arXiv:2602.07890v1 [math.GT] 8 Feb 2026

经典辫子的 Burau 表示与群 G_n^3 的推广

瓦西里·奥列戈维奇·曼图罗夫，伊戈尔·米哈伊洛维奇·尼科诺夫

摘要

我们考察一种对群 G_n^3 的特定修改，该群描述点配置（尤其是辫子）的动力学，并为修改后的 G_n^3 定义一种表示。由此诱导的辫子表示足以有力地检测 Burau 表示的核。

关键词：辫， G_n^k-群，Burau 表示
2020年数学主题分类：57K10，57K12，20F36

1 引言

在 [2]，第一位署名作者引入了一族群 G_n^k，其对应两个正整数 n，k，并提出了以下原理：

如果描述 n 粒子运动的动力系统具有一种良好的余维 1 性质，且该性质恰由 k 粒子所支配，那么这些动力系统就有一个取值于 G_n^k 的拓扑不变量。

首个主要例子是一个取值于 G_n^3 的辫子不变量。过去 10 年构造的大多数例子，描述的都是点数为 n 的配置空间的基本群的不变量；这类对象可视为“类辫对象”，也就是说，粒子数固定的对象。

本文研究群 G_n^3 的一种特定改造，它仍然描述点配置的动力学，尤其是辫子。我们定义了改造后群 $\hat{}G_n^3$ 的一个表示。由此诱导的辫子表示足以检测 Burau 表示的核。

1.1 致谢

作者感谢 Liu Yangzhou 提出的宝贵意见。

第一作者获得了 grant25-21-00884 应用组合几何与拓扑学项目的资助。

2 Burau 表示的推广

Artin 对辫群的表示 B_n 有 $n-1$ 个生成元 $\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}$以及以下关系

- （远交换性） $\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i$ 对任意 $|i-j|>1$;
- (Artin relations) $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ for $i=1,\dots,n-2$.

记从 B_n 到集合 $\{1$上的置换群 Σ_n， ……， $n\}$ 的自然同态为 ρ:

$$\rho(\sigma_i)=(i\ i+1),\quad 1\le i\le n-1. \tag{1}$$

核 $PB_n=\ker\rho$ 称为 n 股上的纯辫群 。

考虑对第 [6, Section 2.3] 节中引入的群 G_n^k 进行的一种修改。

定义 1。 群 $\hat{}G_n^3$ 是由生成元 a_{ijk} 生成的群，其中 i， j， k 是 $\{1$， ……， $n\}$ 中的不同数，并满足关系

1. $a_{kji}=a_{ijk}^{-1}$; 2. $a_{ijk}a_{pqr}=a_{pqr}a_{ijk}$ ， 如果i,j,k,p,q,r中至少有 5 个不同的数； 3. $a_{ijk}a_{ijl}a_{ikl}a_{jkl}=a_{jkl}a_{ikl}a_{ijl}a_{ijk}$。

置换群 Σ_n 通过重新编号索引来作用于 $\hat{}G_n^3$ ：

$$\tau\left(\prod_p a_{ijk}\right)=\prod_p a_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)},\quad \tau\in\Sigma_n. \tag{2}$$

此作用通过公式在 $\Sigma_n\ltimes\hat{}G_n^3$ 上定义了一个群结构

$$(\sigma_1,\omega_1)\cdot(\sigma_2,\omega_2)=(\sigma_1\sigma_2,\sigma_2(\omega_1)\omega_2),\quad (\sigma_i,\omega_i)\in\Sigma_n\ltimes\hat{G}_n^3. \tag{3}$$

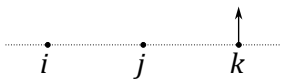

图1：事件 a_{ijk}

在 [3], 中，构造了一个从 PB_n 到 G_n^3 的同态。为此，我们将辫子视为平面中 n点子集的构形空间里的环路。更具体地说，一个辫子 β由连续映射 $x(t)=($ $x_1(t)$……, $x_n(t))$、 $t\in[0,1]$给出，其中对于任意， $\{x_1(t)$……, $x_n(t)\}$是 $\mathbb{R}^2$ t $\{x_1\ 0\ \dots\ x_n\ 0\ \}=\{x_1\ 1\ \dots\ x_n\ 1\ \}\subset$的一个 S^1 ϕ_n β G_n^3 n点子集，且 ( ),( ) ( ),( )。相应的元素 ( ) 是按如下方式构造的：令 $0<t_1<\cdots<t_p<1$为子集$x(t)$中三点共线的时刻，并令 $x_{i_r}(t_r)$ $x_{j_r}(t_r)$ $x_{k_r}(t_r)$ 为时刻 t_r、 $r=1$……, p对应的这些点。那么

