arXiv:2602.07644v1 [math.LO] 7 Feb 2026

预层模型论的一些贡献，II——来回法

˜ANDREAS BRUNNER、CHARLES MORGAN 和 DARLLAN CONCEIC˛AO PINTO

摘要。我们讨论预层模型论中的来回技术。来回技术的核心在于揭示若干层级之间的关系，这些层级用于衡量两个模型之间的相似性；更一般地说，也用于衡量由一个模型及其一个元组组成的两个有序对之间的相似性。本文为预层模型（及其截面元组）定义了若干此类层级：基于部分同构通过字面上的来回条件所具有的可延展程度；基于共享我们定义的特定抽象不变量（例如第 5 节的 $F^{\alpha}_{M,\ \bar{a}}$ ）；基于在给定量词复杂度范围内，对公式实例化的（真值）达成一致；基于玩家 II 在某些 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 型博弈中存在获胜策略；以及最后，基于满足构造 Scott 句子时产生的某些无穷句子。最终，我们证明所有这些层级彼此吻合。

引言

往返法论证似乎最早出现在文献中，是 Huntingdon（[31]）和 Hausdorff（[27]）证明 Cantor 定理时所采用的方法。该定理指出，任意两个没有端点的可数稠密线序都同构。20 世纪 50 年代和 60 年代，Fra¨ıss´e、Ehrenfeucht、Scott、Karp 和 Tiamanov 等人的工作进一步发展并完善了这一技巧（[21],[22],[23],[41],[32],[43],[44]）. Poizat（[37], [38]）在介绍模型论基础时赋予了它核心地位。时至今日，它仍是一个活跃的研究主题。[1]

往返法论证的核心思想是，尝试迭代地扩展两个结构 M 和 N 之间的一个部分映射 f。该映射表明，由 $\mathrm{dom}(f)$ 和 $\mathrm{rge}(f)$ 生成的子结构彼此相似。首先，从 $M\backslash\mathrm{dom}(f)$ 中选取一个元素，比如 x，并尝试将它与 $N\backslash\mathrm{rge}(f)$ 中的一个元素（比如 y）匹配；接着，从 $N\backslash\mathrm{rge}(f)\cup\{y\}$ 中选取一个元素 z，并尝试将它与 $M\backslash\mathrm{dom}(f)\cup\{x\}$ 中的某个元素 w 匹配；然后不断重复这一过程。

预层模型论的历史可追溯至 20 世纪 70 年代，其中一部分我们已在 [10] 的引言中作了概述。本文将继续沿着目前已逐渐确立为预层模型论最富有成效的框架开展研究，即 Fourman-Scott 和 Higgs 的框架（[24], [28], [29]）。我们固定一个完备海廷代数 Ω，并给定一种语言 L，将 Ω 的元素用作

[1]例如，请参阅 V¨a¨an¨anen 的精彩著作（[46]）。Harrison-Trainor 最近发表的敏锐综述（[25]）则从不同的、更偏向复杂度理论的角度审视了这一主题。

“真”值，即 L 结构中 L-公式实例化的解释所取的值，而非像经典情形那样使用 $\{\bot, \top\}$。在这一框架下，除其他结果外，还有向下的 L¨owenheim-Skolem 定理（[34]）、省略类型定理（[8]）、一般模型定理（[5]）、Los 定理（[35], [1]）、罗宾逊图式法（[9], [10]）、完备性定理和一种有限形式的模型存在定理（[6]），以及新稳定性理论中的一些结果（[10]）。

鉴于预层模型论在多个方面取得的进展，自然会想知道往返法是否适用于预层模型论；如果适用，它会是什么样子。[2] 在这方面的初步尝试由 Sette-Caicedo（[42]）和 Brunner（[6]）作出；他们分别证明了拓扑空间上的模型层的 Fra¨ıss´e 定理的若干版本，以及将其推广到任意完备海廷代数上的层的版本。

无论是在 [18], §XII.3 中，还是在 [33], 例如，§2.4 中关于 Fra¨ıss´e 原始定理的证明，抑或是在 [42]和 [6]，中，Fra¨ıss´e 型定理的证明都有一些有趣的共同特点。我们在此讨论这些特点，为下文的论述提供一些动机。

这些证明的总体概述可以表述如下。设 L为一种一阶关系语言。若 M、 N 是 L 结构，则可以定义一个层次$\langle Q^n_{M,\ N} :\ \ n \in \mathbb{N}\rangle$，它由 M 与 N之间的部分同构集合的细化构成。该层次的各级取决于对其中部分同构进行往返法扩张的可能程度。于是，对于每个 $n \in \mathbb{N}$， M 与 N 满足量词度至多为 n 的相同句子，当且仅当$Q^n_{M,\ N}$ 非空。[3]

首先需要指出的是，尽管据我们所知，在任何相关论述中都没有以这种略显抽象的方式表述，但这些证明实际上为每个 L结构 M 归纳地构造了一个不变量层次。我们称其为 $\langle Z^n_M :\ \ n \in \mathbb{N}\rangle$。Marker（[33]）将这一过程的一个具体实例称为***Scott-Karp*** 分析，而我们将这一名称用于一般意义上的该过程。[4]

对于任意 $n \in \mathbb{N}$，证明由一系列相互蕴含构成。若对所有 $m \leqslant n$，都有 $Z^m_M = Z^m_N$，则 $Q^n_{M,\ N}$ 非空。若 $Q^n_{M,\ N}$ 非空，则 M 和N 满足相同的量词秩至多为 n 的句子。最后，若 M 和 N

[2]需要强调的是，经典模型论中的所有方法和结果并不一定都能在预层模型论中找到成功的对应物（例如，连续模型论的情况也类似）。一方面，我们知道有些东西肯定无法以类似经典模型论的方式奏效——例如，紧致性定理并不成立。另一方面，对于经典模型论中的某些内容，我们仍不清楚它们在预层模型论中是否有良好的对应物——例如，Feferman-Vaught 定理。[3]我们省略了对部分同构、量词度等概念的定义。在如此一般的层面上，读者凭直觉理解就绰绰有余。[4]在本引言中，我们只使用记号 $Q^n_{M,N}$ 和 Z^n_M。在正文中，集合 $Q_\alpha(p)$ 推广了 Q^n_{MN} 的作用—— M N 是隐含的。第5节中定义的函数和第12节中定义的句子，都是不变量层级的例子。

满足相同的量词秩至多为 n 的句子，则对所有 $m \leqslant n$ ，都有 $Z_M^m = Z_N^m$。

这十分引人注目，因为对于任意模型和任意特定的$n \in \mathbb{N}$ 而言，不变量 Z_M^n 都是一个单一的、尽管可能很复杂的对象，因此检验对于所有$m \leqslant n$ 是否有 $Z_M^m = Z_N^m$ 是一个非常离散的（事实上，在这里是有限的）过程；而满足直到某个量词度的相同句子，或具有$Q^n_{M,\ N}$非空，则在某种意义上是 M 和 N 的全局性质——为了看出它们在两种情况下都成立，必须检验相关类型的所有对象都满足某一性质（具体而言，就是句子以及模型中的对象）。因此，在研究这部分材料（以及 [11]）的过程中，我们的观点已经发展到这样一种程度：现在我们认为，对于所有 $m \leqslant n$ 均有 $Z_M^m = Z_N^m$ 且$Q^n_{M,\ N}$ 非空之间的等价，才是Fra¨ıss´é风格定理的真正核心。

其次，我们不能只处理 L-结构，而必须处理（并证明等价性）由 $(M,\ \bar{a})$ 组成的对，其中 L是一个结构， M 是其中元素构成的一个元组 $\bar{a}$ 。这是很自然的，因为例如，一旦我们想要比较两个模型对带有量词的句子 $Qx\phi(x)$ 的满足情况，就必须使用满足关系的归纳定义，因此考察这些句子在模型中的实例化 $\phi(x)$。

本文对预层模型论中围绕来回法的问题作了更全面的探讨。首先说明，我们在若干方面超出了 [6]的背景。第一，我们处理任意签名，而不局限于关系语言。第二，全文讨论细化、等价等概念的超限情形，而不局限于有限情形。第三，我们组织定义、结果、证明等内容，使其能够同时处理一阶逻辑和无穷语言。[5]

我们简要讨论本文的内容。首先在 §2 中讨论部分同构——本质上是保持未嵌套原子公式的映射，并证明其一些基本性质；然后在 §3 中定义这一概念的细化版本，即在反复满足往返条件下得到的版本。接着，我们为预层模型对（严格来说，是由一个预层模型及其元组构成的对象对）引入某些 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 风格的博弈，并在 §4 中证明，在这些博弈中，玩家 II 拥有必胜策略，等价于存在足够细化的部分同构。

接着，在第 §5 节中，我们立即开始为由一个预层模型及其中的一个元组组成的对定义不变量层级。这里的不变量是某些函数，见定义（5.2）。随后我们证明“ Karp 定理的真正核心”：两个分别由一个预层模型及其中的一个元组组成的对，在截至任意给定序数之前具有共同不变量，当且仅当它们之间存在细化至同一序数层级的部分同构。然后我们定义一种 Scott 型秩，证明

[5]第3章中的结果是针对层陈述的；不过，其中的论证并未用到粘合，因此这些证明对预层同样成立。

它定义良好，并讨论其用途的局限性（就我们所见而言），将其与经典情形进行比较。

到目前为止，我们只需要（未嵌套）原子公式的概念。然而，由于我们希望考察由预层模型和其中一个元组组成的两个对，通常在多大程度上满足相同的公式，现在有必要引入语言和公式的量词度（§6）。由于我们使用的语言不一定是关系型语言，因此其中可能包含由函数符号作用于其他项而产生的项，这会形成嵌套公式。修正秩通过考虑公式中所涉及项的复杂度，对量词度作了细化。

出于技术原因，我们发现§9和§10需要使用未嵌套公式。因此，我们必须在§7讨论如何对公式进行去嵌套，使得未嵌套公式的实例化的解释与原公式的解释保持不变。定义去嵌套的过程对于经典模型论和预层模型论是相同的，其结果是，去嵌套后公式的量词度等于原公式的修正秩。在经典模型论中，证明解释保持不变很直接，尽管对此鲜有论及。一个例外是 [30]„ 其中给出了一个“举例证明”。（我们在 [11]中作了更全面的论述。）然而，对于预层模型论而言，证明从公式转为其去嵌套形式时，实例化的解释并未改变，这一过程要微妙得多。因此，定理(7.6)和推论(7.7)证明了这一过程确实可行，是重要的结果。

接着，我们在§8讨论如何通过为 Ω 的每个元素 p 添加一个一元联结词$\Box_p$ 来扩充我们的语言。我们将由此得到的语言称为 $L^{\Box}$。我们引入 $L^{\Box}$，因为为了证明§9的主要结果，我们需要在其中处理结构和句子。该结果指出：对于两个由预层模型及其元组构成的有序对，如果它们在某个序数度以内的公式实例化的解释相同，那么由这两个有序对分别定义的函数层级在该序数以内相同。[6]

有必要对这一做法作一方法论上的评论。在 [9] 关于预层的罗宾逊图式法的某些结果和证明中，使用了$\Box_p$ 一元联结词 [10], 。在§3中，我们得以给出这些结果的强化版本，同时避免使用一元联结词。[7] 而在这里，我们无法避免使用它们，并且认为这是不可能避免的。[8] 我们能够并且确实在§5中不使用这些联结词来定义不变量层级。[9] 然而，我们对§9主要结果的证明似乎必然需要它们。这不一定十分令人惊讶。对于任意（$L^{\Box}$-）公式 ϕ，预层模型 M 以及

[6]我们在此简要介绍另一种方法：按照连续模型论的风格，通过添加零元联结词来实现。[7]在§8末尾，我们简要讨论如何利用 $L^{\Box}$，以在审美上有所不同、对某些读者而言更令人满意的方式，呈现 [10] 中关于图示法的结果。[8] 参见问题（ 11.5 ）。[9] ¨Fra´ıss [42] é 风格的定理，在 [42] 和 [6] 中也都处于 $L^{\Box}$ 的背景下。本文方法的一个不同之处在于，这两种方法都要求用一元联结词来定义不变量。

来自 M的元组 $\bar{a}$， $\square_{\perp}\phi(a)$ 的解释与 $\neg\phi(\bar{a})$ 的解释相同（而 $\square_{\top}\phi(a)$ 的解释仅仅就是 $\phi(\bar{a})$的解释）。因此，对于经典模型论，即，当$\Omega = \{\perp, \top\}$时，这些联结词已经包含在语言中。此外，在§9的论证中使用$\square_p$，与经典往返法论证中使用 $\neg$的一种版本相呼应（见 [11],§4）。

我们还注意到，在第9节、第11节和第12节中，我们将讨论范围限制在所有常元符号的外延均为 $\top$的签名上。我们在第9节开头讨论了这样做的必要性。

在第10节中，我们证明了，充分细化的部分同构保持所有公式的实例化，其中这些公式的修正秩其细化程度超过，

第9节和第10节的结果使我们能够完成命题（11.1）的证明，表明文中讨论的、由一个预层模型及其中的一个元组组成的两对对象之间的各种等价概念彼此等价。一个推论（推论（11.2））是关于一阶结构的模型层和 $L_{\infty\lambda}$-结构的预层的Karp定理的推广。

在最后一节，即第12节中，我们为（扩张的） $L^{\square}$-结构定义了一个不变量层级，其中每个不变量都是扩展语言中的一个公式。这推广了 [42] 和 [6]的方法。我们证明，这些不变量与第5.2节中引入的不变量密切相关。这使我们能够在命题（11.1）所列出的等价关系中再加入一种等价关系，并获得一个在总体风格上类似于 [18], 第XII.3节或 [33], 第2.4节中证明的证明。

1. 预备知识

记号 1.1. 我们的大部分记号都是标准的。我们采用一些标准的集合论约定。用 On 表示序数类，用 Card 表示基数类。给定一个集合 X、一个序数 α 和一个基数 μ，我们用 X表示 X 的基数，并用 ${}^{\alpha}X$ 表示由 X中元素构成的长度为 α 的序列集合，等价地，也就是从 α 到 X的函数集合；而 ${}^{<\alpha}X = \bigcup_{\beta<\alpha} {}^{\beta}X$，且 $[X]^{<\mu}$ 表示 X 中基数小于 μ的子集所组成的集合。

我们遵循模型论中的惯例，用$^{\frown}$并置表示连接。若 $\bar{a}, b$ 是结构 M 中的元组，且 $c \in M$，则用 $\bar{a}b$表示连接 $\bar{a}^{\frown}b$，用 $\bar{a}c$表示连接 $\bar{a}^{\frown}c$。更明确地，若 $\bar{a} = \langle a_i\colon\ i < \alpha\rangle \in {}^{\alpha}M$, $\bar{b} = \langle b_j\colon\ j < \beta\rangle \in {}^{\beta}M$且 $c \in M$，则用 $\bar{a}\bar{b}$ 表示$^{\frown}$序列 $d = \langle d_i\colon\ i < \alpha + \beta\rangle$；其中对于 $i < \alpha$，有 $d_i = a_i$；对于满足 $j < \beta$的 $i = \alpha + j$，有 $d_i = b_j$。并用 $\bar{a}c$ 表示序列 $\bar{e} = \langle e_i\colon\ i < \alpha + 1\rangle$，其中对于 $i < \alpha$，有 $e_i = a_i$，且 $e_\alpha = c$。

我们关于预层的记号取自 [10]。该论文还提供了预层模型论所需的背景材料，并进行了一些历史讨论。

在本文余下部分固定一个完备海廷代数 Ω。

定义 1.2. 一个签名 是由函数符号、关系符号和常元符号组成的集族。更形式地说， τ是一个签名，当且仅当它是四元组 $\langle \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C}\ \tau' \rangle$，其中$\mathcal{F}$、$\mathcal{R}$和$\mathcal{C}$是两两不相交的集合。 $\tau' \colon \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{N}$。

在本文余下部分固定一个签名 $\tau, = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C}\ \tau' \rangle$。在进入 §9 之前，我们还假设$\mathcal{C}$ 是一个预层。

本文后文将构造若干种定义在 τ 上的语言。控制这些构造的关键参数是三个基数，它们分别界定公式中允许出现的自由变量数量、允许使用的合取与析取的规模，以及允许进行量化的集合的规模。不过，起初我们只需要项和原子公式这两个概念；对于自由变量数量限制相同的这些语言而言，它们保持不变。

在本节剩余部分以及本文接下来的四节（§§2-5）中，固定一个基数 λ。这将确保诸如原子公式以及下文所定义的$\mathcal{UA}$等概念具有明确的含义。

定义 1.3. 定义在 τ 上的语言中含 λ个变量的项如下。

(1) 对 $\alpha < \lambda$，变量 v_α 是一个项。(2) 每个常元符号 $c \in \mathcal{C}$ 是一个项。(3) 若 f是一个 n元函数符号，且 t_0，……， t_{n-1}是项，则$f(t_0$，……， $t_{n-1})$也是项。

定义 1.4. 在 τ 上的语言中含 λ个变量的原子公式定义如下。

(1) 若 t_0 与 t_1 是项，则 $t_0 = t_1$ 是原子公式。(2) 若 t_0，……， t_{n-1}是项，且 R是一个 n元关系符号，则$R(t_0$， $\ldots t_{n-1})$ 是原子公式。

定义 1.5。 在含有 τ 个 λ变量的语言中，如果一个原子公式具有以下形式之一，则称其为非嵌套的

$$v_i = v_j,\ v_i = c,\ R(v_{i_0}, \ldots, v_{i_{n-1}}) \text{ or } v_{i_n} = f(v_{i_0}, \ldots, v_{i_{n-1}}),$$

其中 v_i 是变量， c 是常元符号， R 是 n元关系符号， f 是 n元函数符号。我们用$\mathcal{UA}$ 表示这些非嵌套原子公式的集族。

预层 M 上的项的解释已在 [10],§2 中论述（鉴于此前处理方式存在不妥之处，这里进行了不厌其烦的说明）。该解释以及原子公式的解释均可按照 [10] 针对任意 λ进行，而不受

所允许的联结词和量化方式的限制。因此，例如，对于来自 M的 ϕ原子截面和 $\bar{a}$ 截面元组，写作 $[\phi(\bar{a})]_M$不会产生歧义。

定义 1.6. 设 ϕ 是一个语言中的原子公式，该语言定义在含有 τ 个 λ变量的语言上。那么，$\mathrm{Var}(\phi)$ 是 ϕ 中出现的变量所组成的集合。

注意，对于任何这样的 ϕ，集合 $\mathrm{Var}(\phi)$ 都是有限的，且其中所有变量都在 ϕ 中自由出现。

2. 部分同构

定义 2.1. 设 $M, N \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$, $h\colon M \longrightarrow N$ 是一个预层态射， $\phi(\bar{v})$ 是一个原子公式，且 $p \in \Omega$。我们称 $\phi(\bar{v})$ 在 p 中在 下不变，如果

$$\text{for all } \bar{a} \in {}^{\mathrm{lh}(v)}|\operatorname{dom}(h) \restriction p| \text{ we have } [\phi(\bar{a})]_M = [\phi(h``\bar{a})]_N.$$

我们称 $\phi(\bar{v})$ 在 h 下不变，如果它在 $\top$ 中 对 h 不变。

我们有时也会说——这也是 [10], 中采用的用法—— ϕ 在 p 中由 h 保持，或者由 h 保持。

注意，如果 $\phi(\bar{v})$ 在 h 下不变，那么对于每个 $p \in \Omega$，它在 p 中也在 h 下不变，因为 $\mathrm{dom}(h) \restriction p \subseteq \mathrm{dom}(h) = \mathrm{dom}(h) \restriction \top$。

现在我们来定义部分同构，这是往返法论证中的关键要素。

定义 2.2. 回顾 [10], 定义 (1.34) 和命题 (1.37)：对于 Ω 上的预层 M 和 $A \subseteq |M|$，由 A 生成的 M 的子预层 $\langle A\rangle$ 由 $|\langle A\rangle| = \{a \restriction p$ 给出： $a \in A$ & $p \in \Omega\}$， $E^{\langle A\rangle} = E^M \restriction |\langle A\rangle|$ 和 $\restriction^{\langle A\rangle} = \restriction^M \restriction |\langle A\rangle|$。

引理 2.3. 设 M、 N 是 Ω 上的预层， $A \subseteq |M|$、 $B \subseteq |N|$, 且 $h\colon A \longrightarrow B$。假设对于所有 a_0、 $a_1 \in A$，都有 $[a_0 = a_1]_M = [h(a_0) = h(a_1)]_N$。那么我们可以将 h 延拓为预层单态射 $h\colon \langle A\rangle \longrightarrow \langle B\rangle$，方法是对 $a \in A$ 和 $p \in \Omega$ 设定 $h(a \restriction p) = h(a) \restriction p$。

证明。 首先，我们必须证明这个定义是合理的。因此，假设 $a_0, a_1 \in A, p \in \Omega$ 和 $a_0 \restriction p = a_1 \restriction p$。根据关于 h 的假设，我们有 $Ea_0 = Eh(a_0)$ 和 $Ea_1 = Eh(a_1)$。此外， $Ea_0 \restriction p = Ea_1 \restriction p$。因此， $Eh(a_0) \restriction p = Eh(a_1) \restriction p$。因此

$$\begin{aligned} Eh(a_0) \restriction p =& Eh(a_1) \restriction p = Ea_0 \restriction p = [a_0 \restriction p = a_1 \restriction p]_M = [a_0 = a_1]_M \wedge p \\ =& [h(a_0) = h(a_1)]_N \wedge p = [h(a_0) \restriction p = h(a_1) \restriction p]_N. \end{aligned}$$

