arXiv:2602.07907v1 [cs.LO] 8 Feb 2026

第 16 章

哲学中的可定义性与插值

Johan van Benthem
阿姆斯特丹大学、斯坦福大学和清华大学

摘要

本文简要梳理了哲学中Craig插值定理和贝丝可定义性定理的出现情况。围绕这一主题，并不存在一个议程明确的连贯研究计划；不过，在 [9], 中，我们将进一步探讨相关脉络，并指出在逻辑以及逻辑哲学、科学、语言与信息、认识论和形而上学这些领域之间建立联系时面临的一些待解决问题。这个主题也可以视为一项案例研究，用以探讨逻辑与哲学交界处更一般的方面。

目录

1 宏观构想.557 2 什么是逻辑系统？.559 3 随附性.563 4 决定论.565 5 问题.566 6 依赖.567 7 信息与广义后承.569 8 科学理论中的理论术语.571 9 知识与信念的模块性.572 10 一位历史先驱：Bolzano.574 11 结论.575 致谢.576 参考文献.576

1 核心理念

贝丝可定义性定理指出，在一阶理论中，词汇的隐式可定义性等价于显式可定义性。更确切地说，给定一个语言中包含以下内容的一阶理论 T:

© 2025 本文作者版权所有**草稿**最终版本将发表于 Balderten Cate、Jean Christoph Jung、Patrick Koopmann、Christoph Wernhard 和 Frank Wolter 编，克雷格插值理论与应用，第 XXXCHAPTER 章，第 XXXPFROM–XXXPTO 页。Ubiquity Press，2026 年。XXXDOI。

词汇 **L** 以及谓词符号 P，隐式可定义性是指：对于 T 的两个模型 M，M′，如果它们的对象域以及对词汇 **L**的解释完全相同，那么它们对谓词 P^{M} 和 $P^{M'}$ 的解释也必须相同。通俗地说，在 T 的一个模型中固定 **L**的解释，就会自动固定 P 的解释。相比之下，显式可定义性是指存在一个仅使用词汇 **L** 的一阶公式 $\varphi(\mathbf{x})$，其变量元组 **x** 的长度与谓词 P 的元数相同，并且理论 T 蕴含公式 $\forall \mathbf{x}(P\mathbf{x} \leftrightarrow \varphi(\mathbf{x}))$。

▶**定理 1.** 对于一阶理论，隐式可定义性与显式可定义性是等价的。

显然，显式可定义性蕴含隐式可定义性，但贝思的成就在于证明其逆命题，而这对一阶逻辑而言绝非平凡 [18]。

贝丝定理的背景在于，Beth将逻辑视为对可定义性与证明的联合研究，这一对自古代以来该学科历史的并重观点，他在多种出版物中加以阐述，尤其是其代表作 [19]，其中也包含他基于逻辑基础研究而形成的更为一般的哲学观点。具体而言，Beth通过对用于在几何学基础中否证显式可定义性的Padoa方法的反思，得出了可定义性定理。逻辑与科学哲学的这种结合是20世纪50年代的典型特征。Beth创立了“Instituut voor Logica en Grondslagen van de Exacte Wetenschappen”（精确科学逻辑与哲学研究所），即阿姆斯特丹现有逻辑、语言与计算研究所的前身；同样重要的是，大约在同一时期，Beth的通信者兼盟友阿尔弗雷德·塔斯基在加州大学伯克利分校创立了至今仍存的精确科学逻辑与方法论小组。

为了便于后续讨论，我们将贝丝关于隐式可定义性的早先表述改写为以下等价版本：

如果两个模型 M，N 都满足 T(**L**, P)，且 F 是 M 与 N 之间的一个 **L**-同构，那么 F 也是一个 P-同构。

贝丝定理的这一同构提升版本可以推广到较弱的结构不变性，例如潜在同构[1]，，这是一个将在下文第7节变得重要的概念。

隐式 以及显式确定的相关思想，可以在哲学的许多领域中找到。

接下来，我们来考察一阶逻辑的克雷格插值定理， [25, 26], 并采用以下简单表述，为方便起见仅列出几个谓词。

▶ **定理 2**。 如果谓词词汇表 *{P, Q}* 中的公式 $\varphi(P, Q)$ 在语义上蕴含词汇表为 *{Q, R}* 的公式 ψ, 那么就存在一个仅使用共享词汇表 *{Q}* 的一阶公式 α，使得 $\varphi(P, Q) \models \alpha(Q) \models \psi(Q, R)$。

更为复杂的插值定理版本如今已有不少（例如参见 [41] ），它们更详细地说明了共享谓词 Q 在语法上如何出现在 α 中，即它在公式 φ 和 ψ中的出现方式。本书第2章将对此作更详细的介绍，并给出深入的结果。

[1] 两个模型 M、N 之间的潜在同构是一族**F**，由这两个模型之间的有限部分同构组成，并满足以下来回条件。对于每个 $f \in \mathbf{F}$ 和 $a \in \mathrm{M}$，都存在一个 $b \in \mathrm{N}$，使得 $f \cup \{(a, b)\} \in \mathbf{F}$；反方向也满足同样的条件。

注。 本书的各章中，有时会区分普通插值与演绎插值，将它们视为前述结果的不同版本；对于逻辑系统而言，这两个版本并不总是等价的。尽管这一差异很重要，以下内容中不会特别强调。

通过一个著名而简单的论证，克雷格插值可推出一阶逻辑具有 Beth 可定义性。反之则不成立。例如，一阶语言中自然的守卫片段具有后一性质，却不具有前一性质，参见 [36, 35]。[2] 有关这些问题的更多信息，也请参见本书第 10 章。

通过一个简单的论证，插值也可推出更强的投射贝思定理。该定理用稍加简化的记法表述如下：如果理论 T(A, B, C) ∪ T(A, B', C') 蕴含∀x (Cx ↔ C'x)，那么 T(A, B, C) 就蕴含存在一个仅使用词汇 A 的一阶公式，为 C 给出显式定义。我们有时会需要这个更强的版本。

我们还会看到插值在哲学中的应用，尽管乍看之下，它似乎只是一个更具技术性的系统性质。为了让本文讨论的两项结果在哲学应用方面更为统一，如果能以自然且引人入胜的方式刻画插值相较于 Beth 可定义性所多出的部分，那将是很好的。这里我们不解决这个问题。[3]

我们将展示上述观念如何以各种形式在哲学中重现。第2节探讨这两个定理在界定逻辑系统这一概念本身时所起的作用；这是逻辑哲学中一个仍在探讨的议题。随后，第3至第6节将重点转向贝丝定理，讨论随附性、决定论以及围绕问题进行推理，最终指出，贝丝定理在哲学应用中的共同主线，是隐含与显式依赖所扮演的角色。

接着，我们的叙述将重点转向克雷格定理，以及它在思考词汇对于推理和理论构建的重要性时所起的作用。第7至第9节将讨论逻辑推理的一般化概念、科学理论的架构，以及信念的模块化结构。最后，第10节将指出这些内容与 Bernard Bolzano 的一些关联；他是一位富有创造力、或许在某种程度上遭到忽视的19世纪先驱，曾推动现代逻辑的兴起。

2 什么是逻辑系统?

探究这两个定理重要性的一条直接途径，是考察它们与逻辑哲学乃至逻辑本身中一个反复出现的待解决问题之间的相关性。什么是逻辑系统？或者更准确地说：什么样的逻辑系统才是好的、设计得当的？这并非只是抽象的争论；真正攸关的是，我们应当如何恰当地理解现代逻辑以蓬勃构建各种系统的面貌为特征时，究竟在做什么。这两个定理对此有何启示？

我们的讨论将聚焦于插值定理，但可定义性定理也发挥着类似的作用。在民间讨论中，满足克雷格式插值定理有时被视为一项关键的理想要求，因为这体现了逻辑对于其语言的某种“表达完备性”，即能够表述定义，并陈述从前提到结论的关键“过渡”。

---

[2] 第一篇论文论证了，从一种“模态”视角来看，守卫片段确实满足恰当版本的插值性质——这个待解决问题我们在此不作探讨。[3] 一种或许能阐明这种比较性额外优势的数学概念候选，是代数簇中的*amalgamation* 性质，也许还可以在推广的范畴论框架下考察。

即便如此，除了简单重述这些定理所说的内容之外，这一直觉并不容易被精确化；而在更进一步的形式化方法中，我只知道 [31] 以及 [50]中较早的证明论分析。若从一般的语义角度理解贝丝和插值的核心地位，或许可以考察它们在抽象模型论中的作用：在相当一般的条件下，贝丝可定义性定理似乎可以从一阶逻辑的林斯特龙定理推出，不过克雷格的情形则不太明确——参见本书第7章。[4]

不过，还有另一种方式可以切入上述问题。我们可以将其改述如下，其中融入了我们此前在讨论贝丝定理时提到的关键概念——不变性：

两个逻辑系统在什么情况下是相同的？

一种在技术文献和哲学文献中都能找到的回答是：两个逻辑 $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ 应当存在彼此忠实的句法翻译或嵌入，也就是说，对于这些逻辑的语言，在某种句法翻译 τ 下，所有公式都满足以下等价关系：

$$\varphi \models \psi \text{ in } \mathfrak{L}_1 \quad \text{iff} \quad \tau(\varphi) \models \tau(\psi) \text{ in } \mathfrak{L}_2$$

反之亦然，在相反方向上，从 $\mathfrak{L}_2$ 到 $\mathfrak{L}_1$ 进行某种句法翻译 σ.

