arXiv:2602.07718v1 [math.NA] 7 Feb 2026

# 使用区间 Krawczyk 检验的经认证的曲面近似

MICHAEL BURR、Jonathan D. Hauenstein 和 Kisun Lee

Abstract. 我们提出一种算法，通过推广 Krawczyk 检验来构造曲面的经认证逼近。Krawczyk 检验基于区间算术，用于确认某个区域内方阵解析方程组的解存在且唯一。通过推广这一检验，我们将该技术扩展到非方阵系统和高维簇。我们提供了一个原型实现，并通过若干示例展示其用途。

## 1. Introduction

计算代数几何中的一个经典问题是计算并分析多项式方程组的解集。从数值角度看，目标是计算带有证书的数值近似，即对附近解的存在性和唯一性给出数值证明。例如，Smale 的 $\alpha$-理论 [14] 利用单点处收集的数据分析牛顿法，从而提供此类证书。这项技术已用于开发认证同伦延拓跟踪器，例如参见 [1, 7, 13]。

与其使用单个点的数据，不如采用区间算术来理解某个区域内的行为。Krawczyk 算子最初由 Krawczyk [8]提出，作为一种类似牛顿法的算子，用于缩小紧区域，以识别方程组的解。在 [10], ，Moore 证明该算子可用于认证解的存在性。Rump [11] 在这些成果的基础上进一步证明，该算子也可用于判定某个区域内解的唯一性。

最近，Krawczyk 检验经过改造后被用于 [2, 5, 6] ，以创建用于同伦延拓和曲线跟踪的认证算法。 [5, 6] 的关键见解是，Krawczyk 检验可以在一个区间上同时应用，从而为整个区域提供认证。具体而言，这种检验曾用于认证一条曲线段的存在性和唯一性，该曲线段贯穿一个盒的全长。

本文的主要理论贡献在于，对于良约束系统，可以在任意维度区域的每个点上同时应用 Krawczyk 检验。具体而言，这一广义检验能够实现曲面的经认证近似，而曲面正是本文关注的主要对象。

本文其余部分安排如下。第 2 节探讨将区间 Krawczyk 检验应用于良约束系统，其中定理 2.1 给出了主要理论贡献。第 3 节将该检验用于单层图和多层图。第 4 节回顾第一种方法的局限性，并介绍针对这些局限性的改进。第 5 节介绍完整的认证曲面近似算法。最后，第 6 节讨论实现细节和示例。

*Key words and phrases.* 经认证的曲面近似、Krawczyk 算子、区间算术、数值代数几何。

## 2. Interval Krawczyk test

该*Krawczyk* 检验是经认证的数值算法中常用的工具，因为它能够判定某个区域内方形解析系统的解是否存在且唯一。具体而言，该检验会检查类 Newton 算子在某个区域上是否为压缩映射。我们的首要目标是扩展这一检验，使其能够应用于高维簇。随后，我们将 Krawczyk 检验的这一推广应用于曲面近似问题。

2.1. **区间算术**。 Krawczyk 检验基于区间算术，这是一种使用区间而非点进行计算的方法。使用区间有两个优点：(1) 当精确值未知或无法在计算机上表示时，我们可以进行保守计算；(2) 我们可以一次对整个区域进行计算并得出结论。

区间上的运算按元素定义。也就是说，对于算术运算符 $\odot$ 以及区间$I$ 和 $J$，我们定义

$$I \odot J := \{x \odot y : x \in I, y \in J\}.$$

例如， $[a,b]+[c,d] = [a+c, b+d]$，更多详情请参见 [10]。令 $\mathbb{IQ}^m$ 为顶点位于 $\mathbb{Q}^m$中的轴对齐 $m$ 维盒的集合。我们可以将$(\mathbb{IQ})^m$ 视为 $\mathbb{IQ}^m$，并交替使用记号$(I_1、\ldots\ldots、I_m)$或 $I_1 \times \cdots \times I_m$。

对于函数 $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$， $f$ 的区间扩展是任意函数 $\square f\colon \mathbb{IQ}^m \to \mathbb{IQ}$，其中，对于所有 $I \in \mathbb{IQ}^m$，

$$\square f(I) \supseteq f(I) := \{f(x) \mid x \in I\}.$$

多项式系统的区间扩展由一组扩展构成，每个多项式各对应一个扩展。

对于区间 $I \in \mathbb{IQ}$，我们将 $\|I\| = \max_{x\in I} |x|$ 定义为 $I$ 中元素的最大值。对于盒 $I = I_1 \times \cdots \times I_m \in \mathbb{IQ}^m$，我们将 $\|I\| = \max_i \|I_i\|$.

2.2. **区间 Krawczyk 检验**。 设 $F = (f_1, \ldots\ldots, f_{n-d})$ 为一个多项式系统，并假设其公共零点集合 $X := \mathcal{V}(f_1, \ldots\ldots, f_{n-d})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个光滑纯 $d$ 维簇。设 $\pi_d\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ 为到前 $d$ 个坐标上的投影，类似地， $\pi_{-d}$ 为到后 $n-d$ 个坐标上的投影。假设 $\pi_d|_X\colon X \to \mathbb{R}^d$ 的像中包含一个具有非空内部的 $d$ 维集合 $U$，则对于大多数 $x \in U$，仅有有限多个 $z \in X$投影到 $x$。我们现在基于 Krawczyk 检验定义一个检验，使得若 $I = I_1 \times \cdots \times I_n \in \mathbb{IQ}^n$通过该检验，则可知对于每个 $x \in I_1 \times \cdots \times I_d$，存在唯一的 $y \in I_{d+1} \times \cdots \times I_n$，使得 $(x, y) \in X$。

设$z \in \mathbb{R}^n$、 $r = (r_1、 r_2)$ 为一对正数，且 $A$ 为一个可逆矩阵。我们将区间 *Krawczyk* 算子定义为

$$K(F, \hat{z}, r, A) := -A\square F(I, \pi_{-d}(\hat{z})) + (Id_{n-d} - A\square J_F(I, J))(J - \pi_{-d}(\hat{z})),$$

其中 $I := \pi_d(\hat{z}) + r_1[-1,1]^d \subseteq \mathbb{R}^d$, $Id_{n-d}$ 是大小为 $(n-d) \times (n-d)$ 的单位矩阵， $J := \pi_{-d}(\hat{z}) + r_2[-1,1]^{n-d} \subseteq \mathbb{R}^{n-d}$，而 $\square J_F(I, J)$ 是以下 $(n-d)\times(n-d)$ 雅可比子矩阵在 $I \times J$ 上的区间扩展

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right]_{\substack{i\in\{1,\ldots,n-d\}\\ j\in\{d+1,\ldots,n\}}}.$$

**定理 2.1** （区间 Krawczyk 检验）。假设 $F$、$\hat{z}$、 $r = (r_1, r_2)$、 $A$、 $I$ 和 $J$均如上所定义。若存在 $\rho \in \in (0, 1)$ 使得

$$K(F, \hat{z}, r, A) \subset \rho\,(J - \pi_{-d}(\hat{z})),$$

那么，对于每个 $\hat{x} \in I$，都存在唯一的 $y^* \in J$使得 $F(\hat{x}, y^*) = 0$满足 $\|y^* - \pi_{-d}(\hat{z})\| \le r_2\rho$。在这种情况下，我们称 $\hat{z}$ 为 $\rho$对的近似解，误差为 $F$，认证半径 $r$。