$$\phi_n(\beta)=\prod_{r=1}^{p}a_{i_rj_rk_r}.$$

同态 ϕ_n：$PB_n \to G_n^3$ 可推广为一个从 B_n 到 $\Sigma_n \ltimes \hat{}G_n^3$的同态。

命题 **1** ϕ_n σ_i $i =$。</style}其在生成元 $1 \cdots n-1$, , , , 上的取值所定义的映射为

$$\phi_n(\sigma_i) = (\rho(\sigma_i), a_{i-1,i+1,i}a_{i-2,i+1,i} \cdots a_{1,i+1,i} \cdot a_{n,i+1,i} \cdots a_{i+2,i+1,i}) . \tag{4}$$

诱导出一个定义良好的同态 ϕ_n: $B_n \to \Sigma_n \ltimes \hat{}G_n^3$。

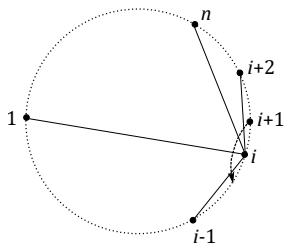

图2：生成元 σ_i 的动力学

证明。 考察阿廷生成元的动力学（图2），即可得到公式（4）。映射 ϕ_n 的正确性可用与 [2, 定理 2] 类似的方法证明。

□

可以说，不变性的证明源于这样一个事实：生成元对应于余维1，而关系对应于余维2。

推论1。 映射 ϕ_n 诱导出一个从 PB_n 到 $\hat{}G_n^3$ 的同态。

证明。 对于任意 $\beta \in PB_n$，我们有 $\rho(\beta) = 1$。于是， ϕ_n 将 PB_n 映射到子群 $1 \times \hat{}G_n^3 \subset \Sigma_n \ltimes \hat{}G_n^3$ 中，该子群同构于 $\hat{}G_n^3$。 □

令 $A = \mathbb{Z}[t_1^{\pm}, \ldots, t_n^{\pm}, s_1^{\pm}, \ldots, s_n^{\pm}]$。考虑一个自由模

$$V = A\langle x_{ij} \mid i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j\rangle$$

其秩为 $n(n-1)$。利用公式定义一个自同态 $\rho_{ijk} \in End_A(V)$

$$\rho_{ijk}(x_{pq}) = \begin{cases} t_i x_{ij} + (1-t_i)x_{ik}, & (p,q) = (i,j), \\ t_k^{-1}x_{kj} + (1-t_k^{-1})x_{ki}, & (p,q) = (k,j), \\ s_j x_{jk}, & (p,q) = (j,k), \\ s_j^{-1}x_{ji}, & (p,q) = (j,i), \\ x_{pq}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定理1。 映射 $a_{ijk} \mapsto \rho_{ijk}$ 定义了群 $\hat{}G_n^3$ 在 V 上的一个表示。

证明。 关系 1 和 2 由定义可得。关系 3 的正确性可直接验证（只需考虑情形 $(i, j, k, l) = (1, 2, 3, 4)$）。

□

推论 2。复合 $\rho \circ \phi_n$： $PB_n \to End_A(V)$ 是纯辫群在自由模 V 上的一个表示。

例 1。令 $n = 5$ 和 $\beta \in PB_5$ 为文献 [1]中所讨论的 Burau 表示的核中的元素。辫 β 由以下公式定义

$$\beta = [\psi_1^{-1}\sigma_4\psi_1, \psi_2^{-1}\sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3\sigma_4\psi_2],$$