因此，根据 M 的外延性，有 $h(a_0) \restriction p = h(a_1) \restriction p$ 。由此可见，该定义是良好的。此外，我们现在还得到了 h 与外延和

限制可交换，而且我们还有

$$[a_0 \restriction p = a_1 \restriction p]_M = [h(a_0) \restriction p = h(a_1) \restriction p]_N = [h(a_0 \restriction p) = h(a_1 \restriction p)]_N.$$

因此，该扩张函数满足作为预层单态射的定义。⋆

定义 2.4. 设 M、 $N \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$、 $A \subseteq |M|$、 $B \subseteq |N|$，且 $\langle A\rangle$、$\langle B\rangle$分别是由 A 与 B生成的 M、 N的子预层。双射$h\colon\ A \longrightarrow B$ 被视为部分函数 $h\colon\ M \longrightarrow N$，是（ M与 N之间的）部分同构，如果对于引理 (2.3) 所给出的 h到 $h\colon$ $\langle A\rangle \longrightarrow \langle B\rangle$的扩张，所有未嵌套原子公式在 $\top$中于 h 下不变，即，对所有 n元关系符号 $R \in L$、所有 $c \in C$ 以及所有 n元函数符号 f，下列公式在 $\top$中于 h 下不变。

(i) $v_0 = v_1$，(ii) $R(v_0$，...
...， v_{n-1})(iii) $v = c$(iv)
$f(v_0$，.....， $v_{n-1}) = v_n$

注意， $h\colon$ 根据引理 (2.3)， $\langle A\rangle \longrightarrow \langle B\rangle$是一个定义良好的预层单态射，因为 $v_0 = v_1$ 在 $\top$中在 h 下不变。此外，它满足 (i)-(iv)。

记号 2.5。 若 $h\colon\ M \longrightarrow N$ 是一个部分同构，且 $p \in \Omega$，则记 $M(p)$为 $\{a \in M\colon$ $Ea = p\}$，记 h_p为 $h \restriction M(p)$。

命题 2.6。 设 $M, N \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$，$\{\mathfrak{c}^M\colon\ \ c \in C\} \subseteq A \subseteq |M|$，$\{\mathfrak{c}^N\colon$ $c \in C\} \subseteq B \subseteq N$，且 $h\colon\ A \longrightarrow B$ 保持外延。

(a) 设 $c \in C$。若 $v = c$ 在 h 下不变，则 $h(\mathfrak{c}^M) = \mathfrak{c}^N$。(b) 设 $c \in C$。若 $v_0 = v_1$ 在 h 和 $h(\mathfrak{c}^M) = \mathfrak{c}^N$ 下不变，则 $v = c$ 在 h 下不变。(c) 设 c、$d \in C$。若 $v = c$ 和 $v = d$ 在 h 下不变，则公式 $c = d$ 在 h 下不变。(d) 设 $\bar{c} \in C^m$，并设 R 是 L 中的一个 $(m + n)$ 元关系。若对每个 $j < m$，公式 $v = c_j$ 在 h 下不变，且公式 $R(v_0$、.....、v_{n-1}、u_0、...
...、$u_{m-1})$ 在 h 下不变，则公式 $R(\bar{v}$、$\bar{c})$ 在 h 下不变。

证明。 (a) 设 $c \in C$。注意到

$$E_N\mathfrak{c}^N = E_C c = E_M\mathfrak{c}^M = E_N h(\mathfrak{c}^M),$$

其中，前两个等号源自项的解释的定义，第三个等号源自 h是一个预层态射。另一方面，

$$E_C c = E\mathfrak{c}^M = [\mathfrak{c}^M = \mathfrak{c}^M]_M = [(v = c)(\mathfrak{c}^M)]_M = [(v = c)(h(\mathfrak{c}^M)]_N = [h(\mathfrak{c}^M) = \mathfrak{c}^N]_N$$

这里，第一步等号同样源自项的解释的定义，第二个等号源自 $[.=.]_M$的定义，第四个等号源自 $v=c$ 在 h下的不变性，而第三和第五个等号源自原子公式的解释的定义。因此，根据外延性， $h(\mathfrak{c}^M)=\mathfrak{c}^N$。

(b) 设 $a\in A$。根据原子公式的解释的定义，第一处和第三处等号由定义(2.4)(i)得到，第二处等号由 $v_0=v_1$ 在 h 下的不变性得到，最后一处等号则由假设得到，因此我们有

$$[a=\mathfrak{c}^M]_M=[(v_0=v_1)(\{a,\mathfrak{c}^M\})]_M=[(v_0=v_1)(h``\{a,\mathfrak{c}^M\})]_N=$$
$$[h(a)=h(\mathfrak{c}^M)]_N=[h(a)=\mathfrak{c}^N]_N$$

(c) 同样，根据原子公式的解释的定义，第一处和第三处等号成立；第二处等号由 $v=d$ 在 h 下的不变性得到；第四处等号由 (a) 的结论得到，而该结论源自 $v=c$ 的不变性，

$$[\mathfrak{c}^M=\mathfrak{d}^M]_M=[(v=d)(\mathfrak{c}^M)]_M=[(v=d)(h(\mathfrak{c}^M)]_N=$$
$$[h(\mathfrak{c}^M)=\mathfrak{d}^N)]_N=[\mathfrak{c}^N=\mathfrak{d}^N]_N.$$

(d) 假设 R 是 L、 $\bar{a}\in|A|^n$ 和 $\bar{c}\in C^m$ 中的一个 $(m+n)$ 元关系。那么

$$[R(\bar{a},\bar{\mathfrak{c}}^M)]_M=[R(h``\bar{a},h``\bar{\mathfrak{c}}^M)]_N=[R(h``\bar{a},\bar{\mathfrak{c}}^N)]_N\,,$$

首先应用 $R(v_0,\dots,v_{n-1},u_0,\dots,u_{m-1})$ 在 h 下的不变性，然后将 (a) 的结论应用于每个 c_j ，其中 $j<m$。 ⋆

3. 部分同构的细化

定义 3.1. 对于每个 $p\in\Omega$，我们将通过归纳法定义一个递减的集合序列$Q_\alpha(p)$，其中 $\alpha\in$On。

令 Q_0 为 pSh(Ω L) 中元素之间的部分同构所构成的集合。对于所有 $p\in\Omega$，我们设 $Q_0(p)=Q_0$。

对于 $p\in\Omega$，也可以改为取

$$Q_0(p)=\{h\in Q_0:\bigwedge\{Ec:c\in\mathrm{dom}(h)\}=p\}.$$

不过，这似乎不会影响结果或其证明。

现在假设 $\beta<\alpha$ ，并且对于所有 $p\in\Omega$，我们都已定义 $Q_\beta(p)$。
如果 α 是极限序数，那么我们令 $Q_\alpha(p)=\bigcap_{\beta<\alpha}Q_\gamma(p)$。

若 $\alpha=\beta+1$ 则 $h:\ M\longrightarrow N\in Q_\alpha(p)$ 当且仅当 $h\in Q_\beta(p)$ 且

(a) (Forth) For all $\bar{c}=\langle c_i:i<\gamma\rangle\in|M\restriction p|^{<\mu}$ there is some set $\{(h_j,q_j,\bar{d_j}):j\in J\}$ such that for each $j\in J$ we have $h_j\in Q_\beta(q_j)$,

$h_{q_j} \subseteq h_j$, $d_j = \langle d_{ji} : \ i < \gamma \rangle \in |N \restriction E\bar{c}|^{<\mu}$, $Ed_j = q_j$, $\bar{c} \restriction q_j \subseteq \mathrm{dom}(h_j)$, 对于所有 $i < \gamma$，我们有 $h_j(c_i \restriction q_j) = d_{ji}$，并且 $\bigvee_{j\in J} q_j = E\bar{c}$。

¯(b)（回退）对于所有 $d = \langle d_i : \ i < \gamma \rangle \in |N \restriction p|^{<\mu}$ 存在某个集合 $\{(h_j, q_j, \bar{c}_j) : \ j \in J\}$，使得对于每个 $j \in J$，我们都有 $h_j \in Q_\beta(q_j)$，$h_{q_j} \subseteq h_j$, $d \restriction q_j \subseteq \mathrm{rge}(h_j)$, $c_j = \langle c_{ji} : \ i < \gamma \rangle \in |M \restriction Ed|^{<\mu}$, $Ec_j = q_j$, ¯对于所有 $i < \gamma$，我们都有 $h_j(c_{ji}) = d_i \restriction q_j$，并且 $\bigvee_{j\in J} q_j = Ed$。

定义 3.2。现在令 $\bar{a} \in {}^{<\lambda}|M \restriction p|$, $\bar{b} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|N \restriction p|$。令 $h : \ \bar{a} \longrightarrow \bar{b}$ 由 $h(a_i) = b_i$ 给出，其中对每个 $i < \mathrm{lh}(\bar{a})$ 都成立。对于 $\alpha \in \mathrm{On}$，若 $h \in Q_\alpha(p)$，则令 $(M, \ \bar{a}) \sim^p_\alpha (N, \ b)$。

定义 3.3. 我们记作 $M \sim_\alpha N$，如果 $Q_\alpha(\top)$ 非空。

4. 博弈

我们可以用动态 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 风格博弈中玩家 II 拥有获胜策略，来刻画 $Q_\alpha(p)$ 中元素存在的等价条件。形容词“动态”表示，尽管每一局博弈都是有限的，但其长度并未预先确定。

定义 4.1. 设 $M, N \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$, $\alpha \in \mathrm{On}$, $\bar{a} \in {}^{<\mu}|M|$, $\bar{b} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|N|$，并设$h$: $M \longrightarrow N$ 是一个部分同构，且满足 h；其中，对所有 $i < \mathrm{lh}(a)$，都有$h(a_i) = b_i$（因此 $E\bar{a} = Eb$）。

¯我们将 $G^\mu_\alpha(M, \bar{a}, N, b, h)$ 定义为如下博弈。在第 n 步，局中人 I 选择(s_n, α_n)，其中 $\bar{s}_n \in {}^{<\mu}|M| \cup {}^{<\mu}|N|$ 且 $\alpha_n < \alpha$。此时将有一个函数 h^*_n，由 h 以及截至此时的博弈过程所确定。玩家 II 则以集合 $\{(h_j, q_j, \bar{t}_j) : \ j \in J\}$作答。

局中人必须遵守以下规则。

在第 0 步，局中人 I 必须确保 $E\bar{s}_0 \leqslant E\bar{a}$ 并选择 $\alpha_0 < \alpha$。令 $h^*_0 = h$。作为记号上的方便（但不参与博弈定义），令$q^*_0 = E\bar{a}$ 以及 $t^*_0 = b$。

在第 n 步，玩家 II 必须确保：若 $\bar{s}_n \in {}^{<\mu}|M|$，则每个 $\bar{t}_j \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{s}_n)}|N|$；若 $\bar{s}_n \in |N|$，则每个 $\bar{t}_j \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{s}_n)}|M|$。

¯此外，玩家 II 必须确保，对于每个 $j \in J_n$， $Et_j = q_j$, h_j 是一个部分同构，其中 $h^*_n \restriction M(q_j) \subseteq h_j$ 和 $E\bar{s}_n = \bigvee\{E\bar{t}_j : \ j \in J_n\}$。玩家 II 还必须确保，若 $\bar{s}_n \in |M|$，则 h_j“$\bar{s}_n \restriction q_j = \bar{t}_j$；若 $\bar{s}_n \in |N|$，则 h_j“$\bar{t}_j = \bar{s}_n \restriction q_j$。

在第 $n+1$ 步，局中人 I 必须选择 $\alpha_{n+1} < \alpha_n$、选取 $j \in J_n$，并确保对于这一 j 选择，我们有 $E\bar{s}_{n+1} \leqslant Et_j$。

此时，将 h^*_{n+1} 定义为此处所选 j的 h_j。为证明定理 (4.2)，也方便将 q^*_{n+1} 设为 q_j，并将 $\bar{t}^*_{n+1}$ 定义为此处所选

j的，不过这种记号上的便利与博弈的定义无关。

当局中人无法作出合法的一步时，该局博弈结束；未能作出合法一步的玩家输掉该局，另一位玩家获胜。

显然，由于对局中人 I 的合法步所施加的约束之一是 $\alpha > \alpha_0 > \alpha_1 \ldots$ 每局博弈都在有限步内结束。

定理 4.2。设 $\alpha \in \mathrm{On}$、M、$N \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$、$\bar{a} \in {}^{<\mu}|M|$、$\bar{b} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|N|$和$\bar{}$，设 h：$M \longrightarrow N$为一个部分同构，其中我们有 $h``\bar{a} = b$（因而 $E\bar{a} = E\bar{b}$）。假设 $|M| \cap |N| = \varnothing$。那么 h表明 $(M、\ \bar{a}) \sim_{\alpha}^{E\bar{a}} (N、\ \bar{b})$当且仅当玩家 *II* 对博弈 $G_{\alpha}^{\mu}(M、\ \bar{a}、\ N、\ b、\ h)$拥有获胜策略。

证明。（与 [46], 命题 7.17）非常相似。）“$\Longrightarrow$”。我们定义玩家 II 的获胜策略 $\langle \sigma_n : n < \omega \rangle$。玩家 II 的策略将确保在博弈的任意一局中，对每个 n都有 $h_n^* \in Q_{\alpha_n+1}(q_n^*)$。假设玩家 II 已按照策略应对了局中人 I 的前 n 步，而局中人 I 随后在其第 $n+1$步下 α_n，若 $n > 0$ 则选择 $j \in J_{n-1}$，并下 $\bar{s}_n$。由于这些α递减，因此有 $h_n^* \in Q_{\alpha_n+1}(q_n^*)$。我们令 $\sigma_n((\alpha_0,\ \bar{s}_0),\ \ldots\ldots,\ (\alpha_n,\ \bar{s}_n))$ 为集合 $\{(h_j,\ q_j,\ \bar{t}_j) :\ j \in J\}$，根据适用情况，取 h_n^*的 Forth性质或 Back性质在 $\bar{s}_n$上的应用所给出的集合。这显然是一个获胜策略。

“$\Longleftarrow$”。假设 $\sigma = \langle \sigma_n :\ n < \omega \rangle$是玩家 II 的获胜策略。我们通过归纳法证明 $h \in Q_{\alpha}(E\bar{a})$。根据假设，$\alpha = 0$ 满足这一点，因为 h 是一个部分同构。对于极限 $\beta \leqslant \alpha$，根据归纳法以及 h 的定义（它是 $Q_{\beta}(E\bar{a})$ 的一个元素，当且仅当它是每个 $\gamma < \beta$对应的 $Q_{\gamma}(E\bar{a})$的元素），结论成立。最后，假设 $\beta < \alpha$且 $h \in Q_{\beta}(E\bar{a})$。对于任意 $\bar{s} \in {}^{<\mu}|M| \cup {}^{<\mu}|N|$，考虑这样一局博弈：在第 0 步，局中人 I 走 $(\beta,\ s)$。由于 σ 是获胜策略，玩家 II 可以对这一步作出合法应对，而该应对证明了 $\bar{s}$ 满足 Forth性质或 Back性质，具体取决于 $\bar{s}$ 取自 $|M|$ 还是 $|N|$。因此 $h \in Q_{\beta+1}(E\bar{a})$。$\star$

5. 不含句子的模型层 Scott-Karp 分析

本节将对模型层进行“Scott-Karp 分析”[10] 。核心要点之一是，我们为序数 α定义某些函数序列$F_{M,\ \bar{a}}^{\alpha}$、$G_{M,\ N,\ \bar{a}}^{\alpha}$和$H_{M,\ \bar{a}}^{\alpha}$，它们将作为引言中所述意义上的不变量层级。[11] 与任何 Scott-Karp型分析一样，最终的要点（如命题（11.1）所示）是：对于任意两对 $(M,\ \bar{a})\bar{}$和 $(N,\ b)$，不变量序列相一致的部分越长，这些结构就越相似（就它们对修正秩越来越高的公式实例化结果相一致而言）；反之亦然。

[10]沿用 [33] 的用法。[11]在 Scott-Karp 分析中，通常使用无穷逻辑来表述不变量。不过，我们在这里避免这样做。我们也避免使用 [42] 和 [6]中采用的一元联结词。

记号 5.1。若 $\alpha \in$ 是On， X 和 Z 是集合，甚至是真类，且 $f : X \times \alpha \longrightarrow Z$，并令 $\beta \leqslant \alpha$ 表示函数 $g\colon X \times \beta \longrightarrow Z$，其定义为：对每个 $x \in X$ 和 $\gamma < \beta$，令 $g(x, \gamma) = f(x, \gamma)$。

在第二种记法中，限制仅作用于第二个坐标。此处使用与预层中限制相同的符号，实际上不应造成混淆。

定义 5.2. 我们将通过对 α 归纳，为 $M, N \in \mathsf{pSh}(\Omega\ L), \bar{a} \in {}^{<\mu}|M|$ and $\alpha \in$ On 函数 $F^{\alpha}_{M,\bar{a}}, G^{\alpha}_{M,N,\bar{a}}$ and $H^{\alpha}_{M,\bar{a}}$ 分别作定义，它们的陪域均为 Ω。

$H^{\alpha}_{M,\bar{a}}$ 的定义或许最容易理解——至少其定义域很容易把握。然而，对于$\alpha > 0$, $H^{\alpha}_{M,\bar{a}}$ 的定义域是真类。$F^{\alpha}_{M,\bar{a}}$ 是对 $H^{\alpha}_{M,\bar{a}}$ 的一种变体，其定义域更复杂，采用递归定义，但仍是集合大小；有些读者或许更偏好这种方式，因为它能消除基础性疑虑。$G^{\alpha}_{M,N,\bar{a}}$ 则是进一步的变体，使我们得以简化某些论证，但代价是削弱可证明结果的力度。

令 $M \in \mathsf{pSh}(\Omega\ L)$ 且 $\bar{a} \in \mathrm{lh}(\bar{a})|M|$。令 $I_{M,\bar{a}}$ 为如下定义的函数：

$$\mathrm{dom}(I_{M,\bar{a}}) = \{(\psi, f) : \psi \in Y\ \&\ \exists n \in \omega\ \ \mathrm{Var}(\psi) = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\} \\ \&\ f : N \longrightarrow \mathrm{lh}(\bar{a})\},$$

并且对于 $(\psi, f) \in$ 的定义域$(I_{M,\bar{a}})$，令其为

$$I_{M,\bar{a}}(\psi, f) = [\psi(a_{f(0)}, a_{f(1)}, \ldots a_{f(n-1)}))]_M.$$

（我们可以把“I”理解为表示“解释”，即在 $\bar{a}$ 处的 ψ in M 正在进行。）

令 $M, N \in \mathsf{pSh}(\Omega\ L)$ 且 $\bar{a} \in {}^{<\lambda}|M|$。令

$$F^0_{M,\bar{a}} = G^0_{M,N,\bar{a}} = H^0_{M,\bar{a}} = I_{M,\bar{a}}.$$

（因此，我们也可以把字母“I”理解为表示以下序列的“初始元”集族：$F^{\alpha}_{M,\bar{a}}$、$G^{\alpha}_{M,N,\bar{a}}$ 以及 $H^{\alpha}_{M,\bar{a}}$，其中 $\alpha \in$ On。）

令 $M, N \in \mathsf{pSh}(\Omega\ L)$、$\bar{a} \in {}^{<\lambda)}|M|$ 和 $0 < \alpha \in$On。这些对象的定义域中的元素 $F^{\alpha}_{M,\bar{a}}$、$G^{\alpha}_{M,N,\bar{a}}$ 以及 $H^{\alpha}_{M,\bar{a}}$ 将由有序对构成（对于 $F^{\alpha}_{M,\bar{a}}$ 的情形）

或三元组（在$G^{\alpha}_{M,N,\bar{a}}$ 和$H^{\alpha}_{M,\bar{a}}$的情形下），其最后一个元素是某个小于 α的序数。

对所有 $\beta < \alpha$，我们将有

$$F^{\alpha}_{M,\bar{a}} \restriction \beta = F^{\beta}_{M,\bar{a}},\ G^{\alpha}_{M,N,\bar{a}} \restriction \beta = G^{\beta}_{M,N,\bar{a}} \text{ and } H^{\alpha}_{M,\bar{a}} \restriction \beta = H^{\beta}_{M,\bar{a}}.$$

因此，在每种情况下，对于极限 α，这些函数都由 $\beta < \alpha$ 的定义通过归纳完全确定。

接下来需要定义后继序数对应的各种函数。令 $M, N \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$, $\bar{a} \in {}^{<\lambda}|M|$ 和 $\alpha \in \mathrm{On}$。

首先，我们定义 $H^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(\cdot,.,\alpha)$。我们令

$$\mathrm{dom}(H^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(.,.,\alpha)) = \{(K,\bar{s}\bar{t},\alpha) : K \in \mathrm{pSh}(\Omega, L), \\ \bar{s} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|K|, \bar{t} \in {}^{<\mu}|K| \ \&\ E\bar{t} \leqslant E\bar{a} \wedge E\bar{s}\}.$$

若 $(K,\bar{s}\bar{t},\alpha) \in \mathrm{dom}(H^{\alpha+1}_{M,\bar{a}})$，则

$$H^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(K,\bar{s}\bar{t},\alpha) = \bigvee\{E\bar{c} : \bar{c} \in {}^{\gamma}|M| \ \&\ E\bar{c} \leqslant E\bar{t} \ \&\ H^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}\restriction Ec} = H^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}}\}.$$