证明。令 $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^n$ 并定义 $G(y) := F(\hat{x}, y)$。由于区间算术具有包含单调性，因此可立即得出 $K(G, \hat{y}, r, A) \subset K(F, \hat{z}, r, A)$，其中

$$K(G, \hat{y}, r, A) := -AG(\hat{y}) + (Id_{n-d} - A\square J_G(J))(J - \hat{y}).$$

当定理的包含假设成立时，我们知道 $K(G, \hat{y}, r, A) \subset \rho(J - \pi_{-d}(\hat{z})) = \rho(J - \hat{y})$。然后，通过标准 Krawczyk 检验 [5, 6, 10]，$G$ 的解存在且唯一。由于 $\hat{x}$ 在 $I$中是任意的，结论得证。□

**注 2.2**。在许多应用中，$A$ 的一个良好选择是近似 $\square J_F(I, J)$ 中矩阵的逆。因此，$A$的自然选择是近似

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(\hat{z})\right]^{-1}_{\substack{i\in\{1,\dots,n-d\}\\ j\in\{d+1,\dots,n\}}}$$

我们将定理 2.1 转化为 *IntervalKrawczykTest* 算法 1。由于 $K(F, \hat{z}, r, A)$ 和 $J - \pi_{-d}(\hat{z})$ 都是以零为中心的区间，并且 $\rho(J - \pi_{-d}(\hat{z})) = [-\rho, \rho]^{n-d}$，算法 1 的最终检验等价于定理 2.1 中的包含关系。

**算法 1**IntervalKrawczykTest

**输入**：
- 一个多项式系统 $F = (f_1, \dots, f_{n-d}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$,
- 一个点 $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Q}^n$,
- 一个正有理数向量 $r \in \mathbb{Q}^2$,
- 一个可逆矩阵 $A \in \mathbb{Q}^{(n-d)\times(n-d)}$，以及
- $\rho \in (0,1)$.

**输出**：一个布尔值，即区间 Krawczyk 检验的值。1: 集合 $I = \pi_d(z) + r_1[-1,1]^d$和 $J = \pi_{-d}(z) + r_2[-1,1]^{n-d}$。2: 集合 $K = -A\square F(I, \pi_{-d}(z)) + (Id_{n-d} - A\square J_F(I, J))(J - \pi_{-d}(z))$。3: **返回** $\|K\| < r_2\rho$。

**注 2.3.** 尽管本文重点讨论实代数簇，但通过将 $\mathbb{C}^n$ 视为 $\mathbb{R}^{2n}$并适当修改定义，可以直接将结果推广到复代数簇。此外，我们可以放宽 $X$ 光滑这一条件，因为它只需在应用检验的地方光滑。

## 3. An initial case: graphs

作为展示这一项区间 Krawczyk 检验威力的第一步，我们考虑 $X$为图的情形。本节旨在提供一种能够正确近似图 $X$的简单算法。该算法提供了一种启发性方法，其缺点将在后续章节中解决。由于曲面情形与高维情形的理论完全相同，尽管后续章节会将讨论限制在曲面情形，我们仍在此完整呈现一般情形下的内容。我们还指出，本文不讨论如何判定一个簇是否为某个定义域上的图。

假设 $X$ 如第 2.2 节所定义，且 $U \subseteq \mathbb{R}^d$。我们称 $X$ 是一个 图在 $U$ 之上，如果对于每个 $x \in U$，纤维 $X \cap \pi_d^{-1}(x)$ 恰好包含一个点。此外，我们称 $X$ 在正则于$U$，如果对于所有 $z \in X \cap \pi_d^{-1}(U)$，雅可比矩阵

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(z)\right]_{\substack{i\in\{1,\dots,n-d\}\\ j\in\{d+1,\dots,n\}}}$$

是非奇异的。这尤其意味着，$X$ 在 $z$ 处的切空间不包含任何平行于投影方向的非零向量。此时，根据隐函数

定理， $X \cap \pi_d^{-1}(U)$ 与 $U$同胚。本节的目标是构造$X \cap \pi_d^{-1}(U)$的一个包围集，使其与之的 Hausdorff 距离任意小，并且可变形收缩到 $X \cap \pi_d^{-1}(U)$。

3.1. **图近似**。 我们首先将问题特殊化。假设每个定义多项式都具有有理系数，即 $f_i \in \mathbb{Q}[z_1, \ldots, z_n]$、$U$是 $\mathbb{IQ}^d$ 中的一个盒，且 $X$是 $U$ 上的一个图。此外，我们为 $\rho \in$ 固定一个值（0， 1）。通过对变量进行缩放，我们立即化归到 $U$ 为立方体的情形，即 $U$ 的所有边长度相同。

我们在 $U$ 上采用基于细分的方法，其中对子区域进行处理，要么接受其包含曲面，要么拒绝并进一步细化。假设 $B \subseteq U$ 是 $\mathbb{IQ}^d$ 中边长为 $2r_1$ 的立方体，则该盒的中心 $\hat{x}$ 位于 $\mathbb{Q}$ 中，我们可以使用众多经认证的多变量实根求解器之一（参见例如 $[3, 9]$, ），以高精度近似纤维中的解 $\hat{y}$ 。于是 $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y})$ 是靠近 $X$ 的一个点，我们在区间 Krawczyk 检验（定理 2.1）中使用该点。我们按注 2.2 选取 $A$ 作为 $\hat{z}$ 处雅可比矩阵的逆。因此，我们只需为 $r_2$ 取一个值即可应用 Krawczyk 检验。

对 $r_2$ 的选择比其余参数更为微妙。执行区间 Krawczyk 检验时，基区域 $B$ 是给定的（并在定理 2.1 中扮演 $I$ 的角色）。另一方面， $J$ 是根据 $r_2$构造的。要使区间 Krawczyk 检验成功，$B \times J$ 必须包含 $\pi_d^{-1}$ （$B$），但这只是必要条件，并非充分条件。根据我们的设定， $X$ 中出现的斜率没有明确的大小界。虽然紧致性保证了存在一个上界，但我们事先并不知道这个上界 $a\ priori$。因此，在细分过程中，我们选择 $r_2$ ，使其在细分时趋于零的速度慢于 $r_1$ 。这样选择后，盒 $B \times J$ 最终会包含 $\pi_d^{-1}$ （$B$），而且我们还能证明算法会终止。

我们将这些选择合并为 图近似 算法，即算法 2。在该算 $B$法中，若盒 $B$ 上的 Krawczyk 检验未通过，就将其细分为 $2^d$ 个子盒，方法是将 $B$ 的每条边都对半分。

**算法 2**图近似

**输入**:
- 一个多项式系统 $F = (f_1, \ldots\ldots, f_{n-d}) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$,
- 一个盒 $U \in \mathbb{IQ}^d$，使得 $\mathcal{V}(F)$ 是定义在 $U$ 上的图,
- $\rho \in (0, 1)$。

