arXiv:2602.07646v1 [math.LO] 7 Feb 2026

不使用语句的斯科特-卡普分析

˜ANDREAS BRUNNER、CHARLES MORGAN 和 DARLLAN CONCIEC¸AO PINTO

摘要。斯科特和卡普给出了一种分析，在两个结构的全局相似性与它们通过共享特定不变量而体现的局部共同性之间，建立了逐层等价关系。斯科特和卡普所使用的局部不变量是某些无穷公式。

我们给出了斯科特-卡普分析局部方面的一个更抽象版本，避免使用无穷语言。我们证明，在经典情形下，由此得到的层级仍然能够提供所需的等价关系。

此外，正如我们所展示的，我们分析的抽象性质使其适用于在拓扑群上的拓扑群作用这一背景下，为 Hjorth 更为一般的全局相似性版本提供局部的逐层等价物。

此外，类似于埃伦福伊希特和 Fra¨ıss´e 的经典工作，我们为 Hjorth 的全局相似性关系及其一些自然变体提供了新颖的博弈论等价形式。

引言

康托尔著名地证明了（[6]）任意两个没有端点的可数稠密线性序都是同构的。来回法似乎是由亨廷顿（[25]）和豪斯多夫（[19], [20]）各自独立提出的，用于给出这一结果的证明[1]。

我们概述这样一个证明，以便让读者了解这种方法。取两个这样的序，O_0 和 O_1, ，并按序型 ω分别对它们进行枚举。通过归纳法构造它们之间的部分同构序列。先从空函数开始。对于归纳步骤，假设目前已经构造出了部分同构 f。取 O_0 的枚举中不属于 dom(f) 的第一个元素，记为 x。在 O_1 中寻找一个元素 y，使其相对于 O_1 中 rge(f) 的元素所处的位置，与 x 相对于 O_1 中 dom(f) 的元素所处的位置相同，并令 $g = f \cup \{(x, y)\}$。（这就是“向前”操作。）然后，取 O_1 的枚举中不属于 rge(g) 的第一个元素 z。在 O_0 中寻找一个元素 w，使其相对于 O_0 中 dom(g) 的元素所处的位置，与 z 相对于 O_1 中 rge(g) 的元素所处的位置相同，并令 $h = g \cup \{(w, z)\}$。（这就是“向后”操作。）对以这种方式生成的部分同构链取并集，就得到了所需的保序双射。

将此方法用于证明两个结构之间的同构，在模型论中已被证明卓有成效。Poizat（[30],[31]），第

[1]参见 [32], [35]。

˜2 安德烈亚斯·布伦纳、查尔斯·摩根和达尔兰·孔谢桑·平托。

6 章提供了丰富的入门示例，涉及代数闭域、微分闭域或实闭域、布尔代数、超度量空间和模的理论，[2] 而 Marker（[27]）的定理（2.4.2）则证明了可数随机图在同构意义下的唯一性。

然而，将此技术应用于两个不同构的结构（使用相同的语言）时，仍然能够提供有用且有趣的信息。Marker（[27]）所称的斯科特-卡普分析，就是这一现象的一个例子（见 [34] 和 [26]）。

假设我们想比较两组对象，每组都由一个模型及¯该模型中的一个元素序列组成，例如（M，$\bar{a}$）和（N，b），其中 M、N 是某种语言 L 下的 L-结构，且 $\mathrm{lh}(\bar{a}) = \mathrm{lh}(b)$。

斯科特-卡普分析的基本思想是，在每个结构中构造以序数为指标的两个层级，以便比较这类对象。其中一个层级应衡量全局相似性，另一个则应衡量两组对象具有相同特定（单个）不变量的程度。若能证明这两个层级相互吻合，这种分析就很有用：特定程度的全局相似性恰好对应于共同具有特定不变量。若能做到这一点，便可从局部信息中读出一组对象的全局信息。

在斯科特和卡普最初的分析中，这样一对对象之间全局相似性的程度，取决于两者是否都满足完全相同的一组公式；这些公式的复杂度不超过某个特定层级，该层级以序数值秩来衡量，而序数值秩则由公式中使用的量词推导而来。这与通过来回法定义的一系列关系密切相关；我们也应将其视为关注这对对象的全局信息。（下文将定义该秩及其一个实用的变体。）

斯科特和卡普分析中的不变量层级，其元素是单个无穷公式 $\phi^{\alpha}_{M,\ \bar{a}}$，对应于一对 $(M,\ \bar{a})$ 和一个序数 α。（下文也会提及这些公式，但正如标题所示，它们在此并非核心内容。）

卡普定理将弗拉伊塞（[15]）关于有限的 α 的一个定理推广了；该定理指出，这两个层级实际上是吻合的。

很久以后，Hjorth（[24], [9]）在拓扑空间上的拓扑群作用这一更一般得多的背景下，给出了这种 Scott-卡普分析中第一个全局环节的一个版本，即通过往返法定义的关系层级。这仍应理解为关注全局尺度上的相似性。我们将在下文第 8 节更详细地讨论这一点。

本文给出了 Scott-卡普分析第二条（即局部）路径的一个更抽象的版本。我们证明，这种替代方法仍然能够使人们匹配

[2]在将本章节翻译为 [30] 的过程中，原版本中添加了一些内容（ [31] ）。

全局与局部层级。这使我们能够在 Scott 和卡普工作的原始背景下给出替代性证明。

具体而言，给定一个签名 τ 和 L （一阶语言或无穷语言 $L_{\infty\lambda}$），对于每个 L-结构 M、元素序列 $\bar{a}$ 和序数 α，我们定义函数 $F^{\alpha}_{M,\,\bar{a}}$ 和 $H^{\alpha}_{M,\,\bar{a}}$；对于每个 L-结构 N，我们定义一个函数 $G^{\alpha}_{M,\,N\bar{a}}$。

$F^{\alpha}_{M,\,\bar{a}}$ 的定义是递归的，因此直接理解起来有些复杂。不过，$H^{\alpha}_{M,\,\bar{a}}$ 的定义更为直接，但它们是¯类函数。尽管如此，我们证明，给定 $(M,\ \bar{a})$、$(N,\ b)$ 和 α，有 $F^{\alpha}_{M,\,\bar{a}} = F^{\alpha}_{N,\,\bar{b}}$ 当且仅当 $H^{\alpha}_{M,\,\bar{a}} = H^{\alpha}_{N,\,\bar{b}}$。因此，关注 $F^{\alpha}_{M,\,\bar{a}}$ 还是 $H^{\alpha}_{M,\,\bar{a}}$，取决于个人喜好。

¯接着我们证明，$F^{\alpha}_{M,\bar{a}} = F^{\alpha}_{N,\bar{b}}$ 当且仅当 $(M,\bar{a}) \sim_{\alpha} (N,b)$，其中后者¯表示 $(M,\bar{a})$ 与 (N,b) 之间存在一个来回系统。

¯随后，我们定义（无穷）公式 $\phi^{\alpha}_{M,\bar{a}}$ 并证明 $N \models \phi^{\alpha}_{M,\bar{a}}(b)$ 当且仅当 $F^{\alpha}_{M,\,\bar{a}} = F^{\alpha}_{N,\bar{b}}$。这使我们得以给出卡普定理的一个版本：$M \equiv_{\alpha} N$ 当且仅当 $M \sim_{\alpha} N$ 当且仅当 $F^{\alpha}_{M,\emptyset} = F^{\alpha}_{N,\emptyset}$。

不过，我们的方法也适用于拓扑空间上的拓扑群作用，使我们能够在那里证明类似于经典情形下斯科特和卡普所得结果的新结果；在经典情形中，由于缺少语言，通常的斯科特-卡普分析便无法奏效。

由于埃伦福伊希特-弗拉伊斯博弈与斯科特-卡普分析的全局部分密切相关（许多作者认为它们提供了另一种说明），因此我们认为值得在本文（§7）中也对约斯层级进行博弈论分析。我们用我们所定义的某些博弈中玩家 II 的获胜策略，给出了三种关于由空间中的一个点和群中的一个开集组成的对的可比性概念的等价刻画。

接着，我们证明了与此前的一阶模型论结果类似的结论。例如，对于某些函数 $H^{\alpha}_{x,\,U}$ 我们有 $H^{\alpha}_{x,\,U} = H^{\alpha}_{y,\,V}$ 当且仅当 $(x,\ U) \sim_{\alpha} (y,\ V)$，当且仅当（对于 $\alpha > 0$），玩家 II 在 $\mathcal{G}^{s}(x,\ U,\ y,\ V,\ \alpha)$ 中有获胜策略。

1. 预备知识

记号 1.1. 我们的大部分记号都是标准的。我们采用一些标准的集合论约定。我们用 On 表示序数类。给定一个集合 X 和一个序数 α，我们用 X 表示 X 的基数，用 ${}^{\alpha}X$ 表示由 X 中的元素构成的、长度为 α 的序列的集合；等价地，它是从 α 到 X 的函数的集合，而 ${}^{<\alpha}X = \bigcup_{\beta<\alpha} {}^{\beta}X$。

我们遵循典型的模型论约定，用
¯ ¯并置表示拼接。如果 $\bar{a}, b$ 是结构 M 中的元组，且 $c \in M$，我们用 $\bar{a}b$¯表示拼接 $\bar{a}^\frown b$，用 $\bar{a}c$表示拼接 $\bar{a}^\frown c$。更明确地说，如果 $\bar{a} = a_i\colon\ i < \alpha\ \in {}^\alpha M, \bar{b} = b_j\colon\ j < \beta\ \in {}^\beta M$和 $c \in M$，则用 $\bar{a}\bar{b}$表示序列 $d = d_i\colon\ i < \alpha + \beta$，其中当 $i < \alpha$时有 $d_i = a_i$，而当 $i = \alpha + j$且 $j < \beta$时有 $d_i = b_j$；用 $\bar{a}c$ 表示序列 $\bar{e} = e_i\colon\ i < \alpha + 1$，其中当 $i < \alpha$ 时有 $e_i = a_i$，且 $e_\alpha = c$。

定义 1.2. A签名 是函数符号、关系符号和常元符号的集合。更正式地说，τ是一个签名，当且仅当它是四元组$\langle \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C}\ \tau\prime\rangle$，其中$\mathcal{F}$、$\mathcal{R}$和$\mathcal{C}$是两两不相交的集合，并且 $\tau\prime\colon\ \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{N}$。

例如，Rothmaler [33], 明确阐述了一阶语言如何在一个签名上构造。

在本文余下部分中，固定一个签名 $\tau, = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C}\ \tau\prime\rangle$。

我们需要对无穷语言给出一个具体定义。

我们采用 V¨a¨an¨anen 的定义（稍作调整）[36], 即无穷语言的定义（9.12）$L^\mu_{\kappa\lambda}$。（[36] 没有说明 λ 必须是正则的。）

定义 1.3. 设 μ、λ 和 κ 是基数。集合 $L^\mu_{\kappa\lambda}$ 定义如下:

(1) 对于 $\alpha < \lambda$，变元 v_α 是一个项。每个常元符号 $c \in \mathsf{C}$ 都是一个项。若 f是一个 n元函数符号，且 t_0、.....、 t_{n-1}是项，则 $f(t_0,$ ....., $t_{n-1})$ 也是项。(2) 若 t_0 和 t_1 是项，则 $t_0 = t_1$ 是一个 $L^\mu_{\kappa\lambda}$ 公式。(3) 若 t_0、.....、 t_{n-1}是项，且 R是一个 n元关系符号，则 $R(t_0,\ \ldots t_{n-1})$ 是一个 $L^\mu_{\kappa\lambda}$公式。(4) 若 ϕ是一个 $L^\mu_{\kappa\lambda}$公式，则 $\neg\phi$也是。(5) 若 Φ 是一个由少于 κ 个 $L^\mu_{\kappa\lambda}$公式组成的集合，其自由变量的固定集合为 V，且 $V < \lambda$、$\bigwedge \Phi$，则 $L^\mu_{\kappa\lambda}$是一个公式。(6) 若 Φ 是一个由少于 κ 个 $L^\mu_{\kappa\lambda}$公式组成的集合，其自由变量的固定集合为 V，且 $V < \lambda$、$\bigvee \Phi$，则 $L^\mu_{\kappa\lambda}$是一个公式。(7) 若 ϕ 是一个 $L^\mu_{\kappa\lambda}$公式，$V \in [\{v_\alpha\colon\ \alpha < \lambda\}]^{<mu}$，且 $V < \lambda$、$\forall V\, \phi$，则 $L^\mu_{\kappa\lambda}$是一个公式。(8) 若 ϕ 是一个 $L^\mu_{\kappa\lambda}$公式，$\bar{V} \in [\{v_\alpha\colon\ \alpha < \lambda\}]^{<\mu}$，且 $V < \lambda$、$\exists V\, \phi$，则 $L^\mu_{\kappa\lambda}$是一个公式。

因此，λ 限定了公式中自由变量集合的大小，κ 限定了无穷合取和析取的大小，而 μ 限定了可进行量化的变量集的大小。

定义 1.4。对于 μ、λ 和 κ 基数，令 $L_{\kappa\lambda} = L^\lambda_{\kappa\lambda}$ 和 $\bar{L}_{\kappa\lambda} = L^2_{\kappa\lambda}$。
对于 μ 和 λ 基数，我们设 $L^\mu_{\infty\lambda} = \bigcup_{\kappa\in\mathsf{Card}} L^\mu_{\kappa\lambda}$。我们还设 $L_{\infty\lambda} = L^\lambda_{\infty\lambda} = \bigcup_{\kappa\in\mathsf{Card}} L_{\kappa\lambda}$ 和 $\bar{L}_{\infty\lambda} = L^2_{\infty\lambda} = \bigcup_{\kappa\in\mathsf{Card}}\ \bar{L}_{\kappa\lambda}$

¯例如， $L_{\omega\omega}$ 是关于 τ 的一阶逻辑。

关于 $L^{\mu}_{\kappa\lambda}$的更多内容，请参阅 [36], [7] 和 [8] 。 [36]给出了这一 $L_{\infty\lambda}$ 定义的一个形式化版本，将其视为一个具有 ZFC 模型的类。

定义 1.5. 设 ϕ 是一个 $L^{\mu}_{\kappa\lambda}$-公式。那么，Var(ϕ)是 ϕ 中出现的变量的集合，而 FV(ϕ)是 ϕ中出现的自由变量的集合。

2. 来自两个结构的元组之间的等价关系

文献中关于“往返”关系序列的研究相当丰富。参见 [18], [27], [36]。这些关系的论域元素是由一个结构及其元组构成的有序对。这些序列通过归纳法定义，旨在衡量这些有序对之间的相似程度。这类关系序列种类繁多，主要区别在于：序列中的关系是对称的还是非对称的，以及后继步骤中的“扩展”是通过单个元素还是元组进行的——例如，引言中给出的往返论证，其扩展就是通过单个元素进行的。归纳定义的起点不同，也带来了其他变化。

这里我们采用结构分析以及经典一阶模型论中对结构及其元组进行分析时更为常用的版本，并使用对称关系。

就扩张的大小而言，我们既得其利又不失其便。我们使用签名为 τ 的语言，使我们能够同时处理经典一阶逻辑（$L_{\omega\omega}$）和无穷逻辑 $L_{\infty\lambda}$，其中 λ 是一个基数。我们的关键捷径是只考虑语言 L，即由基数 λ 参数化的语言，以及 μ，其中 λ 是形成 L-公式时所允许的合取式和析取的大小的严格上界，而 μ 是往返步骤中可添加的元组大小的严格上界。

我们允许考虑的唯一成对对象是 $(2, \omega)$，对应于单点扩张，以及任意形如 (λ, λ) 的成对对象。不过，这种形式化处理或许有些迂回，但它确实使我们能够对所得结果给出统一证明。我们再次强调，我们距离允许 (μ, λ) 的取值为任意基数还非常 遥远。

因此，在本文余下部分，我们固定这样一对满足条件的对（μ, λ）。

定义 2.1。 设 $\phi \in L$ 为原子的。如果 ϕ 具有以下形式之一，我们称其为非嵌套的

$$v_i = v_j,\ v_i = c,\ R(v_{i_0}, \ldots, v_{i_{n-1}}) \text{ or } v_{i_n} = f(v_{i_0}, \ldots, v_{i_{n-1}}),$$

其中 v_i 是变量， c 是常元符号， R 是 n 元关系符号， f 是 n 元函数符号。用 $\mathcal{UA}$ 表示非嵌套原子公式的集合。注意，如果 $\phi \in \mathcal{UA}$ ，那么 Var(ϕ) $=$ FV(ϕ)，且该集合是有限的。

定义 2.2. 设 $\phi \in L$。我们称 ϕ 是非嵌套的，如果它的所有原子子公式都是非嵌套的。用 $\mathcal{U}$ 表示非嵌套公式的集合。

注 2.3. 如果 L 是关系型的，那么每个公式都是非嵌套的。

定义 2.4. 如果公式 $\phi \in L$ 仅由非嵌套原子公式通过合取和存在量化构成，则称其为正原子（即 *pp* 公式）。

我们的下一个定义与 [27], p57 中的定义类似。

定义 2.5. 设 Y 为 $\mathcal{UA}$。[3] 设 M 和 N 为 L-结构，$\bar{a} \in {}^{<\lambda}M$ 和 $\bar{b} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}N$。设 h: $\bar{a} \longrightarrow \bar{b}$ 由 $h(a_i) = b_i$ 对所有 $i < \mathrm{lh}(\bar{a})$ 给出。

- 若对所有满足 $\mathrm{lh}(\bar{v}) = \mathrm{lh}(\bar{a})$ 的公式 $\psi(\bar{v})$，都有 $M \models \psi(\bar{a})$ 当且仅当 $N \models \psi(b)$，则称 $(M, \bar{a}) \sim_0 (N, b)$。在这种情况下，我们称 h 为部分同构。

- 我们令 Q_0 为所有此类部分同构的集合（对所有成对的 $(M, \bar{a})$、(N, b)）。

- 对于 $0 < \alpha$，若对所有 $\beta < \alpha$，以下两个条件均成立，则令 $(M, \bar{a}) \sim_\alpha (N, b)$：对所有 $\bar{c} \in {}^{<\mu}M$，存在某个 $\bar{d} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{c})}N$，使得对所有 $\bar{d} \in {}^{<\mu}N$，都有 $(M, \bar{a}\bar{c}) \sim_\beta (N, \bar{b}\bar{d})$；存在某个 $\bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{d})}M$，使得 $(M, \bar{a}\bar{c}) \sim_\beta (N, \bar{b}\bar{d})$。

- 等价地，对所有 α，若以下两个条件成立，则有 $(M, \bar{a}) \sim_{\alpha+1} (N, b)$

  对于所有 $\bar{c} \in {}^{<\mu}M$，存在某个 $\bar{d} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{c})}N$，使得 $(M, \bar{a}\bar{c}) \sim_\alpha (N, \bar{b}\bar{d})$

  对于所有 $\bar{d} \in {}^{<\mu}N$，存在某个 $\bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{d})}M$，使得 $(M, \bar{a}\bar{c}) \sim_\alpha (N, \bar{b}\bar{d})$。

- 并且对于所有极限 $\alpha \in$ 序数类，我们有 $(M, \bar{a}) \sim_\alpha (N, b)$，当且仅当对于所有 $\beta < \alpha$，我们有 $(M, \bar{a}) \sim_\beta (N, b)$。

- 我们称 $h \in Q_\alpha$，如果 $(M, \bar{a}) \sim_\alpha (N, b)$。

记作 $M \sim_\alpha N$，如果 $(M, \emptyset) \sim_\alpha (N, \emptyset)$。

3. 不借助公式的斯科特-卡普分析

设 M, N 是 L-结构，且 $\bar{a} \in {}^{<\lambda}M$, $\bar{b} \in {}^{<\lambda}N$ 满足 $\mathrm{lh}(\bar{a}) = \mathrm{lh}(\bar{b})$。本节中，我们定义函数 $F^\alpha_{M,\bar{a}}$, $G^\alpha_{M,N\bar{a}}$ 和 $H^\alpha_{M,\bar{a}}$，并证明它们包含了证明卡普型结果（命题（3.6）和命题（3.7））所需的全部信息；这些结果表明，成对对象之间的 $\sim_\alpha$ 关系，与相应函数相等之间是等价的。因此，实际上并不需要

[3] 文献中类似定义的其他选择包括：所有原子公式、所有无量词公式、所有不含否定的无量词公式，以及所有存在公式。 [27], 第 57 页在归纳定义的初始步骤中采用了所有原子公式，而非未嵌套的原子公式。

需要像卡普那样，将关于（M， $\bar{a}$）的信息汇集成一个无穷句子，以证明这类定理。

定义 3.1。 令 $Y = UA$ 如上一节所述。

定义 3.2。 对于 M 一个 L-结构和 $\bar{a} \in {}^{<\lambda}M$，定义函数 $I_{M,\,\bar{a}}$如下。令

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(I_{M,\bar{a}}) = \{(\psi, f) : \psi \in Y \ \&\ \exists n \in \omega \ \ \mathrm{Var}(\psi) = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\} \\ \&\ f : N \longrightarrow \mathrm{lh}(\bar{a})\},\end{aligned}$$

对于 $(\psi,\ f) \in \mathrm{dom}(I_{M,\,\bar{a}})$，令

$$I_{M,\bar{a}}(\psi, f) = \begin{cases} 1 & \text{if } M \models \psi(a_{f(0)}, a_{f(1)}, \ldots a_{f(n-1)})) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定义 3.3。 令 M、 N为 L-结构，并且 $\bar{a} \in {}^{<\lambda}M$。我们归纳地定义函数 $F^{\alpha}_{M,\,\bar{a}}$、$G^{\alpha}_{M,\,N,\,\bar{a}}$ 以及 $H^{\alpha}_{M,\,\bar{a}}$。对于 $\beta < \alpha$，我们将有

$$F^{\beta}_{M,\bar{a}} \subseteq F^{\alpha}_{M,\bar{a}},\ H^{\beta}_{M,\bar{a}} \subseteq H^{\alpha}_{M,\bar{a}} \text{ and } G^{\beta}_{M,N,\bar{a}} \subseteq G^{\alpha}_{M,N,\bar{a}}.$$