接下来，我们定义 $G^{\alpha+1}_{M,N,\bar{a}}(\cdot,.,\alpha)$。我们令

$$\mathrm{dom}(G^{\alpha+1}_{M,N\bar{a}}(.,.,\alpha)) = \{(K,\bar{s}\bar{t},\alpha) : K \in \{M,N\}, \\ \bar{s} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|K|, \bar{t} \in {}^{<\mu}|K| \ \&\ E\bar{t} \leqslant E\bar{a} \wedge E\bar{s}\}.$$

若 $(K,\bar{s}\bar{t},\alpha) \in \mathrm{dom}(G^{\alpha+1}_{M,N,\bar{a}})$，则若 $K = M$为集合 $L = N$，且若 $K = N$为集合 $L = M$。

若 $(K,\bar{s}\bar{t},\alpha) \in \mathrm{dom}(G^{\alpha+1}_{M,N,\bar{a}})$，则

$$G^{\alpha+1}_{M,N,\bar{a}}(K,\bar{s}\bar{t},\alpha) = \bigvee\{E\bar{c} : \bar{c} \in |M| \ \&\ E\bar{c} \leqslant E\bar{t} \ \&\ G^{\alpha}_{K,L,\bar{s}\bar{t}\restriction E\bar{c}} = G^{\alpha}_{M,N,\bar{a}\bar{c}}\}.$$

注意，定义并不对称——下标中 M 和 N 的顺序很重要。（当然， $\bar{a}$ 是来自 M 的一个元组，这一点本身就表明了不对称性。）

还要注意，虽然在 $H^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}$ 的定义中， K 是真类 $\mathrm{pSh}(\Omega\ L)$中的任意元素，但在 $G^{\alpha+1}_{M,N,\bar{a}}$ 的定义中， K 仅限于取 M 和 N 中的一个。

最后，我们定义 $F^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(\cdot,\alpha)$。令

$$\mathrm{dom}(F^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(.,.,\alpha)) = \{(x,\alpha) : \exists K \in \mathrm{pSh}(\Omega, L),\ \bar{s} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|K|, \\ \bar{t} \in {}^{<\mu}|K| \ \&\ E\bar{t} \leqslant E\bar{a} \wedge E\bar{s} \ \&\ x = F^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}\}.$$

若 $K \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$ 且 $\bar{s}\bar{t} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})+\gamma}|K|$，其中 $E\bar{t} \leqslant E\bar{a} \wedge E\bar{s}$，则

$$F^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(F^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}},\alpha) = \bigvee\{E\bar{c} : \bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})}|M| \ \&\ E\bar{c} \leqslant E\bar{t} \ \&\ F^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}\restriction E\bar{c}} = F^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}}\}.$$

注意，由于 $\mathcal{U}\overline{\overline{A\Omega}} = \Omega^{\mathcal{U}\overline{\overline{A}}}$，根据归纳法，$\mathrm{dom}(F^{\alpha+1}_{M,\bar{a}})$是一个集合。

引理 5.3。在每种情况下，$F^{\alpha}_{M,\ \bar{a}}$、$G^{\alpha}_{M,\ N,\ \bar{a}}$ 和$H^{\alpha}_{M,\ \bar{a}}$ 的范围都由$E\bar{a}$界定。

证明。 这由 $\alpha = 0$ 情形和后继 α 情形中的定义直接得出，而极限 α 情形则由归纳法得出。⋆

引理 5.4. 若 $p \in \Omega$ 且 $J_{\bar{a}}$ 是 $F^{\alpha}_{M,\ \bar{a}}$、$G^{\alpha}_{M,\ N,\ \bar{a}}$与 $H^{\alpha}_{M,\ \bar{a}}$ 这三种类型中任意一种的函数，则 定义域$(J_{\bar{a}\restriction p}) \subseteq$ 定义域$(J_{\bar{a}})$，并且若 $x \in$ 定义域$(J_{\bar{a}\restriction p})$，则 $J_{\bar{a}\restriction p}(x) = J_{\bar{a}}(x)$。

证明. 证明对 α 使用归纳法。关键情形针对 $\alpha + 1$ 以及末元为 α 的那些函数的自变量，其余情形均直接由定义得出，或是归纳假设的直接推论。

显然，在每种情形中都有定义域$(J_{\bar{a}\restriction p}) \subseteq$ 定义域$(J_{\bar{a}})$，因为若 $K \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$ 且 $\bar{t} \in {}^{<\mu}|K|$ 使得 $E\bar{t} \leqslant E\bar{a} \restriction p$，则 $E\bar{t} \leqslant E\bar{a}$。

现在假设 $K \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$ 且 $\bar{t} \in {}^{<\mu}|K|$ 满足 $E\bar{t} \leqslant E\bar{a} \restriction p$。对于满足 $E\bar{c} \leqslant E\bar{t}$ 的 $\bar{c} \in \mathrm{lh}_{(\bar{t})}|M|$，根据归纳假设，我们有 $H^{\alpha}_{M、\ \bar{a}\bar{c}} = H^{\alpha}_{M、\ \bar{a}\restriction p\bar{c}}$。因此，$H^{\alpha}_{K、\ \bar{s}\bar{t}\restriction E\bar{c}} = H^{\alpha}_{M、\ \bar{a}\bar{c}}$ 当且仅当 $H^{\alpha}_{K、\ \bar{s}\bar{t}\restriction E\bar{c}} = H^{\alpha}_{M、\ \bar{a}\restriction p\bar{c}}$。所以，$\bar{c}$ 对 $H^{\alpha+1}_{M\ 、\ \bar{a}}(K、\ \bar{s}\bar{t}、\ \alpha)$ 的定义中的上确界贡献 $E\bar{c}$，当且仅当 $\bar{c}$ 对 $H^{\alpha+1}_{M\ 、\ \bar{a}\restriction p}(K、\ \bar{s}\bar{t}、\ \alpha)$ 的定义中的上确界贡献 $E\bar{c}$。因此，这两个上确界相等。

对 $F^{\alpha+1}_{M\ ,\bar{a}}$ 和 $G^{\alpha+1}_{M\ ,N,\bar{a}}$，证明完全相同。 ⋆

引理 5.5. 设 $M, \bar{a} \in \mathrm{lh}_{(\bar{a})}|M|$，且 $\alpha \in \mathrm{On}$。设 $K \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$ 和 $\bar{s} \in \mathrm{lh}_{(\bar{a})}|K|$，$\bar{t} \in {}^{<\mu}|K|$，其中 $E\bar{t} \leqslant E\bar{a} \wedge E\bar{s}$。设 $\beta < \alpha$。则

$$F^{\alpha}_{M,\bar{a}}(F^{\beta}_{K,\bar{s}\bar{t}}, \beta) = H^{\alpha}_{M,\bar{a}}(K, \bar{s}\bar{t}, \beta).$$

此外，若进一步有 $N \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$ 和 $\bar{b} \in \mathrm{lh}_{(\bar{a})}|N|$，且我们还知道 $E\bar{t} \leqslant E\bar{b}$，则

$$F^{\alpha}_{M,\bar{a}} = F^{\alpha}_{N,\bar{b}} \textit{ if and only if } H^{\alpha}_{M,\bar{a}} = H^{\alpha}_{N,\bar{b}}.$$

证明。 我们对 α 使用归纳法。极限 α 情形由归纳法立即可得。对于后继 α，若 $\beta + 1 < \alpha$，结论也由归纳法立即可得。对于后继 $\alpha + 1$，我们有

$$\begin{aligned} F^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(F^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}, \alpha) &= \bigvee\{E\bar{c} : \bar{c} \in |M|\ \&\ E\bar{c} \leqslant E\bar{t}\ \&\ F^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}\restriction E\bar{c}} = F^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}}\} \\ &= \bigvee\{E\bar{c} : \bar{c} \in |M|\ \&\ E\bar{c} \leqslant E\bar{t}\ \&\ H^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}\restriction E\bar{c}} = H^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}}\} \\ &= H^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(K, \bar{s}\bar{t}, \alpha). \end{aligned}$$

其中，中间的等号是由 α 的结论中“此外”部分通过归纳法得出的。然而，$\alpha + 1$ 的结论中“此外”部分的结论现在显然成立。⋆

接下来，对于每个函数，我们证明一个引理：将函数作用于定义域元素时，这些元素是在后继阶段引入的，其信息由下标给出，并额外包含 $|M|$ 中的一个元素。

引理 5.6。 设 $M, N \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$, $\bar{a} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|M|$ 且 $\alpha \in \mathrm{On}$。设 $\bar{c} \in {}^{<\mu}|M|$ 满足 $E\bar{c} \leqslant E\bar{a}$。

$$F^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(F^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}}, \alpha) = G^{\alpha+1}_{M,N,\bar{a}}(M, \bar{a}\bar{c}, \alpha) = H^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(M, \bar{a}\bar{c}, \alpha) = E\bar{c}.$$

证明。 对于 $\bar{z} \in {}^{<\mu}|M|$，取 $E\bar{z} \leqslant E\bar{a}$，令 $J_{\bar{z}}$为以下之一：$F^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{z}}$或 $G^{\alpha}_{M,N,\bar{a}\bar{z}}$或 $H^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{z}}$。

那么，等式中的前三个表达式按定义均为

$$\bigvee\{E\bar{e} : \bar{e} \in |M| \ \&\ E\bar{e} \leqslant E\bar{c} \ \&\ J_{\bar{c}\restriction E\bar{e}} = J_{\bar{e}}\}.$$

在每种情形下，一方面， $\bar{c}$ 是我们取上确界所依据的 $\bar{e} \in {}^{<\mu}|M|$ 集合中的一个元素（因为 $\bar{c} \in |M|$、 $E\bar{c} \leqslant E\bar{c}$ 和 $J_{\bar{c}\restriction E\bar{c}} = J_{\bar{c}}$ ——后者由引理 (5.3) 得出）。因此，上确界大于或等于 $E\bar{c}$。另一方面，对于集合中的每个 $\bar{e}$，我们都有 $E\bar{e} \leqslant E\bar{c}$，因此上确界小于或等于 $E\bar{c}$。所以等号成立。⋆

在下面两个命题中，我们需要上一节给出的 $Q_\alpha(p)$ 的定义。

命题 5.7。 假设 $M, N \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$, $\bar{a} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|M|$, $\bar{b} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|N|$ 且 $E\bar{a} = Eb$。那么，$G^{\alpha}_{M,\ N,\ \bar{a}} = G^{\alpha}_{N,\ M,\ \bar{b}}$ 当且仅当存在一个部分同构 h： $\bar{a} \longrightarrow b$，且满足 $h \in Q_\alpha(E\bar{a})$。

注记 5.8。 我们可以去掉这里的假设 $E\bar{a} = Eb$，只需在整个结论中将 $\bar{a}, b$ 替换为 $\bar{a} \restriction E\bar{a} \wedge Eb$ 和 $b \restriction E\bar{a} \wedge Eb$。

命题 5.9. 设 $M \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$, $\bar{a} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|M|$ 和 $\alpha \in \mathrm{On}$。那么，对于任意 $N \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$ 和 $\bar{b} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|N|$，并令 $p = E\bar{a} \wedge E\bar{b}$, $F^{\alpha}_{M,\bar{a}\restriction p} = F^{\alpha}_{N,\bar{b}\restriction p}$ 当且仅当存在某个 h: $\bar{a} \longrightarrow b$ 使得 $h \in Q_\alpha(p)$。

推论 5.10. 根据引理（*5.5*），将 $F^{\alpha}_{M,\bar{a}\restriction p} = F^{\alpha}_{N,\bar{b}\restriction p}$ 替换为 $H^{\alpha}_{M,\bar{a}\restriction p} = H^{\alpha}_{N,\bar{b}\restriction p}$后，同一命题仍成立。

“$\Longrightarrow$”证明以及“$\Longleftarrow$”证明中的 $\alpha = 0$ 和极限 α 情形，在这两个命题中都相同。因此，我们统一处理，并在“$\Longleftarrow$”证明的后继情形中加以区分。

证明。 $\alpha = 0$。由部分同构的定义（ $Q_0(p)$）以及函数 $I_{M,\bar{a}}$ 和$I_{N,\bar{b}}$立即可得。

极限 α。由归纳法以及 $Q_\alpha(p)$ 和 $G^{\alpha}_{M,\ N,\ \bar{a}}$ 和 $G^{\alpha}_{N,\ M,\ \bar{b}}$ 的定义，以及 $F^{\alpha}_{M,\ \bar{a}}$ 和 $F^{\alpha}_{N,\ \bar{b}}$ 的定义，立即可得。

$\alpha + 1$。“$\Longrightarrow$”。根据引理（5.6），对于任意满足 $E\bar{c} \leqslant E\bar{a}$ 的 $\bar{c} \in {}^{<\mu}|M|$，我们分别有 $G^{\alpha+1}_{M,N,\bar{a}}(M, \bar{a}\bar{c}, \alpha) = E\bar{c}$ 和 $F^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(F^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}}, \alpha) = E\bar{c}$。因此，根据假设

由于 $G^{\alpha+1}_{M\ ,N,\bar{a}} = G^{\alpha+1}_{N\,M,,\bar{b}}$ 和 $F^{\alpha+1}_{M\ ,\bar{a}\restriction p} = F^{\alpha+1}_{N\ ,\bar{b}\restriction p}$ 分别成立，我们有 $G^{\alpha+1}_{N\,M,,\bar{b}}(M, \bar{a}\bar{c}, \alpha) = E\bar{c}$ 和 $F^{\alpha+1}_{N\ ,\bar{b}}(F^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}}, \alpha) = E\bar{c}$。根据 $G^{\alpha+1}_{N\,M,,\bar{b}}$ 和 $F^{\alpha+1}_{N\,\bar{b}\ ,}$ 的定义，这就得到

$$E\bar{c} = \bigvee\{E\bar{d} : \bar{d} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{c})}|N| \ \&\ E\bar{d} \leqslant E\bar{c} \ \&\ G^{\alpha}_{M,N,\bar{a}\bar{c}\restriction Ed} = G^{\alpha}_{N,M,\bar{b}\bar{d}}\}, \text{ resp.}$$

$$E\bar{c} = \bigvee\{E\bar{d} : \bar{d} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{c})}|N| \ \&\ E\bar{d} \leqslant Ec \ \&\ F^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}\restriction E\bar{d}} = F^{\alpha}_{N,\bar{b}\bar{d}}\}.$$

因此，要看出 $\bar{c}$ 的“前向”性质，只需对每个满足 $d \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{c})}|N|$ 且 $E\bar{d} \leqslant E\bar{c}$ 的 $h_d(\bar{c} \restriction Ed) = d$ 取值，并分别令 $G^{\alpha}_{M,N,\bar{a}\bar{c}\restriction E\bar{d}} = G^{\alpha}_{N,M,\bar{b}\bar{d}}$ 和 $F^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}\restriction E\bar{d}} = F^{\alpha}_{N\ ,\bar{b}\bar{d}}$。通过归纳法（即，利用 α 的结果），每种情况下都有 $h_{\bar{d}} \in Q_\alpha(Ed)$，正如所需。

“后向”情形从任意满足 $Ed \leqslant Eb$ 的 $d \in {}^{<\mu}|N|$ 开始，证明是对称的。

“$\Longleftarrow$”。命题（5.7）的证明。首先，注意到，由于 $h \in Q_\alpha(\bar{a})$，根据归纳法可得 $G^{\alpha}_{M,\ N,\ \bar{a}} = G^{\alpha}_{N\ ,\ M,\ \bar{b}}$。

其次，根据引理（5.6），我们知道，对于所有满足 $E\bar{c} \leqslant E\bar{a}$ 的 $\bar{c} \in {}^{<\mu}|M|$，以及所有满足 $E\bar{d} \leqslant E\bar{b}(= E\bar{a})$ 的 $\bar{d} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{c})}|N|$，都有 $G^{\alpha+1}_{M\ ,\ N,\ \bar{a}}(M,\ \bar{a}\bar{c},\ \alpha) = E\bar{c}$ 和 $G^{\alpha+1}_{N\,M,\ ,\ \bar{b}}(N,\ \bar{b}\bar{d},\ \alpha) = E\bar{d}$。

根据 $G^{\alpha+1}_{N\,M}$ 的定义，我们还有 $_{,\ ,\ \bar{b}}$，

$$G^{\alpha+1}_{N,M,\bar{b}}(M, \bar{a}\bar{c}, \alpha) = \bigvee\{E\bar{d} : \bar{d} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{c})}|N| \ \&\ E\bar{d} \leqslant E\bar{c} \ \&\ G^{\alpha}_{M,N,\bar{a}\bar{c}\restriction E\bar{d}} = G^{\alpha}_{N,M,\bar{b}\bar{d}}\}.$$

根据“$\Longleftarrow$”的假设，存在某个三元组集合 $\{(h_i,\ q_i,\ d_i) :\ \ i \in I\}$ 满足 $\bar{d}_i \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{c})}|N|$，$h_i \in Q_\alpha(E\bar{d}_i)$ 扩展 h_{q_i}，“$(\bar{c} \restriction Ed_i) = \bar{d}_i$ 以及 $\bigvee\{E\bar{d}_i :\ \ i \in I\} = E\bar{c}$。根据归纳假设，对于所有 $i \in I$，我们都有 $G^{\alpha}_{M,\ N,\ \bar{a}\bar{c}\restriction E\bar{d}_i} = G^{\alpha}_{N,\ M,\ \bar{b}\bar{d}_i}$。因此，对于每个 $i \in I$，d_i 都是前两段显示式中上确界所用索引集合的一个元素。因此 $G^{\alpha+1}_{N\,M,\ ,\ \bar{b}}(M,\ \bar{a}\bar{c},\ \alpha) \geqslant E\bar{c}$。

由于该上确界的指标集合中的每个 d 都有 $Ed \leqslant E\bar{c}$，我们也有 $G^{\alpha+1}_{N\,M,,\bar{b}}(M, \bar{a}\bar{c}, \alpha) \leqslant E\bar{c}$。

Hence $G^{\alpha+1}_{N,M,\bar{b}}(M, \bar{a}\bar{c}, \alpha) = E\bar{c} = G^{\alpha+1}_{M,N,\bar{a}}(M, \bar{a}\bar{c}, \alpha)$, as required.

证明 $G^{\alpha+1}_{N\,M,,\bar{b}}(N, \bar{b}\bar{d}, \alpha) = E\bar{d} = G^{\alpha+1}_{M\ ,N,\bar{a}}(N, \bar{b}\bar{d}, \alpha)$ 的方法完全相同，只需使用 h 的“回返”性质，而非“前进”性质。

“$\Longleftarrow$”。命题（5.9）的证明。

我们有

$$F^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(F^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}, \alpha) = \bigvee\{E\bar{c} : \bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})}|M| \ \&\ E\bar{c} \leqslant E\bar{t} \ \&\ F^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}\restriction E\bar{c}} = F^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}}\}$$

and

$$F^{\alpha+1}_{N,\bar{b}}(F^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}, \alpha) = \bigvee\{E\bar{d} : \bar{d} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t}}|N| \ \&\ E\bar{d} \leqslant E\bar{t} \ \&\ F^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}\restriction E\bar{d}} = F^{\alpha}_{N,\bar{b}\bar{d}}\}.$$

根据 h $\bar{c}\in$ $E\bar{c}\leqslant E\bar{t}$ $F^{\alpha}_{K\,\bar{s}\bar{t}\restriction E\bar{c}}=$ 的 $F^{\alpha}_{M\,\bar{a}\bar{c}}$ $\{(h^{\bar{c}}_i\ q^{\bar{c}}_i\ \bar{d^{\bar{c}}_i})\quad i\in I^{\bar{c}}\}$ $h^{\bar{c}}_i\in Q_\alpha(E\bar{d^{\bar{c}}_i})\ \ h^{\bar{c}}_i\ \bar{c}\restriction E\bar{d^{\bar{c}}_i})=\bar{d^{\bar{c}}_i}$ “forth”性质，对每个 $^{\mathrm{lh}(\bar{t})}|M|$ 满足且 ,,我们有 ,,: 其中，“且 $\bigvee\{E\bar{d^{\bar{c}}_i}:\ \ i\in I\}=E\bar{c}$。根据归纳法，我们因而对每个这样的 $\bar{c}$ 和 $\bar{d^{\bar{c}}_i}$ 有 $F^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}\restriction E\bar{d^{\bar{c}}_i}}=F^{\alpha}_{N,\bar{b}\bar{d^{\bar{c}}_i}}$。

So

$$F^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(F^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}},\alpha)=\bigvee\{E\bar{d^{\bar{c}}_i}:\exists\bar{c}\in{}^{\mathrm{lh}(\bar{t})}|M|\ \&\ E\bar{d^{\bar{c}}_i}\leqslant E\bar{c}\leqslant E\bar{t}\ \&\ F^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}\restriction E\bar{d^{\bar{c}}_i}}=F^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}\restriction E\bar{d^{\bar{c}}_i}}=F^{\alpha}_{N,\bar{b}\bar{d^{\bar{c}}_i}}\}.$$

因此 $F^{\alpha+1}_{M,\ \bar{a}}(F^{\alpha}_{K,\ \bar{s}\bar{t}},\ \alpha)\leqslant F^{\alpha+1}_{N,\ \bar{b}}(F^{\alpha}_{K,\ \bar{s}\bar{t}},\ \alpha)$。