**输出**: 一组覆盖 $U$ 上 $F$ 的图的盒。

1: 进行线性缩放，使 $U$ 成为边长为 2 的立方体
2: 初始化队列 $\mathcal{Q}$ ，使其包含 $U$
3: **当** $\mathcal{Q}$ 不为空时 **执行**
4: 从 $\mathcal{Q}$ 中弹出 $B$
5: 将 $2^{s_1+1}$ 设为 $B$的边长
6: 设置 $s_2 = \lceil s_1/2 \rceil$
7: 令 $\hat{x}$ 为 $B$的中点
8: 令 $\hat{y}$ 为 $F$ 的一个近似零点，其在 $\hat{x}$ 上的精度至少为 $2^{s_2}$
9: 集合$\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y})$
10: Set $\hat{A}$ 为 $\hat{z}$处逆雅可比矩阵的一个近似
11: **若** IntervalKrawczykTest($F$, $\hat{z}$, $(2^{s_1}, 2^{s_2})$, $\hat{A}$, $\rho$) $=$ TRUE **则**
12: **报告** $B \times (\hat{y} + 2^{s_2}[-1, 1]^{n-d})$ 并继续执行算法
13: **else**
14: 细分 $B$ 并将其子节点添加到 $\mathcal{Q}$
15: 结束条件判断
16: **结束循环**

我们注意到，该算法中所考虑的每个 $B$ 的边长至多为 2，因此 $s_1 \leq 0$无论何时出现。因此，在步骤 8 中近似 $\hat{y}$ 时，$\hat{y}$ 的精度意味着

点 $\pi_d^{-1}$ (ˆ$x$)位于区间 Krawczyk 检验中构造的盒内。此外，步骤 8 和步骤 10 中的ˆ$y$ 和ˆ$A$ 必须以足够的精度进行近似，使得随着细分次数的增加，区间 Krawczyk 检验计算中的误差变得可以忽略不计。以下正确性定理将说明这一要求的细节。

**定理 3.1.** 令 $F$、 $X$、 $U$ 和 $\rho \in (0,1)$ 如上所述。特别地， $X$ 是 $U$ 上的一个图。如果 ˆ$y$ 和 $A$ 的近似精度收敛得足够快，那么 GraphApproximation 算法（算法 2）输出的盒集合会变形收缩到 $X \cap \pi_d^{-1}(U)$。

证明. 根据区间 Krawczyk 检验（定理 2.1），算法输出中的每个盒 $B \times J$ 都包含 $B$ 上方的 $X$ 部分。此外，由于 $U \times \mathbb{R}^{n-d}$ 变形收缩到 $X \cap \pi_d^{-1}(U)$，且输出盒划分了 $U$ （忽略边界上的重叠），因此将此变形限制在输出盒上，也会变形收缩到 $X \cap \pi_d^{-1}(U)$。因此，要完成这一正确性论证，只需证明算法 2 会终止。

假设为了导出矛盾， $U$ 被无限次细分，并且 $z^* = (x^*, y^*) \in X$其中 $x^* \in U$ 是这样一个点：每一个包含 $x^*$ 的盒 $B$ 都会被细分。注意，当 $s_1$ 和 $s_2$趋于0时，区间Krawczyk检验中的区间收敛到 $z^*$，见算法 2。因此，算法 1中的$\square F(I, \pi_{-d}(z))$与$(Id_{n-d} - A\square J_F(I, J))$都趋于零点。这就产生了矛盾，因为当这些值足够小时，即当盒的尺寸足够小时，区间Krawczyk检验就会成功。因此，任何必须被细分且包含 $x^*$ 的盒 $B$，其尺寸都存在下界。由于 $U$ 是紧区域，该边长存在全局上界，从而队列中所有足够小的盒都必须通过区间Krawczyk检验。因此，该算法终止，证明完成。□

3.2. **扩展**。 我们讨论这种方法的两种扩展：（1）减小近似与簇之间的 Hausdorff 距离；（2）将该方法应用于 $X$ 由多个片组成的情况。

细化。 对于许多应用，获得更精确的簇 $X$近似至关重要。我们可以对算法 2 做一些调整，使最终得到的盒集合能够按需接近 $X$ 。根据定理 2.1， $\|y^* - \pi_{-d}(\hat{z})\| \leq r_2\rho$，因此我们可以将步骤 12 的输出替换为 $B \times (\hat{y} + \rho 2^{s_2}[-1,1]^{n-d})$。如果这些盒仍然太大，我们可以强制使区域 $B$ 变小，和/或将 $\rho$替换为更小的正值。

多层近似。 稍微放宽上述条件后，图近似算法（算法 2）便可用于 $X$ 由 $U$上的 $k$ 个图的并集构成的情况。此时，每个 $\pi^{-1}(x)$恰好由 $k$ 个点组成，每个点对应于 $U$上 $X$ 的一片。在步骤 8 中，最关键的变化是必须完成对 ˆ$x$上所有 $k$ 个点的隔离，而不只是一个点。此项更改可以分别近似 $X$ 的每一片，但也带来了一个潜在的全局问题：不同片的近似所对应的盒可能会相交。为避免这一问题，我们必须继续细化细分，直至同一点 $x \in U$上任意两个盒都不相交，至多只在边界上相接。由于定理 3.1 的证明几乎可以直接扩展到这种情况，我们在此陈述这一结果。

**推论 3.2.** 设 $F$、 $X$、 $U$ 和 $\rho \in (0,1)$ 如上所述。特别地， $X$是 $U$ 上诸图 ˆ 的并。若每个 ˆ$y$ 和 $A$ 的近似精度收敛得足够快，则此处所述对 GraphApproximation 算法的修改所输出的盒集合变形收缩到 $X \cap \pi_d^{-1}(U)$。

## 4. Discussion of limitations

算法 2 中提出的近似算法虽然经过了认证，但仍存在一些不足。下文将讨论其中的几个问题。消除每个不足都能扩大算法的适用范围并提高输出质量，但这些改动往往需要更加谨慎，才能确保正确性声明依然成立。首先，当 Krawczyk

检验失败时，将盒 $d$拆分为 $d=2$ 个子盒的做法在 $d$较大时可能效率不高。由于本文的主要研究对象是曲面，其中 $d=2$ 和 $2^d=4$，因此这里不讨论更高维数下的问题。

其次，由于该算法会受到 $X$ 中斜率大小的影响，算法 2 得到的盒可能具有非常差的长宽比。这个问题尤为明显，因为该算法无法用于近似闭簇：在极值点处， $X$ 总不是关于 $U$ 正则的。通过在不同补丁上对簇 $X$ 进行近似和投影，无法立即解决这个问题，因为必须正确连接不同的补丁。在后续各节中，我们将重点关注这第二类问题。