Let

$$F^{0}_{M,\bar{a}} = G^{0}_{M,N,\bar{a}} = H^{0}_{M,\bar{a}} = I_{M,\bar{a}}.$$

$F^{\alpha}_{M,\,\bar{a}}$ 的论域中的元素要么是 $\mathrm{dom}(I_{M,\,\bar{a}})$ 的元素，要么是一个有序对，其第二项是小于 α的序数。$G^{\alpha}_{M,\,N,\,\bar{a}}$ 以及 $H^{\alpha}_{M,\,\bar{a}}$ 的论域中的元素要么是 $\mathrm{dom}(I_{M,\,\bar{a}})$ 的元素，要么是三元组，其最后一项是小于 α的序数。对于 $0 < \beta < \alpha$，我们将有

$$F^{\alpha}_{M,\bar{a}} \restriction \beta = F^{\beta}_{M,\bar{a}},\ H^{\alpha}_{M,\bar{a}} \restriction \beta = H^{\beta}_{M,\bar{a}} \text{ and } G^{\alpha}_{M,N,\bar{a}} \restriction \beta = G^{\beta}_{M,N,\bar{a}}.$$

因此，在每种情况下，对于极限 α，函数完全由 $\beta < \alpha$ 的定义确定。此外，对于 $\alpha + 1$ 以及其论域中最后一个元素为 $\beta < \alpha$ 的元组，函数由 α 的定义确定。

最后，我们处理函数论域中末尾元素为 α 的 $\alpha + 1$ 元组。

若 K 是一个 L-结构， $\bar{s} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}N$ 且 $\bar{t} \in {}^{<\mu}N$，则三元组 $(K, \bar{s}\bar{t}, \alpha)$ 是 $\mathrm{dom}(H^{\alpha+1}_{M\,\bar{a}\,,})$ 的一个元素。

如果 $(K, \bar{s}\bar{t}, \alpha)$ 是 $\mathrm{dom}(H^{\alpha+1}_{M\,\bar{a}\,,})$ 的一个元素，我们定义

$$H^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(K, \bar{s}\bar{t}, \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{if there is some } \bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})}M \text{ such that } H^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}} = H^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

三元组 $(K, \bar{s}\bar{t}, \alpha)$ 是 $\mathrm{dom}(G^{\alpha+1}_{M\ ,N,\bar{a}})$ 的一个元素，当且仅当 $K \in \{M, N\}$、$\bar{s} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}K$ 以及 $\bar{t} \in {}^{<\mu}K$。

对于 $(K, \bar{s}\bar{t}, \alpha) \in \mathrm{dom}(G^{\alpha+1}_{M,N,\bar{a}})$，若 $K = M$集合 $J = N$且若 $K = N$集合 $J = M$，并且集合

$G^{\alpha+1}_{M,\ N,\ \bar{a}}(K,\ \bar{s}\bar{t},\ \alpha) = \begin{cases} 1 \text{ 如果存在某个} \\ \end{cases}$

$\bar{c} \in \quad M \qquad\qquad G^{\alpha}_{M\,N\,\bar{a}\bar{c}} = G^{\alpha}_{K\,J\,\bar{s}\bar{t}}$ $\mathrm{lh}(\bar{t})$使得，，，，；否则。

0

有序对 $(x,\ \alpha)$ 属于 $\mathrm{dom}(F^{\alpha+1}_{M\,\bar{a}},)$，当且仅当存在 L-结构 K,

$\bar{s} \in \quad K \quad \bar{t} \in {}^{<\mu}N$ $\mathrm{lh}(\bar{a})$并且使得 $x = F^{\alpha}_{K,\ \bar{s}\bar{t}}$。

如果 K 是一个 L-结构，$\bar{s} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}K$ 并且 $\bar{t} \in {}^{<\mu}N$，那么

$$F^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(F^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}, \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{if there is some } \bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})}M \text{ such that } F^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}} = F^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于 $0 < \alpha$，显然，$\mathrm{dom}(H^{\alpha}_{M,\bar{a}})$ 是一个真类，而 $F^{\alpha}_{M,\bar{a}}$ 是递归定义的。下面的结果表明，我们可以二选一：用一组函数能够证明的任何结论，也可以用另一组函数证明。

引理 3.4. 设 M 是一个 L-结构，$\bar{a} \in {}^{<\lambda}|M|$，且 $\alpha \in$ 序数类。设 K 是一个 L-结构，$\bar{s} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|K|$ 且 $\bar{t} \in {}^{<\mu}N$。设 $\beta < \alpha$。那么

$$F^{\alpha}_{M,\bar{a}}(F^{\beta}_{K,\bar{s}\bar{t}}, \beta) = H^{\alpha}_{M,\bar{a}}(K, \bar{s}\bar{t}, \beta).$$

此外，如果还满足 N 是一个 L-结构，且 $\bar{b} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}|N|$

$$F^{\alpha}_{M,\bar{a}} = F^{\alpha}_{N,\bar{b}} \textit{ if and only if } H^{\alpha}_{M,\bar{a}} = H^{\alpha}_{N,\bar{b}}.$$

证明。我们对 α 使用归纳法。极限 α 情形由归纳法立即可得。对于后继 α，其中 $\beta + 1 < \alpha$，结论同样由归纳法立即可得。对于后继 $\alpha + 1$，有 $F^{\alpha+1}_{M\,\bar{a}}$，$(F^{\alpha}_{K,\ \bar{s}\bar{t}},\ \alpha) = 1$

当且仅当存在某个 $\bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})}M$使得 $F^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}} = F^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}}$当且仅当存在某个 $\bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})}M$ 使得 $H^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}} = H^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}}$

if and only if $H^{\alpha+1}_{M,\bar{a}}(K, \bar{s}\bar{t}, \alpha) = 1$.

其中，中间的等式由引理 α 结论中的“此外”部分通过归纳法得出。引理 $\alpha + 1$ 结论中的“此外”部分现在显然成立。⋆

下一个引理说明，当我们将函数应用于由函数参数自身导出的论域元素时，会发生什么。

引理 3.5。对于每个 $0 \leq \beta < \alpha$，如果 $\bar{c} \in {}^{<\mu}M$，那么

$$F^{\alpha}_{M,\bar{a}}(F^{\beta}_{M,\bar{a}\bar{c}}, \beta) = G^{\alpha}_{M,N,\bar{a}}(M, \bar{a}\bar{c}, \beta) = H^{\alpha}_{M,\bar{a}}(M, \bar{a}\bar{c}, \beta) = 1.$$

证明。根据函数的归纳定义，只需证明 $\alpha = \beta + 1$ 的情形。对于 Hs，根据 $H^{\beta+1}_{M\,\bar{a}}$ 的定义，我们有 $H^{\beta+1}_{M\,\bar{a}}$，$(M,\ \bar{a}\bar{c},\ \beta) = 1$

当且仅当存在某个 $\bar{c}' \in \mathrm{lh}(\bar{c})M$，使得 $H^{\beta}_{M,\,\bar{a}\bar{c}'} = H^{\beta}_{M,\,\bar{a}\bar{c}}$。然而，取 $\bar{c}' = \bar{c}$ 可知后者总是成立。对于 Gs 的证明完全相同。Fs 的情形也可类似证明，或者直接由引理 (3.4) 得出。⋆

现在我们可以给出卡普型结果：对于 Gs 是较弱的版本，而对于 Fs 和 Hs 则是较强的版本。

命题 3.6。设 M, N 是 L-结构，$\bar{a} \in {}^{<\lambda}M$ 且 $\bar{b} \in \mathrm{lh}(\bar{a})N$。设 $\alpha \in$ 序数类。则 $G^{\alpha}_{M,\,N,\,\bar{a}} = G^{\alpha}_{N,\,M,\,\bar{b}}$ 当且仅当 $(M, \bar{a}) \sim_{\alpha} (N, b)$。

命题 3.7。设 M 是一个 L-结构，$\bar{a} \in {}^{<\lambda}M$ 且 $\alpha \in$ 序数类。对于任意 L-结构 N 以及 $\bar{b} \in \mathrm{lh}(\bar{a})N$，有 $F^{\alpha}_{M,\,\bar{a}} = F^{\alpha}_{N,\,\bar{b}}$ 当且仅当 $H^{\alpha}_{M,\,\bar{a}} = H^{\alpha}_{N,\,\bar{b}}$ 当且仅当 $(M, \bar{a}) \sim_{\alpha} (N, b)$。

这些命题的证明非常相似。两者都采用归纳法。因此，我们给出一个统一证明。

证明。该证明采用归纳法。在命题（3.6）的陈述中，我们给定一对 (N, b)。为了证明命题（3.7），令我们固定一对 (N, b)，其中具有 N 一个 L-结构，且 $\bar{b} \in \mathrm{lh}(\bar{a})N$。

正如我们已在引理 (3.4) 中证明的，$F^{\alpha}_{M,\bar{a}} = F^{\alpha}_{N,\bar{b}}$ 当且仅当 $H^{\alpha}_{M,\bar{a}} = H^{\alpha}_{N,\bar{b}}$，为了证明命题（3.7），我们只需证明 $H^{\alpha}_{M,\bar{a}} = H^{\alpha}_{N,\bar{b}}$ 当且仅当 $(M, \bar{a}) \sim_{\alpha} (N, b)$。我们将会看到，同样也可以选择证明 $F^{\alpha}_{M,\bar{a}} = F^{\alpha}_{N,\bar{b}}$ 当且仅当 $(M, \bar{a}) \sim_{\alpha} (N, b)$。

为了进行统一证明，令 $E^{\alpha}_{M,\bar{a}}$ 分别为 $H^{\alpha}_{M,\bar{a}}$ 或 $G^{\alpha}_{M,N,\bar{a}}$，且 $E^{\alpha}_{N,\bar{b}}$ 分别为 $H^{\alpha}_{N,\bar{b}}$ 或 $G^{\alpha}_{N,M,\bar{b}}$。

$\alpha = 0$。对于所有 $\psi \in Y$，我们有 $E^{\alpha}_{M,\bar{a}}(\psi) = E^{\alpha}_{N,\bar{b}}(\psi)$ 当且仅当 $M \models \psi(\bar{a}) \Longleftrightarrow N \models \psi(b)$，因此 $E^{\alpha}_{M,\bar{a}} = E^{\alpha}_{N,\bar{b}}$ 当且仅当 $(M, \bar{a}) \sim_0 (N, b)$。