然而，利用 h 的“往返”性质进行对称论证，可以得到反向不等式。因此，我们如愿得到等号。⋆

现在我们为模型层定义一个“Scott”秩。其处理方式与经典情形相似，例如 [33] 中所述。

命题 5.11。设 $M\in$预层$(\Omega\ L)$。存在一个序数 α，使得若 $\bar{a}$, $\bar{b}\in{}^{n}|M|$ $E\bar{a}=E\bar{b}$ $(M\ \bar{a})\sim^{E\bar{a}}_{\alpha}(M\ \bar{b})$ $\beta\in$ 满足条件，，则对所有On，都有 $(M,\bar{a})\sim^{E\bar{a}}_{\beta}(M,\bar{b})$。这样的最小 α 称为 M 的斯科特秩。

证明。令 $\Gamma_\alpha=\bigcup_{n<\omega}\{(\bar{a},\ \bar{b}):\ \ \bar{a},\ \ \bar{b}\in{}^{n}|M|\ \&\ (M,\ \bar{a})\nsim^{E\bar{a}}_{\alpha}(M,\ \bar{b})\}$。显然，如果$\alpha<\beta$，那么 $\Gamma_\alpha\subseteq\Gamma_\beta$。

首先，我们通过归纳法证明：如果 $\Gamma_\alpha=\Gamma_{\alpha+1}$，那么对所有 $\beta>\alpha$，都有 $\Gamma_\alpha=\Gamma_\beta$。当 $\beta=\alpha+1$ 时，这是显然的。如果 β 是一个极限，并且对所有 $\gamma\in(\alpha,\ \beta)$ 都有 $\Gamma_\alpha=\Gamma_\gamma$，那么根据 $\sim^{p}_{\beta}$ 的定义，我们有 $\Gamma_\alpha=\Gamma_\beta$。

最后，设 $\beta>\alpha$ 且 $\Gamma_\alpha=\Gamma_\beta$, $(M,\ \bar{a})\sim^{E\bar{a}}_{\beta}(M,\ \bar{b})$。假设 $\bar{c}\in{}^{<\mu}|M|$。由于 $(M,\ \bar{a})\sim^{E\bar{a}}_{\alpha+1}(M,\ \bar{b})$，存在某个 $h:\ \ M\longrightarrow M\in Q_{\alpha+1}(E\bar{a})$，满足 $h:\ \ \bar{a}\longrightarrow\bar{b}$，因此，根据 $Q_{\alpha+1}(E\bar{a})$的定义， $h\in Q_\beta(E\bar{a})$，并且存在某个$\{(h_j,\ \ q_j,\ \ d_j):\ \ j\in J\}$，使得对每个 $j\in J$，都有 $h_j\in Q_\beta(q_j)$, $h_{q_j}\subseteq h_j$, $\bar{c}\restriction q_j\in\mathrm{dom}(h_j)$, h_j“$\bar{c}\restriction q_j=d_j$, $Ed_j=q_j$ 以及 $\bigvee_{j\in J}q_j=E\bar{c}$。

对于每个 $j\in J$，我们因此有 $(M,\bar{a}\bar{c}\restriction q_j)\sim^{q_j}_{\alpha}(M,\bar{b}\bar{d}_j)$。根据归纳假设， $(M,\bar{a}\bar{c}\restriction q_j)\sim^{q_j}_{\beta}(M,\bar{b}\bar{d}_j)$。因此 $(M,\bar{a})\sim^{E\bar{a}}_{\beta+1}(M,\bar{b})$。

我们有 $\bar{d}\in{}^{<\mu}|M|$ 并利用“回退”性质找到 $\bar{c}_i\in{}^{\mathrm{lh}(\bar{d})}|M|$ 的情形类似。

显然，对于每个 α，我们都有 $\Gamma_\alpha\subseteq{}^{n}|M|\times{}^{n}|M|$，因此 $\Gamma_\alpha\rightleftharpoons M^{\pm}$，而 Γ_α 的序列长度必须小于 $\alpha+1$。⋆

注记 5.12。 如果 Ω $=\{\bot,\ \top\}$，即，如果我们处于经典模型论的情形，现在就可以证明斯科特同构定理的一个版本。

命题 5.13. （[11], 命题 *(3.9)* 设 Ω $=\{\bot,\ \top\}$。令 M、 N 为可数的 L-结构，且 α 为 M 的斯科特秩。则 $N \cong M$ 当且仅当 $H^{\alpha}_{M,\ \varnothing} = H^{\alpha}_{N,\ \varnothing}$，并且对所有 $\bar{a} \in {}^{<\lambda}M$ 与 $\bar{b} \in \mathrm{lh}(\bar{a})_N$，若 $H^{\alpha}_{M,\ \bar{a}} = H^{\alpha}_{N\ ,\ \bar{b}}$，则$H^{\alpha+1}_{M\ ,\ \bar{a}} = H^{\alpha+1}_{N\,\bar{b}}$ ，。

然而，对于任意完备海廷代数 Ω，关于 H^{α} 的条件对于构造一个由部分同构组成、在包含关系下构成一条链、从而可在 ω 步之后取其并的序列，并没有太大帮助。相反，人们得到的是一个具有某种递增协调性的函数系统，但其作用范围却是 $|M|$ 上越来越小的部分。目前我们尚不清楚，如何用这样的函数系统换取一种全局相似性性质（如同构那样），而这种性质超出了可直接从往返法性质本身转译出来的内容。

6. 语言

例如， [40] 中可以找到关于如何在签名 τ 上构造一阶语言的明确说明。对于无穷语言的具体定义，我们采用 V¨a¨an¨anen 对无穷语言 $L_{\kappa\lambda}$ ([46]) 的定义（略作调整），即定义（9.12）。

定义 6.1。 设 μ、 λ 和 κ 为基数。集合 $L_{\kappa\lambda;mu}$ 定义如下:

(1) 对于 $\alpha < \lambda$，变量 v_{α} 是一个项。每个常元符号 $c \in$ C 都是一个项。若 f 是一个 n 元函数符号，且 t_0、.....、 t_{n-1} 是项，则 $f(t_0$、.....、 $t_{n-1})$ 也是项。(2) 若 t_0 和 t_1 是项，则 $t_0 = t_1$ 是一个 $L_{\kappa\lambda;\mu}$ 公式。(3) 若 t_0、.....、 t_{n-1} 是项，且 R 是一个 n 元关系符号，则 $R(t_0$、$\ldots t_{n-1})$ 是一个 $L_{\kappa\lambda;\mu}$ 公式。(4) 若 ϕ 是一个 $L_{\kappa\lambda;\mu}$ 公式，则 $\neg\phi$ 也是。(5) 若 Φ 是一个由少于 κ 个 $L_{\kappa\lambda;\mu}$ 公式组成的集合，具有固定的自由变量集合 V，且 $V < \lambda$、 $\bigwedge\Phi$，则这是一个 $L_{\kappa\lambda;\mu}$ 公式。(6) 若 Φ 是一个由少于 κ 个 $L_{\kappa\lambda;\mu}$ 公式组成的集合，具有固定的自由变量集合 V，且 $V < \lambda$、 $\bigvee\Phi$，则这是一个 $L_{\kappa\lambda;\mu}$ 公式。(7) 若 ϕ 是一个 $L_{\kappa\lambda;\mu}$ 公式，$V \in [\{v_{\alpha}\colon\ \alpha < \lambda\}]^{<\mu}$ 且 $V < \lambda$、 $\forall V\,\phi$，则这是一个$\overline{=}L_{\kappa\lambda;\mu}$ 公式。(8) 若 ϕ 是一个 $L_{\kappa\lambda;\mu}$ 公式， $V \in [\{v_{\alpha}\colon\ \alpha < \lambda\}]^{<\mu}$ 且 $V\overline{=}< \lambda$、 $\exists V\,\phi$，则这是一个 $L_{\kappa\lambda;\mu}$ 公式。

因此， λ 限定了公式中自由变量集合的大小， κ 限定了无穷合取与析取的大小，而 μ限定了可用于量化的变量集的大小。

定义 6.2. 对于 μ、 λ 和 κ 基数，我们令 $L_{\kappa\lambda} = L_{\kappa\lambda;\lambda}$ 和 $L_{\kappa\lambda} = L_{\kappa\lambda;2}$。
我们还令 $L_{\infty\lambda} = \bigcup_{\kappa\in\text{基数}} L_{\kappa\lambda}$ 和 $L_{\infty\lambda} = \bigcup_{\kappa\in\text{基数}} L_{\kappa\lambda_\circ}$

因此，例如， $L_{\omega\omega}$ 是基于 τ 的一阶逻辑。

本文采用基于签名 τ 的语言，并以一种方式处理，从而可以同时讨论经典一阶逻辑（$L_{\omega\omega}$）和无穷逻辑 $L_{\infty\omega}$ 与 $L_{\infty\lambda}$，其中 λ 是一个基数。

因此，我们只考虑满足 $L = L_{\omega\omega}$、 $L = L_{\infty\omega}$ 或 $L = L_{\infty\lambda}$ 的语言 L。

定义 6.3。 设 $\phi \in L$。若 ϕ 的每个原子子公式ϕ都是非嵌套的，则称 ϕ 为非嵌套 。用$\mathcal{U}$ 表示非嵌套公式的集族。

注记 6.4。 如果 L 是关系型的，那么每个公式都是非嵌套的。

定义 6.5。 公式 $\phi \in L$ 是一个正原始公式（*pp* 公式），如果它由未嵌套原子公式构成，且只使用合取和存在量化。

下一个引理使我们能够证明，在 $L_{\omega\omega}$ 中，正原始公式至少在其求值范围意义下存在一种范式。

引理 6.6。 假设 $\phi_0(\bar{v}, \bar{u})$ 和 $\phi_1(\bar{v}, \bar{u})$ 是具有$\mathrm{lh}(\bar{v}) + \mathrm{lh}(\bar{u})$-自由变量的 L-公式，$M \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$ 且 $\bar{a} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{v})}|M|$。那么

$$[\exists\bar{v}_0\, \phi_0(\bar{a}, \bar{v}_0) \wedge \exists\bar{v}_1\, \phi_1(\bar{a}, \bar{v}_1)]_M = [\exists\bar{v}_0\, \exists\bar{v}_1\, (\phi_0(\bar{a}, \bar{v}_0) \wedge \phi_1(\bar{a}), \bar{v}_1)]_M.$$

证明。 先注意， $E\exists\bar{v}_0\, \phi_0(\bar{v}, \bar{v}_0) = E\phi_0(\bar{v}, \bar{v}_0)$, $= E\phi_0$，比如说，其中 $E\phi_0 = \bigwedge\{E^C c\colon\ c$出现在 $\phi_0\}$中， ϕ_1 的情况也类似。令 $q = E\phi_0 \wedge E\phi_{1\circ}$

根据公式的解释的定义（[10], 定义（2.20））以及 $\wedge$ 对 $\bigvee$ 的分配律，我们有

$$\begin{aligned}
&[\exists\bar{v}_0\, \phi_0(\bar{a}, \bar{v}_0) \wedge \exists\bar{v}_1\, \phi_1(\bar{a}, \bar{v}_1)]_M \\
&\quad = q \wedge E\bar{a} \wedge [\exists\bar{v}_0\, \phi_0(\bar{a}, \bar{v}_0)]_M \wedge [\exists\bar{v}_1\, \phi_1(\bar{a}, \bar{v}_1)]_M \\
&\quad = q \wedge E\bar{a} \wedge (\bigvee_{\bar{s}\in{}^{\mathrm{lh}(\bar{u})}|M|} [\phi_0(\bar{a}, \bar{s})]_M) \wedge (\bigvee_{\bar{t}\in{}^{\mathrm{lh}(\bar{u})}|M|} [\phi_1(\bar{a}, \bar{t})]_M) \\
&\quad = q \wedge E\bar{a} \wedge \bigvee_{\bar{s}\in{}^{\mathrm{lh}(\bar{u})}|M|} (\bigvee_{\bar{t}\in{}^{\mathrm{lh}(\bar{u})}|M|} ([\phi_0(\bar{a}, \bar{s})]_M \wedge [\phi_1(\bar{a}, \bar{t})]_M)) \\
&\quad = q \wedge E\bar{a} \wedge \bigvee_{\bar{s}\in{}^{\mathrm{lh}(\bar{u})}|M|} (\bigvee_{\bar{t}\in{}^{\mathrm{lh}(\bar{u})}|M|} ([\phi_0(\bar{a}, \bar{s}) \wedge \phi_1(\bar{a}, \bar{t})]_M)) \\
&\quad = q \wedge E\bar{a} \wedge \bigvee_{\bar{s}\in{}^{\mathrm{lh}(\bar{u})}|M|} ([\exists\bar{v}_1(\phi_0(\bar{a}, \bar{s}) \wedge [\phi_1(\bar{a}, \bar{v}_1)]_M)) \\
&\quad = [\exists\bar{v}_0\, (\exists\bar{v}_1\, (\phi_0(\bar{a}, \bar{v}_0) \wedge \phi_1(\bar{a}, \bar{v}_1)))]_M.
\end{aligned}$$

$\star$

¯**推论 6.7**。 对于 $L_{\omega\omega}$ 中的任意正原始公式 $\phi(\bar{v})$ ，存在一个集合 $\{\phi_i\colon \quad i < m\}$，其中包含未嵌套原子公式，以及一串存在量词 $\exists v_0 \ldots \exists v_{n-1}$，使得将 ϕ^* 设为 $\exists v_0 \ldots \exists v_{n-1}(\phi_0 \wedge \cdots \wedge \phi_{k-1})$ 后，对于所有 $\bar{a} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|M|$，我们都有 $[\phi(\bar{a})]_M = [\phi^*(\bar{a})]_M$。

对于允许无穷合取和析取的语言，我们没有类似的结果，因为在完备海廷代数中，通常不满足 $\bigwedge$ 对 $\bigvee$ 的分配律。

我们引入量词度这一概念，并将在下文中使用。

定义 6.8。**（量词度）**设 $\phi \in L_{\infty\lambda}$。 ϕ,$d(\phi)$ 的量词度按其复杂度归纳定义。

$$
\begin{array}{ll}
\phi \text{ atomic} & d(\phi) = 0 \\
\phi = \neg\psi & d(\phi) = d(\psi) \\
\phi = \psi \longrightarrow \chi & d(\phi) = \max(\{d(\psi), d(\chi)\}) \\
\phi = \bigwedge \Phi & d(\phi) = \sup\{d(\psi) \,:\, \psi \in \Phi\} \\
\phi = \bigvee \Phi & d(\phi) = \sup\{d(\psi) \,:\, \psi \in \Phi\} \\
\phi = \forall V \psi & d(\phi) = d(\psi) + 1 \\
\phi = \exists V \psi & d(\phi) = d(\psi) + 1
\end{array}
$$

¯**注**。当 $\lambda = \omega$ 时，此定义会在 $L_{\omega\omega}$¯ 或 $L_{\infty\omega}$ 上导出“通常的”量词度。例如，若将 $\exists x$ 写作 $\exists\{x\}$，将 $\{x\}$ 写作单元素集合，若 ϕ 是 $\exists\{x,\ y\}\, x = y$ 且 ψ 是 $\exists x \exists y\, x = y$，那么 $d(\phi) = 1$，但 $d(\psi) = 2$。

我们还引入一种修正秩，用于考虑允许语言中出现函数符号所带来的复杂度增加。这种秩略微变形自 [18], 练习（XII.3.15），而该练习又变形自 [20], 第254页中给出的一个秩。 [18] 它用于为任意有限一阶语言（即可能包含函数符号和常量符号）中的 Fra¨ıss´e 风格定理的证明提供框架。

定义 6.9。 （修正秩）令 $\phi \in L_{\infty\lambda}$。项 t和公式 ϕ, $r(t)$, $r(\phi)$的修正秩 按其复杂度归纳定义。

$t = v$	$r(\phi) = 0$
$t = c$	$r(\phi) = 1$
$t = f(s_0, \ldots, s_{n-1})$	$r(\phi) = 1 + r(s_0) + \ldots r(s_{n-1})$
$\phi = R(t_0, \ldots, t_{m-1})$	$r(\phi) = r(t_0) + \ldots r(t_{m-1})$
$\phi = `t_0 = t_1'$	$r(\phi) = \max\{0, r(t_0) + r(t_1) - 1\}$
$\phi = \neg\psi$	$r(\phi) = r(\psi)$
$\phi = \psi \longrightarrow \chi$	$r(\phi) = \max(\{r(\psi), r(\chi)\})$
$\phi = \bigwedge \Phi$	$r(\phi) = \sup\{r(\psi) : \psi \in \Phi\}$
$\phi = \bigvee \Phi$	$r(\phi) = \sup\{r(\psi) : \psi \in \Phi\}$
$\phi = \forall V\psi$	$r(\phi) = r(\psi) + 1$
$\phi = \exists V\psi$	$r(\phi) = r(\psi) + 1$

注释 6.10。注意，对于任意公式 ϕ，我们有 $d(\phi) \leqslant r(\phi)$。如果语言是关系型的，那么我们总有等号： d和 r 相同。然而，在没有函数符号但有常元的语言中，我们已经有 $r \neq d$。

定义 6.11. 设 α 是一个序数。 L^α 是满足 $r(\phi) \leqslant \alpha$的 L-公式集族。

7. 公式去嵌套

本节将证明，每个公式都在求值范围意义上等价于一个非嵌套公式。经典模型论中的类似结果相对容易得到，不过大多数模型论教科书似乎都没有探讨这个问题。一个例外是 [30], ，其中给出了一个“举例证明”（定理（2.6.1））。在模型层的背景下，证明则要稍费一些功夫。

回忆一下， L-项是递归定义的：基本情形是变量符号或常元符号，递归步骤则是将一个 n元函数符号应用于一个由 n个已定义的 L-项组成的序列。

定义 7.1. 原子 L-公式 ϕ 若属于以下形式之一，则称为嵌套：

• $c = d$，其中 $c, d \in \mathcal{C}$ 是常元符号• $f(t_0, \ldots, t_{n-1}) = t_n$或 $t_n = f(t_0, \ldots, t_{n-1})$，其中 f是某个 $n < \omega$元函数符号 n，且 $t_0, \ldots, t_n$是 L项，其中并非所有项都是变量符号。• $R(t_0, \ldots, t_{n-1})$，其中 R是某个 $n < \omega$元关系符号 n，且$t_0, \ldots, t_{n-1}$是 L项，其中并非所有项都是变量符号。

定义 7.2。 我们递归地为每个原子 $L_{\infty\lambda}$-公式 $\phi(\bar{v})$定义一个无嵌套（事实上是正原始）公式 $\phi^{\exists}(\bar{v})$, 其自由变量为 $\bar{v}$。

对于未嵌套原子公式，我们简单地取 $\phi^{\exists} = \phi$。

如果 ϕ 是 $c = d$，其中 c、d 是常元符号，我们令 $\phi^{\exists}$ 为 $\exists v_0\, v_0 = c \,\&\, v_0 = d$。

现在，假设 ϕ 是 $f(t_0$、.....、$t_{n-1}) = t_n$，其中 f是某个 $n < \omega$元函数符号，而 t_0、.....、t_n 是 L项，且并非所有项都是变量符号。

假设 $S = \{i_j\colon\ j \leqslant m\}$ 是满足 t_i不是变量符号的 $i \leqslant n$ 集族的一个枚举。对于 $i \notin S$，令 $v_i = t_i$，并令 $\{v_{i_j}\colon\ j \leqslant m\}$为一族互不相同的变量符号，其中没有一个出现在任意 t_i 中，且对于 $i < n$。我们令 ϕ' 为

$$\exists v_{i_0} \ldots \exists v_{i_m}\ v_{i_0} = t_{i_0} \,\&\, \ldots \,\&\, v_{i_m} = t_{i_m} \,\&\, f(v_0, \ldots, v_{n-1}) = v_n.$$

于是我们令 ϕ'' 为

$$\exists v_{i_0} \ldots \exists v_{i_m}\ (v_{i_0} = t_{i_0})^{\exists} \,\&\, \ldots \,\&\, (v_{i_m} = t_{i_m})^{\exists} \,\&\, f(v'_0, \ldots, v'_{n-1}) = v'_n$$

其中，对于 $i \notin S$，我们有 $v'_i = v_i$；对于 $i = i_j \in S$，我们有 $v'_i = v_{i_j}$。

ϕ 为 $t_n = f(t_0, \ldots, t_{n-1})$ 时的定义几乎完全相同；我们只需将最后一个合取项的序调换为 $v_n = f(v_0, \ldots, v_{n-1})$。

最后，假设 ϕ 为 $R(t_0, \ldots, t_{n-1})$，其中 R是某个 $n < \omega$的 n元关系符号，而 $t_0, \ldots, t_{n-1}$ 是 L 项，并非全都是变量符号。我们可以按照与前一个类似的方式定义。

假设 $S = \{i_j\colon\ j \leqslant m\}$是由满足 t_i 不是变量符号的 $i < n$组成的集族的一个枚举。对于 $i \notin S$，令 $v_i = t_i$；并令 $\{v_{i_j}\colon\ j \leqslant m\}$ 为一族互不相同的变量符号，其中没有任何一个出现在任意 $i < n$对应的 t_i 中。于是我们令 ϕ'' 为

$$\exists v_{i_0} \ldots \exists v_{i_m}\ (v_{i_0} = t_{i_0})^{\exists} \,\&\, \ldots \,\&\, (v_{i_m} = t_{i_m})^{\exists} \,\&\, R(v'_0, \ldots, v'_{n-1}),$$

其中，对于 $i \notin S$，我们有 $v'_i = v_i$；对于 $i = i_j \in S$，我们有 $v'_i = v_{i_j}$。

定义 7.3。 若 ψ 是任意的 L-公式，则令 $\psi^{\exists}$ 为从 ψ 导出的公式，方法是将每个原子子公式 ϕ中的 ϕ替换为 $\phi^{\exists}$。