第三，如前所述，在算法 2 的步骤 8 中寻找近似 $\hat{}y$ 的算法不太可能高效。两种建议的方法都是在给定区域内搜索零点。在我们的情形中，纤维 $\pi_d^{-1}(\hat{}x)$ 是 $(n-d)$ 维的，并且与 $X$ 只有一个交点。我们必须对逐渐扩大的区域迭代应用多元根隔离技术，直到找到唯一的零点。尽管理论上可行，但预计在实践中效率会相当低。不过，为解决上述第二个问题而引入的补丁拼接，也提供了替换这一低效技术的机会。

**4.1. 改变坐标系。** 改进算法 2 的主要技术是改变簇 $X$ 的坐标，使得斜率的大小始终不会很大。通过执行此类变换，我们可以缓解上述缩放问题。我们可以使用适当的酉变换来改变坐标。然而，使用此类变换后，定理 3.1 的证明不再适用。具体来说，不再有单个区域 $U$ 被划分。在介绍我们将在第 4.2 节中使用的酉变换后，我们会在第 4.3 节中讨论对拓扑正确性陈述所需的修改。

**4.2. 酉变换。** 我们建议采用第 3 节的思路来近似 $X$ ，并根据需要改变坐标，以缓解上述与数值过大有关的问题。具体来说，我们建议使用酉变换旋转簇 $X$ ，使其切空间在局部近乎平行于由 $d$ 坐标向量张成的空间。这样可以保证导数的大小在局部较小，因此不太可能出现长宽比不佳的盒。

假设 $\hat{}z = (\hat{}x, \hat{}y)$ 是簇 $X$ 附近的一个点。设 $U\Sigma V^*$ 为 $J_F(\hat{}z)$ 的奇异值分解（SVD）。利用这个奇异值分解和坐标变换 $\tilde{z} = V^*z$，我们定义 $\tilde{F}(\tilde{z}) := U^*F(V\tilde{z})$。注意，经过此变换后，

$$J_{\tilde{F}}(\tilde{z}) = U^*J_F(z)V = U^*U\Sigma V^*V = \Sigma.$$

由于定义 $n-d$ 个多项式 $X$， $d$ 的最后几列 $\Sigma$ 为零。此外，由于 $X$被假定为光滑，且 $\hat{}z$ 接近 $X$，因此雅可比矩阵满秩。综合这些观察可知，核 $\ker J_{\tilde{F}}(\tilde{x})$ 由 $e_{n-d+1}$， …， $e_n$张成，即最后 $d$ 个坐标向量。此外，当 $z^*$ 是 $X$上的一个点时， $V^*z^*$ 是 $X$的旋转副本上的一个点。我们将这些步骤汇总为酉变换算法，即算法 3

我们注意到，算法 3 需要计算奇异值分解。为进行严格计算，我们使用区间算术执行这项计算，因此 $U$、 $\Sigma$和 $V^*$ 都表示为区间任意小的区间矩阵。在这种情况下， $\Sigma$ 的对角结构和零列都得以保留。由于这些矩阵的区间可以任意小，因此后续计算都可以达到所需的精度。

**注 4.1.** 此处必须解决一个记号上的难题。在第 3 节中，我们基于前 $d$个坐标向量进行构造。另一方面，由于奇异值分解通常采用的定义方式，关键向量是最后 $d$ 个坐标向量。每当我们在变换后的簇上使用第 3 节的算法时，都假定坐标顺序已作调整，使得奇异值分解表示中的最后 $d$ 个坐标在第 3 节的算法中被视为前 $d$个坐标。

**算法 3**酉变换

**输入**:
- 定义光滑簇的多项式系统 $F = (f_1, \ldots\ldots, f_{n-d}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$,
- 一个近似解 $z \in \mathbb{R}^n$，它逼近 $F$ 的一个解。

**输出**:
- 一个变换后的多项式系统 $\tilde{F}$,
- 一个变换后的点 $\tilde{z}$，以及
- 酉矩阵 $U$ 和 $V^*$。

1: 计算 $J_F(\hat{z}) = U\Sigma V^*$ 的奇异值分解
2: 集合 $\tilde{F}(z) = U^* F(Vz)$ 。
3: 集合 $\tilde{z} = V^* \hat{z}$。
4: **返回**( $\tilde{F}, \tilde{z}, U, V^*$) 。

4.3. **拓扑正确性**。从此处开始，我们重点讨论 $X$ 为曲面的情形，即 $d = 2$。尽管这里讨论的许多思路并不受维数限制，但要以完整的一般形式描述这些操作，在记号表达上会困难得多。我们将这些细节留给感兴趣的读者。

酉变换带来的挑战在于，定理 3.1 的拓扑正确性证明不再适用。为说明这一问题，假设盒 $I \times J$ 通过了对 $X$应用的区间 Krawczyk 检验~ ~。另一方面，假设 $I \times J$是变换后坐标系 ~ ~中的一个盒，它通过了在 $X = \mathcal{V}(F)$ 上进行的区间 Krawczyk 检验，即~ ~$X$的变换版本。将这两个盒放回原坐标系后， $I \times J$ 仍是一个盒，但不一定~ ~与坐标轴对齐。稍微滥用一下记号，我们继续用乘积记号表示 $I \times J$，尽管它与 $I \times J$并不处于同一坐标系中，因而并非一个乘积。根据区间 Krawczyk 检验~ ~的性质，盒 $I \times J$ 和 $I \times J$ 各自都包含 $X$的一部分。此外，如果~ ~盒 $I \times J$ 和 $I \times J$ 有重叠，我们必须判断这两个盒中的 $X$ 部分在局部上代表同一片，还是两片不同的片。

我们首先描述通过区间 Krawczyk 检验的盒内 $X$ 的结构。假设盒 $I \times J$ 通过了对 $X$ 应用的算法 1 的区间 Krawczyk 检验。在这种情况下， $I$ 是一个正方形，而 $J$ 是 $(n-2)$ 维的。我们称 $I \times \partial J$ 为 $I \times J$ 的顶部（或底部），类似地，我们称 $\partial I \times J$ 为 $I \times J$ 的侧面。$I \times J$ 有四个侧面，分别对应于 $I$ 的四条边。根据定理 2.1，我们观察到曲面 $X$ 不可能与 $I \times J$ 的顶部相交。由此可知，在局部范围内， $X$ 是 $I$ 上的一个图。此外，这一观察还表明，$X$ 只能从 $I \times J$ 的侧面离开。特别地， $X$ 与 $I \times J$ 某个侧面的交集是一条曲线。

假设是两个重叠的盒，在各自的坐标系中，区间 Krawczyk 检验均成功。这两个盒各自都包含 $X$ 的一部分，但~ ~可能存在这种情况：$(I \times J) \cap X$ 和 $(I \times J) \cap X$ 不属于 $X$的同一个局部连通分支。现在，我们将说明如何确认这两个盒捕获的是 $X$的同一个局部连通分支。为~ ~便于表述，假设 $I \times J$是在原坐标系中给出的，而 $I \times J$可能是在其他坐标系中给出的。

