arXiv:2602.07703v1 [math.AC] 7 Feb 2026

通过广义冠积的扩展研究带毛图的广义二项式边理想

J. ANUVINDA、RANJANA MEHTA 和 KAMALESH SAHA

摘要。本文在一个显著更广泛的图类中开展研究，系统考察带毛图的广义二项式边理想。我们扩展了广义冠积的概念，并通过这一扩展框架研究深度、（Castelnuovo–Mumford）正则性以及 Cohen–Macaulay 性质等基本代数不变量。特别地，我们为所扩展的图类建立了广义二项式边理想深度的精确下界，并进一步为该图类的一个广泛子类给出了明确的深度公式，由此恢复了带毛图的深度公式。我们还建立了正则性的精确上界；对于无间隙图上的带毛图的二项式边理想，则确定了正则性的精确值。最后，对于所扩展的图类，我们给出了所有 Cohen–Macaulay 二项式边理想的组合分类，并由此得到 Cohen–Macaulay 二项式边理想的一种新构造。

1. 引言

设 $G = (V(G), E(G))$ 是一个顶点集为 $V(G) = [n] = \{1, \ldots, n\}$ 的简单图。考虑域 K 上的多项式环 $R = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$。$G$ 的二项式边理想 为

$$J_G = \langle x_i y_j - x_j y_i \mid \{i, j\} \in E(G) \text{ with } i < j \rangle \subset R.$$

这类理想由 Herzog 等人 [14], 和 Ohtani [23] 独立引入。Rauh [25] 后来提出了这类理想的一个自然扩展，称为广义二项式边理想；Ene-Herzog-Hibi-Qureshi [12] 又将其推广为图对的二项式边理想。令 m, n 为正整数，并设 $R = K[x_{i,j} \mid i \in [m],\ j \in [n]]$。对于分别定义在 $[m]$ 上的简单图 G_1 和定义在 $[n]$ 上的简单图 G_2，以及边 $e = \{i, j\} \in E(G_1)$、$f = \{k, l\} \in E(G_2)$，其中 $i < j$ 和 $k < l$，指定二阶子式 $p_{(e,f)} = [i\ j \mid k\ l] = x_{ik}x_{jl} - x_{il}x_{jk}$。图对 (G_1, G_2) 的广义二项式边理想 为

$$J_{G_1,G_2} = \left\langle p_{(e,f)} \mid e \in E(G_1), f \in E(G_2) \right\rangle \subset R.$$

当 $G_1 = K_m$ 是完全图时，$J_{K_m,\ G_2}$ 成为一个根理想，称为与 G_2 相关联的广义二项式边理想，该概念由 [25], 引入，而情形 $m = 2$ 则恢复了 G_2 的通常二项式边理想。

过去十五年来，研究二项式边理想及其广义形式的兴趣显著增长。与二项式边

2020 数学主题分类。主要分类：13F65、13D02、13C15；次要分类：13C14、05E40。关键词与短语。广义二项式边理想、胡须图、深度、正则性、Cohen-Macaulay 环。

理想相比，广义二项式边理想仍未得到充分研究。关于二项式边理想的全面介绍，请参阅综述文章、书籍和学位论文 [10, 15, 19, 27]。关于广义二项式边理想的最新进展，请参见[1, 2, 3, 8, 16, 18, 25, 31, 32]。在我们的研究中起核心作用的两个同调不变量是深度和 Castelnuovo-Mumford 正则性（简称正则性）。对于一个有限生成的分次 R-模 M，深度 定义为

$$\operatorname{depth}(M) = \min\{i \mid H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0\},$$

其中， $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ 表示 R 关于其唯一的齐次极大理想 $\mathfrak{m}$ 的 M 局部上同调模。 M 的正则性 定义为

$$\operatorname{reg}(M) = \max\{j - i \mid \beta_{i,j}(M) \neq 0\},$$

其中，$\beta_{i,j}(M)$ 是 M 的分次 Betti 数。根据 Auslander-Buchsbaum 公式，已知深度就等价于已知投射维数。由于投射维数与正则性共同决定 Betti 表的范围，因此深度和正则性在估计极小自由分解的规模方面起着关键作用。

本文研究胡须图的（广义）二项式边理想的深度、正则性和 Cohen-Macaulay 性质，考察一类范围更广的图，这些图源自广义冠积的扩展。在 [13] 和 [17], 中，研究者已针对某些特定基图考察了冠积的二项式边理想，而本文允许基图是任意图。胡须图在单项式边理想的文献中占有经典而重要的地位。 G 的胡须 图记作 $W(G)$，其构造方法是在G的每个顶点上连接一个新的悬挂（胡须）顶点。在关于 Cohen-Macaulay 图的奠基性论文中， [33], Villarreal 指出，这类胡须构造产生了第一类自然的图，其（单项式）边理想具有 Cohen-Macaulay 性质，从而确立了胡须图作为（单项式）边理想理论中的一个基本类别。除了交换代数之外，胡须图在图论及相关领域也发挥着重要作用，这正是本文探讨更广义推广的动机。

尽管胡须图在单项式边理想的研究中十分重要，但文献中似乎鲜有对胡须图的二项式边理想进行系统研究的工作。原因之一在于结构上的限制：二项式边理想研究中的一项关键操作是顶点操作 G_v，即替换一个顶点 v，使其所有邻点两两相邻，从而使 v 成为自由顶点。这项操作尤其有用，因为它出现在一个短正合列中，该短正合列将 J_G 与非自由顶点较少的图的二项式边理想联系起来。遗憾的是， G_v-操作通常不能保持胡须图这一类图，因此，基于 G_v（及相关分解）的标准约化技术无法与添加胡须相兼容。这种不相容性解释了为何适用于许多其他图类的方法，在二项式情形下可能不适用于胡须图。

本文填补了这一空白，通过研究一个更广泛的类别，首次系统地研究了胡须图的二项式边理想和广义二项式边理想，该类别甚至涵盖了图的广义冠积。设 G 是一个图，其顶点集为 $[n]$，且 H_1、.....、H_n 是一列 n 图。那么， G 与 H_1、.....、H_n 的广义冠积记作 $G \circ (H_1$、.....、$H_n)$，它是通过将 i^{th} 顶点连接到

G 的每个顶点而得到的。如果 $H_1 = H_2 = \cdots = H_n = H$，那么它就是两个图 G 和 H 的通常冠积，记作 $G \circ H$。再注意，如果 $H = K_1$ （一个单点顶点），那么 $G \circ K_1$ 就是 G 的胡须图 $W(G)$。在广义二项式边理想的背景下，我们推广了所有这些类别，从而获得了一种在更广泛框架下研究它们的关键方法。

将图 G 的顶点集分解为自由顶点和非自由顶点，使得 $V(G) = A_G \sqcup B_G$，其中 A_G 和 B_G 分别表示 G 的自由顶点和非自由顶点。我们引入两类新的图：

$$\mathcal{G}_1 = \{W_S(G) \mid B_G \subset S \subset V(G)\}$$

and

$$\mathcal{G}_2 = \{G \circ_S (H_1, \ldots, H_{|S|}) \mid B_G \subset S \subset V(G)\},$$

其中， $W_S(G)$ 是通过在所选集合 S 中的每个顶点上附加一个胡须得到的，而 $G \circ_S (H_1, \ldots\ldots, H_{|S|})$ 是通过将任意图 H_j 附加到所选顶点 $v_j \in S$ 上得到的。于是可以观察到如下包含关系

$$\text{Whisker Graphs } \subset \text{ Corona Product } \subset \text{ Generalized Corona Product } \subset \mathcal{G}_2$$

and

$$\text{Whisker Graphs } \subset \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2.$$

在本文中，我们首先研究属于图类 $\mathcal{G}_2$ 的图的广义二项式边理想的深度。对于这一图类，我们给出如下紧下界：

定理 3.3。设 $D = G \circ_S (H_1、\ldots\ldots、H_\ell)$ 是 $\mathcal{G}_2$ 中的一个图。则

$$\operatorname{depth}(R/J_{K_m,D}) \geq \sum_{i=1}^{\ell} (f(H_i) + d(H_i)) + p - \ell + (m-1)c(D),$$

其中， ℓ 是 S的基数， p 是 G中的顶点数， $c(D)$ 是 D的连通分支数， $f(H_i)$ 表示 H_i 中的自由顶点数，而 $d(H_i)$ 表示 H_i 的各连通分支直径之和。

接下来，对于 $\mathcal{G}_2$ 的一个较大的子类（其中包括胡须图、 G 与具有 Cohen-Macaulay 广义二项式边理想的附着图的广义冠积等），我们建立了深度的精确公式。考虑子类 $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}_2$，对附着图 H_i 施加一个附加条件，使得对于每个 i, 均有深度$(R_i/J_{K_m,\ H_i}) = m + |V(H_i)| - 1$。我们为类 $\mathcal{G}'$建立了以下结果。