然而，这仅仅是一个开端，对于一个良好的系统同一性概念还可能需要什么，哲学上尚无共识。下面是一种可能更为丰富的观点。

在抽象模型论中，逻辑系统同时包含句子与语义结构，二者由真值关系相连接；翻译进而还涉及对模型施行的、方向相反的语义变换 T，从而导向反变等价

$$\mathsf{M} \models \tau(\varphi) \quad \text{iff} \quad \mathrm{T}(\mathsf{M}) \models \varphi \qquad (\#)$$

这一等价事实上被强调为情境理论中信息流的基本机制 [5] ——关于这一框架的更多内容，见下文第7节。

这一设定的抽象数学理论涉及Chu空间 [8], 中的伴随映射，这是一种优雅的范畴论视角，此处我们不予展开。[5]

此处更为广泛的待解决问题是：透过文献中众多逻辑系统的表面，其底层的不变性与联系究竟是什么？[6] 换言之，逻辑这一领域的融贯性何在？再者，克雷格与Beth对此是否有所关涉？

不必就这些待解决问题展开一般性的哲学讨论，这里只谈它们与本文主题的一项联系。如果将插值纳入抽象逻辑的定义，逻辑系统之间的翻译会受到什么约束？在此，要以恰当的一般性表述插值性质，我们需要「句子」、「后承」、「词汇」和「出现」这些抽象概念。现在，恰当的翻译应当遵循这一基本

[4] 鉴于哲学逻辑中重要系统里的插值失败现象极为普遍，人们可能会质疑这一标准；参见本书第3章。这个待解决问题将在下文第3节再次出现。[5] 翻译的忠实性需要额外条件，例如变换 T 的满射性。[6] 一个著名的联系是从直觉主义命题逻辑到经典模态逻辑 S4 的忠实哥德尔翻译，这促成了两个系统之间各种富有成果的联系。

结构，并确保插值从一个逻辑系统迁移到任何与之存在恰当翻译关系的逻辑系统；这项具体约束如今成为一个更明确的待解决问题。[7]

尽管如此，将插值视为逻辑系统及其间翻译的关键特征，并不能说明为何应当如此看重这一性质。[12] 猜想，插值是一阶逻辑元理论完整公理化中的关键公理；在这种观点下，一阶逻辑被视为一种双排序结构，由句子和有限词汇集构成，并带有逻辑后承与“出现”关系。提出这一猜想的想法是，克雷格插值似乎是一阶逻辑在近代历史中发现的最后一项重要性质。[8] 然而，[38] 证明，即使以这种方式构造的经典命题逻辑元理论也不可公理化，事实上还允许对真算术进行保真的嵌入。因此，插值的核心作用并未体现在对逻辑系统结构的这种特定构想中——但或许这只能说明，我们把“元理论”这一概念具体化得过了头，将自然数的特殊性及其理论的复杂度也带了进来。

我们以另一个与主题相关、且本身也可能值得关注的联系，结束本节。翻译这一主题还与贝丝可定义性定理存在一个有趣的联系。

翻译作为广义可定义性 可以把满足上述等价关系（#）的显式句法翻译τ 视为对逻辑 $\mathfrak{L}_1$的基本概念所作的广义显式定义：这些概念并非在逻辑自身的词汇中定义（这是贝丝定理所涉及的可定义性这一特殊情形），而是通过另一种语言中的公式来定义，即逻辑 $\mathfrak{L}_2$的语言。因此，这一次，相应的隐式可定义性 并非只涉及同一相似类型的一个模型，而是横跨可能彼此不同的模型。

下面先对这一想法作一个直观表述：

> 固定模型 M 的 $\mathfrak{L}_2$-结构，便足以固定逻辑 $\mathfrak{L}_1$ 的基本谓词在所有与 T 匹配的模型 T(M) 中的指称，其中 T 是满足某些适当条件的变换。

更确切地说，令上述可定义性模式（#）中的变换 T 定义为一个从 $\mathfrak{L}_2$-模型到 $\mathfrak{L}_1$-模型的满射函数；该函数还将一个 $\mathfrak{L}_2$-模型的论域映射到相匹配的 $\mathfrak{L}_1$-模型的论域上，也就是说，T 还将对象映射到对象。注：这里所说的是 T 相关模型的论域中对象的满射性，而不是指 T 作为从模型到模型的映射本身具有满射性。

不难看出，模式（#）随后蕴含了以下跨模型条件。为方便起见，我们在此仅针对一元谓词陈述该条件：

> 若 $T: M \to N$，且 $T(b) = a$，则 M 与 M' 同构，且 b 与 b’ 对应；若 $T: M' \to N'$，且 $T(b') = a'$，那么对于任意 $\mathfrak{L}_1$谓词 P，$P^M(a)$ 蕴含 $P^{M'}(a')$。

[7] 作为这一迁移的具体说明，[11] 展示一对由以下两部分组成的结构：一是从守卫片段到下文第9节提到的模态依赖逻辑 LFD 的适当同态翻译，二是一个逆向可满足性归约；这对结构如何利用此前提到的守卫片段的贝思定理，推出 LFD 的插值定理。要更清楚地了解插值迁移施加了哪些约束，还需要更多此类案例研究。[8] 当然，当我们考虑后来发现的一阶逻辑显著的概率性质（例如零一律）时，这一历史观察便不再成立，[29]。

技术阐述。这种情形适合使用投射贝思定理，或者更确切地说，使用其背后的插值定理。只要上述变换 T 能用一阶术语定义，该定理就能给出从隐式定义到显式定义的转换。设这一一阶定义为一个一阶理论 Σ，其词汇为 $\{\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{N}\}$，其中 M、N 表示互不相交的一元谓词；$\mathbf{L_1}$ 谓词（逻辑 $\mathfrak{L}_1$ 的词汇）只能在由 N 定义的子集内成立；$\mathbf{L}_2$ 谓词（来自逻辑 $\mathfrak{L}_2$）只能在由 M 定义的子集内成立；并且Σ 只对 M $\cup$ N 中的对象作出断言，即使模型本身的范围更大也是如此。[9]

现在，我们将上述扩展隐式可定义性概念表述为扩展语言中的一阶后承，其中 P 是$\mathbf{L}_1$ 中的一个谓词（为简便起见，这里仍取为一元谓词），a、a'、b、b'是个体常量，Z 表示一个二元关系：

$\Sigma(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{N}), \mathrm{Tb} = \mathrm{a}, \mathrm{Pa}$ (i)，以及“Z 是 M 与 M'之间的一个$\mathbf{L}_2$-同构，b Z b”（ii），并且$\Sigma(\mathbf{L}_1', \mathbf{L}_2', \mathrm{T}', \mathrm{M}', \mathrm{N}'), \mathrm{T}'\mathrm{b}' = \mathrm{a}'$ (iii)$\models \mathrm{P}'\mathrm{a}'$。

这表示，如果我们有两对变换相关模型，其中一个源模型与另一个$\mathbf{L}_2$-同构，那么目标模型对$\mathbf{L}_1$-谓词 P 的解释相同。

根据一阶逻辑紧致性定理的标准推论，这里子句 (i)、(ii) 和 (iii) 中出现的公式总集可以取为有限集；稍微滥用一下记号，我们可以将这个后承改写为公式之间的后承：

$\Sigma(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{N}) \wedge \mathrm{Tb} = \mathrm{a} \wedge \mathrm{Pa} \models$ （“Z 是 M 与 M 之间的 $\mathbf{L}_2$-同构 ”
$\wedge$ b Z b' $\wedge$ $\Sigma(\mathbf{L}_1', \mathbf{L}_2', \mathrm{T}', \mathrm{M}', \mathrm{N}') \wedge \mathrm{T}'\mathrm{b}' = \mathrm{a}') \rightarrow \mathrm{P}'\mathrm{a}'$.