包含。假设 $\hat{x} \in I$使得 $\hat{x} \in \pi_d(\tilde{I} \times \tilde{J})$。纤维 $\pi_d^{-1}(\hat{x}) \cap (I \times J)$ 是 $(n-2)$ 维的，并且包含 $X$ 的唯一一个点。此外，根据定理 2.1 的证明，标准 Krawczyk 检验在此切片（其本身是一个低维盒）上通过。使用标准 Krawczyk 检验或任何其他多元根隔离技术 [3, 9], ，可以将此零点近似到任意所需精度。由于我们从该区域内唯一零点的包围区域开始，因此前文指出的多元根隔离的缺点影响较小。设 $\hat{y}$ 是 $I \times J$ 中位于 $\hat{x}$ 上方点的近似，其精度为 $2^{2s_2}$，其中 $2^{s_2}$ 是 $J$ 的一条边的长度。近似 $\hat{y}$ 收敛于 $X$ 中位于 $\hat{x}$ 上方的点，因为 $s_2 \leq 0$。如果能保证 $\hat{y}$~ ~即使考虑误差后也位于 $I \times J$ 以内，那么可以得出，在局部， $I \times J$ 和 ~ ~ ~ ~$I \times J$ 近似曲面的同一部分，该部分通过 $X \cap (I \times J) \cap (I \times J)$ 连通。

˜ ˜事实上，利用定理 3.1 的论证，我们可以得出，$(I \times J) \cup (I \times J)$ 变形收缩˜ ˜到 $X \cap ((I \times J) \cup (I \times J))$。此检验的算法见算法 4。请注意，算法 4 返回 FALSE 并不表示曲面不相交，只表示检验未能得出结论。

**算法 4**包含性测试

**输入**：• 一个多项式系统 $F = (f_1, \ldots, f_{n-d})$：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$，它定义一个光滑曲面，且

˜ ˜ ˜

**• 两个相交盒 $I \times J$ 和 $I \times J$（各自处于其自身坐标系中），以及 $I$ 和 $I$ 两个通过区间 Krawczyk 检验的二维正方形。输出：一个布尔值，其中 TRUE 表示 $X$ 的同一片位于两个盒中。1：将 $\hat{}x$ 设为 $I$ 中的一个点，使得 $\pi_d^{-1}$ ($\hat{}x$)与 $\tilde{I} \times \tilde{J}$相交。2：将 $2^{s_2+1}$ 设为 $J$的边长。3：将 $\hat{}y$ 设为 $F$ 在 $J$ 中、位于 $\hat{}x$ 上的零点近似，其精度至少为 $2^{2s_2}$。4：如果 $\hat{}x \times (\hat{}y + 2^{2s_2}[-1, 1]^{n-2})$ 包含于 $\tilde{I} \times \tilde{J}$中，则 5：返回 TRUE。6：否则 7：返回 FALSE。8：结束 if**

排除。如果包含性测试失败，我们便无法立即保证盒 $I \times J$ 和˜ ˜$I \times J$ 近似的是曲面的不同部分；也可能只是我们对 $\hat{}x$ 的选择不够理想。包含性测试失败时，我们会尝试进行排除测试，以确认 $I \times J$ ˜ ˜和 $I \times J$ 在局部是否代表 $X$ 的同一片。首先观察到，在 $I \times J$ 和

˜ ˜ ˜$I \times J$ 内，$X$ 分别是 $I$ 和 $I$ 上的图。按照第 3.2 节的方法，在各自的坐标系中对 $I$˜和 $I$ 进行细化后，我们得到一组包含该曲面的盒。通过将其与 $J$ 和 $J$ 求交，我们可以不失一般性地假设这些盒包含在 $I \times J$ 或˜ ˜$I \times J$ 内。如果这些输出框均不相交，那么我们便可得出结论：包含在 $I \times J$和 $I \times J$ 中的 $X$˜ ˜ ˜ ˜原始叶在局部是不同的。注意，由于 $I \times J$和 $I \times J$ 均包含该曲面，并且已使用算法 3 进行了旋转，因此上述第二和第三个问题都已得到缓解。

如果包含性测试和排除测试都失败，我们就返回包含性测试。对于 $I \times J$ 的细化中的每个盒，我们都应用包含性测试。如果其中任何一个包含性测试成功，我们就˜ ˜立即得出结论：$I \times J$ 和 $I \times J$ 在局部包含 $X$ 的同一片。如果所有包含性测试都不成功，我们就对更精确的细化应用排除测试。我们不断交替进行这两种测试，直到包含性测试或排除测试成功。用于检查两个盒在局部是否包含 $X$ 的同一片的完整算法见算法 5。这个论证证明了以下定理的正确性部分。

˜ ˜**定理 4.2**。设 $F$、$X$、$I \times J$ 和 $I \times J$ 如上所述。算法 5 会终止，其中 TRUE 表示两个盒在局部包含 $X$ 的同一片，而 FALSE 表示这两个盒中的 $X$ 的两片在局部并非同一片。

证明。正确性已在上文论证，因此我们着重讨论终止性。如果局部来看，$X$ 中的部分与 $I \times J$ 中的部分˜ ˜不对应同一片，那么这两片之间存在正的最小距离。一旦细化的精度小于该最小距离的一半，细化中的盒便不会相交，算法也就终止。另一方面，如果局部来看，$X$ 的两部分是同一片，那么经过充分细化后，˜ ˜细化中会有一个盒完全包含在 $I \times J$内。即使考虑误差，该盒也会通过˜ ˜包含性测试，因为$\hat{}y$ 位于 $I \times J$中。□

**算法 5**ComponentTest

**输入**:
- 一个定义光滑曲面的多项式系统 $F = (f_1, \ldots, f_{n-d})$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ and
- 两个相交盒 $I \times J$ 以及 $\tilde{I} \times \tilde{J}$（在各自的坐标系中），其中 $I$ 以及 $\tilde{I}$ 满足某个条件的区间 Krawczyk 检验的二维正方形
- $\rho \in (0, 1)$

**输出**:
- 一个布尔值，表示这些盒是否相交，以及
- $I \times J$ 的细化，以及 $\tilde{I} \times \tilde{J}$

集合 $R = \{I \times J\}$，是 $I \times J$ 的一种细化。
集合 $\tilde{R} = \{\tilde{I} \times \tilde{J}\}$，.....的细化 $\tilde{I} \times \tilde{J}$.
**循环**
  **对所有** $A \times B \in R$ **执行**
    **如果**包含性测试$(A \times B, \tilde{I} \times \tilde{J})$=True **则**
      **返回** True , $R$, and $\tilde{R}$.
    **结束 if**
  **结束 for**
  集合 $\rho = \rho/2$。
  将 $R$ 设为使用 $\rho$ 对 $I \times J$ 进行细化，并要求在算法 2 中使用更小的基
  Set 将 $\tilde{R}$ 设为.....的细化 $\tilde{I} \times \tilde{J}$ 使用 $\rho$，并在算法 2 中要求更小的基
  **如果所有** 对 $A \times B \in R$ 并且 $\tilde{A} \times \tilde{B} \in \tilde{R}$ 不相交**则**
    **返回** False , $R$, and $\tilde{R}$.
  **结束如果**
**结束循环**