定理 3.4. 设 D 是属于类 $\mathcal{G}'$的任意图。那么

$$\operatorname{depth}(R/J_{K_m,D}) = |V(D)| + (m-1)c(D).$$

特别地，若 $D = G \circ_S (H_1, \ldots, H_{|S|}) \in \mathcal{G}_2$，且每个 H_i 均与 *Cohen-Macaulay* J_{H_i}连通，则

$$\operatorname{depth}(R/J_D) = |V(D)| + c(D).$$

因此，对于任意图 G，深度$(R/J_{W(G)}) = 2|V(G)| + c(G)$。

最后，我们改进了 $\mathcal{G}_2$ 中图的二项式边理想的深度下界，相较于命题 3.3 中针对广义情形所得的下界，具体如下：

定理 3.5. 设 $D = G \circ_S (H_1, \ldots, H_\ell) \in \mathcal{G}_2$ 是一个简单图。那么

$$\operatorname{depth}(R/J_D) \geq \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{depth}(R_i/J_{H_i}) + p - \ell + c(D),$$

其中，ℓ 是 S的基数，p 是 G中的顶点数。

在第 4 节中，我们重点研究属于 $\mathcal{G}_1$ 的图的二项式边理想的正则性。我们认为，除非将基图限制为非常特殊的图，否则对类 $\mathcal{G}_2$ 进行同样的研究颇具挑战性。首先，我们利用基图的诱导匹配数，建立了一个紧的正则性上界，显著改进了已有的一般上界。

定理 4.2. 设 $H = W_S(G)$ 是属于类 $\mathcal{G}_1$的任意图。那么

$$\operatorname{reg}(R/J_{K_m,H}) \leq (m-1)(|S| + \operatorname{im}(G)).$$

特别地，对于任意图 G，我们有

$$\operatorname{reg}(R/J_{W(G)}) \leq |V(G)| + \operatorname{im}(G).$$

这里，im(G) 表示 G 的诱导匹配数。这一不变量在研究单项式边理想的正则性时发挥着核心作用，它提供了一个普遍的下界，并且对许多图类都能达到等号。我们的结果表明，在估计胡须图的广义二项式边理想的正则性时，它同样具有重要意义。接下来，为了证明该上界是紧的，我们通过约化 Gröbner 基技术分析初始理想，明确计算了无间隙图上胡须图的二项式边理想的正则性。

定理 4.10. 设 G 是一个无间隙图。那么

$$\operatorname{reg}(R/J_{W(G)}) = |V(G)| + 1.$$

本文最后一节致力于对类 $\mathcal{G}_2$ 中图的 Cohen–Macaulay 分类。尽管已有大量研究致力于 Cohen–Macaulay 二项式边理想的分类（见 [5, 4, 11, 17, 20, 24, 29, 30]），但完整的分类在很大程度上仍未解决，并且持续受到关注，尤其是鉴于 [6] 中提出的猜想。值得注意的是，我们的分类给出了 Cohen–Macaulay 二项式边理想的一种新构造。

定理 5.6. 设 $D = G \circ_S (H_1, \ldots, H_{|S|})$ 是 $\mathcal{G}_2$ 中任意一个 G 非空的连通图。那么，以下条件等价：

(1) J_D 是*Cohen-Macaulay*；*(2)* G 完全，每个 H_i 都与*Cohen-Macaulay* J_{H_i} 连通，并且每当$|S| = |V(G)|$ 时，至少有一个 H_i是完全的。

由于对于 $m > 2$, $J_{K_m,\ G}$ 是Cohen-Macaulay当且仅当 G 是完全的 [1, 推论4。3], 这些情况 $m \geq 3$ 对于Cohen–Macaulay 性质的分类不再有进一步的意义。

2. 预备知识

本节讨论后续各节所需的一些概念和结果。广义二项式边理想$J_{K_m,G}$ 的概念定义于 $m \geq 2$。因此，毋须特别说明，我们假设 $m \geq 2$和 G 均非空。

考虑一个定义在 $[n]$上的简单图 G。设 $T \subset [n]$。我们用 $G - T$ 表示顶点集为 $V(G)\backslash T$的诱导子图。特别地，对于任意 $v \in V(G)$，记 $G-v$为诱导子图$G - \{v\}$。令 $c_G(T)$表示$G - T$ 的连通分支数，即 $c_G(T) = c(G - T)$。如果顶点 v使得 G 的连通分支数少于 $G - v$的连通分支数，则称 v为 G的割点。如果对于每个 $v \in T$, v 都是诱导子图 $G - (T \setminus \{v\})$的割点，则称 T为 G的割集。我们用$\mathcal{C}(G)$表示 G的所有割集构成的集合；根据定义，有 $\emptyset \in \mathcal{C}(G)$。

~对于一个图 G，我们用 G表示顶点为 $V(G)$ 的完全图。设 G_1、.....、$G_{c_G(T)}$是 $G - T$ 的连通分支，其中某个 $T \subset [n]$。现在，对于整数 $m \geq 2$ 和 $T \subset [n]$，考虑理想

$$P_T(K_m, G) = \left\langle \{x_{ij} \mid (i,j) \in [m] \times T\}, J_{K_m,\tilde{G}_1}, J_{K_m,\tilde{G}_2}, \ldots, J_{K_m,\tilde{G}_{c_G(T)}} \right\rangle$$

在多项式环 $R = K[x_{ij} \mid i \in [m], j \in [n]]$ 中。于是， $P_T(K_m, G)$ 是一个包含 $J_{K_m,G}$ 的素理想。由 [25, 推论 4] 可知，$J_{K_m,G}$ 是一个根理想；根据 [25, 定理 7], , $J_{K_m,\ G}$ 的极小素理想恰好是形如 $P_T(K_m, G)$ 的素理想，其中 $T \in \mathcal{C}(G)$。因此，我们有

$$J_{K_m,G} = \bigcap_{T \in \mathcal{C}(G)} P_T(K_m, G).$$

设 G 是一个图。顶点 $v \in V(G)$ 的邻点 集是 G 中与 v 相邻的顶点所构成的集合，记作 $N_G(v)$。我们记 $N_G[v] := N_G(v) \cup \{v\}$。正如引言中所提到的，图 G_v 在广义二项式边理想理论中具有特殊的重要性，其顶点集和边集具体如下:

$$V(G_v) = V(G) \text{ and } E(G_v) = E(G) \cup \{\{u, w\} \mid u, w \in N_G(v)\}.$$

若顶点 $v \in V(G)$ 在 G 中满足: G 在顶点集 $N_G(v)$ 上的诱导子图是完全图，则称其为**自由** （或单纯）顶点；等价地， $G = G_v$。否则，称 v 为**非自由** （或内部）顶点。我们分别用 $f(G)$ 和 $\mathrm{iv}(G)$ 表示 G 中自由顶点和非自由顶点的数量；特别地， $f(G) = |A_G|$ 且 $\mathrm{iv}(G) = |B_G|$。 G 的诱导子图若为完全图，则称为团 。注意，若 v 是 G 的自由顶点，则 G 在顶点集 $N_G(v)$ 上的诱导子图是一个团。

现在我们回顾一些在研究广义二项式边理想中起关键作用的基本结果和事实。

定理 2.1 ([18, 定理 3.2])。 设 G 是一个有限简单图， v 是 G的一个非自由顶点。那么，

$$J_{K_m,G} = J_{K_m,G_v} \cap \langle \{x_{iv} \mid i \in [m]\}, J_{K_m,G-v} \rangle .$$

引理 2.2 ([18, 引理 3.4])。 设 G 为一个图，且 v 是 G 的一个非自由顶点。则$\max\{$ $\mathrm{iv}(G_v)$,$\mathrm{iv}(G-v)$,$\mathrm{iv}(G_v-v)\} < \mathrm{iv}(G)$。

容易观察到

$$J_{K_m,G_v} + \langle \{x_{iv} \mid i \in [m]\}, J_{K_m,G-v} \rangle = \langle \{x_{iv} \mid i \in [m]\}, J_{K_m,G_v-v} \rangle.$$

因此，利用命题 2.1 中给出的分解，我们得到以下短正合列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow R/J_{K_m,G} \longrightarrow R/J_{K_m,G_v} \oplus R/\langle \{x_{iv} \mid i \in [m]\}, J_{K_m,G-v} \rangle \\ \longrightarrow R/\langle \{x_{iv} \mid i \in [m]\}, J_{K_m,G_v-v} \rangle \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

这等价于

$$0 \longrightarrow R/J_{K_m,G} \longrightarrow R/J_{K_m,G_v} \oplus R_v/J_{K_m,G-v} \longrightarrow R_v/J_{K_m,G_v-v} \longrightarrow 0, \tag{2.1}$$