极限 α。$E^{\alpha}_{M,\bar{a}} = E^{\alpha}_{N,\bar{b}}$ 当且仅当对于所有 $\beta < \alpha$，我们有 $E^{\beta}_{M,\bar{a}} = E^{\beta}_{N,\bar{b}}$。根据归纳法，对于每个 $\beta < \alpha$，我们有 $E^{\beta}_{M,\bar{a}} = E^{\beta}_{N,\bar{b}}$ 当且仅当 $(M, \bar{a}) \sim_{\beta} (N, \bar{b})$。因此，对于所有 $\beta < \alpha$，我们有 $E^{\beta}_{M,\bar{a}} = E^{\beta}_{N,\bar{b}}$ 当且仅当对于所有 $\beta < \alpha$，我们有 $(M, \bar{a}) \sim_{\beta} (N, b)$。然而，对于所有 $\beta < \alpha$，我们有 $(M, \bar{a}) \sim_{\beta} (N, b)$ 当且仅当 $(M, \bar{a}) \sim_{\alpha} (N, b)$。

$\alpha + 1$。设 $\bar{c} \in {}^{<\mu}M$。引理（3.5）表明 $E^{\alpha+1}_{M\,\bar{a},\,(M,\;\bar{a}\bar{c},\;\alpha)} = 1$。因此，$E^{\alpha+1}_{M\,\bar{a},\,(M,\;\bar{a}\bar{c},\;\alpha)} = E^{\alpha+1}_{N\,\bar{b},\,(M,\;\bar{a}\bar{c},\;\alpha)}$ 当且仅当存在某个 $\bar{d} \in \mathrm{lh}(\bar{c})N$ 使得 $E^{\alpha}_{M,\,\bar{a}\bar{c}} = E^{\alpha}_{N,\,\bar{b}\bar{d}}$；根据归纳法，这当且仅当存在某个

$\bar{d} \in \mathrm{lh}(\bar{c})N$ 使得 $(M, \bar{a}\bar{c}) \sim_\alpha (N, \bar{b}\bar{d})$。类似地，如果 $\bar{d} \in {}^{<\mu}N$ 该引理表明 $E^{\alpha+1}_{N\,\bar{b}}$，$(N, \bar{b}\bar{d}, \alpha) = 1$。因此，$E^{\alpha+1}_{N\,\bar{b}}$，$(N, \bar{b}\bar{d}, \alpha) = E^{\alpha+1}_{M\,\bar{a}}$，$(N, \bar{b}\bar{d}, \alpha)$ 当且仅当存在某个 $\bar{c} \in \mathrm{lh}(\bar{d})M$ 使得 $E^{\alpha}_{N,\bar{b}\bar{d}} = E^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}}$；根据归纳法，这当且仅当存在某个 $c \in \mathrm{lh}(\bar{d})M$ 使得 $(N, \bar{b}\bar{d}) \sim_\alpha (M, \bar{a}\bar{c})$。因此，如果 $E^{\alpha+1}_{M},_{\bar{a}} = E^{\alpha+1}_{N\,\bar{b}}$，那么 $(M, \bar{a}) \sim_{\alpha+1} (N, \bar{b})$。

˜对于逆命题，回忆一下（M，$\bar{a}$）$\sim_{\alpha+1}$（N，b）当且仅当

$$\text{for all } \bar{c} \in {}^{<\mu}M \text{ there is some } \bar{d} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{c})}N \text{ such that } (M, \bar{a}\bar{c}) \sim_\alpha (N, \bar{b}\bar{d})$$
$$\text{for all } \bar{d} \in {}^{<\mu}N \text{ there is some } \bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{d})}M \text{ such that } (M, \bar{a}\bar{c}) \sim_\alpha (N, \bar{b}\bar{d}).$$

根据归纳假设，这成立当且仅当

对于所有 $\bar{c} \in {}^{<\mu}M$ 存在某个 $\bar{d} \in \mathrm{lh}(\bar{c})N$ 使得 $E^{\alpha}_{M,\bar{a}c} = E^{\alpha}_{N},_{\bar{b}d}$ 并且对于所有 $\bar{d} \in {}^{<\mu}N$ 存在某个 $\bar{c} \in \mathrm{lh}(\bar{d})M$ 使得 $E^{\alpha}_{M,\bar{a}c} = E^{\alpha}_{N},_{\bar{b}d}$.

因此，假设（K，$\bar{s}\bar{t}$，α）$\in \mathrm{dom}(E^{\alpha+1}_{M\,\bar{a}},)$。

读者应当注意到，这里出现了一个真正的差异，即 $\mathrm{dom}(G^{\alpha+1}_{M},_{N,}\,_{\bar{a}}) \subsetneq \mathrm{dom}(H^{\alpha+1}_{M\,\bar{a}},)$。不过，我们仍然能够在记号上以完全相同的方式处理这两种情况。

若 $E^{\alpha+1}_{M\,\bar{a}},(K, \bar{s}\bar{t}, \alpha) = 1$ 存在某个 $\bar{c} \in \mathrm{lh}(\bar{t})M$ 使得 $E^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}} = E^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}$。

由于 $(M, \bar{a}) \sim_{\alpha+1} (N, \bar{b})$，存在某个 $\bar{d} \in \mathrm{lh}(\bar{t})N$，使得 $(M, \bar{a}\bar{c}) \sim_\alpha (N, \bar{b}\bar{d})$。根据归纳法，$E^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}} = E^{\alpha}_{N,\bar{b}\bar{d}}$因此 $E^{\alpha}_{N,\bar{b}\bar{d}} = E^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}$所以 $E^{\alpha+1}_{N\,\bar{c}},(K, \bar{s}\bar{t}, \alpha) = 1$。

类似地，如果 $E^{\alpha+1}_{N\,\bar{d}},(K, \bar{s}\bar{t}, \alpha) = 1$ 存在某个 $\bar{c} \in \mathrm{lh}(\bar{t})M$ 使得 $E^{\alpha}_{M,\bar{a}\bar{c}} = E^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}$并且 $E^{\alpha+1}_{M\,\bar{a}},(K, \bar{s}\bar{t}, \alpha) = 1$。

因此，$E^{\alpha+1}_{M\,\bar{a}},(K, \bar{s}\bar{t}, \alpha) = 1$ 当且仅当 $E^{\alpha+1}_{N\,\bar{c}},(K, \bar{s}\bar{t}, \alpha) = 1$，如所要求的。 ⋆

此时，我们可以继续进行 Scott分析的类似论证，并证明 Scott同构定理。

命题3.8。设 M 是一个 L-结构。存在一个序数 $\alpha < M^+$，使得若 $\bar{a}, \bar{b} \in {}^{<\lambda}M$ 满足 $\mathrm{lh}(\bar{a}) = \mathrm{lh}(\bar{b})$ 且 $(M, \bar{a}) \sim_\alpha (M, \bar{b})$，则对所有 $\beta \in$ 序数类¯，都有 $(M, \bar{a}) \sim_\beta (M, b)$。最小的此类 α 称为 M的Scott秩 。

证明。如 [27],引理（2.4.14）。 ⋆

命题 3.9。设 M, N 是可数的 L-结构，且 α 是 M的*Scott*秩。那么，当且仅当 $N \cong M$ *if and only if* $H^{\alpha}_{M,\emptyset} = H^{\alpha}_{N,\emptyset}$，并且对所有 $\bar{a} \in {}^{<\lambda}M$ 和$\bar{b} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}N$，若 $H^{\alpha}_{M,\bar{a}} = H^{\alpha}_{N,\bar{b}}$，则 $H^{\alpha+1}_{M,\bar{a}} = H^{\alpha+1}_{N,\bar{b}}$。

证明。 如同 [27], 定理(2.4.15)，但用命题 3.7来刻画函数相等与有序对在 $\sim_{\alpha}$ 下相关之间的等价关系，以此代替[27],引理 (2.4.13)。 ⋆

4. 与原始斯科特-卡普分析的关系

应当注意，命题（3.7）并非直接沿袭斯科特句子的典型结构——即由一个无穷存在句合取与一个单独的全称量化无穷析取构成的合取，而是模仿了出现在 [5] 和 [1]中的语句结构。当真值推广为不局限于 $2 = \{0,1\} = \{\top, \bot\}$ 时，这种做法尤其可取，正如 [4]中所示。

然而，我们可以将命题（3.7）的方法与对 L-结构的分析联系起来，而后者采用无穷语句。

定义 4.1. 设 M 是一个 L-结构， $\bar{a} \in {}^{<\lambda}M$ 且 $\alpha \in$ 属于序数类。令

$$\phi^{0}_{M,\bar{a}} = \bigwedge_{\substack{\psi \in \mathcal{UA} \\ M \models \psi(\bar{a})}} \psi(\bar{v}) \wedge \bigwedge_{\substack{\psi \in \mathcal{UA} \\ M \models \neg\psi(\bar{a})}} \neg\psi(\bar{v}),$$

对于极限 α，令 $\phi^{\alpha}_{M,\bar{a}} = \bigwedge_{\beta<\alpha} \phi^{\beta}_{M,\bar{a}}$，并令

$$\phi^{\alpha+1}_{M,\bar{a}} = \phi^{\alpha}_{M,\bar{a}} \wedge \bigwedge_{\substack{K,\bar{s}\bar{t} \\ M \models \exists\bar{u}\phi^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}(\bar{a},\bar{u})}} \exists\bar{u}\phi^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}(\bar{v},\bar{u}) \wedge \bigwedge_{\substack{K,\bar{s}\bar{t} \\ M \models \neg\exists\bar{u}\phi^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}(\bar{a},\bar{u})}} \neg\exists\bar{u}\phi^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}(\bar{v},\bar{u}).$$

命题 *4.2.* 设 M 是一个 L-结构， $\bar{a} \in {}^{<\lambda}|M|$ 且 $\alpha \in$ 属于序数类。设 K 和 N 是 L-结构， $\bar{b} \in$ *lh*$(\bar{a})|N|$， $\bar{s} \in$ *lh*$(\bar{a})|K|$ 且 $\bar{t} \in {}^{<\mu}|K|$。那么$M \models \exists\bar{u}\phi^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}(\bar{a},\bar{u})$ 当且仅当 $H^{\alpha+1}_{M\,\bar{a}}, (K, \bar{s}\bar{t}, \alpha) = 1$ 且 $H^{\alpha}_{M,\bar{a}} = H^{\alpha}_{N,\bar{b}}$ 当且仅当 $N \models \phi^{\alpha+1}_{M\,\bar{a}}(\bar{b})$。

证明。 通过双重归纳。$M \models \exists\bar{u}\phi^{\alpha}_{K,\,\bar{s}\bar{t}}$ 当且仅当存在某个 $\bar{c} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{t})}M$使得 $M \models \phi^{\alpha}_{K,\,\bar{s}\bar{t}}(\bar{a}\bar{c})$。应用归纳假设和 $H^{\alpha+1}_{M\,\bar{a}}$ 的定义，，我们有 $M \models \phi^{\alpha}_{K,\,\bar{s}\bar{t}}(\bar{a}\bar{c})$ 当且仅当 $H^{\alpha}_{K,\,\bar{s}\bar{t}} = H^{\alpha}_{M,\,\bar{a}\bar{c}}$ 当且仅当$H^{\alpha+1}_{M\,\bar{a}}, (K,\ \bar{s}\bar{t}) = 1$，证毕。