**备注 4.3**。 每当算法 5 返回 False时，我们必须用 $I \times J$ 和 $I \times J$ 的细化结果替换它们，以保持拓扑正确性。另一方面，如果算法返回 True，是否用 $I \times J$ 和 $I \times J$ 的细化结果替换它们，则由我们决定；也就是说，替换并非必需。需要注意的是，即使采用替换，也无需检查较小盒之间出现的任何新交集，以确认它们对应于 $X$ 的同一片；这是由构造自动保证的。

## 5. Surface approximation

现在我们描述通过拼接局部经认证包围集来构造曲面的经认证逼近的主要流程。我们从第 2.2 节的设定开始。具体而言，设 $F = (f_1, \ldots, f_{n-2})$ 定义一个光滑曲面 $X = \mathcal{V}(F) \subset \mathbb{R}^n$。固定一个正实数 $\rho < 1$。由于非紧曲面无法由有限个盒覆盖，如果 $X$ 不是紧的，我们便将注意力限制在用户指定的盒 $D \subseteq \mathbb{R}^n$内，并覆盖 $X \cap D$。设 $\hat{z} \in \mathbb{R}^n$ 是一个初始点，它近似于 $X$ 上的一个点；如果需要，我们可以改进这一近似 $\hat{z}$。

主算法通过构造并拼接$X$的局部经认证包围集来进行。具体来说，从 $\hat{z}$开始，我们构造一个围绕 $X$ 的盒，该盒满足区间 Krawczyk 检验。我们从该盒的各边构造其他盒，使近似范围向外扩展。此构造过程迭代进行，直至覆盖整个曲面。近似完成后，我们执行后处理步骤，以确保输出具有所需的拓扑性质。

5.1. **构造盒**。 该算法维护一个活动盒队列，这些盒可以进行扩展。添加盒的主要步骤是，给定一个点 $\hat{z}$，在 $\hat{z}$ 周围构造一个满足 Krawczyk 检验的盒。我们在*AddBox*算法中介绍我们的方法。

**算法6**AddBox

**输入**: • 定义一个光滑曲面的多项式系统 $F = (f_1, \ldots\ldots, f_{n-d})$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$
- 一个点 $\hat{z}$，可将其细化为曲面 $X$上的一个点,
- 一个正实数 $r$，以及
- 一个正实数 $\rho$。

**输出**: 包含满足 Krawczyk 检验的 $\hat{z}$ 的一个盒。

**循环**
  集合 $(F, \hat{z}, U, V^*) =$ 酉变换$(F, \hat{z})$。
  将 $\hat{z}$ 替换为收敛点 $z^*$ 的 $r/2$ 范围内的改进近似。
  Set $\hat{A}$ 按照注 2.2 中的方法近似 $\hat{z}$ 处雅可比矩阵的逆。
  **若** IntervalKrawczykTest$(F, \hat{z}, (r, r)\hat{A}, \rho) = \text{TRUE}$ **则**
    **返回** $\hat{z} + r[-1, 1]^n$
  **结束若**
  将集合 $r$ 设为 $r/2$
  将$\hat{z}$ 的近似改进为位于 $r/2$内、距该点不超过
收敛, $z$ $^*$.
**结束循环**
**返回**最终盒

$\hat{}$ 通过与证明算法 2 终止时类似的论证，当 $\hat{z}$ 和 $A$ 足够精确时，区间 Krawczyk 检验会成功。注意，由于我们应用了酉变换，并且可以任意提高 $\hat{z}$ 的近似精度，Krawczyk 检验中的所有项都会趋近于零，因此算法6最终会成功。

我们算法的初始步骤是使用算法6找到一个包含 $\hat{z}$ 且满足 Krawczyk 检验的盒。随后，算法维护一个队列，其中包含由盒和 $\partial I$ 的子集组成的$I \times J$ 对。盒 $I \times J$ 是盒本身（处于其坐标系中），而 $\partial I$ 的子集表示曲线 $X \cap (\partial I \times J)$ 中尚待由相邻盒子覆盖的部分。一旦 $\partial I$ 全部被覆盖，盒 $I$ 就会从队列中移除。

在算法的每次迭代中，都会从队列中取出一个盒 $I \times J$ 和一个子集 $A \subseteq \partial I$。选取一个点 $\hat{x} \in A$，并将其对应的原像 $\pi_d^{-1}(\hat{z}) \cap (I \times J)$ 近似为 $\hat{y}$。

$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$随后构造一个包含 $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y})$ 的盒 $I \times J$。最后，对于所有与 $I \times J$ 相交的盒，重新计算它们在 $\partial I$ 中的子集；除非 $A$ 为空，否则将 $I \times J$ 和新更新的 $A\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$推入队列。此外，对 $I \times J$ 和 $\partial I$ 执行类似的计算；如果 $\partial I$ 非空，也将它们 $\tilde{}$ 推入队列。

**5.2. 覆盖曲面**。现在我们详细说明盒 $I \times J$ 与 $\partial I$的子集之间的配对。配对的思路是，$I \times J$ 包含 $X$的一部分；我们已经看到，限制在 $I \times J$的各边上时，$X$是一条曲线。在 $I \times J$的所有边上，我们都需要有足够的盒来覆盖这条曲线。一旦这些盒覆盖了这条曲线，这些相邻盒子就会将曲面近似延伸到 $I \times J$之外。这条位于 $I \times J$ 各边上的曲线与 $\partial I$之间存在双射。其思路是，$\partial I$ 的子集会跟踪这条曲线上我们尚无法确认已被覆盖的部分。

从上述设置开始：一个盒 $I \times J$、一个位于 $I \times J$ 边界上的点 $\hat{z}$，满足$\sim$ $\sim\pi_d(\hat{z}) \in A$；以及一个包含 $\hat{z}$ 并通过区间 Krawczyk 检验的盒 $I \times J$。此时，$\tilde{}$ $\tilde{}$我们知道 $I \times J$和 $I \times J$近似于 $X$ 的同一个局部叶，因为它们共享点$\tilde{}$ $\tilde{}\hat{z}$。对于与 $I \times J$相交的任何其他盒 $I' \times J'$，我们都会应用分量检验。如果检验未通过，就用检验得到的细化结果替换 $I' \times J'$，改进 $\hat{z}$上的近似，并使用 $r/2$重复构造盒 $I \times J$ 的过程$\tilde{}$ $\tilde{}$。

此构造成功后，我们得到两个都包含 $\hat{z}$ 的盒，以及点 $\hat{z}$收敛到的点 $z^*$。现在，我们在 $I \times J$的面内应用区间 Krawczyk 检验。具体而言，取某个值 $r$，使 $\hat{z}$与 $z^*$之间的距离小于 $r$，且 $\hat{z}+r[-1,1]^{d-1}$位于$\tilde{}$ $\tilde{}$ $I \times J$的面与盒 $I \times J$的交集中。为简单起见，令 $\ell$表示包含 $\hat{z}$的 $I \times J$的面的方程。我们对 $F \cup \{\ell\}$、$\hat{z}$、 $r$和 $\rho$应用 AddBox。这会构造出一个盒$\tilde{}$ $\tilde{}B$，它位于 $I \times J$的面内且在盒 $I \times J$内。此外，根据区间 Krawczyk 检验，对于 $\pi_d(B)$中的每个点，在该点上方的 $B$ 中都存在一个点 $X$。因此，感兴趣曲线$\tilde{}$ $\tilde{}$经过 $B$，且这条感兴趣曲线既位于 $I \times J$的边界上，也在 $I \times J$内。因此，我们可以从 $A$ 中移除 $\pi_d(B)$，因为这部分感兴趣曲线已被覆盖。