此处，前件与后件在词汇上的唯一重叠是集合 $\{\mathrm{M}, \mathbf{L}_2, \mathrm{b}\}$。因此，在该词汇中存在一个插值式 $\delta(\mathrm{M}, \mathbf{L}_2, \mathrm{b})$，它仅描述对象 b 在 M 型模型中的一个性质。[10]

通过一些标准的变换，我们随后可以看到以下两个断言成立：

(a) $\Sigma(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{N}) \models \mathrm{Tb} = \mathrm{a} \rightarrow (\mathrm{Pa} \rightarrow \delta)$ (b) （“Z 是 M 与 M 之间的 $\mathbf{L}_2$-同构” $\wedge$ bZ b' $\wedge$ $\Sigma(\mathbf{L}_1', \mathbf{L}_2', \mathrm{T}, \mathrm{M}', \mathrm{N}') \models \mathrm{Tb}' = \mathrm{a}' \rightarrow (\delta \rightarrow \mathrm{P}'\mathrm{a}')$

M 上的同一性关系满足作为 M 与 M' = M 之间的 $\mathbf{L}_2$-同构的全部条件。在条款 (b) 中用它替换谓词 Z，同时重命名某些谓词变量，即可推出

$$\Sigma(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2', \mathrm{T}, \mathrm{M}, \mathrm{N}) \models \mathrm{Tb} = \mathrm{a} \rightarrow (\delta \rightarrow \mathrm{Pa}).$$

因此，总而言之，理论 Σ 蕴涵该显式定义

$$\mathrm{Ta{=}b} \rightarrow (\mathrm{Pa} \leftrightarrow \delta(\mathrm{a}, \mathrm{b})).$$

---

[9] 只要假设 Σ 中的所有量词都受 M $\vee$ N 的限制，就能达到这一效果。这里所述的“记账条件”对于定义模型之间的函数而言，似乎并不过分苛刻。[10]化归为这种句法形式可能需要进行一些一阶操作；需要注意的是，公式 δ 中对 N 的量化并无实质影响，因为在那里没有 L_2 谓词能够为真。

最后，给定$\mathbf{L}_2$中针对$\mathbf{L}_1$, 里谓词的定义，标准的归纳证明便将此提升为 $\mathfrak{L}_1$所有公式的显式组合式翻译。注：此处量词步骤使用上述假设，即T是从M的论域到N的论域上的满射。[11]

当然，前述解释尚未分析作为逻辑系统之间一种关系的“可翻译性”概念，因为这种关系并非从给定的语义变换出发。关于后一类关系的抽象分析，参见 [16]。

总之，本节阐明了若干关键定理与逻辑哲学中的待解决问题之间的联系，这些联系或许值得深思，但我们并未给出任何无可争议的明确答案。这种微妙的接触是逻辑与哲学的交界处的典型特征；随着讨论的推进，我们还会遇到更多这样的例子。

本节的讨论聚焦于同构这一核心语义不变性。这只是其中一种选择；例如，在第7节中，我们还会采用先前介绍过的较弱概念“潜在同构”。但原则上，我们的讨论也适用于各种不变性概念，包括更弱的概念，例如互模拟；在这种情况下，我们引用的结果讨论的将是模态 语言中的可定义性，而非完整的一阶语言中的可定义性。

3 随附性

我们的下一个论题从语义不变关系及其提升出发。在哲学中，谓词 Q 对一个或多个谓词 P 的随附性这一概念无处不在。涵盖范围很广的例子包括：我们的心理状态对我们的物理/生物状态的随附性，某一情境的道德方面对其事实方面的随附性，等等。

关于一篇出色的综述，请参阅百科全书条目 [39], ，我们从中只选取若干概念来阐明主要论点。首先，我们说，Q随附于P，如果

每当两种情境是P-等价的，它们也就Q-等价。

我们是就情境来陈述这一点的，但也可以把随附性理解为对对象或我们想考虑的任何相关实体所作的比较。随附性之所以吸引人，原因之一在于它表达了两个不同领域之间在属性上的一种“和谐”，但并不必然是借助某个显式定义“把 Q 解释掉”的、Q 对 P 的粗暴可还原性。

当然，这类表述还需要进一步明确：考虑的是哪一类情境或对象，以及所指的具体语义等价概念是什么？但即使不进一步规定这些参数，显然，随附性与贝丝定理意义上的隐式可定义性具有相同的特征。[12]

事实上，我们还可以说得更多，因为哲学文献中提出了若干种较弱或较强的随附性。这里只举两个例子。在局部版本中，我们最初采用的表述比较的是同一个给定世界中的等价或相似事物。将这一表述转换为

[11]另一种理解隐式可定义性的方式，是在关于 M、N 和 M’、N’ 的断言中固定映射 T。插值仍然适用，但现在我们还会得到一些不理想的谓词 P 的定义：它们不仅涉及$\mathbf{L}_2$, ，还涉及函数 T，例如“当且仅当 M 中恰有 2 个对象经 T 映射到 a 时，Pa 成立”。[12]正如我们将在第9节看到的，随附性是一种抽象的依赖，事实上，一些作者正是从这个角度分析其一般逻辑，参见 [30]。

模型论表述，一种更形式化的表达方式是：在给定模型中，P-自同构也是Q-自同构——不过也可以采用其他相似关系。

但在一种 更普遍的版本中，对于不同世界，要求可能如下 s:

如果对象t x在世界 w中与对象 P-相似，那么它y在世界 v,中与对象也x, y与Q-相似 .

用模型论的术语来说，这恰好体现了第 1 节引入的隐式可定义性概念的特点，其中相似性被理解为同构或潜在同构。

哲学这一领域反复出现的一个争论是：随附性何时意味着约化，且这种约化是以显式可定义性的意义而言？贝丝定理确实会给出这样的结论，但要将这一结果应用于随附性，必须先在哲学讨论中引入一种形式化的一阶语言和背景理论。这样的研究方法限制是否符合哲学文献的精神，或至少这种形式化处理是否妥当，或许值得商榷，因而需要论证。正如我们所说，无法给出显式定义，实际上正是随附性在哲学上颇具吸引力的一个原因：它作为一种非还原主义立场，只主张两个领域之间存在和谐，而不诉诸蛮力约化。

这里可以提出两点。首先，从还原主义的角度看，某些具有贝丝性质的逻辑或许仍无伤大雅。例如，在二阶逻辑中，可以通过对无关词汇进行非谓述存在量化，常规地从隐式定义中提取出显式定义，从而使贝丝定理变得平凡。这样的“约化”似乎无伤大雅。

但更有意思的是，我们或许可以借助缺乏贝丝性质的非高阶非经典逻辑，重新审视相关的哲学文献，以此避免还原论。一个例子是那些缺乏贝丝性质的相关逻辑，见 [47], 另请参阅本书第3章。当然，这种削弱基础逻辑的做法也应有某种独立的动机：仅仅避免贝丝性质，很难算是一种积极的优点。毕竟，函数是存在的，但这类逻辑中的词汇并不允许我们对它作出显式定义。检验这种出路是否可行的一个直接方法是，看看已知的技术性反例（有时由计算机辅助搜索得出）是否具有独立的概念价值。[13]

不过，还有另一种思考方式，它要求我们作出不同的区分。按照上述定义，作为隐式语义可定义性的随附性，已经表明，随附谓词 Q 是某个函数在其底层谓词 P 所对应的等价类上的取值，因此存在一种抽象的函数依赖。贝丝定理进一步指出，在特定条件下，这种抽象的函数依赖可以通过某个关于 P 语言的显式一阶公式，在不同模型中作一般性的表达。这一额外特征究竟意味着什么?

回到蛮力式“可约性”这一哲学关切，即便是这样的显式定义，只要它繁复到受限的人类行动者无法理解，也未必会构成一种沉重的约化。从这个意义上说，或许可以说，只有当我们（或他人）能够理解并操控这种依赖时，显式约化才会伤害并束缚我们。

这类更细致的区分所需要的，是对受限的人类行动者能力进行更多计算分析；而从贝丝定理的角度来看，则是对定义的复杂度施加更严格的界限。

[13]即便如此，稍显悖谬的是，不可定义性（沿着这条思路，进而还有不可证明性），也就是只让某些事物保持隐含状态，有时是否也能被视为逻辑系统的积极特征?