命题 7.4。 若 ψ 是任意的 L-公式，则 $r(\psi) = d(\psi^{\exists})$。

证明。 这直接由定义得出。 ⋆

我们将证明对于 L-公式 $\psi(\bar{v}), M \in \mathsf{pSh}(\Omega\ L)$ 以及 $\bar{a} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{v})}|M|$，有 $[\psi(\bar{a})]_M = [\psi^{\exists}(\bar{a})]_M$。证明的关键在于证明这一点对原子公式成立。

证明中其余简单的部分则通过公式的解释的递归定义得出。

下面这个引理来自 [10] ，将会很有用。

引理 7.5. *(*[10], 引理 *(2.25)。)* 设 $\bar{v} = \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle$ 是变量，且令 $t(\bar{v})$, $s(\bar{v})$ 为 L-项。设 $M \in pSh(\Omega\ L)$, 其中有 $\bar{a} = \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle$, $b = \langle b_0, \dots, b_{n-1} \rangle \in {}^n|M \upharpoonright Et \wedge Es|$。那么

$$[\bar{a} = \bar{b}]_M \wedge [s^M(\bar{a}) = t^M(\bar{a})]_M = [\bar{a} = \bar{b}]_M \wedge [s^M(\bar{b}) = t^M(\bar{b})]_M.$$

特别地， $[\bar{a} = \bar{b}]_M \wedge [s^M(\bar{a}) = t^M(\bar{a})]_M \leqslant [s^M(\bar{b}) = t^M(\bar{b})]_M$。

定理 7.6. 设 $\phi(\bar{v})$ 是一个原子公式，含有 $\bar{v} = \langle v_0, \dots, v_{n-1} \rangle$。设$M \in pSh(\Omega\ L)$ 和 $\bar{a} = \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle \in |M|$。那么 $[\phi(\bar{a})]_M = [\phi^\exists(\bar{a})]_M$。

证明。 对于非嵌套原子公式，定理显然成立，因为对于这些公式 $\phi^\exists = \phi$..。我们通过对原子公式中出现的 L-项的复杂度进行归纳，证明定理的其余部分。情形 1 是基础情形；对于非嵌套公式的定理也是如此，而情形 2 和 3 是归纳步骤。

情形 1: 设 $\phi(\bar{v})$ 为"$c = d$"，其中 $c,\ d \in |C|$ 是常元符号。设 $M \in pSh(\Omega\ L)$ 且 $\bar{a} = \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle \in {}^n|M|$。根据 [10], 定义 (2.14)，我们有 $E^C c = E^M \mathfrak{c}^M$ 和 $E^C d = E^M \mathfrak{d}^M$。令 $p = E^C c \wedge E^C d$。

值得注意的是 $E(\mathfrak{c}^M \upharpoonright E(\bar{a} \upharpoonright p)) = E(\bar{a} \upharpoonright p)$，这是因为

$$E(\mathfrak{c}^M \upharpoonright E(\bar{a} \upharpoonright p)) = E\mathfrak{c}^M \wedge E\bar{a} \wedge p = E\bar{a} \wedge p = E(\bar{a} \upharpoonright p),$$

其中，第一个和第三个等号来自预层中外延与限制之间相互作用的应用（[10], 定义（1.13））， 第二个等号则来自如下事实：根据 p的定义， $p \leqslant E\mathfrak{c}^M$。

我们有

$$\begin{aligned}[\phi(\bar{a})]_M &= [(c = d)(\bar{a})]_M = [c^M(\bar{a} \upharpoonright p) = d^M(\bar{a} \upharpoonright p)]_M \\ &= [\mathfrak{c}^M \upharpoonright E(\bar{a} \upharpoonright p) = \mathfrak{d}^M \upharpoonright E(\bar{a} \upharpoonright p)]_M,\end{aligned}$$

其中，第二个等号来自 [10], 定义（2.23），第三个等号来自 [10],定义（2.17）。我们还有

$$[\mathfrak{c}^M \upharpoonright E(\bar{a} \upharpoonright p) = \mathfrak{d}^M \upharpoonright E(\bar{a} \upharpoonright p)]_M \leqslant E(\mathfrak{c}^M \upharpoonright E(\bar{a} \upharpoonright p)) = E(\bar{a} \upharpoonright p),$$

其中，不等式来自 [10], 引理（1.16），等号如上所述。

Thus

$$[\phi(\bar{a})]_M = [\mathfrak{c}^M \upharpoonright E(\bar{a} \upharpoonright p) = \mathfrak{d}^M \upharpoonright E(\bar{a} \upharpoonright p)]_M \wedge E(\bar{a} \upharpoonright p).$$

另一方面， $\phi^\exists(\bar{v})$ 是 $\exists x(x = c \wedge x = d)$. 因此

$$[\phi^{\exists}(\bar{a})]_M = [\exists x(x = c \wedge x = d)(\bar{a})]_M = \bigvee_{s\in|M|} [(s = c \wedge s = d)(\bar{a})]_M$$
$$= \bigvee_{s\in|M|} E\bar{a} \wedge p \wedge [(s = c)(\bar{a})]_M \wedge [(s = d)(\bar{a})]_M$$
$$= E(\bar{a} \restriction p) \wedge \bigvee_{s\in|M|} ([s \restriction p = \mathfrak{c}^M \restriction E(\bar{a} \restriction p)]_M \wedge [s \restriction p = \mathfrak{d}^M \restriction E(\bar{a} \restriction p)]_M),$$

其中，第二个和第三个等式分别来自 [10],定义(2.23)的两个不同条款，第四个来自 [10],定义(2.17)。

根据引理（1.17），由 $[. = .]_M$ 的定义可知，对于每个$s \in |M|$，我们有

$$[(s \restriction p = \mathfrak{c}^M \restriction E(\bar{a} \restriction p)]_M \wedge [(s \restriction p = \mathfrak{d}^M \restriction E(\bar{a} \restriction p)]_M$$
$$\leqslant [\mathfrak{c}^M \restriction E(\bar{a} \restriction p) = \mathfrak{d}^M \restriction E(\bar{a} \restriction p)]_M.$$

Thus

$$[\phi^{\exists}(\bar{a})]_M \leqslant E(\bar{a} \restriction p) \wedge [\mathfrak{c}^M \restriction E(\bar{a} \restriction p) = \mathfrak{d}^M \restriction E(\bar{a} \restriction p)]_M, = [\phi(\bar{a})]_M.$$

然而，$\mathfrak{c}^M \restriction E(\bar{a} \restriction p) \in |M|$，因此它也是 s 中的一个截面，而我们证明等于该上确界的值正是取自这些截面。

Thus

$$[\phi^{\exists}(\bar{a})]_M \geqslant E(\bar{a} \restriction p) \wedge [\mathfrak{c}^M \restriction E(\bar{a} \restriction p) = \mathfrak{c}^M \restriction E(\bar{a} \restriction p)]_M$$
$$\wedge [\mathfrak{c}^M \restriction E(\bar{a} \restriction p) = \mathfrak{d}^M \restriction E(\bar{a} \restriction p)]_M$$
$$= E(\bar{a} \restriction p) \wedge E(\mathfrak{c}^M \restriction E(\bar{a} \restriction p)) \wedge [\mathfrak{c}^M \restriction E(\bar{a} \restriction p) \restriction p = \mathfrak{d}^M \restriction E(\bar{a} \restriction p)]_M$$
$$= E(\bar{a} \restriction p) \wedge [\mathfrak{c}^M \restriction E(\bar{a} \restriction p) \restriction p = \mathfrak{d}^M \restriction E(\bar{a} \restriction p)]_M = [\phi(\bar{a})]_M,$$

其中倒数第二个等号成立，是因为正如在本情形证明开头所指出的，
$E(\mathfrak{c}^M \restriction E(\bar{a} \restriction p)) = E(\bar{a} \restriction p)$。

情形 2：设 $\phi(\bar{v})$ 为“$t_m(\bar{v}) = f(t_0(\bar{v}), \ldots\ldots, t_{m-1}(\bar{v}))$”，其中对于 $j \leqslant m$，我们有$t_j(\bar{v})$，它们是 L项，且并非全都是变量符号，而 f 是一个 m元函数符号。设 $M \in pSh(\Omega\ L)$，且 $\bar{a} = \langle a_0, \ldots\ldots, a_{n-1}\rangle \in {}^n|M|$。设 $p = E\phi = \bigwedge_{j\leqslant m} Et_j$。

首先，根据 [10], 定义（2.23）和（2.17），

$$[\phi(\bar{a})]_M = [t_m^M(\bar{a} \restriction p) = f^M(t_0^M(\bar{a} \restriction p), \ldots, t_{m-1}^M(\bar{a} \restriction p))]_M =$$
$$E\bar{a} \restriction p \wedge [t_m^M(\bar{a} \restriction p) = f^M(t_0^M(\bar{a} \restriction p), \ldots, t_{m-1}^M(\bar{a} \restriction p))]_M.$$

另一方面，根据定义，我们有 $\phi^{\exists}(\bar{v})$is

$$\exists x_0 \ldots \exists x_m((x_0 = t_0(\bar{v}))^{\exists} \wedge \cdots \wedge (x_m = t_m(\bar{v}))^{\exists} \wedge x_m = f(x_0, \ldots x_{m-1})).$$

根据归纳假设，对于每个 $j<m$，我们有

$$[(x_j=t_j(\bar v))^{\exists}(\bar a)]_M=[x_j=t_j(\bar v)(\bar a)]_M.$$

使用 [10], 定义（2.23）和（2.17）以及归纳假设,

$$\begin{aligned}[\phi^{\exists}(\bar a)]_M=&\bigvee_{s_0\in|M|}\dots\bigvee_{s_m\in|M|}(E\bar a\restriction p\wedge[s_0\restriction p=t_0^M(\bar a\restriction p)]\wedge\dots\\&\wedge[s_m\restriction p=t_m^M(\bar a\restriction p)]\wedge[s_m\restriction p=f^M(s_0\restriction p,\dots,s_{m-1}\restriction p]_M)\\\leqslant& E\bar a\restriction p\wedge[t_m^M(\bar a\restriction p)=f^M(t_0^M(\bar a\restriction p),\dots,t_{m-1}^M(\bar a\restriction p))]_M=[\phi(\bar a)]_M,\end{aligned}$$

其中，该不等式可由应用引理（7.5）得到。

然而，元组$\langle t_j^M(\bar a\restriction p)\colon\ j\leqslant m\rangle$是截面元组 $\langle s_j{:}j\leqslant m\rangle\in{}^{m+1}|M|$ 之一，而我们证明等于$[\phi^{\exists}(\bar a)]_M$ 的 $m+1$重上确界正是取遍这些元组所得。

Thus

$$\begin{aligned}[\phi(\bar a)]_M&=E\bar a\restriction p\wedge[t_m^M(\bar a\restriction p)=f^M(t_0^M(\bar a\restriction p),\dots,t_{m-1}^M(\bar a\restriction p))]_M\\&=E\bar a\restriction p\wedge Et_0^M(\bar a\restriction p)\wedge\dots\wedge Et_m^M(\bar a\restriction p)\wedge\\&\qquad[t_m^M(\bar a\restriction p)=f^M(t_0^M(\bar a\restriction p),\dots,t_{m-1}^M(\bar a\restriction p))]_M\\&\leqslant[\phi^{\exists}(\bar a)]_M,\end{aligned}$$

因为对每个 $j\leqslant m$ ，都有 $E\bar a\restriction p\leqslant Et_j^M(\bar a\restriction p)$。

情形 3：设 $\phi(\bar v)$ 是 $R(t_0(\bar v),\dots,t_{m-1}(\bar v))$，其中对 $j<m$ 而言，$t_j(\bar v)$ 是 L项，且并非全都是变量符号，而 R 是一个 m元关系符号。令$M\in pSh(\Omega\ L)$ 和 $\bar a=\langle a_0,\dots a_{n-1}\rangle\in{}^m|M|$。令 $p=E\phi=\bigwedge_{j\leqslant m-1}Et_j$。

首先，同样根据 [10], 定义（2.23）和（2.17），我们有

$$\begin{aligned}[\phi(\bar a)]_M&=[R^M(t_0^M(\bar a\restriction p),\dots,t_{m-1}^M(\bar a\restriction p))]_M\\&=E\bar a\restriction p\wedge[R^M(t_0^M(\bar a\restriction p),\dots,t_{m-1}^M(\bar a\restriction p))]_M.\end{aligned}$$

另一方面，根据定义，$\phi^{\exists}(\bar v)$是

$$\exists x_0\dots\exists x_{m-1}((x_0=t_0(\bar v))^{\exists}\wedge\dots\wedge(x_{m-1}=t_{m-1}(\bar v))^{\exists}\wedge R(x_0,\dots,x_{m-1})).$$

对于 $j<m$，根据归纳法，$[(x_j=t_j(\bar v))^{\exists}(\bar a)]_M=[x_j=t_j(\bar v)(\bar a)]_M$。再次利用[10], 定义（2.23）和（2.17）以及归纳假设,

$$\begin{aligned}[\phi^{\exists}(\bar a)]_M=&\bigvee_{s_0\in|M|}\dots\bigvee_{s_{m-1}\in|M|}(E\bar a\restriction p\wedge[s_0\restriction p=t_0^M(\bar a\restriction p)]\wedge\dots\\&\wedge[s_{m-1}\restriction p=t_{m-1}^M(\bar a\restriction p)]\wedge[R^M(s_0\restriction p,\dots,s_{m-1}\restriction p)]_M)\\\leqslant&\ E\bar a\restriction p\wedge[R^M(\bar a\restriction p),\dots,t_{m-1}^M(\bar a\restriction p))]_M=[\phi(\bar a)]_M,\end{aligned}$$

其中的不等式由特征函数的某个定义性质成立，参见 [10],定义 (2.1)。

然而，元组$\langle t_j^M(\bar{a} \restriction p) : \ j < m\rangle$是截面元组 $\langle s_j : j < m\rangle \in {}^m|M|$ 之一，而我们证明 $[\phi^\exists(\bar{a})]_M$等于对这些元组取的 m重上确界。

因此，

$$\begin{aligned}[\phi(\bar{a})]_M &= E\bar{a} \restriction p \wedge [R^M(t_0^M(\bar{a} \restriction p), \ldots, t_{m-1}^M(\bar{a} \restriction p))]_M \\ &= E\bar{a} \restriction p \wedge Et_0^M(\bar{a} \restriction p) \wedge \cdots \wedge Et_{m-1}^M(\bar{a} \restriction p) \\ &\qquad \wedge [R^M(t_0^M(\bar{a} \restriction p), \ldots, t_{m-1}^M(\bar{a} \restriction p))]_M \\ &\leqslant [\phi^\exists(\bar{a})]_M,\end{aligned}$$

因为对每个 $j < m$，都有 $E\bar{a} \restriction p \leqslant Et_j^M(\bar{a} \restriction p)$。 ⋆

推论 7.7。 如果 ψ 是一个 L-公式， $M \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$ 并且 $\bar{a} \in {}^n|M|$，那么

$$[\psi(\bar{a})]_M = [\psi^\exists(\bar{a})]_M.$$

证明。 根据公式解释的归纳定义。 ⋆

8. 附加联结词

在本节中，我们讨论通过对我们语言的背景框架添加对应于Ω的部分或全部元素的联结词而得到的某些扩张。正如我们将看到的，事实上存在两种彼此独立但等价的、通过新联结词进行扩张的方式：通过附加的零元联结词，或通过附加的一元联结词。我们解释这些扩张，以及它们为何是我们语言的背景框架的保守扩张。

我们首先考虑引入附加的一元联结词。在模型层理论中，这类扩张最初被用来获得有关图示法（[9]）和来回论证（[42]，[6]）的结果。

在图示法的语境中，使用这类辅助联结词可以说在审美上是令人愉悦的。例如，正如我们在本节末尾所示，它使人们能够以表面上与Robinson的原始结果极为相似的形式重新表述 [10], 命题（3.16）和定理（3.18），其中“⊨”被替换为“,”。然而，正如 [10], 中所示，对于一个令人满意的图示法而言，这些扩张并非必要。

尽管有上一条注记，我们仍认为有必要加入这些一元联结词，才能证明余下各节的核心结果；尤其是要证明某种类似命题（9.4）的结论，即对于两个由模型及其元组构成的对象，若它们在指定量词秩以内关于 ceu 公式等价，则导出函数相等。我们将在问题（11.5）及其后的讨论中对此作进一步说明。

定义 8.1. (参见 [9], 定义（5.1）)。令 $p \in \Omega$，M 为一个 pSh(Ω)中的 L-结构，$\bar{a} \in [|M|]^n$ 并令 $\phi(\bar{v})$ 为一个具有 $\mathrm{lh}(\bar{v}) = n$ 的 L-公式。按照 [9], ，将 $E\bar{a} \wedge E\phi \wedge (p \leftrightarrow [\phi(\bar{a})]_M)$ 写作$\square_p [\phi(\bar{a})]_M$ 的缩写，其中该元素属于 Ω。

在实际应用中，我们通常可以假设 ϕ 中出现的所有常元符号都由 $\bar{a}$ 中的元素解释，因此 $E\bar{a} \leqslant E\phi$。在这种情况下，$\square_p [\phi(\bar{a})]_M$ 因而是 $E\bar{a} \wedge (p \leftrightarrow [\phi(\bar{a})]_M)$ 的缩写。

我们给出一个简单但有用的引理。

引理 8.2. 设 L 是 Ω 上带等号的一阶语言，M 是一个 L-结构，$\bar{a} \in |M|^n$ 和 ϕ 是一个 L-公式。那么 $\square_\top [\phi(\bar{a})]_M = [\phi(\bar{a})]_M$ 且 $\square_\bot [\phi(\bar{a})]_M = [\neg\phi(\bar{a})]_M$。

证明。 我们有

$$\begin{aligned}
\square_\top [\phi(\bar{a})]_M &= E\bar{a} \wedge E\phi \wedge (\top \leftrightarrow [\phi(\bar{a})]_M) \\
&= E\bar{a} \wedge E\phi \wedge [\phi(\bar{a})]_M = [\phi(\bar{a})]_M, \text{ and, similarly,} \\
\square_\bot [\phi(\bar{a})]_M &= E\bar{a} \wedge E\phi \wedge (\bot \leftrightarrow [\phi(\bar{a})]_M) \\
&= E\bar{a} \wedge E\phi \wedge \neg[\phi(\bar{a})]_M = [\neg\phi(\bar{a})]_M.
\end{aligned}$$

⋆

定义 8.3. 设 $p \in \Omega$，M 为 pSh(Ω) 中的一个 L-结构，$\bar{a} \in [|M|]^n$ 且$\phi(\bar{v})$ 为一个具有 $\mathrm{lh}(\bar{v}) = n$ 的 L-公式。我们超越 [9]，并将 M、$\square_p \phi(\bar{a})$ 定义为.....的缩写

$$E\bar{a} \wedge E\phi \leqslant (p \leftrightarrow [\phi(\bar{a})]_M),$$

或者，等价地，根据 [10], 引理 (1.10),

$$E\bar{a} \wedge p = [\phi(\bar{a})]_M,$$

或者，等价地,

$$E\bar{a} \wedge E\phi \wedge (p \leftrightarrow [\phi(\bar{a})]_M) = E\bar{a} \wedge E\phi.$$

注意，尽管如 [10], 引理 (2.24) 所示，$[\phi(\bar{a})]_M \leqslant E\bar{a} \wedge E\phi$，但 $(p \leftrightarrow [\phi(\bar{a})]_M) \leqslant E\bar{a} \wedge E\phi$ 并不必然成立。

此时，[9] 通过为每个 $p \in \Omega$ 引入一个一元联结词来扩展 L，他们同样用 $\square_p$ 来表示该联结词。

定义 8.4. 定义 $L^\square = L \cup \{\square_p : p \in \Omega\}$，其中对于 $p \in \Omega$，我们有 $\square_p$是一个一元联结词，并且公式构成按如下方式扩展：对每个 $p \in \Omega$，若$\phi \in L^\square$ 则 $\square_p \phi \in L^\square$。显然，$L^\square$ 与 L 具有相同的项概念，并且 M 是 pSh(Ω) 中的一个 $L^\square$-结构，当且仅当 M 是 pSh(Ω) 中的一个 L-结构。

$L^\square$ 公式的外延和值定义如下。若 ϕ是一个$L^\square$-公式，且 $p \in \Omega$，则 $E\,\square_p\,\phi = E\phi$。若 M 是 pSh(Ω) 中的一个 L-结构,

$\bar{a} \in |M|^n$ 且 $\phi(\bar{v})$ 是一个 $L^{\square}$-公式，则

$$[\square_p \phi(\bar{a})]_M = \square_p [\phi(\bar{a})]_M \ \ (= E(\bar{a}) \wedge E\phi \wedge ([\phi(\bar{a})]_M \leftrightarrow p)).$$

推广 [10], 定义 (2.26)，定义

$$M \Vdash \square_p \phi(\bar{a}) \text{ if } [\square_p \phi(\bar{a})]_M = E \square_p \ \phi(\bar{a}) \ \ (= E\phi \wedge E\bar{a}).$$

这似乎会造成歧义，因为我们在定义 (8.3) 中已经定义了 M, $\square_p \phi(\bar{a})$，并用 $\square_p \phi(\bar{a})$ 作为 Ω 中一个元素的缩写。然而，在这两种用法中，我们都有

$$M \Vdash \square_p \phi(\bar{a}) \text{ if and only if } E\phi \wedge E\bar{a} \leqslant ([\phi(\bar{a})]_M \leftrightarrow p),$$

