 μ。于是我们看到

引理 A.10 导致矛盾，因为根据引理 A.9，$\mathcal{Q}_i \subseteq \Delta(\phi)$，然而我们有$\{\mathcal{Q}_i\}_{i\in I} \subseteq \text{supp}(\mu)$和 $\mathcal{Q}_i \neq \mathcal{Q}_{i'}$ 对 $i, i' \in I$成立。■

A.7 定理 3 的证明

引理 5 证明了第一条陈述与第二条陈述之间的等价性。注意到 π_1，π_2 与任意单元素先验集合相一致，且 $W_{\mathcal{P}_0,\ A,\ u}(\cdot) = V_{\mathcal{P}_0,\ A,\ u}(\cdot)$ 对于单元素 $\mathcal{P}_0$ 均成立，便可立即得到 *3* 蕴含 *1*。为证明 *1* 蕴含 *3*，定义 $u(\sigma,\ \phi) \equiv \min_{p\in\mathcal{P}_\phi} \sum_{\theta,\ a} u(a,\ \theta)\sigma(a)p(\theta)$，并注意到价值函数可以改写为

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{P}_0,A,u}(\pi) &= \mathbb{E}_{\mu^\pi}\left[\max_{\sigma\in\Delta(A)} \sum_{\phi} \tau_y^\pi(\phi) \min_{p\in\mathcal{P}_\phi} \sum_{\theta,a} u(a,\theta)\sigma(a)p(\theta)\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mu^\pi}\left[\max_{\sigma\in\Delta(A)} \sum_{\phi} \tau_y^\pi(\phi)\underline{u}(\sigma,\phi)\right]. \end{aligned}$$

上述表达式对应于以下情形下的 π 的价值：$\Delta(A)$ 是行动集合，Φ 是状态空间，μ^π 被解释为关于约化形式后验 $\{\tau_y^\pi\}_{y\in Y}$ 的信息结构。由于 $u(\cdot\ \phi)$ 在 $\Delta(A)$ 上有界，且 Blackwell 信息性定理可扩展至行动集合为波兰空间的情形（例如 Khan 等，2024），所需结果即得。■

A.8 命题 1 的证明

1 ⇒ *2*. 令 $\text{supp}(\mu) = \{\mathcal{P}_y\}_{y\in Y} \subseteq \mathcal{K}(\Delta\Theta)$. 性质 (ii) 意味着

$$\begin{aligned} \min_{p\in\mathcal{P}_0} \mathbb{E}_p[u(a,\theta)] &= \sum_{y\in Y} \mu(y) \min_{p\in\mathcal{P}_y} \mathbb{E}_p[u(a,\theta)] \\ &= \min_{p\in\sum_{y\in Y}\mu(y)\mathcal{P}_y} \mathbb{E}_p[u(a,\theta)] \end{aligned}$$

对每个 $u:\ A\times\Theta\to\mathbb{R}$。由于 $\mathcal{P}_0$ 和 $\sum_{y\in Y}\mu(y)\mathcal{P}_y$ 都是凸集，运用 $\mathbb{R}^\Theta$ 上的分离超平面定理，我们可以得出 $\mathcal{P}_0 = \sum_{y\in Y}\mu(y)\mathcal{P}_y$，如所需。

2 ⇒ *1*. 观察到对任意 $u:\ A\times\Theta\to\mathbb{R}$，即可轻易得出性质 (i)，

$$\begin{aligned} U(A,\mu_0) &= \max_{a\in A}\min_{p\in\mathcal{P}_0} \mathbb{E}_p\left[u(a,\theta)\right] \\ &= \max_{a\in A} \mathbb{E}_\mu\left[\min_{p\in\mathcal{P}_y} \mathbb{E}_p\left[u(a,\theta)\right]\right] \\ &\leq \mathbb{E}_\mu\left[\max_{a\in A}\min_{p\in\mathcal{P}_y} \mathbb{E}_p\left[u(a,\theta)\right]\right] = U(A,\mu), \end{aligned}$$