定义 。这样一来，第 6 章和第 12 章中关于贝丝型定理的计算逻辑研究，或许就能与哲学讨论相关起来。

最后，有趣的是，前面提到的随附性的局部版本并非直接属于贝丝可定义性定理的内容，而是属于 [46]中的这一著名定理：

如果一阶理论 T 的所有模型中的**L**-自同构也是 P-自同构，那么 T 就蕴含一组用**L**来定义 P 的显式定义的析取式，而不一定是单个定义。[14]

随附性只是一个例子：对丰富的哲学文献进行更细致的研究，可能会发现它与现有逻辑理论中种类更多的概念和结果相契合。现在我们转而讨论其他这类接口的例子。

4 决定论

随附性这一概念还与另一个广泛的哲学主题有关：决定论。这一概念出现在古典形而上学中。亚里士多德著名的海战论证探讨了一种观点：关于未来真理的排中律似乎意味着我们当前行为已被决定，因而不受我们控制。类似主题不断重现，直至经验科学中的因果决定论；不过，那里的决定通常沿着相反的时间方向向前发展，即从现在为真之事决定将来会成为真之事。

围绕这一普遍概念的争论利害攸关：从自由意志的（不）存在，到因果性在人工智能中的作用，乃至物理学所能提供之物的本质。

与随附性一样，已有许多提议试图使决定论这一概念更加精确，其中包括伯特兰·罗素等著名哲学家的分析。

恰好在这一领域，有一位著名逻辑学家做出了里程碑式的尝试，以厘清这些待解决问题，并将贝丝和克雷格的结果应用于科学哲学。 [40] 以一阶术语将牛顿力学等物理理论形式化，使其包含一个数学部分，该部分涉及自然数 $\mathbb{N}$ 和实数 $\mathbb{R}$ ，以及实数上的函数元组，这些元组编码相关的物理系统属性，如粒子的位置和动量，以及其他概念——包括该理论所假定的抽象的、不可观察的概念。

按照 Montague 的分析，物理理论 T 描述一组可能的历史。我们认为，模型中包含标准的自然数和实数（后者在此也用于表示时间的流逝），而定义在实数上的函数则给出某个力学系统等在某一时刻的状态。于是，人们可以对什么是“决定性理论”作出不同定义，以反映哲学文献中的各种主张；这里不再一一列举。[15]

---

[14] 要看出这一差别，可以设想一个仅由陈述 $\forall x(Px \leftrightarrow Lx) \vee \forall x(Px \leftrightarrow \neg Px)$构成的理论T。这并不满足贝丝定理所要求的隐式可定义性。对于T的两个具有相同论域且谓词 L 指称相同的模型，仍可能在 P的指称上不一致。但确实成立的是，在这些模型的每一个中，保持 L 不变的自同构也会保持 P不变。[15]Montague指出，就用任意函数来表示一个状态对其他状态的依赖而言，理论很容易是决定论的，而更为实际的待解决问题是函数依赖的一般可定义性，以便适用于计算用途。模型依赖的定义与适用于所有模型的一般定义之间的这一区分，呼应了第3节中关于随附性与还原论的一个较早观点。

以下是一种典型的“隐含式”表述，在相关文献中广泛出现，其源头可追溯至拉普拉斯在物理学中对决定论所作的一段著名历史性表述：

如果 T允许的两个历史在t_0,和t_0 <t,时的物理系统状态相同，那么这两个历史在t.时的整体系统状态也相同。

除去 Montague 论述中与此处预期说明无关的若干句法细节，关于物理系统模型的这一语义条件可以表述为一阶理论中的一种隐式可定义性。于是，克雷格插值和贝丝定理便可用于得出结论：该理论还以显式定义的形式提供了强决定论——在该理论的语言中，将 t 时刻的系统状态表示为关于时刻 t_0, t_0 和 t 的状态的显式定义，而这一显式定义可用于物理推理和计算。

与此同时，联系到我们先前关于随附性的不同观点的讨论，Montague 的形式框架也使我们能够更准确地看出贝丝性质需要什么条件，从而间接地看出人们可以如何尝试避开它。

必须指出，这一分析包含大量细枝末节，而 Montague 的论文或许由于概念、结果和结论过于繁多、各自指向不同方向，未能产生它本应有的影响。不过，这也再次说明了一个先前提出的一般观点：将逻辑应用于哲学概念，并不一定会得出唯一或确定的结果。此外，我们先前的观点同样适用：只有先用形式语言和理论对关于决定论的一般哲学讨论进行形式化，逻辑结果才能发挥作用。

此外，还有许多借助逻辑手段对经验理论进行形式化的方式，相关文献浩如烟海，参见 [45, 6]。这些文献探讨了许多经典主题，其中有一个将在下文第8节再作讨论，即构成经验理论的不同词汇；此处相关的联系在于插值。

现在，　我们转向哲学中的另一个广泛主题，延续迄今为止的讨论思路　　r.

5 个问题

无论是通过科学理论中的实验，还是通过更日常的交流渠道获取，新信息往往都源自提出问题。因此，问题在语言哲学，乃至一般认识论中无处不在——在认识论中，知识可以被视为知道某个相关问题的答案，而这个问题决定着探究的方向。

自从 [1]所记载的早期先驱性研究以来，哲学家们便提出，逻辑所处理的不应仅仅是传递信息的命题或陈述之间的后承关系，也应包括索求信息的问题之间的后承关系。

在一种非常常见的实现方式中（参见 [33], ），问题的逻辑语义会根据问题的完整答案对其进行建模，并将这些答案视为相关状态空间的一种划分。人们通常把这种划分看作一个有待解决的当前“待解决问题”：通过确定哪个划分单元是实际情况，来解决这个问题。

于是，一组问题的有效后承便成为如下概念；这一概念在语义学文献中早已存在：

如果我们已经有了所有“前提”问题的答案 $?P_1$, ...,$?P_k$，那么我们自然也就有了“结论”问题?C.的答案。

例如，从这个意义上说，(i) ?A 蕴含 ?¬A，(ii)?A、?B 蕴含 ?(A & B)，等等，这表明问题的后承与从前提进行可定义性之间存在联系。

在公式可以为真或为假的模态状态空间上，问题间蕴涵这一概念的语义定义如下：

如果两个状态 s, t在所有 P_i-真值 $(1 \leq i \leq k)$, 上相同，那么它们在 C-真值。上也相同

换言之，P_i-划分的联合细化包含于 C-划分之中。

当然，自然语言中的问题在实际运作方式上要复杂得多，因为它们会提出或修改待解决问题，并引导对话与探究的进程。此外，问题还会与其他信息事件相互作用。例如，可以将上述问题后承概念设为以事件 !Q 为条件，即通过将总状态空间限制为仅包含 Q 成立的状态，表示接收到 Q 这一确凿信息。

前述概念显然与此前讨论贝丝式隐式可定义性时提到的不变性和相似性概念一脉相承。[16] 沿着这一类比，在谓词逻辑框架中，[23],给出了一个关于问题间后承的完备逻辑，并运用略作加强的贝丝定理的投射版本，证明了问题间条件蕴涵的以下关键等价关系：

▶ **定理3**。 *!R, ?P* $\models$ *?Q* 当且仅当存在一个一阶公式 $\alpha(P)$，使得 $R \models Q \leftrightarrow \alpha(P)$。

这一结果可以看作是通常逻辑常项在提供显式答案方面具有某种表达完备性，从而使问题逻辑与命题逻辑紧密相连。

此外，有趣的是，所引论文将一致插值（见本书第9章）与以下情形联系起来：给定一些背景信息时，存在一个问题的“最佳答案”。

因此，问题这一在哲学上颇为重要的概念可以纳入逻辑的研究范围，而贝丝定理和克雷格定理是获得更明确结果的关键。[17]

再说一次，这只是一个开端，仍有许多待讨论的问题，这里仅举其一。上述论述适用于一阶框架，但自然语言是否属于一阶语言当然仍有争议。特别是，对于包含非一阶广义量词（如“多数”或“许多”）的扩展语言，上述结果是否仍然成立？在广义量词理论这一领域，与其他领域一样，自然语言的形式语义学会遇到数理逻辑中有关逻辑系统性质的待解决问题，[43]。

6 依赖

现在该提升我们分析的抽象层次了。问题间的蕴涵是变量之间语义的函数依赖的一个特例：对于是非问句，变量的值可以是真值；而对于更一般的wh问句，变量的值则可以是其他对象，参见 [24]。但是

[16]事实上，类比的应用范围要广泛得多，类似的“答案相同”等价关系已被用于研究普遍存在的“其他条件不变”推理现象 [13]。[17]关于仍在不断发展的问题逻辑领域的更多内容，请参阅 [27]。

函数依赖也体现于本文前面讨论的许多概念之中：我们对决定论的分析涉及取值于状态空间的变量；随附性则是一种特殊情况，其中变量的值甚至只是某个相关不变关系的等价类。

在现代依赖逻辑中， [48], 函数依赖存在于变量集合 X 与变量 y 之间，定义在状态空间 M 中；在这些状态下，这些变量的值并非总能同时取遍所有可能的赋值。这些“空缺”正是变量值之间产生相关性的原因，而函数依赖便是其中一种重要类型。[18]

依赖框架在哲学的其他领域也同样适用，例如第7节将讨论的情境理论。在情境理论中，世界中的情境之间存在各种类型的信息相关性，由此产生信息流和知识；这些相关性不一定源于情境之间的结构相似性，也可能是由整体系统行为所受的全局约束所决定。

上述函数依赖的标准语义定义属于隐式语义决定，其中我们称 $\mathrm{s} =_X \mathrm{t}$，是指 s 和 t 对集合 X 中的所有变量取值相同。以下是变量 y 对变量集合 X的函数依赖的一般概念：

对于状态空间模型M中的任意两个状态s, t，$\mathrm{s} =_X \mathrm{t}$ 意味着$\mathrm{s} =_y \mathrm{t}$.