其中 $R_v = K[x_{ij} \mid i \in [m], j \in V(G-v)]$。

注记 2.3. 注意，J_{K_m,K_n} 是由一般矩阵的所有 2×2 阶子式生成的行列式理想，其阶数为 $m \times n$。因此，根据 [7, 定理 1.10], ，我们得到 $\dim(R/J_{K_m,K_n}) = n+m-1$。现在，对于任意一个以 $[n]$ 为顶点的连通图 G ，有 $\emptyset \in \mathcal{C}(G)$ 和 $P_\emptyset(K_m, G) = J_{K_m,K_n}$。因此，如果 G 连通且$J_{K_m,G}$ 是 Cohen-Macaulay 的，那么 $\mathrm{depth}(R/J_{K_m,G}) = |V(G)| + m - 1$。由于广义二项式边理想的深度在图的不交并上具有可加性，因此当$J_{K_m,G}$ 是 Cohen-Macaulay 时，我们有 $\mathrm{depth}(R/J_{K_m,G}) = |V(G)| + (m-1)c(G)$。

定理 2.4 ([2, 定理 3.4]). 设 G是一个简单图。那么我们有

$$\mathrm{depth}(R/J_{K_m,G}) \geq f(G) + d(G) + (m-2)c(G).$$

定理 2.5 ([2, 定理 4.5])。 设 G 是一个连通非完全图。若 G的点连通度为 $\kappa(G)$，则

$$\mathrm{depth}(R/J_{K_m,G}) \leq m + |V(G)| - \kappa(G).$$

特别地，由命题 *2.3* 可知，对于任意连通图 G,

$$\mathrm{depth}(R/J_{K_m,G}) \leq m + |V(G)| - 1.$$

以下关于深度和正则性的引理在文献中广为人知，并且在本文中经常使用。

引理 2.6。 设 M、 N、 P是 R 上的有限生成分次模，且 $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ 是一个短正合列。则

(1) 深度$(N) \geq \min\{$深度(M)，深度$(P)\}$。等式成立，如果 深度$(P) \neq$ 深度$(M) - 1$。*(2)* 深度$(M) \geq \min\{$深度(N)，深度$(P) + 1\}$。等式成立，如果 深度$(N) \neq$ 深度(P)。

*(3)*深度$(P) \geq$min$\{$深度$(M) - 1$，深度$(N)\}$。等式成立，如果 深度$(M) \neq$深度(N)。

引理 2.7。 设 M, N, P是 R上的有限生成分次模，且 $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ 是一个短正合列。那么

*(1)*reg$(M) \leq$max$\{$reg(N)，reg$(P) + 1\}$*(2)*reg$(N) \leq$max$\{$reg(M)，reg$(P)\}$*(3)*reg$(P) \leq$max$\{$reg$(M) - 1$，reg$(N)\}$

引理 2.8。 设 $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ 是 R上的模的短正合列。那么 $\dim(N) = \max\{\dim(M), \dim(P)\}$。

3. $\mathcal{G}_2$的广义二项式边理想的深度

本节研究属于类 $\mathcal{G}_2$ 的图的广义二项式边理想的深度。我们给出该类深度的精确下界，并证明对于 $\mathcal{G}_2$ 的一个广泛子类，此下界可以取等号；该子类包含胡须图这一类。回顾属于类 $\mathcal{G}_1$ 和 $\mathcal{G}_2$ 的图的结构（见图 1 和图 2）。

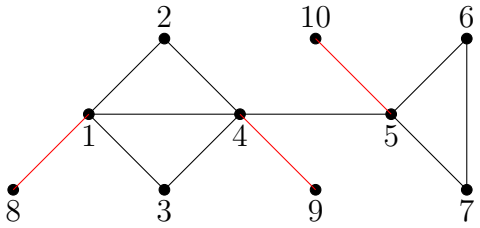

图 1. $\mathcal{G}_1$中的一个图

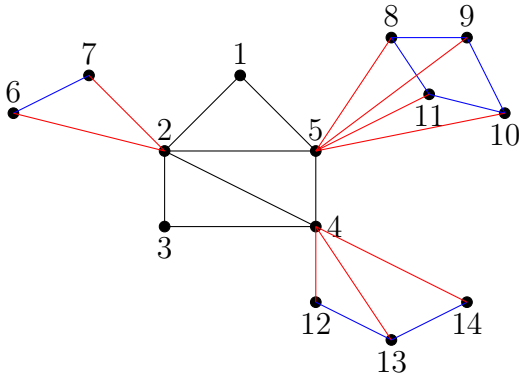

图 2. $\mathcal{G}_2$中的一个图

我们先从以下引理开始，它对后续章节至关重要。

引理 3.1. 设 $D = G \circ_S (H_1, \ldots, H_{|S|})$ 是类 $\mathcal{G}_2$ 中的任意图。那么 $D - v_i = H_i \sqcup D'$，其中 $D' \in \mathcal{G}_2$ 且 D_{v_i}，对于任意 $v_i \in S$，均有 $D_{v_i} - v_i \in \mathcal{G}_2$。特别地，若 $D \in \mathcal{G}_1$，则 $D - v_i = K_1 \sqcup D'$，其中 $D' \in \mathcal{G}_1$ 且 D_{v_i}，对于任意 $v_i \in S$，均有 $D_{v_i} - v_i \in \mathcal{G}_1$。

证明。设 $S = \{v_1, \ldots, v_\ell\}$，不失一般性，假设 $v_i = v_\ell$。**断言-1：** $D - v_\ell = H_\ell \sqcup D'$，其中 $D' \in \mathcal{G}_2$。

断言 *1* 的证明。考虑图 $D' = G' \circ_{S\setminus\{v_\ell\}} (H_1、\ldots\ldots、H_{\ell-1})$，其中 $G' = G - v_\ell$。于是我们有 $D - v_\ell = H_\ell \sqcup D'$。现在只需证明 $D' \in \mathcal{G}_2$。由于删除一个顶点不会产生任何新的非自由顶点，因此我们有 $B_{G'} \subset B_G$。由于$B_G \subset S$ 且 $v_\ell \notin V(G')$，我们必有 $B_{G'} \subset B_G \setminus \{v_\ell\} \subset S \setminus \{v_\ell\}$。因此，根据我们对类 $\mathcal{G}_2$ 的构造，可以看出 $D' \in \mathcal{G}_2$。

断言 2： D_{v_ℓ}，$D_{v_\ell} - v_\ell \in \mathcal{G}_2$。

断言 *2* 的证明。考虑 D_{v_ℓ} 的诱导子图 $G'' = D_{v_\ell}[V(G) \cup V(H_\ell)]$。于是我们有 $D_{v_\ell} = G'' \circ_{S\setminus\{v_\ell\}} (H_1、\ldots\ldots、H_{\ell-1})$。注意，顶点 v_ℓ 以及 H_ℓ 的所有顶点在 G'' 中都变为自由顶点。因此，$B_{G''} \subset B_G \setminus \{v_\ell\} \subset S \setminus \{v_\ell\}$，从而有 $D_{v_\ell} \in \mathcal{G}_2$。同样，考虑基图 $G''' = G'' - v_\ell$，可得 $D_{v_\ell} - v_\ell \in \mathcal{G}_2$。

第二部分可以通过模仿第一部分所用的论证来证明。 □

现在，让我们回顾一下图的直径的定义。

定义 3.2. 设 G 是一个连通图。取 $u, v \in V$ 为 G 中任意两个不同的顶点。那么 u 与 v 之间的距离 记为 $d_G(u, v)$，它是连接 u 与 v 的最短路径的长度。G 的直径 记为 diam(G)，定义为

$$\operatorname{diam}(G) := \max\{d_G(u, v) \mid u, v \in V(G)\}.$$

设 G 是一个图，其连通分支为 $G_1, \ldots, G_{c(G)}$。我们定义 $d(G) := i(G) + \sum_{i=1}^{c(G)} \operatorname{diam}(G_i)$，其中 $i(G)$ 表示 G 的孤立顶点数。

利用图 G 的不变量 $d(G)$ 和 $f(G)$，Malayeri-Madani-Kiani [26] 给出了二项式边理想深度的精确下界，这一结果在 [2] 中得到了进一步推广。在下面的定理中，我们利用这两个不变量，为类 $\mathcal{G}_2$ 的广义二项式边理想的深度建立一个更好的下界。

定理 3.3. 设 $D = G \circ_S (H_1, \ldots, H_\ell)$ 是 $\mathcal{G}_2$ 中的一个图。那么

$$\operatorname{depth}(R/J_{K_m,D}) \geq \sum_{i=1}^{\ell} (f(H_i) + d(H_i)) + p - \ell + (m-1)c(D),$$