其中第二个等式由 Aumann可信性 得出。性质 (ii) 的证明类似，

由此可见,

$$U(\{a\},\mu_0)=\min_{p\in\mathcal{P}_0}\mathbb{E}_p[u(a,\theta)]=\mathbb{E}_\mu\left[\min_{p\in\mathcal{P}_y}\mathbb{E}_p\left[u(a,\theta)\right]\right]=U(\{a\},\mu),$$

正如所需。 ■

A.9 命题 2 的证明

假设对于某个 $\mu^*\in\Delta(\Delta\Phi)$, $\mathbb{E}_{\mu^*}[\hat{v}(\tau)]=v^*$。Carathéodory 定理意味着存在一个具有有限支撑集的贝叶斯可置信信息结构 $\mu\in\Delta(\Delta\Phi)$，使得 $\mathbb{E}_\mu[\hat{v}(\tau)]=v^*$；在这种情况下，不失一般性，可以施加额外约束，即 μ 具有有限支撑集。令 $\mathcal{K}_\Phi\equiv\{\mathcal{P}\in\mathcal{K}(\Delta\Theta):\mathcal{P}=\sum_\phi\tau(\phi)\mathcal{P}_\phi$ 对于某个 $\tau\in\Delta(\Phi)\}$，并注意到

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{\mu\in\Delta(\Delta\Phi)\\ \text{s.t. }\mathbb{E}_\mu[\tau]=\tau_0}}\mathbb{E}_\mu[\hat{v}(\tau)]&=\sup_{\substack{\mu\in\Delta(\Delta\Phi)\\ \text{s.t. }\mathbb{E}_\mu[\tau]=\tau_0}}\mathbb{E}_\mu\left[\sum_\phi\tau(\phi)\min_{p\in\mathcal{P}_\phi}\mathbb{E}_p[v(\hat{a}(\tau),\theta)]\right]\\&=\sup_{\substack{\mu\in\Delta(\Delta\Phi)\\ \text{s.t. }\mathbb{E}_\mu[\sum_\phi\tau(\phi)\mathcal{P}_\phi]=\mathcal{P}_0}}\mathbb{E}_\mu\left[\min_{p\in\sum_\phi\tau(\phi)\mathcal{P}_\phi}\mathbb{E}_p[v(\hat{a}(\tau),\theta)]\right]\\&=\sup_{\mu\in\Delta(\mathcal{K}_\Phi):\mathbb{E}_\mu[\mathcal{P}]=\mathcal{P}_0}\mathbb{E}_\mu\left[\min_{p\in\mathcal{P}}\mathbb{E}_p[v(\hat{a}(\mathcal{P}),\theta)]\right].\end{aligned}$$

注意，第二个等式成立，是因为当 $\mathcal{P}_0=\sum_\phi\tau_0(\phi)\mathcal{P}_\phi$ 由 (τ_0,Φ) 最大程度部分识别时，$\mathbb{E}_\mu[\tau]=\tau_0$ 当且仅当 $\mathbb{E}_\mu[\sum_\phi\tau(\phi)\mathcal{P}_\phi]=\mathcal{P}_0$；根据 $\mathcal{P}_\phi$ 的凸性，$\mathbb{E}_\mu[\sum_\phi\tau(\phi)\mathcal{P}_\phi]=\sum_\phi\mathbb{E}_\mu[\tau(\phi)]\mathcal{P}_\phi$。

回顾定理 2 充分性证明中的引理 A.8：当基础先验集 $\mathcal{P}_0=\sum_\phi\tau_0(\phi)\mathcal{P}_\phi$为最大程度部分识别时，奥曼可行信息结构支撑集中的每个集合$\mathcal{P}=\sum_\phi\tau(\phi)\mathcal{P}_\phi$ 都存在某个 $\tau\in\Delta(\Phi)$，使其可分解为$\mathcal{P}=\sum_\phi\tau(\phi)\mathcal{P}_\phi$。这意味着$\{\mu\in\Delta(\mathcal{K}_\Phi):\mathbb{E}_\mu[\mathcal{P}]=\mathcal{P}_0\}=\{\mu\in\Delta(\mathcal{K}(\Delta\Theta)):\mathbb{E}_\mu[\mathcal{P}]=\mathcal{P}_0\}$，因此我们可以写成