这一抽象框架适用于相关命题具有真值的问题，也适用于对象认知，例如“知道是谁杀了 T 先生”这样的构造，甚至也适用于早先的随附性概念。当变量的值可以是某个相关相似关系下的整个等价类时，它也适用于贝丝意义上的隐式可定义性。

那么，先前引述的命题问题基本逻辑的完备性定理，就可以看作一种一般的、最小的函数依赖命题模态逻辑的特例；该逻辑由 [2] 提出，其中问题作为变量，真值作为它们的值。

在这一设定下，先前提到的一点再次出现。所陈述的语义等价显然足以保证存在一个定义在变量值域上的抽象函数 F，使得对于每个状态 s，

$$\mathrm{s(y)} = \mathrm{F(s[X])}.$$

虽然总能针对给定状态空间模型 M，在局部临时找到这样的函数，但在满足适当条件时，贝丝定理会给出一个特殊的可定义函数 F，使其能够普遍适用于各种模型。这启示我们可以从更一般的视角看待贝丝型结果：它们是依赖逻辑的有趣补充，因为它们给出了使一般抽象依赖能够显式化、从而适用于计算和演绎的条件。

鉴于这些联系，一个自然的问题是：当前的依赖逻辑是否满足相对于变量（而不只是共享谓词词汇表）的 Beth 可定义性或克雷格插值定理。对于 [48], 风格的二阶依赖逻辑，答案是，即使一致插值（定义和结果见第9章）也以变量共享的意义成立，正如本书第7章所述。至于 [2], 提出的可判定模态依赖逻辑，目前只有

[18]请注意，在这种语义环境中，变量不再是标准一阶逻辑中使用的匿名绑定装置，而是从状态到值的命名函数，展现出个体行为，反映了经验科学或概率论中“变量”这一概念的用法。

已知插值的谓词版本， [11],但共享变量版本似乎也成立。

依赖似乎是贯穿本文大多数哲学主题的一条主线。它显然适用于我们对随附性和决定论的讨论。不过，依赖逻辑也适用于我们先前关于逻辑系统之间翻译的讨论，因为正如我们所指出的，显式句法翻译的存在，与所连接的两种逻辑的模型类之间的隐式语义依赖相对应。这之所以成立，当然是因为依赖逻辑中的变量可以代表任何事物；同样，它们的值也可以是任何东西，从数字或对象，到模型的等价类，甚至主体的信息状态。

鉴于基本依赖推理无处不在，它很适合作为候选方案，用来将逻辑的核心演算扩展到标准逻辑通常所采用的“逻辑常项”范围之外。

进一步说，y 对 X 的函数依赖处于一个连续谱的一端：固定变量 X 的值后，y 只剩下一个可能的值。连续谱的另一端则是独立性，即当前的 X 值不会对 y 在当前状态下可以取的值施加任何限制。独立性也可能作为一种哲学概念发挥作用，例如成为某种“反可定义性”或“不可学习性”。而在连续谱的中间，则是 X 与 y 之间的相关性 等概念，它们可以“弱化”函数依赖的作用。这或许适用于本文讨论的若干领域。

这种相关性视角再次引出了有趣的数学问题：贝丝定理和克雷格定理是否存在较为“宽松”的版本，能够以定性甚至概率的方式，在允许例外的情况下给出定义或插值式。

现在我们暂且离开不变性／依赖这条线索，转而考察可定义性和插值如何凸显词汇在塑造日常信念与科学知识方面的关键作用。

7 信息与广义后承

我们先从逻辑学研究的一个核心概念——后承谈起。一种常见的哲学观点认为，推导逻辑后承与信息有关，尤其在于阐明给定前提或数据中隐含的信息。手册章节 [15] 探讨了这种后承观，同时也指出了逻辑中发挥作用的其他广义信息概念。

情境理论对信息有更广泛的关注。 [4], 它是一种形式范式，受到这样一种知识观的启发：知识以 [28]中的信息流为基础。在这一哲学体系中，世界由部分情境构成（至少，如果将该理论视为一种形而上学理论而非认识论理论的话）；信息流之所以产生，是因为这些情境的行为之间存在相关性，而这种相关性由抽象或具体的物理通道所中介。

因此，逻辑后承现在可以被理解为通常发生在不同情境之间，或者更形式化地说，发生在不同模型之间。比如，当我们在地面上看着雷达屏幕时，会观察到光点的位置发生变化，并通过飞机实际飞行轨迹与我们所看到的屏幕显示之间的相关性，推断远处飞机正在移动。[19]

[19]这种跨情境推理功能早已存在于古印度逻辑中，其标准例子是“烟意味着火”：根据在地面上进行的观察，推断无法到达的山顶上有火， [20]。

在这类推理中，两个情境之间有哪些相关联系，当然会因实际情况而异，因为许多种相关性都能传递信息。

这种情境主义观点提出了一种新的蕴涵概念：它不只是在单个模型中成立，如同通常的逻辑后承那样，还可以跨模型成立。以下是 [3] 围绕这一主题展开的若干概念和结果。我们称 φ 沿关系 ψ R 蕴涵，如果：

对于任意两个模型 M，N，若 M $\models \varphi$ 且 M R N，则 N $\models \psi$。

从这一视角看，模型 M 不仅支持关于自身的真命题，这些命题可以通过根据我们已经掌握的关于 M 的信息进行推理而得到阐明；模型也像一座灯塔，沿着各种关系向其他模型“广播”更多信息。这些关系的强弱不一，从同构这样的强关系，到同态或模态双模拟这样的较弱关系。与 M 在结构相似性上相距越远，信息迁移就越弱。

这一框架为插值定理提供了全新的视角。我们已经有了一个有效后承$\varphi \models \psi$。在共享词汇表 **L**中拥有一个插值式 α，还能带来什么额外好处？它真正带给我们的是以下形式的跨模型传递：

如果 M $\models \varphi$ 和 N 与 M 是**L**-潜在同构的，那么 N $\models \psi$.[20]

也就是说，得益于插值式，φ沿**L**-潜在同构蕴涵 ψ。[21]对插值式作用的这一分析，启发了插值定理的新版本。

▶**定理 4.** 对于刚才所述的公式，以下条件等价：*(i)* 存在**L**-插值式；*(ii)* 沿潜在**L**-同构的蕴涵。

对于一阶逻辑，借助向下勒文海姆–斯科伦定理，以及可数模型上的潜在同构与同构其实是一回事这一事实，这个新版本等价于通常的克雷格插值定理。但一般而言，新表述较弱；例如，对于基础无穷逻辑 $\mathfrak{L}_{\infty\omega}$ （见第7章）——它常被视为标准插值定理失效的典型例子——这个新版本却成立。[22]

这使我们回到第2节提出的一个一般性待解决问题。当我们说一种良好的逻辑系统或许可以把插值作为其特征性属性时，我们默认接受了克雷格定理的标准表述。但有了摆在面前的两种选择，事情就变得更加微妙了。

插值性质的自然表述是什么？更一般地说，对于我们希望迁移的逻辑系统已知元属性，有哪些自然且稳定的版本，可以不受它们最初被发现时所采用的特殊表述方式影响？

---

[20]对于这种多余部分，也有其他解释。比如，可以将插值视为这样一种主张：逻辑后承总能与某种相关蕴涵联系起来，这种相关性体现在共享主题上。[21] 形式上说，这一概念有一种模态形式 $\varphi \to [p.i._{\mathbf{L}}]\psi$。这也提示我们考察其他模态概念，例如$\langle p.i._{\mathbf{L}}\rangle\varphi$，它定义了所有与当前模型在**L**意义下可能同构的带指定点的模型。就本文所采用的意义而言，后者将为公式 φ定义一个一致插值式。[22]这一结果的证明采用了林德斯特伦型论证；它没有依赖通常使用的紧致性定理，而是利用了由无穷逻辑 $\mathfrak{L}_{\infty\omega}$中著名的良序概念的投影不可定义性所体现的、仍然十分强大的模型存在性。