另一方面，$H^{\alpha+1}_{M,\bar{a}} = H^{\alpha+1}_{N\,\bar{b}}$,当且仅当对于每个 K, $\bar{s} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a})}K$ 和 $\bar{t} \in {}^{\mathrm{lh}(\bar{a}+1)}K$，都有 $M \models \exists\bar{u}\phi^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}(\bar{a},\bar{u})$ 当且仅当 $N \models \exists\bar{u}\phi^{\alpha}_{K,\bar{s}\bar{t}}(\bar{b},\bar{u})$ 当且仅当 $N \models \phi^{\alpha+1}_{M\,\bar{a}}(\bar{b})$。⋆

5. 度与秩

我们引入量词度 这一概念，后文将会用到。

定义 5.1。（量词度）设 $\phi \in L_{\infty\lambda}$。 ϕ,$d(\phi)$ 的量词度 按其复杂度通过归纳法定义。

$$
\begin{array}{ll}
\phi \text{ atomic} & d(\phi) = 0 \\
\phi = \neg\psi & d(\phi) = d(\psi) \\
\phi = \psi \longrightarrow \chi & d(\phi) = \max(\{\, d(\psi), d(\chi)\,\}) \\
\phi = \bigwedge \Phi & d(\phi) = \sup\{\, d(\psi) \,:\, \psi \in \Phi\,\} \\
\phi = \bigvee \Phi & d(\phi) = \sup\{\, d(\psi) \,:\, \psi \in \Phi\,\} \\
\phi = \forall V \psi & d(\phi) = d(\psi) + 1 \\
\phi = \exists V \psi & d(\phi) = d(\psi) + 1
\end{array}
$$

¯**注**。当 $\lambda = \omega$ 时，此定义在 $L_{\infty\omega}$上诱导出“通常的”量词度。例如，记 $\exists x$ 为 $\exists\{x\}$ 为单元素集，若 ϕ 是 $\exists\{x, y\}\ x = y$ 且 ψ 是 $\exists x \exists y\, x = y$，则 $d(\phi) = 1$，但 $d(\psi) = 2$。

定义 5.2。设 α 是一个序数。$L^{\alpha}_{\infty,\lambda}$ 是由满足 $d(\phi) \leq \alpha$ 的$L_{\infty,\lambda}$-公式 ϕ ¯ ¯组成的集合。我们将 $L^{\alpha}_{\infty,\lambda}$ 记作 $L_{\infty,\lambda} \cap L^{\alpha}_{\infty,\lambda}$。

我们还引入一种修正秩，它将语言中允许出现函数符号所带来的复杂性纳入考量。这个秩是 [11], 习题（XII.3.15）中的秩的一个略微变体，而后者又是 [13], 第254页中某种秩的变体。它用于 [11] 为任意有限一阶语言的 Fra¨ıss´e 风格定理提供证明框架（也就是说，语言中可能含有函数符号和常量符号）。

定义 5.3。（修正秩）设 $\phi \in L_{\infty\lambda}$。项 t 和公式 ϕ、 $r(t)$、 $r(\phi)$ 的修正秩 通过对其复杂度进行归纳来定义。

$$
\begin{array}{ll}
t = v & r(t) = 0 \\
t = c & r(t) = 1 \\
t = f(s_0, \ldots, s_{n-1}) & r(t) = 1 + r(s_0) + \ldots r(s_{n-1}) \\
\phi = R(t_0, \ldots, t_{m-1}) & r(\phi) = r(t_0) + \ldots r(t_{m-1}) \\
\phi = \text{`}t_0 = t_1\text{'} & r(\phi) = \max\{0, r(t_0) + r(t_1) - 1\} \\
\phi = \neg\psi & r(\phi) = r(\psi) \\
\phi = \psi \longrightarrow \chi & r(\phi) = \max(\{\, r(\psi), r(\chi)\,\}) \\
\phi = \bigwedge \Phi & r(\phi) = \sup\{\, r(\psi) \,:\, \psi \in \Phi\,\} \\
\phi = \bigvee \Phi & r(\phi) = \sup\{\, r(\psi) \,:\, \psi \in \Phi\,\} \\
\phi = \forall V \psi & r(\phi) = r(\psi) + 1 \\
\phi = \exists V \psi & r(\phi) = r(\psi) + 1
\end{array}
$$

注 5.4。注意，对任意公式 ϕ，都有 $d(\phi) \leq r(\phi)$。如果语言是关系型的，那么我们总能得到等式： d 和 r 相同。不过，在没有函数符号但有常元的语言中，我们已经有 $r \neq d$。

非嵌套原子公式在定义（2.1）中已有定义。

定义 5.5. 原子 L-公式 ϕ 若是嵌套的，即并非非嵌套的，也就是说，则它属于以下形式之一:

- $c = d$，其中 c、 $d \in \mathcal{C}$ 是常元符号
- $f(t_0, \ldots, t_{n-1}) = t_n$或 $t_n = f(t_0, \ldots, t_{n-1})$，其中 f是某个 $n < \omega$元函数符号，且 $t_0, \ldots, t_n$是 L项，并非全都是变量符号。
- $R(t_0, \ldots, t_{n-1})$，其中 R是某个 $n < \omega$元关系符号，且$t_0, \ldots, t_{n-1}$是 L项，并非全都是变量符号。

接下来我们说明嵌套原子公式如何等价于非嵌套公式。这部分内容在 [23],§2.6 中以“举例”的方式出现。为完整起见，我们在此给出更详尽的说明。另请参见例如 [11],第八章 §1。

定义 5.6。对于每个原子 L-公式 $\phi(\bar{v})$，其自由变量为 $\bar{v}$，我们递归地定义一个非嵌套的、事实上是正原始的公式 $\phi^{\exists}(\bar{v})$。

对于非嵌套原子公式，我们直接取 $\phi^{\exists} = \phi$。

现在假设 ϕ 是嵌套的。

如果 ϕ 是 $c = d$，其中 c、 d 是常元符号，我们令 $\phi^{\exists}$ 为 $\exists v_0\, v_0 = c \,\&\, v_) = d$。

现在，假设 ϕ 是 $f(t_0, \ldots\ldots, t_{n-1}) = t_n$，其中 f 是某个 $n < \omega$ 元函数符号 n，而 $t_0, \ldots\ldots, t_n$ 是 L-项，其中并非所有项都是变量符号。

假设 $S = \{i_j : j \leq m\}$ 是 $i \leq n$的一个枚举，其中 t_i 不是变量符号。对于 $i \notin S$，令 $v_i = t_i$，并令 $\{v_{i_j} : j \leq m\}$为一组互不相同的变量符号，这些符号均未出现在任何 t_i 中（对 $i < n$而言）。我们将 ϕ' 定义为

$$\exists v_{i_0} \ldots \exists v_{i_m}\ v_{i_0} = t_{i_0} \,\&\, \ldots \,\&\, v_{i_m} = t_{i_m} \,\&\, f(v_0, \ldots, v_{n-1}) = v_n.$$

然后我们将 $\phi^{\exists}$ 定义为

$$\exists v_{i_0} \ldots \exists v_{i_m}\ (v_{i_0} = t_{i_0})^{\exists} \,\&\, \ldots \,\&\, (v_{i_m} = t_{i_m})^{\exists} \,\&\, f(v'_0, \ldots, v'_{n-1}) = v'_n$$

其中，对于 $i \notin S$，有 $v'_i = v_i$；对于 $i = i_j \in S$，有 $v'_i = v_{i_j}$。

ϕ是 $t_n = f(t_0、\ldots\ldots、 t_{n-1})$ 的定义几乎完全相同，我们只需将最后一个合取项的序调换为 $v_n = f(v_0、\ldots\ldots、 v_{n-1})$。

最后，假设 ϕ 是 $R(t_0$、.....、$t_{n-1})$，其中 R 是某个 $n<\omega$ 对应的 n元关系符号，而 t_0、.....、t_{n-1} 是 L项，并非所有项都是变量符号。我们可以采用与前面类似的定义。

假设 $S=\{i_j:\ j\leq m\}$ 是由满足 t_i 不是变量符号的所有 $i<n$构成的集合的一个枚举。对于 $i\notin S$，令 $v_i=t_i$，并令 $\{v_{i_j}:\ j\leq m\}$为一组互不相同的变量符号，其中没有任何一个出现在任意一个 $i<n$的t_i 中。于是我们将 $\phi^\exists$ 定义为

$$\exists v_{i_0}\ \ldots\ \exists v_{i_m}\ (v_{i_0}=t_{i_0})^\exists\ \&\ \ldots\ \&\ (v_{i_m}=t_{i_m})^\exists \\ \&\ R(v'_0,\ldots,v'_{n-1}),$$

其中，当 $i\notin S$ 时，我们有 $v'_i=v_i$；当 $i=i_j\in S$ 时，我们有 $v'_i=v_{i_j}$。

定义5.7。若 ψ 是任意一个 L-公式，则令 $\psi^\exists$ 为由 ψ 导出的公式：对每个原子子公式 ϕ，将 ϕ替换为 $\phi^\exists$。

命题5.8。若 ψ 是任意一个 L-公式，则 $r(\psi)=d(\psi^\exists)$。

证明。由定义直接可得。 ⋆

定理5.9。设 $\phi(\bar v)$ 是一个原子公式，其中 $\bar v=\langle v_0,\ldots,v_{n-1}\rangle$。设 M是一个 L-结构，且 $\bar a=\langle a_0,\ldots,a_{n-1}\rangle\in|M|$。则 $M\models\phi(\bar a)$ 当且仅当$M\models\phi^\exists(\bar a)$。

证明。该定理对非嵌套原子公式显然成立，因为对这些公式而言 $\phi^\exists=\phi$。我们通过对出现在原子公式中的 L-项的复杂度作归纳法来证明定理的其余部分。

设 $\phi(\bar v)$为“$c=d$”，其中 $c,d\in|C|$ 为常元符号。设 $\mathfrak{c}^M$ 与 $\mathfrak{d}^M$ 分别为 c 与 d 在 M 中的解释。

则 $M\models(c=d)(\bar a)$当且仅当 $M\models\mathfrak{c}^M=\mathfrak{d}^M$。然而 $M\models\mathfrak{c}^M=\mathfrak{d}^M$当且仅当 $M\models\exists x(x=\mathfrak{c}^M\ \&\ x=\mathfrak{d}^M)$，且后者成立当且仅当$M\models\exists x(x=c\ \&\ x=d)(\bar a)$，即 $M\models(c=d)^\exists(\bar a)$。

当 $\phi(\bar v)$ 是“$\tau_m(\bar v)=f(\tau_0(\bar v)\ldots,\tau_{m-1}(\bar v))$”，且对于$j\leq m$，我们有 $\tau_j(\bar v)$ 是 L-项（它们并非全都是变量符号），而 f 是一个 m 元函数符号；以及当 $\phi(\bar v)$ 是“$R(\tau_0(\bar v)\ldots,\tau_{m-1}(\bar v))$”，且对于$j<m$，$\tau_j(\bar v)$ 是 L-项（它们并非全都是变量符号），而 R 是一个 m 元关系符号时，这些情形下的证明类似。⋆

推论5.10。如果 ψ 是一个 L-公式，M 是一个 L-结构，并且 $\bar a\in{}^n|M|$，那么 $M\models\psi(\bar a)$ 当且仅当 $M\models\psi^\exists(\bar a)$。