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{\mu\in\Delta(\Delta\Phi)\\ \text{s.t. }\mathbb{E}_\mu[\tau]=\tau_0}}\mathbb{E}_\mu[\hat{v}(\tau)]&=\sup_{\mu\in\Delta(\mathcal{K}(\Delta\Theta)):\mathbb{E}_\mu[\mathcal{P}]=\mathcal{P}_0}\mathbb{E}_\mu\left[\min_{p\in\mathcal{P}}\mathbb{E}_p[v(\hat{a}(\mathcal{P}),\theta)]\right]\\&=\sup_{\mu\in\Delta(\mathcal{K}(\Delta\Theta)):\mathbb{E}_\mu[\mathcal{P}]=\mathcal{P}_0}V(A,\mu).\end{aligned}$$

由于根据定理 2，我们知道，当先验集合被最大程度部分识别时，Aumann 可行信息结构等价于一致实验，因此右侧的表达式对应于发送方问题，正如所需。■

参考文献

Aumann, R. J. 和 M. B. Maschler（1995）：不完全信息重复博弈，马萨诸塞州剑桥：麻省理工学院出版社。Auster, S.、Y.-K. Che 和 K. Mierendorff（2024）："延长学习与仓促停止：模糊性下的瓦尔德问题"，《美国经济评论》，114。Ball, I. 和 J.-M. Esp´ín-S´anchez（2021）："实验说服"，*SSRN* 电子期刊。Beauchˆene, D.、J. Li 和 M. Li （ 2019 ）：" 模糊说服 "，《经济理论杂志》，179，312–365。Blackwell, D.（1951）："实验比较"，伯克利第二次数理统计与概率研讨会论文集，2。———（1953）："实验的等价比较"，《数理统计年刊》，265–272。C¸elen, B.（2012）："最大期望效用下实验的信息量"，《数理经济学杂志》，48，404–406。Chamberlain, G.（2020）："稳健决策理论与计量经济学"，《经济学年度评论》，12，239–271。Cheng, X.（2025）："模糊说服：事前表述"，《博弈与经济行为》。Cheng, X.、P. Klibanoff、S. Mukerji 和 L. Renou（2024）："模糊沟通下的说服"，载于第*25*届*ACM*经济学与计算会议论文集，1201–1202。Christensen, T.、H. R. Moon 和 F. Schorfheide（2022）："收益部分识别时的最优决策规则"，*arXiv* 预印本 *arXiv:2204.11748*。Dworczak, P. 和 A. Pavan（2022）："做最坏的准备，抱最好的希望：稳健（贝叶斯）说服"，《计量经济学》，90，2017–2051。D¨utting, P.、M. Feldman、D. Peretz 和 L. Samuelson（2024）："模糊合同"，《计量经济学》，92。Ellis, A.（2018）："模糊博弈中的动态一致性"，《博弈与经济行为》，111，241–249。Epstein, L. G. 和 M. Schneider（2003a）："独立同分布：独立且不可区分地分布"，《经济理论杂志》，113，32–50。———（2003b）："递归多先验"，《经济理论杂志》，113，1–31。———（2007）："模糊性下的学习"，《经济研究评论》，74，1275–1303。