其中 $\psi_1 = \sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_4^3\sigma_3\sigma_2$ 和 $\psi_2 = \sigma_4^{-1}\sigma_3\sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1\sigma_4^5$。计算机计算表明，矩阵 $\rho\circ\psi_5(\beta) \in M_{20}(A)$ 不是单位矩阵。特别是，当 $t_1 = -1$ 和 $t_2 = \cdots = t_5 = s_1 = \cdots = s_5 = 1$时，角矩阵元为

$$\langle x_{12}|\rho \circ \psi_5(\beta)|x_{12}\rangle = -399.$$

因此，所构造的表示并不弱于 Burau 表示。

例 2. 将上一个例子中的辫 β视为群 PB_6中的一个元素。Liu Yangzhou [11] 证明了，在 [10]中考虑的表示 $\tilde{\rho}\circ\psi\circ f_d\circ p_6$, $d \geq 2$的核包含 β。另一方面，当 $t_1 = s_1 = -1$ 且 $t_2 = \cdots = t_6 = s_2 = \cdots = s_6 = 1$ 时，矩阵 $\rho \circ \psi_6(\beta) \in M_{30}(A)$ 不是单位矩阵（角矩阵元为 $\langle x_{12}|\rho \circ \psi_6(\beta)|x_{12}\rangle = -399$）。因此，表示 $\rho \circ \psi_6$ 比表示 $\tilde{\rho} \circ \psi \circ f_d \circ p_6$更强。

注 1. 通过对参数 t_i, s_i 在 $\mathbb{R}$中的取值进行特化，我们得到群 $\hat{}$ G_n^3 $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\langle x_{ij} \mid i\ j \in$在空间 ,,,,中的一个表示。 $\{1 \ldots n\}\ i \neq j\rangle$

另一方面，空间 $V_{\mathbb{R}}$分解为子空间 $V_{sym} = \mathbb{R}\langle \frac{x_{ij}+x_{ji}}{2} \mid i \neq j\rangle$ 和 $V_{alt} = \mathbb{R}\langle \frac{x_{ij}-x_{ji}}{2} \mid i \neq j\rangle$的直和。在 [6,第 2 节中，定义了 $\hat{}G_n^3$ 在 V_{sym} 上的若干表示。通过固定 $\hat{}G_n^3$ 在 V_{alt} 上的一个表示（例如平凡表示），可以将这些表示扩展到 $V_{\mathbb{R}}$。可以看出，所得表示不同于由 ρ的特化所诱导的表示。这表明存在一种更一般的表示，可以涵盖上述所有情况，但这种表示尚未找到。

参考文献

[1] S. Bigelow，《Burau 表示》对于 $n = 5$ 并非忠实，*Geom. Topol.***3** (1999) 397–404.[2] V.O.Manturov，《非 Reidemeister 结理论及其在动力系统、几何与拓扑学中的应用》，arXiv:1501.05208.[3] V.O.Manturov, I.M.Nikonov，关于辫子与群 G_n^k，*J. Knot Theory and Ramifications* **24**:13 (2015) 1541009.[4] V.O. Manturov，《结理论：第二版》，CRC 出版社，2018.[5] V.O. Manturov, D. Fedoseev, S. Kim, I. Nikonov，《不变量与图像：低维拓扑学与组合群论，结与万物丛书》**66**，世界科技出版公司，2020年。

[6] D. Fedoseev, S. Kim, V.O. Manturov, G_n^k 及相关群的表示，*J. Knot Theory and Ramifications* **29**:13 (2020) 2043006.[7] D. Fedoseev, V.O. Manturov, I. Nikonov，流形的三角剖分、流形的辫群及群 Γ_n^k，载于：Garanzha, V.A., Kamenski, L., Si, H.（编）数值几何、网格生成与科学计算。计算科学与工程讲义 **143**，施普林格，Cham，2021 年，13–36.[8] V.O. Manturov, D. Fedoseev, S. Kim, I. Nikonov，关于群 G_n^k 和 Γ_n^k：流形、动力学与不变量研究，《数学科学通报》**11**:2 (2021) 2150004.[9] V.O. Manturov, I.M. Nikonov，映射到虚辫及辫表示，《俄罗斯数学调查》，**78**:2 (2023) 393–395；arXiv:2210.06862.[10] V.O. Manturov, I.M. Nikonov，从圆柱中的纽结到平坦虚纽结的映射，《俄罗斯数学调查》，**79**:2 (2023) 366–368；arXiv:2210.09689.[11] L. Yangzhou，私人通信