其中，ℓ 是 S 的基数，p是 G中的顶点数。

证明。设 $S = \{v_1, \ldots, v_\ell\} \subset V(G)$ 满足：每个 v_i 都与 H_i 中的所有顶点相邻，从而形成图 D。只需证明当 D 连通时该不等式成立。我们对 $|S| = \ell$使用数学归纳法。若 $S = \emptyset$，即 $\ell = 0$，则 G 中不含非自由顶点，也没有任何 H_i's 附加到 G上。在这种情况下，$D = G$ 是一个有 p 个顶点的完全图，因此，根据命题 2.3，depth($R/J_{K_m,D}$) $= m + p - 1$。因此，结论在基础情形下成立。现在，取 $\ell \geq 1$ 并考虑图 $D - v_\ell, D_{v_\ell}$, $D_{v_\ell} - v_\ell$。根据命题 3.1，我们有 $D - v_\ell = H_\ell \sqcup D'$，其中 $D' \in \mathcal{G}_2$且 D_{v_ℓ}, $D_{v_\ell} - v_\ell \in \mathcal{G}_2$。此外，由命题 3.1 的证明可知，恰有 $(\ell - 1)$ 个图 $H_1, \ldots, H_{\ell-1}$与 D', D_{v_ℓ}中的基图的 $(\ell - 1)$ 个顶点相连。因此，根据归纳假设，这些图的

图中该不等式成立。注意，由于我们假设 D 连通，因此图 $D_{v_\ell}, D_{v_\ell} - v_\ell$ 也是连通的，并且 $c(D') \geq c(D) = 1$。为简便起见，我们记作 $v = v_\ell$。因此，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{depth}(R_v/J_{K_m,D-v}) &\geq \operatorname{depth}(R_\ell/J_{K_m,H_\ell}) + \sum_{i=1}^{\ell-1}(f(H_i)+d(H_i)) \\ &\quad + (p-1) - (\ell-1) + (m-1)c(D') \\ &\geq f(H_\ell) + d(H_\ell) + (m-2)c(H_\ell) + \sum_{i=1}^{\ell-1}(f(H_i)+d(H_i)) \\ &\quad + p - \ell + (m-1) \quad \text{(by Proposition 2.4)} \\ &\geq \sum_{i=1}^{\ell}(f(H_i)+d(H_i)) + p - \ell + (m-1),\end{aligned}$$

其中， R_v 和 R_ℓ 分别是$J_{K_m,\ D-v}$ 和$J_{K_m,\ H_\ell}$ 对应的多项式环。再次，我们有

$$\operatorname{depth}(R/J_{K_m,D_v}) \geq \sum_{i=1}^{\ell-1}(f(H_i)+d(H_i)) + (p+|V(H_\ell)|) - (\ell-1) + (m-1).$$

由于由命题 2.4 和 2.5， $f(H_\ell) + d(H_\ell) \leq |V(H_\ell)| + 1$，我们有

$$\operatorname{depth}(R/J_{K_m,D_v}) \geq \sum_{i=1}^{\ell}(f(H_i)+d(H_i)) + p - \ell + (m-1).$$

类似地，我们得到

$$\operatorname{depth}(R_v/J_{K_m,D_v-v}) \geq \sum_{i=1}^{\ell}(f(H_i)+d(H_i)) + p - \ell + (m-1) - 1.$$

Now 考虑短正合列 (2.1) 并利用命题 2.6，我们得到 n

$$\begin{aligned}\operatorname{depth}(R/J_{K_m,D}) &\geq \min\{\operatorname{depth}(R_v/J_{K_m,D-v}), \operatorname{depth}(R/J_{K_m,D_v}), \\ &\qquad \operatorname{depth}(R_v/J_{K_m,D_v-v}) + 1\} \\ &\geq \sum_{i=1}^{\ell}(f(H_i)+d(H_i)) + p - \ell + (m-1).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

现在，我们通过对附着图 H_i 施加一个附加条件来定义一个子类 $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}_2$。根据命题 2.5，任意连通图 H 都满足 $\operatorname{depth}(R/J_{K_m,\ H}) \leq m + |V(H)| - 1$，且此界是紧的。对于固定的 $m \geq 2$，类 $\mathcal{G}'$ 由满足以下条件的图 $D = G \circ_S (H_1, \ldots\ldots, H_{|S|}) \in \mathcal{G}_2$ 组成：对每个 i，均有 $\operatorname{depth}(R_i/J_{K_m,\ H_i}) = m + |V(H_i)| - 1$，其中 $R_i = K[x_{i,j} \mid i \in [m], j \in V(H_i)]$。下面的定理给出了属于 $\mathcal{G}'$ 的图的广义二项式边理想的深度公式，因此也给出了胡须图的广义二项式边理想的深度公式。

定理 3.4。 设 D 是属于类 $\mathcal{G}'$ 的任意图。那么

$$\operatorname{depth}(R/J_{K_m,D}) = |V(D)| + (m-1)c(D).$$

特别地，如果 $D = G \circ_S (H_1, \ldots, H_{|S|}) \in \mathcal{G}_2$，且每个 H_i 都与 *Cohen-Macaulay* J_{H_i} 相连，那么

$$\operatorname{depth}(R/J_D) = |V(D)| + c(D).$$

因此，对于任意图 G，深度$(R/J_{W(G)}) = 2|V(G)| + c(G)$。

证明。证明采用了与前一个证明类似的思路，并作了必要的修改。考虑 $S = \{v_1, \ldots, v_\ell\} \subset V(G)$，其中每个 v_i 都与 H_i 中的所有顶点相邻，从而构成图 D。我们对 $|S| = \ell$ 使用数学归纳法证明该公式。若 $S = \emptyset$，则 $D = G$ 是一个有 p 个顶点的完全图。因此，由命题 2.3，深度$(R/J_{K_m,D}) = m+p-1$。故该公式在基础情形下成立。现在取 $\ell \geq 1$，并考虑图 $D - v, D_v, D_v - v$，其中 $v = v_\ell$。由命题 3.1，可得 $D - v = H_\ell \sqcup D'$，其中 $D' \in \mathcal{G}'$，且 $D_v, D_v - v \in \mathcal{G}'$。此外，由命题 3.1 的证明可知，恰有 $(\ell - 1)$ 个图 $H_1, \ldots, H_{\ell-1}$，分别附着在 $D', D_v, D_v - v$ 中 $(\ell - 1)$ 个不同的基图顶点上。因此，由归纳假设，这些图满足该等式。由此，我们得到

$$\begin{aligned}
\operatorname{depth}(R_v/J_{K_m,D-v}) &= \operatorname{depth}(R_\ell/J_{K_m,H_\ell}) + \operatorname{depth}(R'/J_{K_m,D'}) \\
&= (m + |V(H_\ell)| - 1) + |V(D')| + (m-1)c(D') \\
&\geq |V(D)| + (m-1)c(D) + (m-2) \quad (\text{since } c(D') \geq c(D)) \\
&\geq |V(D)| + (m-1)c(D), \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

其中，R_v、R_ℓ 和 R' 分别是 $J_{K_m,\ D-v}$、$J_{K_m,\ H_\ell}$ 和 $J_{K_m,\ D'}$ 所对应的多项式环。现在，根据 D_v 的构造，可以看出 $|V(D_v)| = |V(D)|$，并且 $c(D_v) = c(D)$。因此，我们有

$$\begin{aligned}
\operatorname{depth}(R/J_{K_m,D_v}) &= |V(D_v)| + (m-1)c(D_v) \\
&= |V(D)| + (m-1)c(D) \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

类似地，对于图 $D_v - v$，我们得到

$$\begin{aligned}
\operatorname{depth}(R_v/J_{K_m,D_v-v}) &= |V(D_v - v)| + (m-1)c(D_v - v) \\
&= |V(D)| + (m-1)c(D) - 1 \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

现在，由方程 (3.1)、(3.2) 和 (3.3)，我们有

$$\begin{aligned}
\operatorname{depth}((R_v/J_{K_m,D-v}) \oplus (R/J_{K_m,D_v})) &= \min\{\operatorname{depth}(R_v/J_{K_m,D-v}), \operatorname{depth}(R/J_{K_m,D_v})\} \\
&= \operatorname{depth}(R/J_{K_m,D_v}) \\
&\neq \operatorname{depth}(R_v/J_{K_m,D_v-v})
\end{aligned}$$

因此，由短正合列 (2.1) 和命题 2.6(2)，我们得到

$$\begin{aligned}
\operatorname{depth}(R/J_{K_m,D}) &= \min\{\operatorname{depth}(R/J_{K_m,D_v}), \operatorname{depth}(R_v/J_{K_m,D_v-v}) + 1\} \\
&= |V(D)| + (m-1)c(D).
\end{aligned}$$

此外的部分成立，因为 $|V(W(G))| = 2|V(G)|$ 且 $c(W(G)) = c(G)$。 □

接下来，我们改进 $\mathcal{G}_2$ 中图的二项式边理想的深度下界，相较于命题 3.3 中为广义二项式边理想所证明的下界。

定理 3.5. 设 $D = G \circ_S (H_1, \ldots, H_\ell) \in \mathcal{G}_2$ 是一个简单图。那么

$$\operatorname{depth}(R/J_D) \geq \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{depth}(R_i/J_{H_i}) + p - \ell + c(D),$$