对于经典模型论中的保守性定理，也存在类似的广义插值版本。这些定理将重要类型的语义行为与句法形式联系起来，其内容本身就涉及模型之间的转换。例如，除了通常刻画对子模型保守性的洛斯–塔斯基定理外，我们还有以下版本：

▶**定理 5。** φ 沿 **L**-子模型蕴含 ψ，当且仅当存在一个语法上全称的 **L**-公式 α，使其按如下方式进行插值：$\varphi \models \alpha \models \psi$。

取 $\varphi = \psi$ 这一特殊情形，即可得到原来的保守性定理。模态逻辑中还有一个类似的刻画定理：

一阶 φ 沿 **L**-互模拟蕴含 ψ，当且仅当存在一个可由模态 **L** 定义的插值式。

此类结果的证明通常会考察保守性定理的标准证明，并发现这些证明实际上也确立了插值版本。

情境之间信息流的逻辑相关性观点还有更多内涵，因为它不一定源于结构相似性，也可能是全局动力系统行为的结果。我们在上文第 6 节讨论依赖逻辑时，已经指出了这一现象。

前述讨论的哲学意义何在？在我们看来，受情境理论早期工作的启发，本节探讨了逻辑哲学中的一些根本待解决问题，同时也涉及一般信息哲学，甚至可以说，还涉及认识论。

我们现在继续讨论词汇在哲学中所起作用的其他方面，尤其是由有组织的数据以及我们据以推理的规律所构成的理论的结构化。

8 科学理论中的理论术语

科学哲学中的一个关键主题，一直是（先验的）数学理论与经验科学中的理论之间的差异。后者包含**可观测术语**，其值可以直接观察或测量，但同样至关重要的是**理论术语**，其值无法直接观察，但它们组织和精简该理论。在任一给定理论中何处划定这一界限，一直是大量哲学争论的议题，但观察性与理论性之分具有明显的直觉意义，而不仅限于科学情境。

在此值得从历史上注意的是开创性论文 [17]，它首次提出了这样一种想法：科学中的经验理论可以模型论地加以研究，即将定律的句法表述与界定实际物理系统的结构集合结合起来。

用这些逻辑术语来说，考虑一个句法理论 $\mathbf{T}(\mathbf{L}_O, \mathbf{L}_t)$，它包含观察性词汇和理论词汇。如果贝丝定理适用，那么$\mathbf{L}_O$ 中陈述的可观测事实将唯一确定$\mathbf{L}_t$中理论术语的指称，后者也将在 T 中显式可定义。然而，除数学上的便利所需的约定性定义外，这种情况很少出现。

那么，让我们提出一个更一般的问题，不预设显式可定义性。T 的经验内容 是什么？也就是说，不借助理论上层结构，它对可观测世界说了什么？

一种常见的句法答案是：子语言$\mathbf{L}|_O$ 中所有由 T 推出或可从 T 推导出的后承所构成的理论 T。然而，另一种影响深远的观点认为，经验内容是语义的；这一观点源于[44]，：T 的经验内容（即该理论“发挥作用”的具体应用范围，其中该理论

“发挥作用”）由所有能够$\mathbf{L}_O$-结构组成，这些结构可以扩展 为 T 在其完整语言中的一个模型；或者，等价地说，由模型类 MOD(T)|$\mathbf{L}_O$组成。至少对于有限公理化理论 T，经验内容可以通过存在性的二阶拉姆齐句 $\exists \mathbf{L}_t \cdot$ T($\mathbf{L}_O$, $\mathbf{L}_t$)来定义。

我们始终可以断定，上述可扩张结构满足句法理论 T|$\mathbf{L}_O$中的所有原则。当模型类 MOD(T)|$\mathbf{L}_O$ 事实上等于 MOD(T|$\mathbf{L}_O$)时，理论 T 就称为“拉姆齐可消去的”。但情况并非总是如此。

举一个反例：取带有$\mathbf{L}_O = <$的自然数一阶理论 $\mathbb{N}$，再加入一个一元理论谓词 A，并规定它非空但没有下界。这个理论的$\mathbf{L}_O$部分只是自然数集 IN 上的 $<$ 一阶理论，但后者的标准模型无法扩张为整个理论的模型。

然而，始终成立的是，MOD(T)|$\mathbf{L}_O$ 中的每个结构都有一个初等扩张，使之成为整个理论 T 的模型。不过，允许这种做法，就不只是要在经验情境中引入理论谓词，还要引入额外的“理论对象”。[23]

上述内容的一个自然特例是有限公理化理论 T 的情形。在这种情况下，经验内容的第一个概念应当要求 T 在其经验子词汇中的最强后承，而这就需要一致插值，其定义见第9章。[24]

从更精细的视角来看，科学理论中可以有更多层次的词汇：哲学家有时会区分“观察性的”（描述事实）、“倾向性的”（低层次的经验概括）和“理论性的”词汇。不过，也可以采用与上述类似的分析。[25]

逻辑与科学哲学的交汇远不止这里勾勒出的几个待解决问题。例如，不变性和可定义性概念在这两个领域中同样具有根本性；参见[22] 关于对称性在物理学中所起作用的讨论。

我们在简短讨论中完全未曾提及逻辑分析的另一个关键方面，那就是明晰句法在计算上的重要作用：它使我们能够表达科学理论中的规律和定律，并计算出实际的预测。

9 知识与信念的模块性

从科学理论转向知识与意见体系，我们现在来探讨认识论，即对人类知道和相信意味着什么的哲学研究。在这一更广阔的领域中，语言的关键作用再次凸显，这部分是因为我们所知道或相信的内容通常以自然语言表达。此时会出现各种新的待解决问题，而克雷格插值也有了新的应用方式。

首先，我们的知识与信念是关于某些事实和概念的，而命题的主题 概念，即它“关于”什么，一直是哲学界经久不衰的主题。

---

[23]这些概念也经过了进一步的细化。T 的经验内容也可以只是由 T 推出的、关于可观测量的观察性事实和全称定律，即 T 的一个全称子理论|$\mathbf{L}_O$。[24] 有趣的是，克雷格在其开创性研究中，起初试图解决所有一阶逻辑中的“最强后承问题”，后来则证明了克雷格插值定理，作为次优之选。[25]这种区分在自然语言中也很有意义：可观察的谓词（如发色或温度）与较具理论性的倾向性谓词（如“友善”或“易碎”）并存，甚至还与高度理论化的谓词（如一个人的“命运”）并存。

现在，一种自然的逻辑方法将公式的主题定义为：该公式具有逻辑等价式的最小子语言的词汇。以下结果由 [42], 得出，说明这个定义是良定义的。

▶**定理 6.** 对于用一阶语言 **L**表述的任意公式 φ ，在包含关系下，存在唯一的最小子语言，使得 φ 在其中有一个等价公式。

克雷格插值再次发挥作用。显然，在有限词汇表 **L** 中，存在包含关系下极小的子语言，可以在其中找到一个等价公式。但假设存在两个不同的子语言：$\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2,$ ，它们分别有等价公式 φ_1, φ_2。那么 $\varphi_1 \models \varphi_2$，根据插值定理，在 $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ 中存在一个 α ，满足$\varphi_1 \models \alpha \models \varphi_2$。但这样一来， α 就会成为 φ 的等价公式，而且它所在的子语言更小。

这里还有一个关于一阶理论模块化架构的基本语言问题。它与克雷格插值定理的以下一个等价表述有关（另请参见著名的罗宾逊联合一致性定理）：

假设理论 $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2$ 合并两个子理论后不一致，那么
共享语言 $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ 中存在一个公式 α ，使得 $\mathrm{T}_1 \models \alpha$ 且 $\mathrm{T}_2 \models \neg\alpha$。

如今，众所周知，我们的信念被划分为不同的主题，而这些主题可能彼此毫无关联。然而，当前大多数关于知识与信念的逻辑都只使用一种包罗万象、没有细分的语言。因此，将整体语言分裂为彼此不相交的子语言，并探究这对理论结构的影响，是很有意义的。特别是，关于整体语言中的理论 T 各个组成部分之间的信息流，会引发一些问题。