因此，在论证中使用“M, $\square_p \phi(\bar{a})$”时，这种歧义不会造成问题。

定义 8.5。 $L^{\square}$ 公式若属于未嵌套原子公式在 $\bigwedge, \exists$ 以及针对 $p \in \Omega$ 的 $\square_p$ 下的闭包，则称为*ceu* 公式 。

前几节关于去嵌套的结果可推广到$\mathcal{L}^{\square}$。

定义 8.6。 若 ψ 是任意一个$\mathcal{L}^{\square}$-公式，令 $\psi^{\exists}$ 为由 ψ 导出的公式：对每个原子子公式 ϕ，将 ϕ替换为 $\phi^{\exists}$。

定义 8.7。 设 α 为一个序数。 $L^{\alpha,\ \square}$ 是满足 $r(\phi) \leqslant \alpha$的 $L^{\square}$-公式 ϕ的集族。

命题 8.8。 若 ψ 是任意一个 $L^{\square}$-公式，则 $r(\psi) = d(\psi^{\exists})$。

证明。 由命题（7.4）和定义（8.4）可得。 ⋆

命题 8.9。 若 ψ 是一个 $L^{\square}$-公式， $M \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$ 且 $\bar{a} \in {}^{n}|M|$，则

$$[\psi(\bar{a})]_M = [\psi^{\exists}(\bar{a})]_M.$$

证明。 根据公式的解释的归纳定义，仿照推论（7.7），并使用定义（8.4）中给出的 $\square_p \phi$ 的解释。⋆

或者，也可以通过为每个 $p \in \Omega$ 引入一个零元连接词 $\check{}p$ 来扩展 L 。

定义 8.10. 设 $L^{\check{}} = L \cup \{\check{}p\colon\ p \in \Omega\}$，其中对于 $p \in \Omega$，我们有 $\check{}p$ 是一个零元联结词，因此每个 $\check{}p$ 都是一个公式，可用于归纳构造更复杂的 $L^{\check{}}$-公式。同样，$L^{\check{}}$和 L 具有相同的项概念，并且 M 是 $\mathrm{pSh}(\Omega)$ 中的一个 $L^{\check{}}$-结构，当且仅当 M是 $\mathrm{pSh}(\Omega)$中的一个 L-结构。

对于每个 $p \in \Omega$，外延和 $\check{}p$ 的解释分别由 $E\check{}p = \top$ 和$[\check{}p]_M = p$给出，而涉及 $\check{}p$ 的公式的外延和解释则通过对公式形式进行归纳来给出。

这种方法的一种变体是：只对 Ω 的某个指定子集中的p for p添加零元常元。事实证明，有两种子集选择很有用：Ω 的稠密元素集合，即满足 $\neg\neg p = \top$ 的那些 p，以及一个基数为 $d(\Omega)$ 的 Ω 的稠密子集。

注记 8.11。据我们所能发现的资料，联结词 $\Box p$ 是 Caicedo 在其关于一般直觉主义联结词的工作中引入的。参见[12], [13], [14] 和 [15], ，以及前面提到的 [42]。

注记 8.12。与 $L^{\check{}}$ 类似的定义也出现在模糊逻辑和连续逻辑中，其中真值位于实区间 $[0,1]$ 中；在这些逻辑中，对于所有 $p \in [0,1]$ 或者对于满足记账公理的 $p \in [0,1]$ 的稠密可数子集，加入零元联结词 $\check{}p$ 都发挥着重要作用。例如，参见 [39] 中的 Pavelka逻辑：为每个 $p \in [0,1]$ 和 [26], [2] 以及 [4], 添加相应的零元联结词；前者用于有理Pavelka逻辑，后两者用于连续逻辑，即添加与 $[0,1]$ 的一个可数稠密子集相对应的零元联结词（其中包括与⊥相对应的值：有理Pavelka逻辑中的 0，以及连续逻辑中的 1）。（在这些传统中，我们所称的 $\check{}p$ 通常记作 $\bar{p}$；为了避免混淆 $\bar{p}$ 究竟是 Ω 中元素的元组，还是零元联结词的名称，我们不采用这一记法。）

然而，在 [2], [4]以及连续逻辑的其他著作中，通常更倾向于采用添加一元联结词（采用 $L^{\Box}$的风格）的做法。在那里，语言中包含一个记作“$\frac{x}{2}$”的一元联结词（在我们的记号中应写作$\Box\frac{1}{2}$），而其他所有二进有理数对应的一元联结词的作用，则由仅涉及 $\frac{x}{2}$ 的表达式推导出来。显然，对于一般的完备海廷代数Ω，这种做法并不适用。

引理8.13。（所谓的“记账公理”。）设 L 是带等号的、定义在Ω上的一阶语言。设 M 是一个 $L^{\check{}}$-结构。设 p、 q ∈Ω。则

$$[\check{p} \longrightarrow \check{q}]_M = p \longrightarrow q = [\widetilde{p \longrightarrow q}]_M \text{ and}$$
$$[\check{p} \wedge \check{q}]_M = p \wedge q = [\widetilde{p \wedge q}]_M.$$

证明。根据公式的解释的归纳定义，我们有

$$[\check{}p \longrightarrow \check{}q] = E\check{}p \wedge E\check{}q \wedge [\check{}p] \longrightarrow [\check{}q] = \top \wedge \top \wedge [\check{}p] \longrightarrow [\check{}q] = p \longrightarrow q = [\widetilde{p \longrightarrow q}]_M$$

和

$$[\check{p} \wedge \check{q}] = E\check{p} \wedge E\check{q} \wedge [\check{p}] \wedge [\check{q}] = \top \wedge \top \wedge [\check{p}] \wedge [\check{q}] = p \wedge q = [\widetilde{p \wedge q}]_M.$$

⋆

定义 8.14。设 L 是带有等号的 Ω 上的一阶语言。对于每个 $L^{\Box}$-公式 ϕ，我们定义一个带有 $E\phi = E\phi^{\circ}$ 的 $L^{\check{}}$-公式 ϕ°。定义

通过对 $L^{\square}$-公式的构成进行归纳法给出。唯一有趣的步骤是：当我们有一个 $L^{\square}$-公式 ϕ 和 ϕ°，并希望定义 $(\square_p \phi)^{\circ}$ 时。令 $(\square_p \phi)^{\circ} = (\phi^{\circ} \leftrightarrow \check{}p)$。这保证了，由于中间的等号处使用了归纳假设， $E(\square_p \phi)^{\circ} = E\phi^{\circ} = E\phi = E(\square_p \phi)$。

命题 8.15. 若 ϕ 是一个 $L^{\square}$-公式，且 $\bar{a} \in |M|^n$，则

$$[\phi(\bar{a})]_M = [\phi^{\circ}(\bar{a})]_M.$$

证明. 对公式的构成进行归纳即可证明。同样，唯一有意思的情形是 $\square_p \phi(\bar{a})$，此时我们已将 $[\phi(\bar{a})]_M = [\phi^{\circ}(\bar{a})]_M$ 作为归纳假设。在这种情况下

$$\begin{aligned}[(\square_p \phi)^{\circ}(\bar{a})]_M &= [(\phi^{\circ}(\bar{a}) \leftrightarrow \check{p})]_M = E\bar{a} \wedge E\phi^{\circ} \wedge [(\phi^{\circ}(\bar{a})]_M \leftrightarrow [\check{p}]_M) \\ &= Ea \wedge E\phi \wedge ([\phi(\bar{a})]_M \leftrightarrow p) = [\square_p \phi(\bar{a})]_M.\end{aligned}$$

⋆

定义 8.16. 设 L 是 Ω 上带等号的一阶语言。对于每个$L^{\check{}}$-公式 ψ，我们定义一个 $L^{\square}$-公式 $\psi^{\square}$，利用存在重言式这一事实。设 τ是任意一个重言式，例如，设 τ为 $\neg\exists v\, v = v \vee \neg\neg\exists v\, v = v$。通过将 ψ 中每个 $\check{}p$ 的每次出现替换为 $\square_p \tau$，得到$\psi^{\square}$。

命题 8.17。 若 ψ 是一个 $L^{\check{}}$-公式，且 $\bar{a} \in |M|^n$，则

$$[\psi(\bar{a})]_M = [\phi^{\square}(\bar{a})]_M.$$

证明。 由于 $[\square_p \tau]_M = ([\tau]_M \leftrightarrow p) = (\top \leftrightarrow p) = p = [\check{}p]_M$，根据公式构成的归纳法，我们有 $[\psi(\bar{a})]_M = [\psi^{\square}(\bar{a})]_M$。⋆

因此，这三种方法在语义上等价（尽管句法上不同）：将 $\square_p \phi(\bar{a})$ 用作 Ω 中元素组合的缩写、引入一元联结词 $\square_p$，以及引入零元联结词 $\check{}p$；每种方法都针对所有 $p \in \Omega$。

我们以评论本节图示法结果与本节引入的一元联结词在 [9], §5 中所得结果之间的关系，来结束本节。图示法结果见 [10], §3。 [9], §5 中结果的核心是以下命题。

˜**命题 8.18**。 设 M 和 N 是 $\mathrm{pSh}(\Omega)$ 中的 L-结构，设 M 是将 M 自然地扩张为 L_M-结构所得的扩张（如前所述），并设 N 是将 N扩张为 L_M-结构所得的扩张。设 $\phi(\underline{\bar{a}})$ 是一个 L_M-句子，且 $E\bar{a} \leqslant E\phi$，即 ϕ 中的所有常元符号都由 $\bar{a}$中的元素实现。设 $q = [\phi(\underline{\bar{a}}^M)]_{\tilde{M}}$、$\check{}p = [\phi(\underline{\bar{a}}^N)]_{\tilde{N}}$和 $d = p \longrightarrow q$。

$$\tilde{N} \Vdash \square_{\top} \phi(\underline{\bar{a}} \restriction q) \text{ and } \tilde{N} \Vdash \square_d \phi(\underline{\bar{a}}^{\tilde{N}} \restriction p) \text{ if and only if } p = q.$$

证明。 回顾引理（3.20）中的以下结果。

引理 8.19. 设 M 和 N 是 $\mathrm{pSh}(\Omega)$ 中的 L-结构，设 M 是 M 到一个 L_M-结构的自然扩张，其中对于每个 $a_i \in |M|$， $\underline{a}_i$ 是 a_i 的一个名称，并设 N 是 N 到一个 L_M-结构的扩张。设 $\phi(\bar{\underline{a}})$ 是一个 L_M-句子。设 $q = [\phi(\bar{\underline{a}}^M)]_{\tilde{M}}$、 $p = [\phi(\bar{\underline{a}}^N)]_{\tilde{N}}$ 和 $d = p \longrightarrow q$。

(2) $\tilde{N}$， $\phi(\bar{\underline{a}} \restriction q)$ 当且仅当 $q \leqslant p$，即
$[\phi(\bar{\underline{a}}^M)]_{\tilde{M}} \leqslant [\phi(\bar{\underline{a}}^N)]_{\tilde{N}}$. (4) 若 $q \leqslant p$，则 $(E\bar{a} \restriction p) \wedge d = q = [\phi(\bar{a} \restriction p)]_M$.

对于“$\Longrightarrow$”，根据引理 (8.2)，引理 (8.19(2)) 表明第一个假设等价于 $q \leqslant p$。另一方面，如果 $\tilde{N}$， $\square_d \phi(\bar{\underline{a}}^N \restriction p)$ 那么根据强迫定义（其中一种情形），$(E\bar{a} \restriction p) \wedge d = [\phi(\bar{\underline{a}}^N \restriction p)]_{\tilde{N}}$。等号右边是 $p \wedge p = p$。根据引理 (8.19(2)) 和引理 (8.19(4))，左边是 $p \wedge q$。因此 $p = p \wedge q$，于是 $p \leqslant q$。

对于“$\Longleftarrow$”，分别使用引理 (8.19(2))、引理 (8.19(4)) 和强迫定义。$\star$

随后可以运用命题 (8.18)，将 [10], §3 中的结果改写为以下断言：存在一个从 M 到 N 的合适的 L-Γ-单态，与存在 N 的一个扩张 N（该扩张强迫相关的 $L_M^{\square}$ 句子，而 M 强迫这些句子）等价。

9. 模型的等价蕴含函数相等

本节将证明：如果两个由模型及其元组组成的二元组在某个量词度以内对公式的判断一致，那么由这两个二元组导出的函数相等。

在此，为了证明命题（9.4），以及随后在命题（11.1）中利用该命题建立等价性循环中的“（2）蕴含（3）”这一联系，我们需要对语言中常元的外延作出假设。

重要假设。 在本节、第11节和第12节中，我们将签名限制为满足以下条件的签名：$\mathcal{C}$ 是一个集合，且对所有 $c \in \mathcal{C}$，都有 $Ec = \top$。

如果没有这样的假设，我们可能会有 $E\mathcal{C} = \bigwedge\{Ec\colon\ c \in \mathcal{C}\} = \bot$，这会破坏我们的证明。（类似的考虑也适用于第12节。）[12],[13]

这一假设的推论是，对于任意公式 ϕ in $L^{\square}$ we $E\phi = \top$。

我们以一个普遍适用的引理开始本节。

引理 9.1. 假设 M是 $\mathrm{pSh}(\Omega\ L)$ 中的一个结构，且 $\phi(\bar{x})$ 是一个 $L^{\square}$ 公式。对于任意 $\bar{a} \in \mathrm{lh}(\bar{x})|M|$，存在某个 $\bar{a} \in \mathrm{lh}(\bar{x})|M|$ 和 $q \in \Omega$，使得

$$[\phi(\bar{a})]_M = [\phi(\bar{a}')]_M = E\bar{a}' \ \&\ \bar{a}' = \bar{a} \restriction q.$$

证明。对于任意 $\bar{a} \in \mathrm{lh}(\bar{x})|M|$，我们有

$$[\phi(\bar{a})]_M = [\phi(\bar{a})]_M \wedge [\phi(\bar{a})]_M = [\phi(\bar{a} \restriction [\phi(\bar{a})]_M)]_M$$

and

$$E(\bar{a} \restriction [\phi(\bar{a})]_M) = E\bar{a} \wedge [\phi(\bar{a})]_M = [\phi(\bar{a})]_M = [\phi(\bar{a} \restriction [\phi(\bar{a})]_M)]_M.$$

令 $\bar{a}' = \bar{a} \restriction [\phi(\bar{a})]_M$ 和 $q = [\phi(\bar{a})]_M$，即可得到所需结果。 ⋆

推论 9.2. 假设 M 是$\mathrm{pSh}(\Omega\ L)$中的一个结构，$\phi(\bar{x})$ 是一个 $L^{\square}$ 公式，且 $p \in \Omega$。

$$\{[\phi(\bar{a})]_M : \bar{a} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{x})}|M \restriction p|\} = \{E\bar{a} : \bar{a} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{x})}|M \restriction p| \ \&\ E\bar{a} = [\phi(\bar{a})]_p\}.$$

证明。根据引理（9.1），若 $\bar{a} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{x})}|M \restriction p|$ 存在某个 $\bar{a}' \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{x})}|M \restriction p|$，使得 $E\bar{a}' = [\phi(\bar{a})]_M$ 且 $E\bar{a}' = [\phi(\bar{a}')]_p$。因此“⊆”成立”。另一方面，

$$\{E\bar{a} : \bar{a} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{x})}|M \restriction p| \ \&\ E\bar{a} = [\phi(\bar{a})]_p\} = \{[\phi(\bar{a})]_p : \bar{a} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{x})}|M \restriction p| \ \&\ E\bar{a} = [\phi(\bar{a})]_p\},$$

因此“⊇”同样显然。 ⋆

定义 9.3. 假设 M与 N是$\mathrm{pSh}(\Omega\ L)$中的结构，$\bar{a} \in {}^{<\lambda}|M|$，

$\bar{b} \in$ $E\bar{a} = E\bar{b}$ $h\ \ \bar{a} \longrightarrow \bar{b}$ $i <$ ${}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|N|$，其中且：由对每个$\mathrm{lh}(\bar{a})$令$h(a_i) = b_i$给出。

˙ ¨写出 $(M,\ \bar{a}) \equiv^{\square}_{\alpha} (N,\ b)$ 以及 $(M,\ \bar{a}) \equiv^{\square,\ \alpha^{\mathrm{ceu}}} (N,\ b)$ 如果每个 $L^{\alpha,\ \square}$公式 ϕ 带有$r(\phi) \leqslant \alpha$ 以及每个 ceu $L^{\alpha,\ \square}$公式 ϕ 带有 $r(\phi) \leqslant \alpha$，分别在 h 中关于 $E\bar{a}$是不变的。

[12]处理这个问题的另一种方法，是限制在满足 $E\mathcal{C} \neq \bot$ 的签名上，并“在 $E\mathcal{C}$以下工作”，证明形如 $(M \restriction E\mathcal{C}\ \bar{a} \restriction E\mathcal{C})$的成对对象的结果。可以通过将限制条件设为 $E\mathcal{C} \neq \bot$来达到这种情形：对 Ω 取由 $E\mathcal{C}$ 生成的（主）滤子所得的商，并考虑商上的诱导成对对象。参见 [36], 例（26.5）和习题（26.25）。然而，对我们而言，这样做似乎并不比直接假设所有常元的外延为 ⊤更有实际优势。

[13]如果$\mathcal{C}$ 是一个预层，那么按字面理解，我们总有 $E\mathcal{C} = \bot$，因为如果 $c \in \mathcal{C}$，就必须有 $c \restriction \bot \in \mathcal{C}$ 和 $Ec \restriction \bot = \bot$。然而，就我们的证明而言，只需将注意力限制在这样的签名上：$\mathcal{C}$ 是一个层，并且存在某个集合 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$，使得 $E\mathcal{D} \neq \bot$；并且对于所有 $c \in \mathcal{C}$，存在某个 $d \in \mathcal{D}$ 以及某个 $p \in \Omega$，使得 $c = d \restriction p$，然后像前一个脚注中那样，在$\mathcal{D}$以下进行讨论。

分别记 $M \equiv^{\square}_{\alpha} N$和 $M \equiv^{\square,\mathrm{ceu}}_{\alpha} N$，若 $(M, \varnothing) \equiv^{\square}_{\alpha} (N, \varnothing)$且 $(M, \varnothing) \equiv^{\square,\mathrm{ceu}}_{\alpha} (N, \varnothing)$。

命题 9.4. 设 M和 N是 $\mathrm{pSh}(\Omega\ L)$，$\bar{a} \in {}^{<\lambda}|M|$，$\bar{b} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|N|$以及 On 中的结构。若 $(M, \bar{a}) \equiv^{\square,\mathrm{ceu}}_{\alpha} (N, \bar{b})$，则 $E\bar{a} = E\bar{b}$ $\alpha \in H^{\alpha}_{M,\bar{a}} = H^{\alpha}_{N,\bar{b}}$。

证明。我们对 α使用归纳法。$\alpha = 0$ 的情形以及极限 α 的情形都显然成立。因此，假设命题对 α 成立，并且有 $(M, \bar{a}) \equiv^{\square,\mathrm{ceu}}_{\alpha+1} (N, b)$。

根据函数 $H^{\square,\mathrm{ceu}}_{\alpha}$的定义，若 $K \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$，$\bar{s} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|K|$，$\bar{t} \in {}^{<\mu}|K|$，并且 $\beta \leqslant \alpha$，则有 $H^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(K, \bar{s}\bar{t}, \beta) = H^{\beta+1}_{M,\bar{a}}(K, \bar{s}\bar{t}, \beta)$，且 $H^{\alpha+1}_{N,\bar{b}}(K, \bar{s}\bar{t}, \beta) = H^{\beta+1}_{N,\bar{b}}(K, \bar{s}\bar{t}, \beta)$。由于 $(M, \bar{a}) \equiv^{\square,\mathrm{ceu}}_{\alpha+1} (N, \bar{b})$，我们有 $(M, \bar{a}) \equiv^{\square,\mathrm{ceu}}_{\beta+1} (N, \bar{b})$。由于$\beta + 1 \leqslant \alpha$命题对 $\beta + 1$ 成立，并且有 $H^{\beta+1}_{M,\bar{a}}(K, \bar{s}\bar{t}, \beta) = H^{\beta+1}_{N,\bar{b}}(K, \bar{s}\bar{t}, \beta)$。因此 $H^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(K, \bar{s}\bar{t}, \beta) = H^{\alpha+1}_{N,\bar{b}}(K, \bar{s}\bar{t}, \beta)$。

因此，尚待证明的是：若 $K \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$，$\bar{s} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|K|$ 且 $\bar{t} \in {}^{<\mu}|K|$，则 $H^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(K, \bar{s}\bar{t}, \alpha) = H^{\alpha+1}_{N,\bar{b}}(K, \bar{s}\bar{t}, \alpha)$。

对于每个 $\bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})}|M \restriction E\bar{t}|$，在$L^{\alpha,\mathrm{ceu}}$的、含有 $\mathrm{lh}(\bar{a}) + \mathrm{lh}(\bar{t})$ 个变量的公式上定义等价关系 $\sim^{c}$，规定为

$$\sigma \sim^{c} \chi \text{ if and only if } [\square_{[\sigma(\bar{s}\bar{t})]_K} \sigma(\bar{a}\bar{c})]_M = [\square_{[\chi(\bar{s}\bar{t})]_K} \chi(\bar{a}\bar{c})]_M.$$

注意，若 $[\square_{[\sigma(\bar{s}\bar{t})]_K} \sigma(\bar{a}\bar{c})]_M = E\bar{c}$ 且 $\sigma \sim^{c} \chi$，则 $[\square_{[\chi(\bar{s}\bar{t})]_K} \chi(\bar{a}\bar{c})]_M = E\bar{c}$。

对于每个 $\bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})}|M \restriction E\bar{t}|$ 以及每个 $\sim^{c}$-类 Y，选择 $\psi_{c,Y} \in Y$。令

$$\Psi = \{\psi_{c,Y} : \bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})}|M \restriction E\bar{t}| \ \&\ Y \text{ is a } \sim^{c}\text{-class}\}.$$

令 $\bar{x}$ 为一个变量元组，其中 $\mathrm{lh}(\bar{x}) = \mathrm{lh}(\bar{t})$。
令 $\phi(\bar{a}\bar{x})$ 为 $L^{\alpha,\mathrm{ceu}}$-公式 $\bigwedge_{\psi\in\Psi} \square_{[\psi(\bar{s}\bar{t})]_K} \psi(\bar{a}\bar{x})$。[14] 将推论（9.2）应用于 $\phi(\bar{a}, \bar{x})$ 我们有

$$[\exists\bar{x}\phi(\bar{a}\bar{x})]_M \wedge E\bar{t} = \bigvee\{E\bar{c} : \bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})}|M \restriction E\bar{t}| \ \&\ [\phi(\bar{a}\bar{c})]_M = E\bar{c}\}.$$

现在，对于任意 $\bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})}|M \restriction E\bar{t}|$，我们有 $[\phi(\bar{a}\bar{c})]_M = E\bar{c}$ 当且仅当对于每个$\psi \in \Psi$，我们有 $[\square_{[\psi(\bar{s}\bar{t})]_K} \psi(\bar{a}\bar{c})]_M = E\bar{c}$。此外，根据定义（8.4）之后的注记，对于每个这样的 ψ，$E \square_{[\psi(\bar{s}\bar{t})]_K} \psi(\bar{a}\bar{c}) = E\bar{c}$ 以及 $[\square_{[\psi(\bar{s}\bar{t})]_K} \psi(\bar{a}\bar{c})]_M = E \square_{[\psi(\bar{s}\bar{t})]_K} \psi(\bar{a}\bar{c})$ 当且仅当 $[\psi(\bar{s}\bar{t})]_K \wedge E\bar{c} = [\psi(\bar{a}\bar{c})]_M$.