其中，ℓ 是 S的基数，p 是 G中的顶点数。

证明. 设 $S = \{v_1, \ldots, v_\ell\} \subset V(G)$ 满足：每个 v_i 都与 H_i中的所有顶点相邻，从而构成 D。由于二项式边理想的深度、量 $(p - \ell)$ 以及连通分支的数目在图的不交并下均具有可加性，因此不失一般性，可假设 D 是连通的。我们对$|S| = \ell$使用数学归纳法。若 $S = \emptyset$，则 $B_G = \emptyset$，且没有 H_i附接到 G。在这种情况下，$D = G$ 是一个有 p 个顶点的完全图。因此，根据命题 2.3，$\operatorname{depth}(R/J_D) = p + 1$。由此，结论对基础情形成立。现在，假设 $\ell \geq 1$，并考虑图 $D - v$、D_v、$D_v - v$，其中 $v = v_\ell$。根据命题 3.1，我们有 $D - v = H_\ell \sqcup D'$，其中 $D' \in \mathcal{G}_2$ 和 D_v、$D_v - v \in \mathcal{G}_2$。同样由命题 3.1 的证明可知，恰有 $(\ell - 1)$ 个图 $H_1, \ldots, H_{\ell-1}$ 与 D'、D_v和$D_v - v$中的基图相连。因此，根据归纳假设，这些图满足该不等式。此外，图 D_v、$D_v - v$ 是连通的，因为 D 是连通的，并且 $c(D') \geq c(D) = 1$。因此，我们有

$$\begin{aligned}
\operatorname{depth}(R_v/J_{D-v}) &= \operatorname{depth}(R_\ell/J_{H_\ell}) + \operatorname{depth}(R'/J_{D'}) \\
&\geq \operatorname{depth}(R_\ell/J_{H_\ell}) + \sum_{i=1}^{\ell-1} \operatorname{depth}(R_i/J_{H_i}) + (p-1) \\
&\qquad - (\ell - 1) + c(D') \\
&\geq \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{depth}(R_i/J_{H_i}) + p - \ell + 1,
\end{aligned}$$

其中 R_v, R_i 与 R' 分别是 J_{D-v}、J_{H_i} 与 $J_{D'}$对应的多项式环。同样，对于图 D_v，我们得到

$$\begin{aligned}
\operatorname{depth}(R/J_{D_v}) &\geq \sum_{i=1}^{\ell-1} \operatorname{depth}(R_i/J_{H_i}) + (p + |V(H_\ell)|) - (\ell - 1) + 1 \\
&= \sum_{i=1}^{\ell-1} \operatorname{depth}(R_i/J_{H_i}) + p + |V(H_\ell)| - \ell + 2 \\
&\geq \sum_{i=1}^{\ell} \operatorname{depth}(R_i/J_{H_i}) + p - \ell + 1 \text{ (From Proposition 2.5)}
\end{aligned}$$

同样地，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{depth}(R_v/J_{D_v-v}) &\geq \sum_{i=1}^{\ell-1}\operatorname{depth}(R_i/J_{H_i}) + (p+|V(H_\ell)|-1)-(\ell-1)+1\\ &= \sum_{i=1}^{\ell-1}\operatorname{depth}(R_i/J_{H_i}) + p + |V(H_\ell)| - \ell + 1\\ &\geq \sum_{i=1}^{\ell}\operatorname{depth}(R_i/J_{H_i}) + p - \ell \quad \text{(From Proposition 2.5)}\end{aligned}$$

现在将命题 2.6 应用于短正合列 (2.1)，并利用上述不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{depth}(R/J_D) &\geq \min\{\operatorname{depth}(R_v/J_{D-v}), \operatorname{depth}(R/J_{D_v}),\\ &\qquad \operatorname{depth}(R_v/J_{D_v-v})+1\}\\ &\geq \sum_{i=1}^{\ell}\operatorname{depth}(R_i/J_{H_i}) + p - \ell + 1\end{aligned}$$

因此，一般而言，$\operatorname{depth}(R/J_D) \geq \sum_{i=1}^{\ell}\operatorname{depth}(R_i/J_{H_i}) + p - \ell + c(D)$。 □

4. G1 的广义二项式边理想的正则性

本节研究$\mathcal{G}_1$这一类的广义二项式边理想的正则性。我们根据基图的诱导匹配数，给出正则性的一个紧上界；对于 $\mathcal{G}_1$的情形，这改进了现有的一般上界；因此，这一结果也适用于胡须图的情形。此外，我们通过约化 Gröbner 基技术分析初始理想，明确求出了无间隙图上的胡须图的二项式边理想的正则性。我们从诱导匹配的定义开始。

定义 4.1. 图 G中的匹配是由两两不相交的边组成的子图。如果匹配中的任意两条边都不通过图 G中的一条边相连，则称该匹配为诱导匹配。图 G 中诱导匹配的最大规模称为图 G的诱导匹配数，记作 $\operatorname{im}(G)$。

注意，若图 G 满足 $\operatorname{im}(G) = 1$，则称其为无间隙图。任何余弦图都是无间隙图的一个例子。

定理 4.2. 设 $H = W_S(G)$是属于类 $\mathcal{G}_1$的任意图。那么

$$\operatorname{reg}(R/J_{K_m,H}) \leq (m-1)(|S| + \operatorname{im}(G)).$$

特别地，对于任意图 G，我们有

$$\operatorname{reg}(R/J_{W(G)}) \leq |V(G)| + \operatorname{im}(G).$$

证明。 由于广义二项式边理想的正则性和图的诱导匹配数在图的不交并下具有可加性，我们不妨假设 H 是连通的。我们对 S的基数使用数学归纳法进行证明。若 $|S| = 0$，则$B_G = \emptyset$，这意味着 $H = G$ 是完全图。因此，由命题 3.3],, $\mathrm{reg}(R/J_{K_m,H}) = \min\{m-1, |V(H)|-1\}$。故结论在基础情形下成立。现在，假设 $|S| \geq 1$。选取一个顶点 $v \in S$。由命题 3.1， $H - v = K_1 \sqcup H'$，其中$H' \in \mathcal{G}_1$，且 $H_v, H_v - v \in \mathcal{G}_1$。注意， $H', H_v, H_v - v$分别恰有$(|S|-1)$个胡须附着在基图 G', G'', G'''上。因此，我们可以对这些图应用归纳假设。于是得到

$$\begin{aligned} \mathrm{reg}(R_v/J_{K_m,H-v}) &= \mathrm{reg}(R_v/J_{K_m,H'}) \\ &\leq (m-1)(|S|-1+\mathrm{im}(G')); \qquad (4.1) \\ \mathrm{reg}(R/J_{K_m,H_v}) &\leq (m-1)(|S|-1+\mathrm{im}(G'')); \qquad (4.2) \\ \mathrm{reg}(R_v/J_{K_m,H_v-v}) &\leq (m-1)(|S|-1+\mathrm{im}(G''')). \qquad (4.3) \end{aligned}$$

现在，我们想比较 $\mathrm{im}(G')$，$\mathrm{im}(G'')$，$\mathrm{im}(G''')$ 与 $\mathrm{im}(G)$。由于 $G' = G - v$ 是 G 的诱导子图，因此有 $\mathrm{im}(G') \leq \mathrm{im}(G)$。现在，注意，如果 $\{u, v\}$ 是在 H 中连接到 v 的胡须，那么 G'' 是这样一张图：

$$V(G'') = V(G) \cup \{u\} \text{ and } E(G'') = E(G_v) \cup \{\{u, w\} : w \in N_G[v]\}.$$

现在，容易看出 $G''' = G'' - v \cong G_v$。假设 $M = \{e_1, \ldots, e_r\}$ 在 G'' 中构成一个诱导匹配，且 $r = \mathrm{im}(G'')$。如果对所有 i 都有 $e_i \in E(G)$，那么 M 也是 G 中的诱导匹配，因为 $E(G) \subset E(G'')$。现在，令某个 i 满足 $e_i \notin E(G)$。由于 v 的邻域在 G'' 中构成一个团，因此该团最多会为诱导匹配 M 贡献一条边。因此，应有 $M \setminus \{e_i\} \subset E(G)$。这一情形与前一种情形结合起来，意味着 $\mathrm{im}(G'') \leq \mathrm{im}(G) + 1$。接下来，假设 $\mathrm{im}(G''') > \mathrm{im}(G)$。令 T 表示 $G''' \cong G_v$ 的一个最大诱导匹配。那么，T 恰好包含一条不属于 G 的新边，而 M 中的其他边均不会包含来自 $N_G[v]$ 的顶点，因为 G_v 的新边属于由顶点 $N_G[v]$ 在 G_v 中构成的一个团。如果这条新边是 $\{a, b\}$，那么有 $\{a, b\} \subset N_G(v)$。在 G_v 中，对于任意 $w \in N_{G_v}(v)$，有 $N_{G_v}(v) \subset N_{G_v}(w)$。于是容易看出，$(T \setminus \{\{a, b\}\}) \cup \{\{a, v\}\}$ 在 G 中构成一个诱导匹配，这与 $\mathrm{im}(G''') > \mathrm{im}(G)$ 的事实矛盾。因此，$\mathrm{im}(G''') = \mathrm{im}(G_v) \leq \mathrm{im}(G)$。最后，我们得到以下关系：

$$\begin{aligned} \mathrm{im}(G') &\leq \mathrm{im}(G); \qquad (4.4) \\ \mathrm{im}(G'') &\leq \mathrm{im}(G) + 1; \qquad (4.5) \\ \mathrm{im}(G''') &\leq \mathrm{im}(G). \qquad (4.6) \end{aligned}$$