在非紧情形下，我们还会移除 $\partial I$ 中位于区域 $D$之外的部分。由于这种情形较为简单，细节留给读者。我们在算法7中总结了整个构造过程。

**算法7**CertifiedSurfaceApproximation

**输入**：• 一个定义光滑曲面$X = \mathcal{V}(F)$的多项式系统 $F = (f_1, \ldots, f_{n-d}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$,

- 一个初始点 $\hat{z} \in \mathbb{R}^n$，用于近似 $X$上的一个点,
- 一个初始正半径 $r \in \mathbb{Q}$,
- 一个常数 $\rho \in (0,1)$，以及,
- 如有需要，一个感兴趣紧区域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$。

输出：其并集包围 $X$ 或 $X \cap D$ 的有限盒集合。1：从 AddBox($F, \hat{z}, r, \rho$) 计算起始盒子 $I \times J$。2：将 $A$ 设置为从 $\partial I$ 中减去完全位于 $D$ 外部的 $\partial I$ 上的任意纤维。3：设置 $\mathcal{Q} = \{(I \times J, A)\}$。4：当 $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ 时执行 5：从 $\mathcal{Q}$ 中弹出 $(I \times J, A)$。6：将 $\hat{x}$ 设置为 $A$ 中的任意点。7：将 $\hat{z}$ 设置为点 $\pi_d^{-1}(\hat{x}) \cap I \times J$ 的近似值。8：设置 $s = 2r$ 9：重复 10：$s = s/2$。$\tilde{}$ $\tilde{}$ 11：从 AddBox($F, \hat{z}, s, \rho$) 设置 $I \times J$。$\tilde{}$ $\tilde{}$12：对于所有与 $I \times J$ 相交的盒 $I' \times J'$，执行$\tilde{}$ $\tilde{}$13：如果 ComponentTest($F, I \times J, I' \times J'$) $=$ FALSE，则 14：用一个细化替换 $I' \times J'$ 15：更新细化的边界子集。16：结束 if 17：结束 for 18：直到所有 ComponentTest 返回 TRUE$\tilde{}$ $\tilde{}$19：对于所有与 $I \times J$ 相交的盒 $I' \times J'$，执行 20：更新 $I' \times J'\tilde{}$ $\tilde{}$的边界子集 21：更新 $I \times J$ 的边界子集 22：结束 for$\tilde{}$ $\tilde{}$23：如果 $I \times J \neq \emptyset$ 的边界子集，则$\tilde{}$ $\tilde{}$24：将 $I \times J$ 及其边界子集添加到队列。25：结束 if 26：从 $\mathcal{Q}$ 中移除边界子集为空的盒。27：结束 while 28：返回算法生成的所有最终盒。

**定理 m 5.1.** 令 $F$、 $X$、$\hat{z}$、 $r$、 $\rho$ 以及 $D$ （如有需要）如上所述。算法7终止 .

证明。与定理 3.1 的证明类似，当盒足够小时，区间 Krawczyk 检验会成功。因此，存在一个全局下界，限定 Krawczyk 检验失败时盒的大小。类似地，$X$中不同叶之间的距离存在下界。因此，可能导致分量检验失败的盒的大小存在一个全局下界。最后，切空间变化的速度存在一个上界。因此，算法7的构造过程中出现的盒的大小存在一个全局下界。由此，算法添加的每个盒所覆盖的边界面积都有一个下界。接着，根据紧致性，在曲面被覆盖之前所需的盒数量有限。□

5.3. **正确性**。为确保整个构造的拓扑正确性，我们可以再执行几个最终处理步骤。对于任意两个相交的盒 $I \times J$ 和 $I \times J$ ，对这些盒应用˜ ˜ComponentTest($F, I \times J, I \times J, \rho$)。如果返回 False，我们就知道˜ ˜和 $I \times J$ 之间重叠的部分 $I \times J$ 不包含曲面。因此，可以从近似中移除交集 $(I \times J) \cap (I' \times J')$。如果这些更改使近似中产生了任何不连通分量，那么其中一个分量不包含 $F$的零点，因此可以将其移除。局部正确性意味着我们构造了一个曲面的包围邻域，使得任意两个相交盒都包含曲面的同一部分，即全局结构得以保持。

## 6. Implementations and examples

我们提供了所提算法的初步 Julia 实现。对于区间算术，我们使用 IntervalArithmetic.jl [12]。本节通过若干经认证的曲面近似示例来展示所提出的算法。在所有示例中，我们均采用初始半径 $r = 0.1$。从一个足够接近曲面的输入点出发，我们首先生成一个通过广义区间Krawczyk检验的初始区间盒。在所有示例中，我们将初始盒标为红色。

所有示例均使用 MeshLab [4] 展示。实现的源代码可在以下网址获取:

https://github.com/klee669/certified_曲面_近似

**例6.1** （单位球面）。 我们从初始点 (0，0，1) 出发，并使用 $\rho = \frac{1}{8}$，对由 $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ 定义的单位球面进行近似。该算法最终得到 5975 个经认证的区间盒。所得近似如图 1 所示。

**示例 6.2** （细化的影响）。 为说明细化的影响，我们在初始点 (0，0， 3。16) 处使用 $\rho$ 的两个不同取值 $\rho = \frac{1}{8}$ 和 $\rho = \frac{1}{80}$ 来近似球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0$ 。为了更好地观察曲面的覆盖情况，两种情况下的计算都限制为至多 2000 个区间盒。

对于 $\rho = \frac{1}{8}$，计算终止时的平均盒半径约为 0。1453。对于$\rho = \frac{1}{80}$，平均盒半径约为 0。0251θ。正如预期， $\rho$ 的取值越小，得到的近似越精细，见图 2。

作为比较，图 3 同时展示了在 (0，0， 3。16) 处使用 $\rho = \frac{1}{8}$ 得到的近似，以及在 (0，0，$-3.1$6) 处使用$\rho = \frac{1}{80}$ 得到的近似。

**例6.3** （环面）。 我们从初始点（2.8，0，0）出发，对由方程 $(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 - 0.64 = 0$ 定义的环面进行近似。我们使用 $\rho = \frac{7}{8}$，算法生成了由 2400 个经认证的区间盒组成的近似结果。结果如图 4 所示。尽管图中看不出来，环面的内部是一个管状体，正如预期的那样。

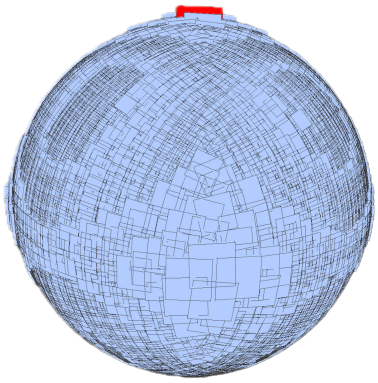

FIGURE 1. 单位球面的近似 $x^2+y^2+z^2-1=0$，初始点为$\hat{z}=(0,\ 0,\ 1)$，以及 $\rho=\frac{1}{8}$。