[14]这正是我们的证明可能因关于常量外延（进而也包括公式外延）的“重要假设”而出现问题之处。

由此可得

$$\begin{aligned}
[\exists \bar{x}\, \phi(\bar{a}\bar{x})]_M \wedge E\bar{t} = \bigvee \{ E\bar{c} \,:\, \bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})} | M \restriction E\bar{t}| \;\&\; \\
& [\bigwedge_{\psi \in \Psi} {}^{\square [\psi(\bar{s}\bar{t})]_K} \psi(\bar{a}\bar{c})] = E\bar{c}\} \\
= \bigvee \{ E\bar{c} \,:\, \bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})} | M \restriction E\bar{t}| \;\&\; \\
& \bigwedge_{\psi \in \Psi} [{}^{\square [\psi(\bar{s}\bar{t})]_K} \psi(\bar{a}\bar{c})] = E\bar{c}\} \\
= \bigvee \{ E\bar{c} \,:\, \bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})} | M \restriction E\bar{t}| \;\&\; \\
& \forall \psi \in \Psi \; [\psi(\bar{s}\bar{t})]_K \wedge E\bar{c} = [\psi(\bar{a}\bar{c})]_M \} \\
= \bigvee \{ E\bar{c} \,:\, \bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})} | M \restriction E\bar{t}| \;\&\; \\
& \forall \psi \in L^{\alpha,\mathrm{ceu}} \; [\psi(\bar{s}\bar{t})]_K \wedge E\bar{c} = [\psi(\bar{a}\bar{c})]_M \} \\
= \bigvee \{ E\bar{c} \,:\, \bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})} | M \restriction E\bar{t}| \;\&\; (M, \bar{a}\bar{c}) \equiv_\alpha^{\square,\mathrm{ceu}} (K, \bar{s}\bar{t} \restriction E\bar{c}) \} \\
= \bigvee \{ E\bar{c} \,:\, \bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})} | M \restriction E\bar{t}| \;\&\; H^\alpha_{M,\bar{a}\bar{c}} = H^\alpha_{K,\bar{s}\bar{t} \restriction E\bar{c}} \} \\
= H^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(K, \bar{s}\bar{t}, \alpha),
\end{aligned}$$

其中，第一个等号来自推论（9.2），第三个不等式来自紧接在此序列上方显示的内容，第四个等号来自 $\sim^c$ 定义之后的注释，第五个等号直接来自 $\equiv^\square$ 的定义，$_\alpha^{\mathrm{ceu}}$第六个等号则由命题¯对 M、 $\bar{a}\bar{c}$、 K、 $\bar{s}t \restriction E\bar{c}$ 和 α 的归纳法得出。

In the same way, $[\exists \bar{x} \phi(\bar{b}\bar{x})]_N \wedge E\bar{t} = H^{\alpha+1}_{N,\bar{b}}(K, \bar{s}\bar{t}, \alpha)$.

¯根据该命题的假设，$(M, \bar{a}) \equiv^\square_{\alpha+1}{}^{\mathrm{ceu}} (N, b)$。由于 $\exists \bar{x}\, \phi(\bar{a}\bar{x})$ 是一个 $L^{\alpha+1,\mathrm{ceu}}$-公式，我们有 $[\exists \bar{x}\, \phi(\bar{a}\bar{x})]_M \wedge E\bar{t} = [\exists \bar{x}\, \phi(\bar{b}\bar{x})]_N \wedge E\bar{t}$。因此$H^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(K, \bar{s}\bar{t}, \alpha) = H^{\alpha+1}_{N,\bar{b}}(K, \bar{s}\bar{t}, \alpha)$，如所需。⋆

10. 公式在精细化偏同构下的不变性

定义 10.1。设 $M, N \in \mathsf{pSh}(\Omega\ L)$, $h\colon M \longrightarrow N$是一个预层态射， $\phi(\bar{v})$ 是一个 $L^\square$-公式，且 $p \in \Omega$。我们称 $\phi(\bar{v})$ 在 p中在 h下不变 ，如果

$$\text{for all } \bar{a} \in {}^{\mathrm{lh}(v)} |\mathrm{dom}(h) \restriction p| \text{ we have } [\phi(\bar{a})]_M = [\phi(h\text{“}\bar{a})]_N.$$

我们称 $\phi(\bar{v})$ 在 h 下不变，如果它在 $\top$中在 h 下不变。

我们有时也会说（这也是 [10], 中采用的用法）， ϕ 被 h p保持，或被 h保持。

引理 10.2. 设 $p \in \Omega$。假设 $h\colon M \longrightarrow N$ 是一个预层态射。设 $\Diamond \in \{\bigwedge, \bigvee\}$。设 Φ 是一个由 $L^\square$-公式组成的集族，其中每个公式在 p中都在 h下保持不变。那么 $\Diamond\Phi$ 在 p中在 h 下保持不变。

证明。假设 $\bar{a} \in |M \restriction p|^n$。设 $q = \bigwedge\{E\phi : \phi \in \Phi\}$。那么，根据预层态射的定义，

$$\begin{aligned}[\Diamond\{\phi(\bar{a}) : \phi \in \Phi\}]_M &= E(\bar{a} \restriction q) \wedge \Diamond[\{\phi(\bar{a} \restriction q) : \phi \in \Phi\}]_M \\ &= E(\bar{a} \restriction q) \wedge \Diamond[\{\phi(h``\bar{a} \restriction q) : \phi \in \Phi\}]_N \\ &= [\Diamond\{\phi(h``\bar{a}) : \phi \in \Phi\}]_M\end{aligned}$$

⋆

命题 10.3。设 α 为一个序数。对于所有 $p \in \Omega$、所有带有 $d(\phi) = \alpha$ 的非嵌套 $L^{\square}$-公式 $\phi(\bar{v})$ 以及所有 $h \in Q_\alpha(p)$，我们有：ϕ 在 p 中关于 h 不变。

证明。我们对非嵌套公式的量词度进行归纳。在给定的量词度内，我们对公式复杂度进行归纳。
如果 ϕ 是 $\neg\psi$、$\psi \longrightarrow \chi$、$\bigwedge \Phi$ 或 $\bigvee \Phi$ 之一，其中 ψ、χ 以及 Φ 中的所有元素在 p 处关于 h 不变，那么 ϕ 在 p 中关于 h 也不变。在前两种情况下 ϕ，这分别由 [10], 引理（3.6）和引理（3.8）得到；在后两种情况下，则由引理（10.2）得到。

如果 $p \in \Omega$，ϕ 是 $\square_p \psi$，且 ψ 在 p 处关于 h 不变，那么

$$\begin{aligned}[\phi(\bar{a})]_M &= E\psi \wedge E\bar{a} \wedge ([\phi(\bar{a})]_M \longleftrightarrow p) \\ &= E\psi \wedge E\bar{b} \wedge ([\phi(\bar{b})]_N \longleftrightarrow p) = [\phi(\bar{b})]_N.\end{aligned}$$

另请注意，引理（10.2）讨论了极限序数度的情形。

因此，剩下要处理的只有原子公式，以及由对秩较低的公式进行存在量化或全称量化而形成的后继秩公式。

若 ϕ 是非嵌套原子公式，则它具有以下某种形式：$v_i = v_j$、$v_i = c$、$R(v_{i_0}, \ldots\ldots, v_{i_{n-1}})$ 或 $v_{i_n} = f(v_{i_0}, \ldots\ldots, v_{i_{n-1}})$，其中 v_i 是变量，c 是常元符号，R 是 n 元关系符号，而 f 是 n 元函数符号。

这些公式在部分同构下均不变，这要么是由部分同构的定义所致，要么是由命题（2.6）所致。

接下来，我们考虑带有前导存在量词的公式情形。设 $\beta < \alpha$、U 是一个非空变量集，其大小小于 λ $\phi(U) = \exists V \psi(V, U)$，$d(\psi) = \beta$（分别为 $r(\phi) = \beta$），且 $\bar{a} \in \mathrm{lh}^{(U)}|M \restriction p|$。

由 [10], 引理（2.21），我们有 $[\phi(\bar{a})]_M \leqslant E\bar{a} \wedge E\phi$。

由于 $E\bar{a} \leqslant p$ 我们有

$$\begin{aligned}[\phi(\bar{a})]_M &= [\phi(\bar{a})]_M \wedge p \\ &= \bigvee_{\bar{t}\in \mathrm{lh}(V)|M|} [\psi(\bar{t},\bar{a})]_M \wedge p \\ &= \bigvee_{\bar{t}\in \mathrm{lh}(V)|M|} [\psi(\bar{t}\restriction p,\bar{a})]_M \\ &= \bigvee_{\bar{t}\in \mathrm{lh}(V)|M\restriction p|} [\psi(\bar{t},\bar{a})]_M.\end{aligned}$$

现在，我们对每个 $\bar{t}\in \mathrm{lh}^{(V)}|M\restriction p|$应用 Forth性质。
存在某个 $\{(h^{\bar{t}}_j, q^{\bar{t}}_j, d^{\bar{t}}_j)\colon \ j\in J^{\bar{t}}\}$，使得对于所有 $\bigvee_{j\in J^{\bar{t}}} q^{\bar{t}}_j = E\bar{t}$和所有 $j\in J^{\bar{t}}$，都有 $h^{\bar{t}}_{q_j} \subseteq h^{\bar{t}}_j$且 $\bar{t}\restriction q^{\bar{t}}_j \subseteq \mathrm{dom}(h^{\bar{t}}_j)$。

对每个 $\bar{t}\restriction q^{\bar{t}}_j$应用归纳假设，我们得到

$$[\psi(\bar{t}\restriction q^{\bar{t}}_j, \bar{a}\restriction q^{\bar{t}}_j)]_M = [\psi(h^{\bar{t}}_j\text{“}\bar{t}\restriction q^{\bar{t}}_j, h^{\bar{t}}_j\text{“}\bar{a}\restriction q^{\bar{t}}_j)]_N.$$

$$\begin{aligned}\text{So, } [\phi(\bar{a})]_M &= \bigvee_{\bar{t}\in \mathrm{lh}(V)|M\restriction p|} \ \bigvee_{j\in J^{\bar{t}}} [\psi(h^{\bar{t}}_j\text{“}\bar{t}\restriction q^{\bar{t}}_j, h^{\bar{t}}_j\text{“}\bar{a}\restriction q^{\bar{t}}_j)]_N \\ &\leqslant \bigvee_{\bar{s}\in \mathrm{lh}(V)|N\restriction p|} \ \bigvee_{\bar{t}\in \mathrm{lh}(V)|M\restriction p|} \ \bigvee_{j\in J^{\bar{t}}} [\psi(\bar{s}\restriction q^{\bar{t}}_j, h^{\bar{t}}_j\text{“}\bar{a}\restriction q^{\bar{t}}_j)]_N \\ &= \bigvee_{\bar{s}\in \mathrm{lh}(V)|N\restriction p|} \ \bigvee_{\bar{t}\in \mathrm{lh}(V)|M\restriction p|} \ \bigvee_{j\in J^{\bar{t}}} [\psi(\bar{s}\restriction q^{\bar{t}}_j, h\text{“}\bar{a}\restriction q^{\bar{t}}_j)]_N \\ &\qquad\qquad (\text{since } h^{\bar{t}}_j \text{ extends } h_{q^{\bar{t}}_j} \text{ which comes from } h) \\ &= \bigvee_{\bar{s}\in \mathrm{lh}(V)|N\restriction p|} \ \bigvee_{\bar{t}\in \mathrm{lh}(V)|M\restriction p|} \ \bigvee_{j\in J^{\bar{t}}} (q^{\bar{t}}_j \wedge [\psi(\bar{s}, h\text{“}\bar{a})]_N) \\ &= \bigvee_{\bar{s}\in \mathrm{lh}(V)|N\restriction p|} \ \bigvee_{\bar{t}\in \mathrm{lh}(V)|M\restriction p|} \ \big((\bigvee_{j\in J^{\bar{t}}} q^{\bar{t}}_j) \wedge [\psi(\bar{s}, h\text{“}\bar{a})]_N\big) \\ &= \bigvee_{\bar{s}\in \mathrm{lh}(V)|N\restriction p|} [\psi(\bar{s}, h\text{“}\bar{a})]_N = [\phi(h\text{“}\bar{a})]_N,\end{aligned}$$

倒数第二个等号成立，因为

$$[\psi(\bar{s}, h\text{“}\bar{a})]_N \leqslant E\bar{s} \leqslant Eh\text{“}\bar{t} = E\bar{t}.$$

因此 $[\phi(\bar{a})]_M \leqslant [\phi(h\text{“}\bar{a})]_N$。

我们以同样的方式证明 $[\phi(h\text{“}\bar{a})]_N \leqslant [\phi(\bar{a})]_M$，利用“回返”性质以及 $h^{\bar{s}}_j$ 是一一对应这一事实。

最后，我们考虑以全称量词开头的公式的情形。设 $\beta < \alpha$, U 是一个基数小于 λ $\phi(U) = \forall V \psi(V,\ U)$, $d(\psi) = \beta$（分别为 $r(\phi) = \beta$）的变量非空集，并且 $\bar{a} \in {}^{(U)}\mathrm{lh}|M \restriction p|$。

同样，由 [10], 引理（2.21），我们有 $[\phi(\bar{a})]_M \leqslant E\bar{a} \wedge E\phi$。

由于 $E\bar{a} \leqslant p$，我们有

$$\begin{aligned}[\phi(\bar{a})]_M &= [\phi(\bar{a})]_M \wedge p \\ &= E\phi \wedge E\bar{a} \wedge \bigwedge_{\bar{t} \in {}^{\mathrm{lh}(V)}|M|} (E\bar{t} \longrightarrow [\psi(\bar{t}, \bar{a})]_M) \\ &= E\phi \wedge E\bar{a} \wedge \bigwedge_{\bar{t} \in {}^{\mathrm{lh}(V)}|M \restriction p|} (E\bar{t} \longrightarrow [\psi(\bar{t}, \bar{a})]_M)\end{aligned}$$

现在，对于每个 $\bar{t} \in {}^{\mathrm{lh}(V)}|M \restriction p|$，我们应用“Forth”性质。
存在某个 $\{(h^{\bar{t}}_j, q^{\bar{t}}_j, d^{\bar{t}}_j) :\ \ j \in J^{\bar{t}}\}$，使得对所有 $\bigvee_{j \in J^{\bar{t}}} q^{\bar{t}}_j = E\bar{t}$ 以及所有 $j \in J^{\bar{t}}$，我们都有 $h^{\bar{t}}_{q_j} \subseteq h^{\bar{t}}_j$，且 $\bar{t} \restriction q^{\bar{t}}_j \subseteq \mathrm{dom}(h^{\bar{t}}_j)$。

So

$$\bigvee_{j \in J^{\bar{t}}} [\psi(\bar{t} \restriction q^{\bar{t}}_j, \bar{a} \restriction q^{\bar{t}}_j)]_M = (\bigvee_{j \in J^{\bar{t}}} q^{\bar{t}}_j) \wedge [\psi(\bar{t}, \bar{a})]_M = [\psi(\bar{t}, \bar{a})]_M,$$

因为 $[\psi(\bar{t}, \bar{a})]_M \leqslant E\bar{t}$。

对每个 $\bar{t} \restriction q^{\bar{t}}_j$ 应用归纳假设，我们有

$$[\psi(\bar{t} \restriction q^{\bar{t}}_j, \bar{a} \restriction q^{\bar{t}}_j)]_M = [\psi(h^{\bar{t}}_j \text{“}\bar{t} \restriction q^{\bar{t}}_j, h^{\bar{t}}_j \text{“}\bar{a} \restriction q^{\bar{t}}_j)]_N.$$

因此

$$E\bar{t} \longrightarrow [\psi(\bar{t}, \bar{a})]_M = (\bigvee_{j \in J^{\bar{t}}} E\bar{t} \restriction q^{\bar{t}}_j) \longrightarrow \bigvee_{j \in J^{\bar{t}}} [\psi(h^{\bar{t}}_j \text{“}\bar{t} \restriction q^{\bar{t}}_j, h^{\bar{t}}_j \text{“}\bar{a} \restriction q^{\bar{t}}_j)]_N.$$

Thus

$$\begin{aligned}[\phi(\bar{a})]_M &= E\psi \wedge E\bar{a} \wedge \\ &\quad \bigwedge_{\bar{t} \in {}^{\mathrm{lh}(V)}|M \restriction p|} ((\bigvee_{j \in J^{\bar{t}}} E\bar{t} \restriction q^{\bar{t}}_j) \longrightarrow \bigvee_{j \in J^{\bar{t}}} [\psi(h^{\bar{t}}_j \text{“}\bar{t} \restriction q^{\bar{t}}_j, h^{\bar{t}}_j \text{“}\bar{a} \restriction q^{\bar{t}}_j)]_N) \\ &\geqslant E\psi \wedge E\bar{a} \wedge \\ &\quad \bigwedge_{\bar{s} \in {}^{\mathrm{lh}(V)}|N \restriction p|} ((\bigvee_{j \in J^{\bar{s}}} E\bar{s} \restriction q^{\bar{t}}_j) \longrightarrow \bigvee_{j \in J^{\bar{t}}} [\psi(\bar{s} \restriction q^{\bar{t}}_j, h^{\bar{t}}_j \text{“}\bar{a} \restriction q^{\bar{t}}_j)]_N) \\ &= [\phi(h \text{“}\bar{a})]_N.\end{aligned}$$

利用 $\bar{s} \in {}^{\mathrm{lh}(V)}|N \restriction p|$ 的“回退”性质，可以用类似的方法证明反向不等式。$\star$

11. 等价性

我们回顾一下，本节中我们假设语言 L 所采用的签名中，所有常元符号的外延均为 $\top$。

命题 11.1. 设 M与 N是 $\mathrm{pSh}(\Omega\ L)$、 $\bar{a} \in {}^{<\lambda}|M|$、 $\bar{b} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|N|$ 以及 On 中的结构。 $E\bar{a} = E\bar{b}$ $\alpha \in$ 下列各项等价。

(1) $(M, \bar{a}) \equiv^{\square}_{\alpha} (N, b)$ *(2)* $(M, \bar{a}) \equiv^{\square,\mathrm{ceu}}_{\alpha} (N, b)$ *(3)* $H^{\alpha}_{M,\bar{a}} = H^{\alpha}_{N,\bar{b}}$ *(4)* $F^{\alpha}_{M,\bar{a}} = F^{\alpha}_{N,\bar{b}}$ *(5)* $(M, \bar{a}) \sim^{E\bar{a}}_{\alpha} (N, \bar{b})$ *(6)* 玩家 *II* 对博弈 $G^{\mu}_{\alpha}(M, \bar{a}, N, b, h)$ 拥有获胜策略

证明。 (1) 蕴含 (2) 是显然的。(2) 蕴含 (3) 是命题 (9.4)。(3) 等价于 (4) 是引理（5.5）(4) 等价于 (5) 是命题 (5.9)。(5) 等价于 (6) 是定理 (4.2)。(5) 蕴含 (1) 是命题 (10.3)。⋆

推论 11.2。 设 M和 N是 $\mathrm{pSh}(\Omega\ L)$中的结构。那么 $M \equiv^{\square}_{\alpha} N$当且仅当存在某个 $h\colon\ M \longrightarrow N$使得 $h \in Q_{\alpha}(\top)$。

注记 11.3。 我们指出，推论（11.2）确实是 Karp 的原始定理的推广；令 Ω 为二元素完备海廷代数即可恢复该定理。

推论 11.4。 设 M和 N是 $\mathrm{pSh}(\Omega\ L_{\infty\lambda})$中的结构。那么 $F^{\alpha}_{M,\ \varnothing} = F^{\alpha}_{N,\ \varnothing}$当且仅当 $M \equiv^{\square}_{\alpha} N$。

我们最后提出以下问题。

问题 11.5。 假设 M和 N是 $\mathrm{pSh}(\Omega\ L)$, $\bar{a} \in {}^{<\lambda}|M|$, $\bar{b} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|N|$, $E\bar{a} = E\bar{b}$和 $\alpha \in$ On 中的结构。 $(M, \bar{a}) \equiv_{\alpha} (N, \bar{b})$是否蕴含 $(M, \bar{a}) \equiv^{\mathrm{ceu}}_{\alpha} (N, \bar{b})$?