现在，利用公式 (4.1) 至 (4.6)，我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{reg}(R_v/J_{K_m,H-v}) &\leq (m-1)(|S|-1+\mathrm{im}(G')) \\ &\leq (m-1)(|S|+\mathrm{im}(G)) - (m-1) \\ &< (m-1)(|S|+\mathrm{im}(G)); \\ \mathrm{reg}(R/J_{K_m,H_v}) &\leq (m-1)(|S|-1+\mathrm{im}(G'')) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (m-1)(|S|+\operatorname{im}(G));\\ \operatorname{reg}(R_v/J_{K_m,H_v-v}) &\leq (m-1)(|S|-1+\operatorname{im}(G'''))\\ &\leq (m-1)(|S|+\operatorname{im}(G))-(m-1)\\ &< (m-1)(|S|+\operatorname{im}(G)). \end{aligned}$$

现在，将命题 2.7 应用于短正合列 (2.1)，并利用上述不等式，我们得到

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(R/J_{K_m,H}) &\leq \max\{\operatorname{reg}(R/J_{K_m,H_v}), \operatorname{reg}(R_v/J_{K_m,H-v}), \operatorname{reg}(R_v/J_{K_m,H_v-v})+1\}\\ &\leq (m-1)(|S|+\operatorname{im}(G)). \end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

注释 4.3. 令 $H = W_S(G) \in \mathcal{G}_1$ 为一个具有 n 个顶点的图。注意，由于[18, 定理 3.7], , 当 $m \geq n$ 时，$\operatorname{reg}(R/J_{K_m,H}) = n-1$。再由命题 4.2 和 [18,定理 3.6], , 当 $m < n$ 时，我们有 $\operatorname{reg}(R/J_{K_m,H}) \leq \min\{(m-1)(|S|+\operatorname{im}(G))\ n-1\}$。

接下来，为了建立无间隙图上的胡须图的二项式边理想正则性公式，我们需要预备一些关于超图边理想以及二项式边理想约化 Gr¨obner 基的知识。我们先来说明这些内容。

定义 4.4. 一个（简单）超图 $\mathcal{H}$ 是一个二元组 $(V(\mathcal{H})\ E(\mathcal{H}))$，其中 $V(\mathcal{H})$ 是一个有限集，称为 $\mathcal{H}$ 的顶点集； $E(\mathcal{H})$ 是 $V(\mathcal{H})$ 的一个非空子集族，称为边集，并且其中任意两个不同的边互不包含。

考虑一个简单超图 $\mathcal{H}$，其顶点集为 $V(\mathcal{H}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$。对于任意 $E \subset V(\mathcal{H})$，定义 $X_E := \Pi_{x_i \in E} x_i$ 为 $A = K[x_1, \ldots, x_n]$ 中的一个平方自由单项式。那么边理想 $I_{\mathcal{H}}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个理想，定义在 A 中如下： $I_{\mathcal{H}} = \langle X_E : E \subset V(\mathcal{H})\rangle$。

定义 4.5. 简单超图 $\mathcal{H}$ 中的诱导匹配是由两两不相交的边 $e_1, \ldots, e_r$ 组成的集合，其中包含在 $\cup_{i=1}^{r} e_i$ 中的 $\mathcal{H}$ 的边只有 $e_1, \ldots, e_r$。

定理 4.6 ([22, 推论 3.9])。 设 $\mathcal{H}$ 是一个简单超图， $M = \{e_1, \ldots, e_r\}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的一个诱导匹配。那么 $\sum_{i=1}^{r}(|e_i|-1) \leq \operatorname{reg}(A/I_{\mathcal{H}})$。

定义 4.7。 设 G 是一个具有 $V(G) = [n]$ 的图。若一条路径 $\pi : i = i_0,\ i_1,\ \ldots\ldots,\ i_r = j$ 从 i到 j，且 $i < j$ 在 G 中，则称其为 G 中的一条容许路径，如果满足以下条件:

- $i_k \neq i_l$ 对于 $k \neq l$;
- 对于每个 $k \in \{1, \ldots, r-1\}$，要么 $i_k < i$，要么 $i_k > j$;
- G 在顶点集 $\{i_0, \ldots, i_r\}$ 上的诱导子图不含诱导圈。

注4.8。 设 G 是一个以 $[n]$ 为顶点的图。对于 G中的一条容许路径 $\pi :\ i = i_0,\ i_1,\ \ldots\ldots,\ i_r = j$，我们关联单项式

$$u_\pi = \left(\prod_{i_k > j} x_{i_k}\right)\left(\prod_{i_l < i} y_{i_l}\right).$$

设 $\prec$ 是由 $x_1 \succ x_2 \succ$ 诱导的 $R = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ 上的字典序 $\cdots \succ x_n \succ y_1 \succ y_2 \succ \cdots \succ y_n$。 那么， $\mathcal{G} = \{u_\pi f_{ij} \mid \pi$ 是从 i 到 $j\}$ 的容许路径

a 关于 $\prec$的{2}.1]定理给出的 J_G 的约化 Gr¨obner 基。因此 e,

$$\mathscr{G}(\mathrm{in}_{\prec}(J_G)) = \{u_\pi x_i y_j \mid \pi \text{ is an admissible path from } i \text{ to } j \text{ with } i < j\},$$

其中， $\mathscr{G}(I)$表示单项式理想 I的极小单项式生成集。

引理 4.9。 设 G 是一个具有 p 个顶点的非空图。那么$\mathrm{reg}(R/J_{W(G)}) \geq p+1$。

证明。设 G 是一个具有 p 个顶点的非空图。若 $p=2$，则 $G = K_2$ 且 $W(G)$是长度为 3 的路径图。在这种情况下，由 [21, 定理 1.1]可得 $\mathrm{reg}(R/J_{W(G)}) = 3$。因此，我们可以假设 $p > 2$。将 G 的顶点标记为 3 到 $p+2$，使得 $\{3,4\}$ 是 G的一条边。现在我们以一种特殊方式标记 $W(G)$的顶点：将与 3 相连的悬挂顶点标记为 1，与 4 相连的标记为 2，与 5 相连的标记为 $p+3$，与 6 相连的标记为 $p+4$，.....，与 $p+2$ 相连的标记为 $2p$。现在，考虑 $J_{W(G)}$ 关于命题 4.8 中提到的字典序 $\prec$ 的初始理想 $\mathrm{in}_{\prec}(J_{W(G)})$。设 $\mathcal{H}$ 为满足 $I_{\mathcal{H}} = \mathrm{in}_{\prec}(J_{W(G)})$的超图。根据我们对顶点的标记方式以及命题 4.8 中给出的 $\mathrm{in}_{\prec}(J_{W(G)})$ 的极小生成元描述，可以看出 $\{x_1, y_2, x_3, x_4\}$、$\{x_5, y_{p+3}\}$、$\{x_6, y_{p+4}\}$、.....、$\{x_{p+2}, y_{2p}\} \in E(\mathcal{H})$。我们取

$$M = \{\{x_1, y_2, x_3, x_4\}, \{x_5, y_{p+3}\}, \{x_6, y_{p+4}\}, \ldots, \{x_{p+2}, y_{2p}\}\}.$$

断言： M 在 $\mathcal{H}$中构成一个诱导匹配。

断言的证明。 注意，对于任意两条不同的边 $e_i, e_j \in M$，都有 $e_i \cap e_j = \emptyset$。因此， M 中的边两两不相交。令

$$K = \bigcup_{e \in M} e = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots, x_{p+2}, y_2, y_{p+3}, y_{p+4}, \ldots, y_{2p}\}.$$

我们需要证明， $\mathcal{H}$ 中包含于 K 的边只有 M中的元素。假设存在 $e \in E(\mathcal{H}) \setminus M$ 使得 $e \subset K$。注意， $\{x_i, y_2\} \notin E(\mathcal{H})$，因为在 $W(G)$中，2 的唯一邻点是 4，且 $4 > 2$。此外，对于 $1 \leq l \leq p-2$， $\{x_i, y_{p+2+l}\} \notin E(\mathcal{H})$，若 $i \neq 4+l$，则 $p+2+l$ 的唯一邻点是 $4+l$。因此，$|e| > 2$。现在，对应于 e，存在一条容许路径 π： $i = i_0, i_1, \ldots, i_r = j$，其中 $r \geq 2$ 在 $W(G)$中，且 $\mathrm{supp}(u_\pi x_i y_j) = e$。注意，若 $j = i_r = 2$，则唯一可能的情况是 $e = \{x_1, y_2, x_3, x_4\}$，它属于 M，从而导致矛盾。因此， $j = i_r \in \{p+3, p+4, \ldots, 2p\}$，因为 $y_j \in K$。令$j = i_r = p+2+l$，其中某个 $1 \leq l \leq p-2$。由于 $p+2+l$ 是 $W(G)$中与 $4+l$相邻的一个悬挂顶点， i_{r-1} 唯一的选择是 $4+l$。由假设 $p > 2$，根据容许路径的定义可知 $i_{r-1} = 4+l < i$，因此 $y_{4+l} \in e$。这与以下事实矛盾：对于任意 $1 \leq l \leq p-2$， $e \subset K$，因为 $y_{4+l} \notin K$。因此，我们的假设不成立，且 M 在 $\mathcal{H}$中构成一个诱导匹配。