证明。根据公式实例化的解释的归纳定义。⋆

6. 卡普定理

我们给出卡普（[26]）的一项结果的另一种证明，该结果推广了 Fra¨ıss´e（[16]）关于有限的 α的结果。

定义 6.1. 设 M, N 是 L-结构，且 $\alpha \in$ 属于序数类。那么 $M \equiv_\alpha N$ 当且仅当 M 和 N 满足相同的修正秩为 $\leq \alpha$ 的语句。

定理 6.2. 设 α 是一个序数。设 M, N 是 L-结构，$\bar{a} \in {}^{<\lambda}M$，$\bar{b} \in N$ $h\ \bar{a} \longrightarrow \bar{b}$ $i <$ $\bar{a}$ $h\ a_i = b_i$ lh($\bar{a}$)且：，使得对于所有 lh()，我们都有 ()。

那么，$h \in Q_\alpha$ 当且仅当对于所有非嵌套的 L-公式 $\phi(\bar{v})$，满足 $d(\phi) = \alpha$，我们¯有 ϕ 在 h 下是不变的：$M \models \phi(\bar{a})$ 当且仅当 $N \models \phi(b)$。

¯因此，根据命题（*5.8*），$(M, \bar{a}) \sim_\alpha (N, b)$ 当且仅当对于所有 L-¯ 公式 $\psi(\bar{v})$，满足 $r(\psi) = \alpha$，我们有 $M \models \psi(\bar{a})$ 当且仅当 $N \models \psi(b)$。

证明。参见 [36], 定理（9.27）：（3）推出（1），其从左到右的方向沿用了 [36],定理（7.47）中（ii）推出（i）的证明。反向（从右到左）请参见[36], 定理（7.47）中（i）推出（ii）的证明，但需将“有限的”改为“大小为 $< \lambda$”，取大小为 $< \mu$的扩张而非单元素集，并要求 P_β 中的函数必须扩张h。⋆

推论 6.3。设 M, N 是 L-结构，且 $\alpha \in$ 序数类。那么，$M \sim_\alpha N$ 当且仅当 $M \equiv_\alpha N$。

定理 6.4。（卡普定理）设 M 和 N 是 L-结构。那么，$M \equiv_\alpha N$当且仅当$F^\alpha_{M,\emptyset} = F^\alpha_{N,\emptyset}$。

证明。结合定理（6.2）和命题（命题（3.7）。 ⋆

7. Hjorth 分析与博弈

我们采用“无公式”的斯科特-卡普分析方法，其优点之一是相对灵活。因此，在本节中，我们能够给出先前结果的一个版本，适用于 Hjorth 的广义分析；[24], [10], [9], 该分析是在拓扑群作用的背景下进行的。在这一背景下，要以传统方式给出斯科特-卡普分析的一个版本——即一个模型满足由另一个模型推导出的公式——并不明晰。

我们首先给出 Drucker 对 Hjorth 工作的版本（[10]）的一个版本。Hjorth（以及 Drucker）研究波兰群作用，其中群上的拓扑具有可数基。这对于某些描述集合论

方面十分重要，即他们的工作中需要可有效性的那些方面。这里我们在没有这一限制的情况下开展工作。

在本节中，设 X 是一个拓扑空间， G是一个在 X 上连续作用的拓扑群。

记号 7.1. 用 $\mathcal{T}^*$ 表示 G 的所有非空开子集构成的集合。

记号 7.2. 对于 $U \in \mathcal{T}^*$，令 $U\prime \lhd U$简写为 $U\prime \in \mathcal{T}^*$& $U\prime \subseteq U$。我们经常采用这一约定来简化量化表达式。因此，若 ϕ是某个数学公式，我们就将 $\exists U\prime \lhd U\, \phi$写作 $\exists U' \in \mathcal{T}^*$($U\prime \subseteq U$& ϕ)。

我们通过归纳法，定义一系列以序数为指标、作用于 $X \times \mathcal{T}^*$ 中元素对上的非对称关系。

定义 7.3. 对于 $U, V \in \mathcal{T}^*$ 和 $x, y \in X$，我们定义

$$\begin{aligned}
&(x,U) \leq_0 (y,V) \text{ if } \overline{U \cdot x} \subseteq \overline{V \cdot y},\\
&\text{for every ordinal } \alpha,\ (x,U) \leq_{\alpha+1} (y,V) \text{ if}\\
&\qquad \forall U' \lhd U\ \exists V' \lhd V\ (y,V') \leq_\alpha (x,U'),\\
&\text{for every limit ordinal } \lambda,\ (x,U) \leq_\lambda (y,V) \text{ if}\\
&\qquad \forall \alpha < \lambda\ (x,U) \leq_\alpha (y,V).
\end{aligned}$$

引理 7.4. 设 $\alpha \in$序数类

(i) 关系 $\leq_\alpha$ 是传递的。*(ii)* 设 $U, U', V, V' \in \mathcal{T}^*$且 $U' \subseteq U$和 $V \subseteq V'$，并设 $x, y \in X$。那么，$(x,U) \leq_\alpha (y,V)$ 蕴含 $(x,U') \leq_\alpha (y,V')$。*(iii)* 如果 $\beta < \alpha$且 $(x,U) \leq_\alpha (y,V)$，那么 $(x,U) \leq_\beta (y,V)$

证明。 参见 [10], 引理 (3.2) 和引理 (3.4)。（唯一不显然的条目是 (c)。）$\star$

我们遵循经典做法（例如，参见 [18] 中的叙述），并以两种方式定义由序数索引的、定义在 $X \times \mathcal{T}^*$ 中的有序对上的等价关系。一种方式是将 $\leq_\alpha$ 对称化，另一种方式则采用内在定义。

定义 7.5. 对于 $\alpha \in$ 序数类, $(x,U), (y,V) \in X \times \mathcal{T}^*$ 定义

$$(x,U) \approx_\alpha (y,V) \text{ if } (x,U) \leq_\alpha (y,V)\ \&\ (y,V) \leq_\alpha (x,U).$$

（[18]）使用记号 $\equiv_\alpha$ 表示对称化，不过我们已经用这个符号表示直到秩 α的等价关系，因此这里使用 $\approx_\alpha$。

定义 7.6. 对于 (x,U)、$(y,V) \in X \times \mathcal{T}^*$，定义

$$(x,U) \sim_0 (y,V) \text{ if } \overline{U \cdot x} = \overline{V \cdot y},$$
$$\text{for every ordinal } \alpha,\ (x,U) \sim_{\alpha+1} (y,V) \text{ if } (x,U) \sim_\alpha (y,V) \text{ and}$$
$$\forall U' \lhd U\ \exists V' \lhd V\ (y,V') \sim_\alpha (x,U'), \text{ and}$$
$$\forall V' \lhd V\ \exists U' \lhd U\ (x,U') \sim_\alpha (y,V'),$$
$$\text{for every limit ordinal } \lambda,\ (x,U) \sim_\lambda (y,V) \text{ if}$$
$$\forall \alpha < \lambda\ (x,U) \sim_\alpha (y,V).$$

引理 7.7. 设 $\alpha \in$序数类

(i) 关系 $\approx_\alpha$ 是传递的。*(ii)* 若 $\beta < \alpha$ 且$(x,U) \approx_\alpha (y,V)$，则$(x,U) \approx_\beta (y,V)$*(iii)* 关系 $\sim_\alpha$ 是传递的。*(iv)* 若 $\beta < \alpha$ 且$(x,U) \sim_\alpha (y,V)$，则$(x,U) \sim_\beta (y,V)$

证明。 大部分内容显而易见；对于 (ii)，还可使用引理 (7.4(iii))。 ⋆

接下来，我们补充一些关于博弈及所定义关系的观察，这些观察类似于经典模型论中的相关结果，例如可见于 [36],[33], [27]和 [28]。

定义 7.8. 设 (x,U)、$(y,V) \in X \times \mathcal{T}^*$ 且 $\alpha \in$序数类，$0 < \alpha$。定义一个双人（动态埃伦福伊希特-弗拉ıss´é 式）博弈$\mathcal{G}^s(x,U,y,V,\alpha)$如下。

Formally define $z_{-1} = x$, $A_{-1} = U$, $B_{-1} = V$ and $\alpha_{-1} = \alpha$.

在第 i 回合，玩家 I 选择三元组（z_i，A_i，α_i），玩家 II 则以 B_i 作答。

玩家必须遵守以下规则（否则立即输掉博弈）。

玩家 I 必须选择 $\alpha_i < \alpha_{i-1}$ 和 $z_i \in \{x,\ y\}$。

此外，玩家 I 和玩家 II 必须确保：若 $z_i = z_{i-1}$，则 $A_i \lhd A_{i-1}$ 且 $B_i \lhd B_{i-1}$；若 $z_i \neq z_{i-1}$，则 $A_i \lhd B_{i-1}$ 且 $B_i \lhd A_{i-1}$。

玩家 II 还必须确保，将 $z_i^\dagger$ 设为 $\{x,\ y\} \setminus \{z_i\}$ 中唯一的元素，

$$\overline{B_i \cdot z_i^\dagger} = \overline{A_i \cdot z_i}$$

定义 7.9. 设 $(x,\ U)$、$(y,\ V) \in X \times \mathcal{T}^*$ 和 $\alpha \in$ 序数类，$0 < \alpha$。定义一个双人（动态埃伦福伊希特–弗雷斯风格）博弈 $\mathcal{G}^a(x,\ U,\ y,\ V,\ \alpha)$ 如下。

形式化地，对于 $i \in \omega$，定义 $z_{2i} = x$、$z_{2i}^\dagger = y$ 和 $z_{2i-1} = y$、$z_{2i-1}^\dagger = x$。此外，令 $A_{-1} = U$、$B_{-1} = V$ 和 $\alpha_{-1} = \alpha$。

在第 i 回合，玩家 I 打出一对（A_i， α_i），玩家 II 则以 B_i 回应。

玩家必须遵守以下规则（否则立即输掉比赛）。

玩家 I 必须选择 $\alpha_i < \alpha_{i-1}$ 并确保 $A_i \lhd B_{i-1}$。玩家 II 必须确保 $B_i \lhd A_{i-1}$，并且 $B_i \cdot z_i^\dagger \subseteq A_i \cdot z_i$.