实际上，我们要问的是，$\square p$ 是否为命题（11.1），更具体地说是命题（9.4）的证明所固有的，抑或它们可以避免，也就是说，是否可以将对 $\equiv^{\mathrm{ceu}}_{\alpha}$和 $\equiv^{\square}_{\alpha}$ 的提及替换为 $\equiv_{\alpha}$。

我们推测，这个问题的答案一般来说是否定的。

12. 句子

本节中，我们继续假设我们的语言L 基于这样一种签名：其中所有常元符号的外延都是 $\top$。

在命题（5.9）和推论（5.10）中，我们从一对 $(M, \bar{a})$ 出发，并证明 $\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$对于任意满足 $Eb \leqslant E\bar{a}$ 的一对 (N, b)，从 $\bar{a} \restriction Eb$到 b的 $Q_\alpha(Eb)$ 部分同构$\bar{}$ $\bar{}$的存在对应于$F^\alpha_{M,\bar{a}\restriction E\bar{b}}$与$F^\alpha_{N,\bar{b}}$之间的等号，以及$H^\alpha_{M,\bar{a}\restriction E\bar{b}}$ 与$H^\alpha_{N,\bar{b}}$之间的等号。

在命题（5.7）中，对于由 $(M, \bar{a})$ 和 (N, b)构成的$\bar{}$特定 对对，我们有（限制的）函数之间的等号，从而仅对这两对给出结论。

在本节的最后，我们将看到第§5节中定义的函数和证明的结果与无穷句子之间的密切联系，这些联系类似于经典模型的 Scott-Karp 分析通常采用的方法，但涉及一元联结词 $\Box_p$。

我们利用这些定义，为每个 $M \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$, $\bar{a} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|M|$ 和$\alpha \in$上的公式 $\phi^\alpha_{M,\bar{a}}$ 构造。

定义 12.1。令 $M \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$, $\bar{a} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|M|$ 和 $\alpha \in \mathrm{On}$。置

$$\phi^0_{M,\bar{a}} = \bigwedge_{\psi \in \mathcal{UA}} \Box_{[\psi(\bar{a})]_M} \psi(\bar{v}),\quad \phi^\alpha_{M,\bar{a}} = \bigwedge_{\beta<\alpha} \phi^\beta_{M,\bar{a}}, \text{ for limit } \alpha, \text{ and}$$

$$\phi^{\alpha+1}_{M,\bar{a}} = \phi^\alpha_{M,\bar{a}} \wedge \bigwedge_{K,\bar{s}\bar{t}} \Box_{[\exists \bar{u} \phi^\alpha_{K,\bar{s}\bar{t}}(\bar{a},\bar{u})]_M} \exists \bar{u} \phi^\alpha_{K,\bar{s}\bar{t}}(\bar{v},\bar{u}).$$

注意，在 [6]中相应的定义里，（此处称为） $\phi^{\alpha+1}$ 的定义中的第一个合取项是 $\phi^0_{M,\bar{a}}$，而不是此处的 $\phi^\alpha_{M,\bar{a}}$ 。这一改动使得证明如下的等价性（例如命题（12.2））更加简单。

显然，每个$\phi^\alpha_{M,\bar{a}}$ 都是一个 ceu 公式。

证明。 </style>我们有 $,_{\bar{s}\bar{t}}(\bar{a}\bar{c} \restriction p_{\bar{c}})]_M = [\phi^\alpha_{K,}$ $_{\bar{s}\bar{t}}(\bar{a}\bar{c})]_M \wedge p_{\bar{c}} = p_{\bar{c}} \wedge p_{\bar{c}} = p_{\bar{c}} = E\bar{c} \restriction_{p_{\bar{c}}}$. ⋆

现在我们来证明，从ϕ^α 导出的句子的解释与上一节中引入的函数的值之间的等价关系，以及这些函数相等与句子被强制为真之间的等价关系。由此可得， F^α 可以用 ϕ^α来定义。

命题 12.2. 令 $M \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$, $\bar{a} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|M|$和 $\alpha \in \mathrm{On}$。那么对于任意 K, $N \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$, $\bar{b} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|N|$，若 $E\bar{b} \leqslant E\bar{a}$ 且 $\bar{s} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|K|$, $\bar{t} \in {}^{<\mu}|K|$，则有

$$[\exists \bar{u} \phi^\alpha_{K,\bar{s}\bar{t}}(\bar{a},\bar{u})]_M = F^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(F^\alpha_{K,\bar{s}\bar{t}})$$

and

$$F^{\alpha}_{M,\bar{a}\restriction E\bar{b}} = F^{\alpha}_{N,\bar{b}} \textit{ if and only if } [\phi^{\alpha}_{M,\bar{a}}(\bar{b})]_N = E\bar{b} \ (\equiv N \Vdash \phi^{\alpha}_{M,\bar{a}}(\bar{b})\ ).$$

证明。 证明采用关于 α 的双重归纳。对于 $\alpha = 0$ ， 以及极限 α ， 第二个结论可由定义直接得出。

接下来，假设对于每个 $\bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})}|M \restriction E\bar{t}|$ ，我们都有关于 M、$\bar{a}\bar{c}$、 α、 K 和 $\bar{s}\bar{t}$ 的第二个结论。将其用于第四个等号，并将推论（9.2）用于第二个等号，我们得到

$$\begin{aligned}
[\exists \bar{u}\phi^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}(\bar{a},\bar{u})]_M &= \bigvee\{[\phi^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}(\bar{a},\bar{c})]_M \ : \ \bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})}|M \restriction E\bar{t}|\} \\
&= \bigvee\{E\bar{c} \ : \ \bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})}|M \restriction E\bar{t}| \ \&\ [\phi^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}(\bar{a}\bar{c})]_M = E\bar{c}\} \\
&= \bigvee\{E\bar{c} \ : \ \bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})}|M \restriction E\bar{t}| \ \&\ F^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}\restriction E\bar{c}} = F^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}}\} \\
&= F^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(F^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}})
\end{aligned}$$

˜因此，我们得到关于 M、 $\bar{a}$、 α、 K 和 $\bar{s}t$ 的第一个结论。

因此，我们只需证明 $\alpha + 1$ 的情形下的第二个结论。首先，由归纳假设，我们有

$$F^{\alpha}_{M,\bar{a}\restriction E\bar{b}} = F^{\alpha}_{N,\bar{b}} \text{ if and only if } [\phi^{\alpha}_{M,\bar{a}}(\bar{b})]_N = E\bar{b}.$$

其次，固定 $K \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$ 和 $\bar{s} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|K|$、 $\bar{t} \in {}^{<\mu}|K|$。我们有

$$\begin{aligned}
&N \Vdash {}^{\Box[\exists \bar{u}\phi^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}(\bar{a},\bar{u})]_M}\exists \bar{u}\phi^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}(\bar{v},\bar{u}) \text{ if and only if} \\
&[\exists \bar{u}\phi^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}(\bar{a},\bar{u})]_M \wedge E\bar{b} = [\exists \bar{u}\phi^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}(\bar{b},\bar{u})]_N \text{ if and only if} \\
&F^{\alpha+1}_{M,\bar{a}\restriction E\bar{b}}(F^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}},\alpha) = F^{\alpha+1}_{N,\bar{b}}(F^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}},\alpha)
\end{aligned}$$

其中，第一个等价关系直接来自公式的解释的定义，第二个等价关系则来自关于˜两者 M, $\bar{a}$和 α以及 N, b和 α的第一个结论。⋆

命题（12.2）使我们能够在命题（11.1）的列表中再加入一个等价条件。我们用两种方式陈述这一点。

推论 12.3. 设 M, $N \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$, $\bar{a} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|M|$, $\bar{b} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|N|$， 其中 $E\bar{b} = E\bar{a}$且 $\alpha \in \mathrm{On}$。

(1) $[\phi^{\alpha}_{M,\bar{a}}(\bar{b})]_N = [\phi^{\alpha}_{N,\bar{b}}(\bar{b})]_N$

(2) $F^{\alpha}_{M,\bar{a}} = F^{\alpha}_{N,\bar{b}}$

推论 12.4. *(* 参见 [6], 定理 (*3.2.4*) 。*)* 设 $M \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$, $\bar{a} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|M|$且 $\alpha \in \mathrm{On}$。那么对于任意 $N \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$和 $\bar{b} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|N|$, 若 $E\bar{b} \leqslant E\bar{a}$, $N \Vdash \phi^{\alpha}_{M,\bar{a}}(b)$ ，则当且仅当存在某个 h： $\bar{a} \longrightarrow b$ 使得 $h \in Q_{\alpha}(Eb)$。

我们将在下面的推论中用到以下观察结果。

推论 12.5。令 $M \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$，$\bar{a} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|M|$ 和 $\alpha \in \mathrm{On}$。那么

$$[\phi^{\alpha}_{M,\bar{a}}(\bar{a})]_M = E\bar{a}\ (\equiv M \Vdash \phi^{\alpha}_{M,\bar{a}}(\bar{a}))\,.$$

证明。在命题（12.2）的第二个结论中令 $(N,\ b) = (M,\ \bar{a})$，即可立即得到。 ⋆

推论 12.6。设 $\psi \in L^{\square}$ 是一个句子，且满足 $r(\psi) = \alpha$。设 $M \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$。那么 $[\psi]_M = \top$ 当且仅当

$$[\bigvee\{\phi^{\alpha}_{N,\varnothing} : N \in \mathrm{pSh}(\Omega, L)\ \&\ [\psi]_N = \top\}]_M = \top.$$

证明。“$\Longrightarrow$”根据推论（12.5），$[\phi^{\alpha}_{M,\ \varnothing}]_M = \top$。因此，若 $[\psi]_M = \top$，则

$$\begin{aligned}\top = [\phi^{\alpha}_{M,\varnothing}]_M &\leqslant \bigvee\{[\phi^{\alpha}_{N,\varnothing}]_M : N \in \mathrm{pSh}(\Omega, L)\ \&\ [\psi]_N = \top\}\\ &= [\bigvee\{\phi^{\alpha}_{N,\varnothing} : N \in \mathrm{pSh}(\Omega, L)\ \&\ [\psi]_N\} = \top]_M \leqslant \top,\end{aligned}$$

因此 $[\bigvee\{\phi^{\alpha}_{N,\ \varnothing} :\ N \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)\ \&\ [\psi]_N\} = \top]_M = \top$。

“$\Longleftarrow$。”现在假设 $N \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$ 满足 $[\psi]_N = \top$，并令 $p_N = [\phi^{\alpha}_{N,\ \varnothing}]_M$。

由于 $[\phi^{\alpha}_{N,\ \varnothing}]_N = \top$，我们有 $[\phi^{\alpha}_{N,\ \varnothing}]_{N\restriction p_N} = p_N$。另一方面，

$$[\phi^{\alpha}_{N,\varnothing}]_{M\restriction p_N} = [\phi^{\alpha}_{N,\varnothing}]_M \wedge p_N = p_N \wedge p_N = p_N.$$

因此，根据推论（12.4），存在某个 $h :\ N \restriction p_N \longrightarrow M \restriction p_N$，使得 $h \in Q_{\alpha}(p_N)$。于是，根据推论（11.2），我们有 $N \restriction p_N \equiv^{\square}_{\alpha} M \restriction p_N$。所以，由于 $[\psi]_{N\restriction p_N} = p_N$，我们有 $[\psi]_{M\restriction p_N} = p_N$。

因此，如果

$$\begin{aligned}\top &= [\bigvee\{\phi^{\alpha}_{N,\varnothing} : N \in \mathrm{pSh}(\Omega, L)\ \&\ [\psi]_N\} = \top]_M\\ &= \bigvee\{[\phi^{\alpha}_{N,\varnothing}]_M : N \in \mathrm{pSh}(\Omega, L)\ \&\ [\psi]_N = \top\}.\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}\top &= \bigvee\{p_N : N \in \mathrm{pSh}(\Omega, L)\ \&\ [\psi]_N = \top\}\\ &= \bigvee\{[\psi]_{M\restriction p_N} : N \in \mathrm{pSh}(\Omega, L)\ \&\ [\psi]_N = \top\} \leqslant [\psi]_M \leqslant \top,\end{aligned}$$

所以 $[\psi]_M = \top$。 ⋆

命题（12.2）还表明，句子 ϕ^{α} 可以用函数 F^{α} 来定义。

命题 12.7. 设 $M \in \mathrm{pSh}(\Omega\ L)$，$\bar{a} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|M|$ 和 $\alpha \in \mathrm{On}$。则 $\phi^0_{M\bar{a}} = \bigwedge_{\psi \in \mathcal{UA}} {}^{\square} F^0_{M,\ \bar{a}}{}^{\psi(\bar{v})}$，并且

$$\phi^{\alpha+1}_{M,\bar{a}} = \phi^{\alpha}_{M,\bar{a}} \wedge \bigwedge_{K,\bar{s}\bar{t}} {}^{\square} F^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(K,\bar{s}\bar{t},\alpha)\ \exists u \phi^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}(\bar{v},\bar{u}).$$

证明。 对于 $\alpha = 0$ ，这可直接由定义得出。对于 $\alpha+1$ ，这可直接由定义和命题（12.2）得出。⋆

参考文献

[1] Hisashi Aratake，《结构层、海廷值结构与 Lo´s 定理的推广》，《数学逻辑季刊》67，(2021)，445–468。[2] Ita¨ı Ben Yaacov、Alexander Berenstein、C. Ward Henson 和 Alexander Usvyatsov，《度量结构的模型论》，载于 Zo´e Chatzidakis、Dugald Macpherson、Anand Pillay 和 Alex Wilkie 编，《模型论及其在代数与分析中的应用》第2卷，剑桥大学出版社，(2008)。[3] Ita¨ı Ben Yaacov 和 Arthur Pedersen，《连续一阶逻辑完备性的证明》，《符号逻辑杂志》75(1)，(2010)，168-190。[4] Ita¨ı Ben Yaacov 和 Alexander Usvyatsov，《连续一阶逻辑与局部稳定性》，《美国数学会汇刊》362(10)，(2010)，5213-5259。[5] Diego Berr´ío，《locale 上结构层的逻辑》，硕士论文，哥伦比亚国立大学，(2015)，70页。[6] Andreas Brunner，《海廷代数上层的模型论中的常元法》，博士论文，圣保罗大学，(2000)。[7] Andreas Brunner，《层中的模型论》，《南美逻辑杂志》2(2)，(2016)，379–404。[8] Andreas Brunner 和 Francisco Miraglia，《拓扑空间上层的省略类型定理》，《IGPL 逻辑杂志》12(6)，(2004)，525-548。[9] Andreas Brunner 和 Francisco Miraglia，《预层的图示法》，《序代数结构研讨会》，巴黎，(2014)，1-24。[10] Andreas Brunner、Charles Morgan 和 Darllan Concep¸c˜ao Pinto，《预层模型论的一些贡献》，预印本，arxiv，(2024)，60页。[11] Andreas Brunner、Charles Morgan 和 Darllan Concep¸c˜ao Pinto，《无句子的 Scott-Karp 分析》，草稿，(2025)，23页。[12] Xavier Caicedo，《结构层的逻辑》，《哥伦比亚科学院精确、物理与自然科学杂志》19，(1995)，569-586。[13] Xavier Caicedo，《直觉主义联结词研究》，《哥伦比亚科学院精确、物理与自然科学杂志》19，(1995)，705–716。[14] Xavier Caicedo，《拓扑空间上的直觉主义联结词》，《哥伦比亚科学院精确科学杂志》21，(1997)，521-535。[15] Xavier Caicedo 和 Roberto Signoli，《直觉主义联结词的代数方法》，《符号逻辑杂志》66，(2001)，1620-1636。[16] Max Dickmann，《大型无穷语言》，Elsevier，(1975)。[17] Max Dickmann，《更大型的无穷语言》，载于 Jon Barwise 和 Solomon Feferman 编，《模型论逻辑》，施普林格出版社，(1985)，317-363。[18] Heinz-Dieter Ebbinghaus、J¨org Flum 和 Wolfgang Thomas，《数学逻辑》（第二版），《数学本科教材》，施普林格，(1994)。[19] Andrzej Ehrenfeucht，《博弈在形式化理论完备性问题中的应用》，《Fundamenta Mathematica》49，(1961)，129-141。[20] J¨org Flum，《一阶逻辑及其扩展》，载于 Gert Heinz M¨uller、Arnold Oberschelp 和 Karl Potthoff 编，《ISILC 逻辑会议：1974年基尔国际暑期学院与逻辑研讨会论文集》，施普林格，(1975)，248-310。[21] Roland Fra¨ıss´e，《关系系统的新分类》，《法国科学院周报》230，(1950)，1022-1024。[22] Roland Fra¨ıss´e，《关于关系系统的若干分类》，博士论文，巴黎大学，1953年，发表于《阿尔及尔大学科学出版物》A1辑，(1954)，35–182。[23] Roland Fra¨ıss´e，《研究关系类中由受限同构定义的某些算子》，《数学逻辑与数学基础》2，(1956)，59-75。[24] Mike Fourman 和 Dana Scott，《层与逻辑》，载于 Mike Fourman、Chris Mulvey 和 Dana Scott 编，《层的应用》，《数学讲义》753，施普林格出版社，(1979)，302-401。[25] Matthew Harrison-Trainor，《可数结构的斯科特复杂度导论及近期成果综述》，《符号逻辑通报》28，(2022)，71–103。

[26] Petr H´ajek, 《模糊逻辑元数学》, Kluwer, 1998。[27] Felix Hausdorff, 《集合论纲要》, von Veit & Comp, 莱比锡, 1914。[28] Denis Higgs, 《布尔值集合论的范畴方法》, 预印本, 滑铁卢大学, (1973)。[29] Denis Higgs, 《完备海廷代数值集合托普斯中的内射性》, 《加拿大数学杂志》36(3), (1984), 550-568。[30] Wilfrid Hodges, 《模型论》, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1993。[31] Edward Huntington, 《作为一种序类型的连续统：现代理论阐述》, 《数学年刊》6, (1905), 151–184。[32] Carol Karp, 《有限量词等价》, 载于 John Addison、Leon Henkin 和 Alfred Tarski 编, 《模型理论》, 1963年伯克利国际研讨会论文集, North-Holland, (1965), 407-412。[33] David Marker, 《模型论：导论》, 《数学研究生教材》217, 施普林格, (2002)。[34] Francisco Miraglia, 《Ω-集上 L-结构的向下 Löwenheim-Skolem 定理》, 载于 Walter Carnielli 和 Lu´z de Alcantara 编, 《数理逻辑方法与应用》, 《当代数学》69, 美国数学会, (1988), 189-208。[35] Francisco Miraglia, 《广义超积与完备海廷代数上的结构层》, 自由讲师资格论文, 圣保罗大学, (1990)。[36] Francisco Miraglia, 《偏序结构与层导论》, 《当代逻辑丛书》1, Polimetrica 国际科学出版社, 米兰, (2006)。[37] Bruno Poizat, 《模型理论课程：当代数理逻辑导论》, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, (1985)。[38] Bruno Poizat, 《模型论课程：当代数理逻辑导论》, 施普林格, (2000)。[39] Jiˇr´ı Pavelka, 《模糊逻辑论（一）、（二）、（三）》, 《数学逻辑与数学基础》25, (1979), 45-52, 119-134, 447-464。[40] Philipp Rothmaler, 《模型论导论》, 泰勒与弗朗西斯, 纽约, (2000)。[41] Dana Scott, 《可数无限长公式与有限量词串构成的逻辑》, 载于 John Addison、Leon Henkin 和 Alfred Tarski 编, 《模型理论》, 1963年伯克利国际研讨会论文集, North-Holland, (1965), 329-41。[42] Antonio Sette 和 Xavier Caicedo, 《层之间的初等等价》, 《数理逻辑笔记》38, 129-141, (1993)。[43] Asan Taimanov, 《可公理化模型类的刻画（一）》, 《苏联科学院通报》数学辑25, (1961), 601-620。[44] Asan Taimanov, 《有限可公理化模型类的刻画》, 《西伯利亚数学杂志》2, (1961), 759-766。[45] Asan Taimanov, 《可公理化模型类的特征》, 《代数与逻辑》1(4), (1962), 5–31。[46] Jouko V¨a¨an¨anen, 《模型与博弈》, 剑桥大学出版社, (2011)。[47] Jouko V¨a¨an¨anen, 《二阶逻辑的模型论》, 载于 Jose Iovino 编, 《超越一阶模型论》第 II 卷, Chapman and Hall, (2023), 290-316。

数学系, 巴伊亚联邦大学, 米尔顿·桑托斯大道 s/n, S/N, 翁迪纳, 萨尔瓦多, 巴伊亚, 巴西。邮政编码：40170-110。

电子邮箱： andreas@dcc.ufba.br

电子邮箱： charlesmorgan@ufba.br电
子邮箱： darllan@ufba.br