现在，由上述断言和命题 4.6 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{reg}(R/\mathrm{in}_{\prec}(J_{W(G)})) &= \mathrm{reg}(R/I_{\mathcal{H}}) \\
&\geq \sum_{e \in M} (|e| - 1) \\
&= 2(p-2) + 4 - (p-1) \\
&= p+1
\end{aligned}$$

因此，由 [9, 推论 2.7], $\mathrm{reg}(R/J_{W(G)}) = \mathrm{reg}(R/\mathrm{in}_{\prec}(J_{W(G)})) \geq p+1$。 □

定理 4.10. 设 G 为一个无间隙图。则

$$\operatorname{reg}(R/J_{W(G)}) = |V(G)| + 1.$$

证明。 由于图 G无间隙，$\mathbf{im}(G) = 1$。因此，由命题 4.2 和命题 4.9 可得 $\mathbf{reg}(R/J_{W(G)}) = |V(G)| + 1$。□

5. G2 中图的 Cohen-Macaulay 二项式边理想

本节中，我们对属于类 $\mathcal{G}_2$ 且具有 Cohen-Macaulay 二项式边理想的所有图进行分类。特别地，这给出了一个新的构造，即由图的广义冠积产生 Cohen-Macaulay 二项式边理想。我们首先回顾有关二项式边理想的 Cohen–Macaulay 性质的一些基本结果。

引理 5.1 ([24, 引理 2。5])。 设 G 是一个连通图。当且仅当对于所有 $T \in \mathcal{C}(G)$， J_G 是无混合的，且 $c_G(T) = |T| + 1$。

图 H上的锥记作 $\mathbf{cone}(v, H)$，是一个顶点集为 $V(H) \sqcup \{v\}$、边集为 $E(H) \cup \{\{u, v\} \mid u \in V(H)\}$的图。

引理 5.2([24, 引理 3.4])。 设 $H = \sqcup_{i=1}^{r} H_i$ 是一个具有 H_i 个连通分支、满足 $r \geq 1$ 的图，并且 $G = \operatorname{cone}(v, H)$。如果 J_G 是无混合的，则 H 至多有两个连通分支。

定理 5.3 ([28, 命题 3.2])。 设 G 是一个图，且 $v \in V(G)$。如果 J_G 是 ***Cohen-Macaulay*** 的，那么 J_{G_v} 也是 ***Cohen-Macaulay*** 的。

定理 5.4 ([6, 定理 4.8])。 设 $H = H_1 \sqcup H_2$ 满足 H_1， H_2 连通，并且 $G = \operatorname{cone}(v, H)$。则 J_{H_1} 和 J_{H_2} 是 ***Cohen-Macaulay*** 的，当且仅当 J_G 是 ***Cohen-Macaulay*** 的。

在对类$\mathcal{G}_2$中具有 Cohen-Macaulay 二项式边理想的图进行分类之前，我们必须先证明一个引理，该引理涉及属于 $\mathcal{G}_2$的某个子类的图的二项式边理想的 Krull 维数。设 $\mathcal{G}_2'$ 是 $\mathcal{G}_2$ 的一个子类，其中包含形如 $D = K_p \circ_S (H_1、\ldots\ldots、 H_{|S|})$的图，其中 p满足某些条件。下面的引理给出了任意 $D \in \mathcal{G}_2'$的 $\mathbf{dim}(R/J_D)$ 公式。

引理 5.5. 设 $D = K_p \circ_S (H_1、\ldots\ldots、 H_{|S|})$ 是属于类 $\mathcal{G}_2'$的任意一张图。那么

$$\dim(R/J_D) = p - |S| + 1 + \sum_{i=1}^{|S|} \dim(R_i/J_{H_i}).$$

证明。 我们对 $|S|$进行归纳。若 $|S| = 0$，则 D 是一个有 p 个顶点的完全图，因此 $\mathbf{dim}(R/J_D) = p + 1$。考虑 $|S| \geq 1$ 和 $S = \{v_1, \ldots, v_\ell\}$，使得对于所有 $1 \leq i \leq \ell$， v_i 都与 H_i 的所有顶点相邻。为简化记号，记作 $v = v_\ell$。于是我们看到，$D - v = H_\ell \sqcup D'$，其中 $D' \in \mathcal{G}_2'$ 且 D_v，$D_v - v \in \mathcal{G}_2'$。再次注意，恰有 $(\ell - 1)$ 个图 $H_1, \ldots, H_{\ell-1}$ 与基图相连于 D'、 D_v 和 $D_v - v$ 中。因此，利用归纳假设，我们得到

$$\dim(R_v/J_{D-v}) = \dim(R_\ell/J_{H_\ell}) + (p-1) - (\ell-1) + 1 + \sum_{i=1}^{\ell-1} \dim(R_i/J_{H_i})$$

$$= p - \ell + 1 + \sum_{i=1}^{\ell} \dim(R_i/J_{H_i})$$

$$\dim(R/J_{D_v}) = (p + |V(H_\ell)|) - (\ell - 1) + 1 + \sum_{i=1}^{\ell-1} \dim(R_i/J_{H_i})$$
$$\leq \dim(R_v/J_{D-v}) \quad (\text{since } \dim(R_\ell/J_{H_\ell}) \geq |V(H_\ell)| + 1)$$

$$\dim(R_v/J_{D_v-v)}) = (p + |V(H_\ell)| - 1) - (\ell - 1) + 1 + \sum_{i=1}^{\ell-1} \dim(R_i/J_{H_i})$$
$$< \dim(R_v/J_{D-v}) \quad (\text{since } \dim(R_\ell/J_{H_\ell}) \geq |V(H_\ell)| + 1).$$

现在，利用短正合列 (2.1)、命题 2.8 以及上述不等式，我们得到

$$\dim(R_v/J_{D-v} \oplus R/J_{D_v}) = \max\{\dim(R/J_D), \dim(R_v/J_{D_v-v})\}$$
$$\implies \quad \dim(R_v/J_{D-v}) = \dim(R/J_D)$$

因此，我们有 $\dim(R/J_D) = p - \ell + 1 + \sum_{i=1}^{\ell} \dim(R_i/J_{H_i})$。 □

定理 5.6. 设 $D = G \circ_S (H_1, \ldots, H_{|S|})$ 是 $\mathcal{G}_2$ 中任意一个 G 非空的连通图。那么以下条件等价：

(1) J_D 是 *Cohen-Macaulay*；*(2)* G 是完全的，每个 H_i 都是连通的，且其 *Cohen-Macaulay* J_{H_i}，并且每当$|S| = |V(G)|$ 时， H_i 中至少有一个是完全的。

证明。(1) $\implies$ (2)：假设 J_D 是 Cohen-Macaulay 的。反设， G 不是完全图。则存在一对顶点 u 和 v 属于 G，使得 u 和 v 不相邻。考虑顶点集 $T = N_G(u) \setminus A_G$。于是有 $T \subset B_G \subset S$，并且根据 D的构造，有 $T \in \mathcal{C}(D)$。由于 D 是连通的， G 也连通，因此， u 和 v 通过 G中的某些路径相连。注意， u在 $G \setminus T$ 中的邻点要么是自由顶点，要么 u 在 $G \setminus T$中没有邻点。因此，在$G \setminus T$中， u 和 v 属于两个不同的连通分支，因为u和 v之间没有边。因此， $c(D \setminus T) \geq |T| + 2$，因为 T中的每个顶点都是 D中的割点，这与根据命题 5.1， J_D 是无混合的事实相矛盾。因此，我们的假设错误， G 是完全图。接下来，如果 $|S| = \emptyset$，则 $D = G$是完全图，无需证明。注意，由于 G 非空， $|V(G)| \geq 2$。现在，假设对于某个 $\ell \geq 1$有 $S = \{v_1, \ldots, v_\ell\}$，并考虑图 $D' = D_{v_1 \cdots \widehat{v_i} \cdots v_\ell}$。那么，根据命题 5.3， $J_{D'}$ 是 Cohen-Macaulay 的。由于 G 是连通的，且$V(G) \setminus \{v_i\}$ 中的所有顶点都是 D'中的自由顶点，因此 v_i 与 D'中的所有其他顶点相邻。由此可见， $D' = \text{cone}(v_i, H)$，其中 $H = H' \sqcup H_i$ 对应于某个完全图 H'。于是，根据命题 5.2， H_i 是连通的，并且根据命题 5.4， J_{H_i} 是 Cohen-Macaulay 的。由于 v_i 的选取是任意的，所有 H_i's都与 Cohen-Macaulay 的 J_{H_i}连通。现在，考虑 $|S| = |V(G)| = p$ （例如）。我们必须证明 H_i's 中至少有一个是完全图。反设没有一个 H_i 是完全图。对每个 $1 \leq i \leq p$，选取$T_i \in \mathcal{C}(H_i) \setminus \{\emptyset\}$，并考虑集合 $T = V(G) \cup T_1 \cup \cdots \cup T_p$。取