Epstein, L. G. and J. Zhang（2001）：“主观上无模糊事件的主观概率”，《计量经济学》，69，265–306。Fern´andez, A. A., J. L. M. Olea, C. Qiu, J. Stoye, and S. Tinda（2024）：“部分识别下的稳健贝叶斯治疗选择”，*arXiv* 预印本 *arXiv:2408.11621*。Frick, M., R. Iijima, and D. Oyama（2025）：“传染性模糊”，工作论文。Gensbittel, F., L. Renou, and T. Tomala（2015）：“模糊实验的比较”，*SSRN: https://ssrn.com/abstract=2548502*。Giacomini, R. and T. Kitagawa（2021）：“集合识别模型的稳健贝叶斯推断”，《计量经济学》，89，1519–1556。Giacomini, R., T. Kitagawa, and M. Read（2025）：“计量经济学的稳健贝叶斯分析”，载于《经济学与计量经济学进展：第十二届世界大会》，V. Chernozhukov, J. H¨orner, E. La Ferrara, and I. Werning 编，剑桥大学出版社，计量经济学会专著，117–157。Gilboa, I. and D. Schmeidler（1989）：“具有非唯一先验的最大最小期望效用”，《数理经济学杂志》，18，141–153。Gr¨unbaum, B.（2003）：《凸多胞形》，第221卷，《数学研究生教材》，纽约：施普林格，第2版。Gul, F. and W. Pesendorfer（2014）：“期望不确定效用理论”，《计量经济学》，82，1–39。Kamenica, E. and M. Gentzkow（2011）：“贝叶斯劝说”，《美国经济评论》，101，2590–2615。Khan, M. A., H. Yu, and Z. Zhang（2024）：“无穷状态下信息结构的比较”，《经济理论杂志》，218。Kitagawa, T.（2011）：“交集界、稳健贝叶斯与模糊信念更新”，技术报告，未发表稿。——（2012）：“利用后验下概率估计和推断集合识别参数”，伦敦大学学院手稿。Klibanoff, P., M. Marinacci, and S. Mukerji（2005）：“模糊情形下决策的平滑模型”，《计量经济学》，73，1849–1892。Kline, B. and E. Tamer（2016）：“一类部分识别模型中的贝叶斯推断”，《数量经济学》，7，329–366。Kopylov, I.（2007）：“‘小’定义域上的主观概率”，《经济理论杂志》，133，236–265。Kosterina, S.（2022）：“未知信念下的劝说”，《理论经济学》，17。

Kudo, H.（1967）：“关于部分先验信息与参数充分性性质”，载于《第五届伯克利数学统计与概率研讨会论文集，第*1*卷：统计学》，L. M. Le Cam and J. Neyman 编，加利福尼亚州伯克利，美国：加利福尼亚大学出版社，251–265。Laclau, M. and L. Renou（2017）：“公共说服”，未发表稿。Lehrer, E.（2012）：“部分指定概率：决策与博弈”，《美国经济学杂志：微观经济学》，4，70–100。Li, J. and J. Zhou（2016）：“厌恶不确定性的偏好下的 Blackwell 信息性排序”，《博弈与经济行为》，96，18–29。Manski, C. F.（1981）：“主观概率具有主观定义域时的学习与决策”，《统计年鉴》，9，59–65。Moon, H. R. and F. Schorfheide（2012）：“部分识别模型中的贝叶斯推断与频率学派推断”，《计量经济学》，80，755–782。Pahlke, M.（2024）：“动态一致性与模糊沟通”，*SSRN:https://ssrn.com/abstract=5014864*。Schmeidler, D.（1989）：“不满足可加性的主观概率与期望效用”，《计量经济学》，57，571–587。Siniscalchi, M.（2011）：“模糊性下的动态选择”，《理论经济学》，6，379–421。Stoye, J.（2012）：“模糊性下统计决策的新视角”，《经济学年度评论》，4，257–282。Vidakovic, B.（2000）：“Γ-极小极大：保守稳健贝叶斯学派的一种范式”，载于《稳健贝叶斯分析》，施普林格，241–259。Wang, Z.（2024）：“模糊实验的信息性序”，《经济理论杂志》，222。Wolitzky, A.（2016）：“面向极大极小主体的机制设计：理论及其在双边贸易中的应用”，《理论经济学》，11。Zhang, J.（2002）：“主观模糊性、期望效用与 Choquet 期望效用”，《经济理论》，20，159–181。