引理 7.10。设 (x, U)，$(y, V) \in X \times T^*$。若 $\alpha \in$ 序数类 是极限序数，则

- 玩家 II 对所有 $\beta \in (0, \alpha)$，拥有 $G^s(x, U, y, V, \alpha)$ 的获胜策略，当且仅当其拥有 $G^s(x, U, y, V, \beta)$ 的获胜策略。
- 玩家 II 对所有 $\beta \in (0, \alpha)$，拥有 $G^a(x, U, y, V, \alpha)$ 的获胜策略，当且仅当其拥有 $G^a(x, U, y, V, \beta)$ 的获胜策略。

证明。对于玩家 I 的任意第一步 (z_0, A_0, α_0)，玩家 II 可以通过采用其在 $\mathcal{G}^s(x, U, y, V, \alpha_0{+}1)$（相应地为 $\mathcal{G}^a(x, U, y, V, \alpha_0{+}1)$）中的获胜策略来回应，因为 α 是极限序数，因此 $\alpha_0 < \alpha$ 蕴含 $\alpha_0 + 1 < \alpha$。 $\star$

命题 *7.11*。设 (x, U)、$(y, V) \in X \times T^*$。假设 $(x, U) \sim_0 (y, V)$。则对所有满足 $0 < \alpha$ 的 $\alpha \in$ 序数类，我们有 $(x, U) \sim_\alpha (y, V)$ 当且仅当玩家II对 $G^s(x, U, y, V, \alpha)$ 拥有获胜策略。

证明。设 $\alpha \in$ 序数类满足 $0 < \alpha$。

假设 $(x, U) \sim_\alpha (y, V)$。我们通过对 ω 使用归纳法定义一个获胜策略$\sigma = \langle \sigma_i : i \in \omega \rangle$，用于 II，使得对每个 $j \in (0, \omega)$，若对所有 $i < j$，玩家I已下出 (z_i, A_i, α_i) 且玩家 II 已遵循 σ_i，则 $(z_{j-1}, A_{j-1}) \sim_{\alpha_{j-1}} (z_{j-1}^\dagger, \sigma_{j-1}(\langle (z_i, A_i, \alpha_i) : i < j \rangle))$。

假设我们已经为 $i < j$ 定义了 σ_i，现在希望定义σ_j。假设玩家I进行（z_j， A_j，α_j）。我们有 $\alpha_j < \alpha_{j-1}$，因此（z_{j-1}， A_{j-1}）$\sim_{\alpha_j+1}$（$z_{j-1}^\dagger$， B_{j-1}）。

若$z_j = z_{j-1}$，则 $A_j \lhd A_{j-1}$，且根据$\sim_{\alpha_j+1}$ 的定义，存在某个$B \lhd B_{j-1}$，使得（z_j， A_j）$\sim_{\alpha_j}$（$z_j^\dagger$， B）。令σ_j（$\langle$（z_i， A_i， α_i）： $i \leq j \rangle$）$= B$。

若 $z_j \neq z_{j-1}$，则 $A_j \lhd B_{j-1}$，且根据$\sim_{\alpha_j+1}$ 的定义，存在某个$B \lhd A_{j-1}$，使得（z_j， A_j）$\sim_{\alpha_j}$（$z_j^\dagger$， B）。令σ_j（$\langle$（z_i， A_i， α_i）： $i \leq j \rangle$）$= B$。

显然，这对 II 来说是一种获胜策略。

反之，假设 $\sigma = \langle \sigma_i : i \in \omega \rangle$ 是玩家 II的获胜策略。我们对序数进行归纳。对于 $\alpha \in$On，归纳假设是：该命题对所有 $\beta \in (0, \alpha)$ 都成立；也就是说，对所有 (x, U)、$(y, V) \in X \times T^*$，都有 $(x, W) \sim_\beta (y, Z)$，当且仅当玩家 II 在 $\mathcal{G}^s(x, W, y, Z, \beta)$ 中拥有获胜策略。

下面讨论后继序数 $\alpha+1$的情形。假设 $U' \triangleleft U$。考虑这样一局博弈：玩家 I的第一步是 $(x, U'\alpha)$。令 $\sigma_0((x, U'\alpha)) = B$，其中 $B \triangleleft V$。由于 σ是玩家 II在 $\mathsf{G}^s(x, U, y, V, \alpha+1)$ 中的获胜策略，且 $\sigma_0((x, U'\alpha)) = B$，我们有 σ_i： $0 < i < \alpha+1$是玩家 II在 $\mathsf{G}^s(x, U', y, B, \alpha)$ 中的获胜策略。因此，根据归纳假设，$(x, U') \sim_\alpha (y, B)$。类似地，如果 $V' \triangleleft V$，则考虑这样一局博弈：玩家 I的第一步是 (y, V')。令 $\sigma_0((y, V'\alpha)) = B$，这次其中$B \triangleleft U$。同样，由于 σ是玩家 II在 $\mathsf{G}^s(x, U, y, V, \alpha+1)$ 中的获胜策略，且 $\sigma_0((y, V'\alpha)) = B$，我们有 σ_i： $0 < i < \alpha+1$是玩家 II在 $\mathsf{G}^s(y, B, x, V, \alpha)$ 中的获胜策略。因此，根据归纳假设，$(y, V') \sim_\alpha (x, B)$。于是 $(x, U) \sim_{\alpha+1} (y, V)$。（注意，这个论证也涵盖了 $\alpha+1=1$时的基例。）

根据引理（7.10），若 α 是极限序数，则玩家 II 在 $\mathsf{G}^s(x, U, y, V, \alpha)$ 中有获胜策略，当且仅当对于所有 $\beta \in (0, \alpha)$，玩家 II 在 $\mathsf{G}^s(x, U, y, V, \beta)$ 中有获胜策略。根据归纳假设，后者成立当且仅当对于所有 $\beta \in (0, \alpha)$，我们有 $(x, U) \sim_\beta (y, V)$。根据定义，这就意味着 $(x, U) \sim_\alpha (y, V)$。$\star$

命题 *7.12*。设 (x, U)、$(y, V) \in X \times T^*$。假设 $(x, U) \leq_0 (y, V)$。那么对于所有满足 $0 < \alpha$ 的 $\alpha \in$ 序数类，我们有 $(x, U) \leq_\alpha (y, V)$，当且仅当玩家 II 在 $\mathcal{G}^a(x, U, y, V, \alpha)$ 中有获胜策略。

证明。 这个证明与命题（7.11）的证明非常相似。

设 $\alpha \in$ 为带有 $0 < \alpha$ 的序数类。

假设 $(x, U) \leq_\alpha (y, V)$。我们通过对 ω 进行归纳法，定义一个获胜策略 $\sigma = \langle \sigma_i : i \in \omega \rangle$，使得对于每个 $j \in (0, \omega)$，如果所有 $i < j$玩家 I都走了 (z_i, A_i, α_i)，且玩家 II 遵循了 σ_i，那么

$$(z^\dagger_{j-1}, \sigma_{j-1}(\langle (z_i, A_i, \alpha_i) : i < j \rangle)) \leq_{\alpha_{j-1}} (z_{j-1}, A_{j-1}).$$

假设我们已为 $i < j$ 定义了 σ_i，现在希望定义 σ_j。假设玩家 I 走了 (z_j, A_j, α_j)。我们有 $\alpha_j < \alpha_{j-1}$，因此 $(z^\dagger_{j-1}, B_{j-1}) \leq_{\alpha_j+1} (z_{j-1}, A_{j-1})$。

根据 $\leq_{\alpha_j+1}$ 的定义，存在某个 $B \triangleleft A_{j-1}$，使得 $(z^\dagger_j, B) \leq_{\alpha_j} (z_j, A_j)$。令 $\sigma_j(\langle (z_i, A_i, \alpha_i) : i \leq j \rangle) = B$。

显然，这是 II 的获胜策略。

反过来，假设 $\sigma = \langle \sigma_i : i \in \omega \rangle$是玩家 II的获胜策略。我们对序数使用归纳法。对于 $\alpha \in$On，归纳假设是：该命题对所有 $\beta \in (0, \alpha)$ 都成立；也就是说，对于所有 (x, U)、$(y, V) \in X \times \mathcal{T}^*$，我们有 $(x, W) \leq_\beta (y, Z)$，当且仅当玩家 II在 $\mathcal{G}^a(x, W, y, Z, \beta)$ 中有获胜策略。

我们来讨论后继序数 $\alpha+1$ 的情形。假设 $U' \triangleleft U$。考虑这样一局博弈：玩家 I的第一步是 $(x, U' \alpha)$。令 $\sigma_0((x, U' \alpha)) = B$，其中 $B \triangleleft V$。由于 σ 是玩家 II 在 $\mathsf{G}^s(x, U, y, V, \alpha+1)$ 中的获胜策略，并且 $\sigma_0((x, U' \alpha)) = B$，因此 σ_i： $0 < i < \alpha+1$ 是玩家 II 在 $\mathsf{G}^s(y, B, x, U', \alpha)$ 中的获胜策略。于是，根据归纳假设，$(y, B) \leq_\alpha (x, U')$。因此 $(x, U) \leq_{\alpha+1} (y, V)$。（注意，这个论证也涵盖基例 $\alpha+1=1$。）

根据引理（7.10），如果 α 是极限序数，那么玩家 II 在 $\mathsf{G}^s(x, U, y, V, \alpha)$ 中有获胜策略，当且仅当对于所有 $\beta \in (0, \alpha)$，玩家 II 在 $\mathsf{G}^s(x, U, y, V, \beta)$ 中有获胜策略。根据归纳假设，后者成立，当且仅当对于所有 $\beta \in (0, \alpha)$，我们都有 $(x, U) \sim_\beta (y, V)$。根据定义，这意味着 $(x, U) \sim_\alpha (y, V)$。

⋆

命题（7.11）和命题（7.12）的证明与命题（7.17）的证明类似，只需将此处定义的博弈概念替换为 [36], 命题（7.17）中的博弈及 $\sim_\alpha$ 概念。不过，两者也有区别：我们直接使用关系 $\sim_\alpha$ 和 $\leq_\alpha$ 进行论证，而不是像 V¨a¨an¨anen 那样定义来回序列。

这里可以定义一种往返序列的概念。序列中各集合的组成元素是函数，其论域构成$\mathcal{T}^*$中元素的一个递减序列。不过，目前尚不清楚如何证明与 [36],命题（7.17）类似的结果，除非坚持要求函数$\langle (U, V) \rangle$ 属于往返序列中的每个集合；而这会导致类似于命题（7.11）和命题（7.12）的证明，只是增加了额外的记号负担，却没有带来新的思路。

推论 *7.13*。设 $(x, U), (y, V) \in X \times \mathcal{T}^*$。假设 $(x, U) \approx_0 (y, V)$。那么对于所有满足 $0 < \alpha$ 的 $\alpha \in$ 序数类，我们有 $(x, U) \approx_\alpha (y, V)$，当且仅当玩家 II 在 $G^a(x, U, y, V, \alpha)$ 中有获胜策略，并且在 $G^a(y, V, x, U, \alpha)$ 中也有获胜策略。

定义 7.14. 设 (x, U)、$(y, V) \in X \times \mathsf{T}^*$。假设 $(x, U) \approx_0 (y, V)$。则对所有满足 $0 < \alpha$ 的 $\alpha \in$ 序数类，令 $\mathsf{G}^z(x, U, y, V, \alpha)$ 为如下博弈：玩家 I 首先选择 (x, U) 或 (y, V)，然后若玩家 I 选择了 (x, U)，则双方进行一局 $\mathsf{G}^a(x, U, y, V, \alpha)$；若玩家 I 选择了 (y, V)，则双方进行一局 $\mathsf{G}^a(y, V, x, U, \alpha)$。

粗略地说，$\mathcal{G}^z(x, U, y, V, \alpha)$ 是博弈 $\mathcal{G}^a(x, U, y, V, \alpha)$ 与 $\mathcal{G}^a(y, V, x, U, \alpha)$ 的余积。