这里利用了克雷格插值定理 [37, 42] ，以得到关于信念体系精细结构的以下结果。[26]

模块性的相关概念如下。若存在公式 φ 属于$\mathbf{L}_1$，以及公式 ψ 属于$\mathbf{L}_2$，使得 T 为$\{\alpha \mid \{\varphi,\ \psi\} \models \alpha\}$，则称理论 T 被其整体语言 **L** 的一个划分$\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ 分裂。这一概念可以直接推广到更大的分裂。

接下来，容易看出，对插值定理连续应用两次，就可得出以下结论：只要通过划分$\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$将 T 分裂为$\{A, B\}$ ：

若 $\mathrm{T} \models \varphi$，则存在一个$\mathbf{L}_1$-公式 α 和一个$\mathbf{L}_2$-公式 β ，使得
(i) $\mathrm{A} \models \alpha$，(ii) $\mathrm{B} \models \beta$，且 (iii) $\alpha, \beta \models \varphi$。

通过适当迭代应用克雷格插值，也可以证明一种适用于更大有限分裂的平行插值定理。由此可得以下一般性结果，其中“最大”指分裂中的划分单元数量：

▶ **定理 7.** 每一个具有有限词汇表的理论都有唯一的最大分裂。

[26]为方便起见，我们讨论有限公理化理论，不过只需简单运用一阶逻辑的紧致性定理，便可将所引结果推广到更一般的情形。

作为第三个例子，我们仅再提及形式认识论中的又一个重要主题，即信息动态学。作为知识与信念载体的理论，通常会在由观察、推理或交流所产生的新信息引发更新时发生变化——这三种过程既支配科学，也支配日常生活。有了上述结果，关于理性认识主体的知识更新与信念修正的通常逻辑说明，[32, 10], 便可大为细化，从而在对主体于该过程任一阶段所知与所信内容的表征中引入更多主题敏感性与模块化结构。

至此，我们对插值在哲学各领域中的应用所作的综述告一段落。与前文关于语义不变性和依赖的主题相比，这些应用并没有一个清晰明确的共同点，不过，特定词汇在推理和理论构建中发挥着无处不在的影响，显然是一条贯穿始终的主线。[27] 这两个主题是否还能在此基础上进一步统一，本文并未作出定论；我们将寻求一种更为整合的视角留作未来的目标。

10 一位历史先驱：Bolzano

贝丝定理和插值定理凸显了语言作为逻辑后承这一核心概念的关键要素的重要性。但事实上，逻辑中的这一主题或许并不像我们所说的那样新颖。

这一语言学关注点的一位历史先驱是 Bernard Bolzano；他的《科学学》[21], 首次系统地提出了语义后承概念，也首次明确研究了针对不同目的的不同后承概念（早期形式的“逻辑多元主义”）；这些概念的性质各异，取决于人们对推理风格严格性的标准。以下讨论摘自 [7]。

对 Bolzano 而言，我们是否称某个后承为有效，取决于我们将前提和结论的哪些部分视为具有固定含义，又将哪些部分视为可变的，因而可以用同一类别中的其他表达式替换。

例如，从前提{约翰比玛丽高，玛丽比保罗高}推出“约翰比保罗高”这一步，在我们将“约翰、保罗、玛丽”视为可变项，而将“更高”固定为不变时，是有效的。但如果我们也将“更高”视为可变项，并允许用其他不一定具有传递性的二元谓词替换它，那么这一后承就无效。

从“x 比 y 更 P，y 比 x 更 P”推到“x 比 z 更 P”的推理，甚至在 Bolzano 的精细意义上仍然有效，只要我们固定自然语言中的一般比较结构“-er”的含义；该结构能将形容词变为比较级。

因此，我们 可以将 Bolzano 的后承概念视为三元的，而非二元的 :

$$P_1, ..., P_k \models_{\mathbf{L}} C,$$

其中的词汇 设置 **L** 记录，指出我们将相关公式中的哪些子表达式视为变量。

[27]这里我们关注的是公式中的非逻辑词汇。不过，应当注意，逻辑词汇在构造插值式时也发挥着关键作用；这一特点可能正是人们直觉上认为插值定理要求逻辑系统具备某种表达完备性的原因。

这意味着逻辑演算现在必须明确跟踪相关词汇，从而引出一些问题，例如如何组合词汇不同的后承。

例如，设给定 $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_k \models_{\mathbf{L}_1} C$ 和 $\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_k \models_{\mathbf{L}_2} D$。从两组前提的并集中得出自然的合取结论 $\mathrm{C} \wedge \mathrm{D}$ 时，我们应该取词汇集合 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$, 的交集，还是并集？答案留给读者。

这一切丰富了现代人通常思考支配各种推理方式的基本“结构规则”的方式。在这种思考中，语言并非一个显式参数；而如今，它已变得至关重要。

这种对词汇的显式操作似乎契合插值定理的精神；事实上，三元序列演算也被用于证明论论证，以证明该定理为真。除此之外，我们还可以看到，凸显词汇的三元序列是推理的主要载体。[28]

11 结论

这篇简短而轻松的综述围绕着一组一般性思想展开，即依赖、提升、词汇、迁移和可定义性，这些思想出现在哲学的各个领域。我们试图表明，逻辑中的概念 和结果 都与哲学中的主题有着很强的相似性，并且在某些情况下可以加以运用，从而获得更广泛的洞见。

这里应当指出，逻辑与哲学的交界可以进一步拓宽。本章的讨论主要集中在逻辑的语义方面和模型论分析。若从证明论视角重新审视我们讨论过的所有主题，也会很有意义。例如，对克雷格插值的标准证明论分析会给出一个递归过程：给定一个蕴涵的证明 $\varphi \to \psi$，该过程会输出一个插值式，以及 $\varphi \to \alpha$ 和 $\alpha \to \psi$ 的独立证明。这使讨论从纯粹的真或有效性转向对这些语义事实的「理由」，而这一点也可以与哲学中的各种主题联系起来。[29]

不过，即便如此，我们的案例研究也提出了逻辑分析与哲学是否契合的问题。逻辑需要一种严格定义的形式语言语言，模型论和证明论皆是如此。尽管这种语言依赖性有助于提高精确性并证明明确的结果，但它未必总能契合哲学话语和思维的精神，除非是在那些经历了二十世纪「语言学转向」的领域。即使语言确实重要，将范围限制在一阶语言（贝丝定理和克雷格定理最初所处的领域）是否总对哲学有意义，也并不明确；正如这种限制也并不总是符合科学实践一样。

事实上，除了形式认识论、科学哲学和语言哲学中的一些技术性分支领域之外，专业哲学在很大程度上都使用自然语言，或许会辅以一些符号，并用固定的技术术语加以规范。在这种情况下，逻辑的元定理所表达的内容显然是一个可以合理讨论的问题。我们还

[28]追溯至19世纪开创性研究的，不仅有我们所关注的语言意识主题。对不变性与可定义性的分析也是如此；其源头可追溯至 [34] 的开创性研究，当时人们开始将语言视为描述在相关变换下保持不变的概念的媒介。关于更深入的历史，另请参阅 [49] 。[29]用算术术语来说，从有效性转向可证明性，并将公式和证明编码为自然数后，克雷格插值通常表述的复杂度为 Π^0_2。证明论分析给出了更强的Π^0_1 版本，因此这里也存在一些值得探讨的技术问题。

曾不时提出，这些元定理所表达的性质通常被视为逻辑设计的一项优点，甚至是一项要求，但在哲学的某些领域中，这些性质或许并不那么理想。

话虽如此，也可以将逻辑的运用视为为某种哲学实践提供模型（此处的“模型”取更广义的日常含义）；在这种情况下，应用仅仅意味着提供新的视角和建议。此外，本文指出的形式相似性，或许有助于我们发现贯穿各哲学分支学科的统一主题与视角。

接着讨论逻辑的预设，我们可以质疑贝丝定理对特定理论的依赖，因为许多哲学讨论（或许甚至包括物理学等科学领域的实际工作）所关注的是一个一切相关事物都发生于其中的单一世界。[30] 另一方面，也有人可能会主张，对理论的依赖符合抽象数学中的公理化方法，而这无疑也是贝丝看待自己工作的更广阔背景。

尽管存在这些保留意见，我们相信，本综述围绕主要主题充分展现了逻辑与哲学之间的诸多交集；事实上，文中引用的几位作者就体现了这两个领域的结合，他们既是逻辑学家，同时也是严肃的哲学家。更具体地说，将本综述提及的哲学领域中的相关文献，与当前关于可定义性和插值的逻辑研究并置，以更详尽、系统的方式加以考察，或许会是一项颇有价值的工作。当然，我们所选的主题只是一个例子；即使是这些主题，也可以通过拓宽逻辑的交汇范围而受益，例如纳入计算逻辑中的复杂度等主题、与定量方法的交叉领域，[14], 或非经典逻辑这一广阔领域。