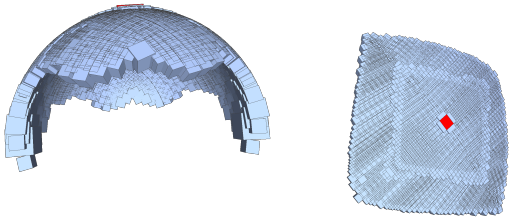

FIGURE 2. 球面的近似 $x^2+y^2+z^2-10=0$，在初始点$\hat{z}=(0,\ 0,\ 3。16)$处，采用不同的$\rho=\frac{1}{8}$（左）和$1\,80$（右）。每个近似分别显示2000个区间盒。

**例6.4**（马鞍面）。作为一个非紧示例，我们从初始点（2，2，0）出发，对由 $-0.125xy^2+0.25x^2-z=0$ 定义的马鞍面进行近似。我们使用 $\rho=\frac{7}{8}$。由于该曲面是非紧的，我们将计算限制在 2400 个经认证的区间盒内。见图5。

## REFERENCES

[1] C. Beltr´an 和 A. Leykin。经认证的数值同伦跟踪。《实验数学》，21(1):69–83，2012年。[2] M. Burr、M. Byrd 和 K. Lee。通过路径跟踪经认证的代数曲线投影。载于*2025*年国际符号与代数计算研讨会论文集，第87–96页，2025年。[3] J.-S. Cheng 和 J. Wen。零维多元实非线性系统的经认证数值实根隔离。技术报告 arXiv:2211.05266 [cs.CG], 2022.[4] P. Cignoni、M. Callieri、M. Corsini、M. Dellepiane、F. Ganovelli 和 G. Ranzuglia。MeshLab：开源网格处理工具。载于 V. Scarano、R. D. Chiara 和 U. Erra 编*Eurographics*意大利分会会议。Eurographics协会，2008年。[5] T. Duff 和 K. Lee。使用 Krawczyk方法经认证的同伦跟踪。载于*2024*年国际符号与代数计算研讨会论文集，第274–282页，2024年。

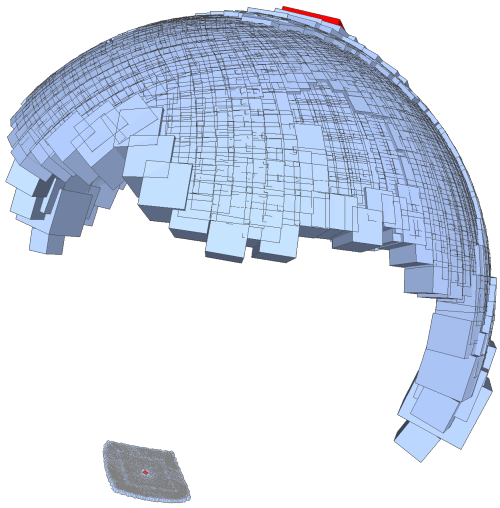

FIGURE 3. 球面的近似 $x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0$，其参数不同$\rho = \frac{1}{8}$，在$\hat{z} = (0,\ 0,\ 3.16)$处；另一种参数为$1\,80$，初始点为$\hat{z} = (0,\ 0,\ -3.16)$。每个近似分别显示$2000$ 个区间盒。

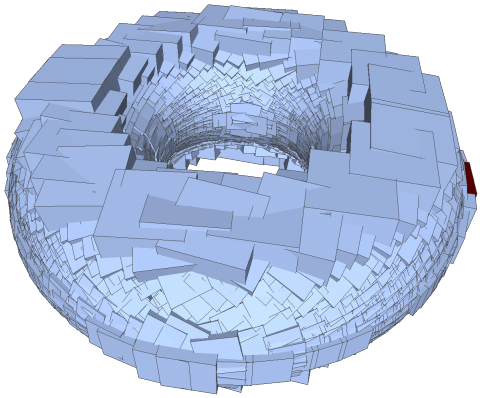

FIGURE 4. 环面的近似$(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 - 0.64 = 0$，初始点为$\hat{z} = (2.8,\ 0,\ 0)$，以及 $\rho = \frac{7}{8}$。

[6] A. Guillemot 和 P. Lairez。用于代数路径跟踪的经验证的数值计算。载于*2024*年国际符号与代数计算研讨会论文集，第36–45页，2024年。[7] J. D. Hauenstein 和 A. C. Liddell。用于牛顿同伦的经认证预测校正跟踪。《符号计算杂志》，74:239–254，2016年。[8] R. Krawczyk。采用误差界确定零点的牛顿算法。计算，4:187–201，1969年。[9] J.-M. Lien、V. Sharma、G. Vegter 和 C. Yap。简单曲线的同位排列：一种基于细分的精确数值方法。载于国际数学软件大会，第277–282页。施普林格，2014年。

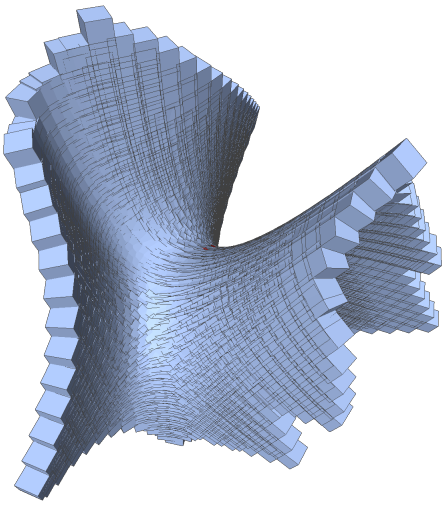

FIGURE 5. 马鞍面的近似 $-0.125xy^2 + 0.25x^2 - z = 0$，其初始点为$\hat{z} = (2, 2, 0)$，且 $\rho = \frac{7}{8}$。

[10] R. E. Moore、R. B. Kearfott 和 M. J. Cloud。《区间分析导论》。SIAM，2009。[11] S. M. Rump。《高精度求解代数问题》。载于《科学计算的新方法》，第 51–120 页。爱思唯尔，1983。[12] D. P. Sanders 和 L. Benet。IntervalArithmetic.jl，2014。[13] M. Shub 和 S. Smale。贝祖定理的复杂性 I：几何方面。《美国数学会杂志》，6(2):459–501，1993。[14] S. Smale。根据单点数据估计牛顿法。载于《学科的融合：纯数学、应用数学和计算数学的新方向（拉勒米，怀俄明州，1985）》，第 185–196 页。施普林格，纽约，1986。CLEMSON UNIVERSITY, CLEMSON, SC, USA*Email address*: burr2@clemson.eduUNIVERSITY OF NOTRE DAME, NOTRE DAME, IN, USA *Email address*: hauenstein@nd.eduCLEMSON UNIVERSITY, CLEMSON, SC, USA*Email address*: kisunl@clemson.edu