推论 7.15. 设 (x, U)、$(y, V) \in X \times \mathcal{T}^*$。假设 $(x, U) \approx_0 (y, V)$。当且仅当玩家 II 在 $G^z(x, U, y, V, \alpha)$中拥有获胜策略时，我们有 $(x, U) \approx_\alpha (y, V)$。

8. Hjorth 分析：一个卡普型定理

现在我们将定义与 §3 中定义的类似的函数，并证明类似的结果。

定义 8.1. 对于 $(x, U) \in X \times \mathcal{T}^*$集合 $\mathrm{dom}(I_{x,U}) = 1$以及 $I_{x,U}(0) = U \cdot \overline{x_\circ}$

定义 8.2. 我们归纳定义函数 $F^\alpha_{x,U}$, $G^\alpha_{x,y,U}$和 $H^\alpha_{x,U}$。对于$\beta < \alpha$ ，我们将有

$$F^\beta_{x,U} \subseteq F^\alpha_{x,U},\ H^\beta_{x,U} \subseteq H^\alpha_{x,U} \text{ and } G^\beta_{x,y,U} \subseteq G^\alpha_{x,y,U}.$$

Let

$$F^0_{x,U} = G^0_{x,y,U} = H^0_{x,U} = I_{x,U}.$$

域 $F^\alpha_{x,U}$ 中的元素要么是 1 的元素，要么是一个有序对，其第二项是小于 α的序数。$G^\alpha_{x,y,U}$ 和$H^\alpha_{x,U}$ 的域中的元素要么是 1 的元素，要么是三元组，其末项是小于α的序数。对于 $0 < \beta < \alpha$ ，我们将有

$$F^\alpha_{x,U} \restriction \beta = F^\beta_{x,U},\ H^\alpha_{x,U} \restriction \beta = H^\beta_{x,U} \text{ and } G^\alpha_{x,y,U} \restriction \beta = G^\beta_{x,y,U}.$$

因此，在每种情况下，对于极限 α ，函数完全由 $\beta < \alpha$的定义确定。此外，对于 $\alpha + 1$ 以及其定义域中末项为 $\beta < \alpha$ 的元组，这些函数由 α的定义确定。

最后，我们处理函数论域中末元素为 α 的 $\alpha + 1$ 元组。

如果存在某个 $U\prime \in \mathcal{T}^*$，满足 $U' \subseteq U$使得$H^\alpha_{x,U'} = H^\alpha_{y,V}$，则令 $H^{\alpha+1}_{x\,U}$,$(y, V, \alpha) = 1$ ；否则 $= 0$ 。

类似地，如果存在某个 $U\prime \in \mathcal{T}^*$，满足 $U' \subseteq U$使得 $F^\alpha_{x,U'} = F^\alpha_{y,V}$，则令 $F^{\alpha+1}_{x\,U}$, $(F^\alpha_{y,V}, \alpha) = 1$；否则 $= 0$。

论域 $G^{\alpha+1}_{x}{}_{,y,U}$ 中末元素为 α 的元素都是形如 (z, W, α) 的三元组，其中 $z \in \{x, y\}$。令 $z^\dagger$ 为 $\{x, y\} \setminus \{z\}$ 的唯一元素。$G^{\alpha+1}_{x}{}_{,y,U} = 1$，如果存在某个 $U' \in \mathsf{T}^*$，满足 $U' \subseteq U$使得 $G^\alpha_{x,y,U'} = G^\alpha_{z}{}_{,z^\dagger,W}$。

与 §3 类似，我们有以下两个引理和一个命题。证明与引理（3.4）、引理（3.5）和命题（3.7）的证明基本相同，只有归纳法的基例不同。

引理 8.3. 设 (x, U)、(y, V)、$(z, W) \in X \times \mathsf{T}^*$且 $\beta < \alpha \in$序数类。则

$$F^\alpha_{x,U}(F^\alpha_{y,V}, \alpha) = H^\alpha_{x,U}(y, V, \alpha).$$

此外，

$$F^\alpha_{x,U} = F^\alpha_{z,W} \textit{ if and only if } H^\alpha_{x,U} = H^\alpha_{z,W}.$$

引理 8.4。 设 $x, y \in X, U, U' \in T$ *满足 $U\prime \subseteq U$，并设 $0 < \beta < \alpha \in$序数类

$$F^{\alpha}_{x,U}(F^{\beta}_{x,U'}, \beta) = G^{\alpha}_{x,y,U}(x, U', \beta) = H^{\alpha}_{x,U}(x, U', \beta) = 1.$$

这为我们给出如下命题，它似乎是在此设定下我们所能得到的最接近经典卡普/Fra¨ıss´e 型定理的结果。

命题 8.5. 设 x、 $y \in X$、 U、 $V \in T$ * 与 $\alpha \in$ 序数类。则 $H^{\alpha}_{x,U} = H^{\alpha}_{y,V}$当且仅当 $(x, U) \sim_{\alpha} (y, V)$，且对于 $0 < \alpha$，当且仅当玩家 II 对 $G^{s}(x, U, y, V, \alpha)$拥有获胜策略。

参考文献

[1] Andreas Brunner，《海廷代数上层模型论中的常元法》，博士论文，圣保罗大学，(2000)。[2] Andreas Brunner，《层中的模型论》，南美逻辑学杂志，2(2)，(2016)，379–404。[3] Andreas Brunner、Charles Morgan 和 Darllan Concep،c˜ao Pinto，《（预）层模型论的一些贡献》，预印本，arXiv:2409.18089 (2025)，74页。[4] Andreas Brunner、Charles Morgan 和 Darllan Concep،c˜ao Pinto，《（预）层模型论的一些贡献 II：来回法》，预印本，(2025)，25页。[5] Xavier Caicedo 和 Antonio Sette，《层之间的初等等价》，预印本，(1992)。[6] Georg Cantor，1895。《超限集合论基础的贡献》I，《数学年刊》，46，(1895)，481–512。[7] Max Dickmann，《大型无穷语言》，Elsevier (1975)。[8] Max Dickmann，《更大的无穷语言》，载于 Jon Barwise 和 Solomon Feferman 编，《模型论逻辑》，Springer-Verlag，(1985)，317-363。[9] Ohad Drucker，《Hjorth 秩的有界性原理》，《数学逻辑档案》，61，(2022)，223-232。[10] Ohad Drucker，《一般波兰群作用的 Hjorth 分析》，预印本，arxiv:1512.06369v1 (2015)，21页。[11] Heinz-Dieter Ebbinghaus、J¨org Flum 和 Wolfgang Thomas，《数理逻辑》（第二版），数学本科生教材，施普林格，(1994)。[12] Andrzej Ehrenfeucht，《博弈在形式化理论完备性问题中的应用》，《数学基础》，49，(1961)，129-141。[13] J¨org Flum，《一阶逻辑及其扩展》，载于 Gert Heinz M¨uller、Arnold Ober-schelp 和 Karl Potthoff 编，《ISILC 逻辑会议：基尔 1974 年国际暑期学院与逻辑学讨论会论文集》，施普林格 (1975)，248-310。[14] Roland Fra¨ıss´e，《关系系统的一种新分类》，《科学院会议周报》，230，(1950)，1022-1024。[15] Roland Fra¨ıss´e，《关于关系系统的若干分类》，博士论文，巴黎大学，1953年，发表于《阿尔及尔大学科学出版物》A1辑，(1954)，35–182。[16] Roland Fra¨ıss´e，《研究由受限同构定义的关系类中的某些算子》，《数学逻辑与数学基础杂志》，2，(1956)，59-75。[17] Mike Fourman 和 Dana Scott，《层与逻辑》，载于 Mike Fourman、Chris Mulvey 和 Dana Scott 编《层的应用》，数学讲义，753，施普林格出版社，(1979)，302-401。[18] Matthew Harrison-Trainor，《可数结构的 Scott 复杂度导论及近期成果综述》，《符号逻辑通报》，28，(2022)，71–103。[19] Felix Hausdorff，《序类型研究》，《莱比锡萨克森科学院学报》，59，(1907)，84–159。

[20] Felix Hausdorff, 《集合论基础》, Veit & Comp, 莱比锡, 1914年。[21] Denis Higgs, 《布尔值集合论的范畴方法》, 预印本, 滑铁卢大学, (1973)。[22] Denis Higgs, 《完备海廷代数值集合的托普斯中的单射性》, 《加拿大数学杂志》, 36(3), (1984), 550-568。[23] Wilfrid Hodges, 《模型论》, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1993年。[24] Greg Hjorth, 《轨道的精细结构与博雷尔复杂度》, 预印本, 加州大学洛杉矶分校, (2010), 16页。[25] Edward Huntington, 《作为一种序类型的连续统：现代理论概述》, 《数学年刊》, 6, (1905), 151–184。[26] Carol Karp, 《有限量词等价》, 载于 John Addison、Leon Henkin 和 Alfred Tarski 编, 《模型理论》, 1963年伯克利国际研讨会论文集, North-Holland (1965), 407-412。[27] David Marker, 《模型论：导论》, 数学研究生教材, 217, 施普林格, (2002)。[28] David Marker, 《无穷模型论讲义》, 逻辑讲义, 46, 剑桥大学出版社, (2016)。[29] Francisco Miraglia, 《偏序结构与层导论》, 当代逻辑丛书, 1, Polimetrica, 国际科学出版社, 米兰, (2006)。[30] Bruno Poizat, 《模型论教程》, 《当代数理逻辑导论》, 施普林格, (2000)。[31] Bruno Poizat, 《模型论课程：当代数理逻辑导论》, Nur al-Mantiq wal-Ma’rifah, (1985)。[32] Jacob Plotkin, 《谁把“往返”放进了往返法？》, 载于 John Crossley、Jeffrey Remmel、Richard Shore 和 Moss Sweedler 编, 《逻辑方法：献给 Anil Nerode 六十岁生日》, 计算机科学与应用逻辑进展, 12, Birkhäuser, 波士顿, (1993), 705–712。[33] Philipp Rothmaler, 《模型论导论》, 泰勒-弗朗西斯出版集团, 纽约, (2000)。[34] Dana Scott, 《含可数长度公式和有限量词串的逻辑》, 载于 John Addison、Leon Henkin 和 Alfred Tarski 编, 《模型理论》, 1963年伯克利国际研讨会论文集, North-Holland, (1965), 329-41。[35] Charles Silver, 《谁发明了康托尔往返论证？》, 《现代逻辑》, 4(1), (1994), 74–78。[36] Jouko V¨a¨an¨anen, 《模型与博弈》, 剑桥大学出版社, (2011)。[37] Jouko V¨a¨an¨anen, 《二阶逻辑的模型论》, 载于 Jose Iovino 编《超越一阶模型论》第二卷, 查普曼与霍尔, (2023), 290-316。

数学系, 巴伊亚联邦大学, 米尔顿·桑托斯大道 s/n, S/N, 翁迪纳, 萨尔瓦多, 巴伊亚, 巴西。邮政编码：40170-110。

电子邮箱： andreas@dcc.ufba.br

电子邮箱： charlesmorgan@ufba.br

电子邮箱： darllan@ufba.br