最后，至于本文所关注的核心问题，将这些内容并置所带来的真正益处，或许与其说是为哲学问题提供逻辑解决方案，不如说是促进相互启发——因为逻辑也能从此处所强调领域中的哲学想象力和广泛理论化中汲取养分。

致谢

感谢 Alexandru Baltag、Balder ten Cate、Sören Brinck Knudstorp、Martin Otto、Ian Pratt- Hartmann、PabloRivas Robledo、Martin Stokhof、Albert Visser、Frank Wolter 和 UrszulaWybraniec- Skardowska，也感谢在阿姆斯特丹、北京、伯克利和多特蒙德听取本文相关内容报告的听众，感谢他们对本文所涉主题提出的意见。

参考文献

1 K. Ajdukiewicz. 疑问句。载于 J. Giedymin（编），《科学世界观及其他论文：*1931*年–*1963*年》，《综合》丛书第 108 卷，《综合》丛书，第 155–164 页。施普林格，1978年。原以《疑问句》为题发表于《教学的逻辑基础》，Nasza Księgarnia，华沙（1934年）。

[30]比如，在 Padoa方法中，隐式可定义性或许只是在我们所关注的欧几里得空间单一模型中的确定性，就像我们认为三角形决定其重心一样。要与此相匹配，我们需要在恰当的结构中采用贝丝定理的局部化版本。

2 A. Baltag 和 J. van Benthem. 函数依赖的一个简单逻辑。《哲学逻辑杂志》，50：939–1005，2021年。3 J. Barwise 和 J. van Benthem. 插值、保守性与卵石游戏。《符号逻辑杂志》，64(2)：881–903，1999年。4 J. Barwise 和 J. Perry.《情境与态度》。Bradford Books，麻省理工学院出版社，1983年。5 J. Barwise 和 J. Seligman. 信息流：分布式系统的逻辑。剑桥大学出版社，1997年。6 J. van Benthem. 科学的逻辑结构。《综合》，51：431–472，1982年。7 J. van Benthem. 按照 Bolzano 的观点看后承的多样性。Studia Logica，44(4)：389–403，1985年。8 J. van Benthem. Chu空间之间的信息迁移。命题逻辑兴趣小组逻辑杂志，8(6)：719–731，2000年。9 J. van Benthem. 插值的多种面貌。《综合》，164(3)：451–460，2008年。10 J. van Benthem.《信息与交互的逻辑动力学》。剑桥大学出版社，英国剑桥，2011年。11 J. van Benthem、B. ten Cate 和 R. Koudijs. 局部依赖与守卫。载于《模态逻辑进展》论文集，第 135–154 页，2022年。12 J. van Benthem 和 K. Doets. 高阶逻辑。载于 D. Gabbay 和 F. Guenthner（编），《哲学逻辑手册》第 I 卷，第 275–329 页。Reidel，多德雷赫特，1983年。13 J. van Benthem、P. Girard 和 O. Roy. 其他条件不变：一种针对其他条件不变偏好的模态逻辑。《哲学逻辑杂志》，38(1)：83–125，2009年。14 J. van Benthem 和 T. Icard. 交织逻辑与计数。《符号逻辑通报》，29(4)：503–587，2023年。15 J. van Benthem 和 M.-C. Martinez. 信息的逻辑故事。载于 P. Adriaans 和 J. van Benthem（编），《信息哲学手册》，第 217–280 页。爱思唯尔，阿姆斯特丹，2008年。16 J. van Benthem 和 D. Pearce. 理论之间解释的数学刻画。Studia Logica，43(3)：295–303，1984年。17 E. W. Beth. 迈向当代自然科学哲学。Methodos，1：178–185，1949年。18 E. W. Beth. 关于定义理论中的 Padoa方法。荷兰皇家艺术与科学学院《论文集》，56：330–339，1953年。另见 Indagationes Mathematicae，15，330–339，1953年。19 E. W. Beth.《数学基础》。North-Holland，阿姆斯特丹，1959年。20 J. Bochenski.《形式逻辑史》。圣母大学出版社，圣母大学，印第安纳州，1961年。21 B. Bolzano.《科学学》。Seidelsche Buchhandlung，苏尔茨巴赫，1837年。22 J. Butterfield 和 S. de Haro.《二元性的哲学与物理学》。牛津大学出版社，2025年。23 B. ten Cate 和 C. Shan. 为 Groenendijk的询问逻辑构建公理化体系。载于 M. Aloni、A. Butler 和 P. Dekker（编），《动态语义学中的问题》，第 63–82 页。博睿，莱顿，2007年。

578 哲学中的可定义性与插值

24 I. Ciardelli。《依赖关系作为问题蕴涵》。载于 S. Abramsky、J. Kontinen、J. Väänänen 和 H. Vollmer 编，《依赖逻辑：理论与应用》，第129–181页。Birkhäuser/Springer，施普林格，2016年。25 W. Craig。《线性推理：Herbrand-Gentzen定理的一种新形式》。《符号逻辑杂志》22：250–268，1957年。26 W. Craig。《Herbrand-Gentzen定理在联系模型论与证明论方面的三种用途》。《符号逻辑杂志》22(3)：269–285，1957年。27 C. Cross 和 F. Roelofsen。《问题》。《斯坦福哲学百科全书》，2022年。28 F. Dretske。《知识与信息流》。麻省理工学院出版社，1983年。29 H. Ebbinghaus 和 J. Flum。《有限模型论》。施普林格，纽约，1995年。30 J. Fan。《一种随附性模态逻辑》。《圣母大学形式逻辑杂志》60(2)：283–309，2019年。31 S. Feferman。《和谐逻辑：Craig插值定理及其衍生定理》。《Synthese》164：341–357，2008年。32 P. Gärdenfors。《变动中的知识：认知状态的动态》。麻省理工学院出版社，1987年。33 J. Groenendijk 和 M. Stokhof。《问题》。载于 J. van Benthem 和 A. ter Meulen 编，《逻辑与语言手册》，第1059–1131页。爱思唯尔，阿姆斯特丹，1997年。34 H. von Helmholtz。《论几何学基础所依据的事实》。载于《科学论文集》，第II卷，第618–639页。Johann Ambrosius Barth，莱比锡，1883年。35 E. Hoogland 和 M. Marx。《守卫片段中的插值与可定义性》。《Studia Logica》70：373–409，2002年。36 E. Hoogland、M. Marx 和 M. Otto。《守卫片段的贝丝可定义性》。载于 H. Ganzinger、D. McAllester 和 A. Voronkov 编，《逻辑编程与自动推理》，《人工智能讲义》第1705卷，第273–285页。施普林格，1999年。37 G. Kourousias 和 D. Makinson。《信念变化中的并行插值、分裂与相关性》。《符号逻辑杂志》72(3)：994–1002，2007年。38 I. Mason。《经典命题逻辑的元理论不可公理化》。《符号逻辑杂志》50(2)：451–457，1985年。39 B. McLaughlin。《随附性》。《斯坦福在线哲学百科全书》，2023年。40 R. Montague。《决定论》。载于 R. Thomason 编，《形式哲学》，第303–359页。耶鲁大学出版社，纽黑文，1974年。41 M. Otto。《一个插值定理》。《符号逻辑通报》6(4)：447–462，2000年。42 R. Parikh。《贝丝可定义性、插值与语言分裂》。《Synthese》179：2011–2021，2011年。43 S. Peters 和 D. Westerståhl。《语言与逻辑中的量词》。牛津大学出版社，牛津，2006年。44 F. Ramsey。《理论》。载于 R. B. Braithwaite 编，《数学基础及其他逻辑论文》。Kegan Paul, Trench, Trubner and Co.，伦敦，1931年。45 F. Suppe 编。《科学理论的结构》。伊利诺伊大学出版社，芝加哥，1974年。46 L. Svenonius。《模型中的置换定理》。《理论》3：173–178，1959年。

47 A. Urquhart。《相关逻辑中贝丝定理的失效》。《符号逻辑评论》，18(3)：949–962，2025年。
48 J. Väänänen。《依赖逻辑：独立友好逻辑的新方法》。剑桥大学出版社，2009年。49 H. Weyl。《数学与自然科学哲学》。Atheneum，纽约，1963年。重印自20世纪30年代的德语版本。
50 J. Zucker。《经典逻辑的充分性问题》。《哲学逻辑杂志》，7：517–535，1978年。