任意一个 $s \in T$。如果对于某个 i有 $s \in T_i$，那么 s 是图 $D - (T \setminus \{s\})$ 的割点，因为 s 是图 $H_i - (T_i \setminus \{s\})$ 的割点。假设 $s \in V(G)$，并且图 H_s 在 D 中附着于 s，其中 $1 \leq s \leq p$是某个顶点。由于 H_s 与无混合的 J_{H_s}连通，根据命题 5.1， s 与$|T_s|+1$ 个 $H_s \setminus T_s$ 的连通分支相邻。由于 T_s 是 H_s的非空割集，我们有 $|T_s|+1 \geq 2$，这意味着 s 是 D –$(T \setminus \{s\})$ 中的割点。因此，T 是 D的割集。此外，我们有

$$\begin{aligned} c_D(T) &= c_{H_1}(T_1) + \cdots + c_{H_p}(T_p) \\ &= (|T_1|+1) + \cdots + (|T_p|+1) \quad \text{(by Proposition 5.1)} \\ &= \sum_{i=1}^{p} |T_i| + p \\ &= |T|. \end{aligned}$$

根据命题 5.1， $c_D(T) = |T|$ 与 J_D 为无混合这一事实矛盾。因此，当 $|S| = |V(G)|$时，至少有一个 H_i应当是完全的。

(2) $\implies$ (1)：假设 D 满足定理陈述中的条件 (2)。我们需要证明 J_D 是 Cohen-Macaulay 的。由于所有 H_i都与 Cohen-Macaulay 二项式边理想连通，由命题 3.4 可知，$\operatorname{depth}(R/J_D) = |V(D)| + 1$。再次注意，由于每个 H_i 都与 Cohen-Macaulay 二项式边理想连通，因此 $\dim(R_i/J_{H_i}) = |V(H_i)| + 1$。根据条件 (2) 的假设，我们很容易看出 D 属于命题 5.5 中考虑的类 $\mathcal{G}_2'$。因此，利用命题 5.5 中确立的维数公式，我们得到 $\dim(R/J_D) = |V(D)| + 1$。于是， J_D 是 Cohen-Macaulay 的，证明完毕。□

致谢。 第三作者获得了印度政府旗下 Anusandhan 国家研究基金会（ANRF）的部分资助，资助项目为 ARG-MATRICSGrant No. ANRF/ARGM/2025/002203/MTR。

参考文献

[1] L. Amata、M. Crupi 和 G. Rinaldo。Cohen–Macaulay 广义二项式边理想。*Journal ofAlgebra and Its Applications*，0(0):2650122，2026。[2] J. Anuvinda、R. Mehta 和 K. Saha。关于广义二项式边理想的深度。*Mediterr. J.Math.*，21(5)：论文编号 147，16 页，2024。[3] J. Anuvinda、R. Mehta 和 K. Saha。关于广义二项式边理想的正则性猜想。*Collect.Math.*，76(3):685–693，2025。[4] D. Bolognini、A. Macchia、G. Rinaldo 和 F. Strazzanti。小图的 Cohen-Macaulay 二项式边理想。*J. Algebra*，638:189–213，2024。[5] D. Bolognini、A. Macchia 和 F. Strazzanti。二部图的二项式边理想。*European J.Combin.*，70:1–25，2018。[6] D. Bolognini、A. Macchia 和 F. Strazzanti。Cohen–Macaulay 二项式边理想与可达图。*J. of Alg. Comb.*，55:1139–1170，2022。[7] W. Bruns 和 A. Conca。Gr¨obner 基与行列式理想。载于交换代数、奇点与计算机代数（锡纳亚，*2002*），第 115 卷*NATO Sci.Ser.IIMath.Phys.Chem.*，第 9–66 页。Kluwer Acad. Publ.，多德雷赫特，2003。[8] F. Chaudhry 和 R. Irfan。关于广义块图的广义二项式边理想。*Math.Rep. (Bucur.)*，22(72)(3-4):381–394，2020。

[9] A. Conca 和 M. Varbaro。无平方 Gr¨obner 退化。《数学发明》，221:713–730，2020。[10] P. Das。图的二项式边理想的同调性质新成果，2023。[11] V. Ene、J. Herzog 和 T. Hibi。Cohen-Macaulay 二项式边理想。《名古屋数学杂志》，204:57–68，2011。[12] V. Ene、J. Herzog、T. Hibi 和 A. A. Qureshi。图对的二项式边理想。《名古屋数学杂志》，213:105–125，2014。[13] B. Hajra 和 R. Sarkar。关于图的冠积的二项式边理想。《Mediterr. J. Math.》，22(7)：论文编号 181，31 页，2025。[14] J. Herzog、T. Hibi、F. Hreinsd´ottir、T. Kahle 和 J. Rauh。二项式边理想与条件独立性陈述。《应用数学进展》，45(3):317–333，2010。[15] J. Herzog、T. Hibi 和 H. Ohsugi。二项式理想，数学研究生教材第 279 卷。施普林格，查姆，2018。[16] A. Katsabekis。广义二项式边理想的算术秩与上同调维数。《代数及其应用杂志》，24(2)：论文编号 2550038，14 页，2025。[17] D. Kiani 和 S. Saeedi Madani。一些 Cohen-Macaulay 和无混合二项式边理想。《代数通讯》，43(12):5434–5453，2015。[18] A. Kumar。图的广义二项式边理想的正则性界。《J. Algebra》，546:357–369，2020。[19] A. LaClair。二项式边理想的同调与组合性质。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，2025。博士论文——普渡大学。[20] A. Lerda、C. Mascia、G. Rinaldo 和 F. Romeo。（S_2）条件与 Cohen-Macaulay 二项式边理想。《代数组合学杂志》，57(2):589–615，2023。[21] K. Matsuda 和 S. Murai。二项式边理想的正则性界。《交换代数杂志》，5(1):141–149，2013。[22] S. Morey 和 R. H. Villarreal。边理想：代数与组合性质。《交换代数进展》1，第 85–126 页，2012。[23] M. Ohtani。由某些二阶子式生成的图与理想。《代数通讯》，39(3):905–917，2011。[24] A. Rauf 和 G. Rinaldo。Cohen-Macaulay 二项式边理想的构造。《代数通讯》，42(1):238–252，2014。[25] J. Rauh。广义二项式边理想。《应用数学进展》，50(3):409–414，2013。[26] M. Rouzbahani Malayeri、S. Saeedi Madani 和 D. Kiani。关于图的二项式边理想的深度。《代数组合学杂志》，55(3):827–846，2022。[27] S. Saeedi Madani。二项式边理想：综述。载于《多重分次代数及其应用》，《施普林格数学与统计学会议录》第 238 卷，第 83–94 页。施普林格，查姆，2018。[28] K. Saha 和 I. Sengupta。具有图的围长的二项式边理想的 Cohen-Macaulay 性质。《J. Algebra》，658:533–555，2024。[29] K. Saha 和 I. Sengupta。二项式边理想的闭 Cohen-Macaulay 完备化。《Algebra Colloq.》，32(3):443–460，2025。[30] K. Saha 和 I. Sengupta。以带毛的块刻画 Cohen-Macaulay 二项式边理想。《代数及其应用杂志》，24(12)：论文编号 2550294，29 页，2025。[31] Y.-H. Shen 和 G. Zhu。路径图的广义二项式边理想的幂。《国际代数与计算杂志》，34(5):779–806，2024。[32] Y.-H. Shen 和 G. Zhu。二部图的广义二项式边理想。《J. Algebra》，662:167–213，2025。[33] R. H. Villarreal。Cohen-Macaulay 图。《Manuscripta Math.》，66(3):277–293，1990。

SRM大学-AP 数学系，印度安得拉邦阿马拉瓦蒂 522240电子邮件地址：anuvinda_j@srmap.edu.in

印度安得拉邦阿马拉瓦蒂 522240，SRM大学-AP 数学系

电子邮件地址：ranjana.m@srmap.edu.in印度安得拉邦阿马拉瓦蒂 522240，SRM大学-AP 数学系

电子邮件地址：kamalesh.saha44@gmail.com；kamalesh.s@srmap.edu.i n