基于林德利故障与维修行为的可修复系统可用度分析

Afshin Yaghoubi[1], 博士候选人

伊朗德黑兰阿米尔卡比尔理工大学数学与计算机科学学院；

电子邮箱：afshin.y@aut.ac.ir

摘要

维修性分析是可靠性工程的基石。马尔可夫方法虽然是经典的分析基础，但其依赖故障与

。

我们首先全面分析单部件系统的维修性，推导其时变可用度、稳态可用度以及平均修复时间的精确闭式表达式。随后，我们将核心方法系统地推广至由 n 个独立同分布部件构成的常见串联系统和并联系统配置。我们专门开展数值研究，对比林德利分布与指数分布下的系统性能，明确展示非指数修复时间对关键可靠性指标所产生的显著实际影响。本研究

关键词： 可维护性，林德利分布、相位型分布、可用度。

1. 引言

林德利分布是贝叶斯推断中广泛使用的一种统计分布，由林德利于1958年提出。该分布由尺度参数为λ 的指数分布和形状参数为2、尺度参数为λ的伽马分布按特定权重进行凸线性组合而得。该分布的统计性质已得到深入

[1] 通讯作者

研究，并在[1], 中证明，林德利分布在许多方面比指数分布更加灵活。

后来，人们提出了该分布的各种推广形式，并将其应用于寿命数据建模以及风能领域。例如，可参阅[2-5] 。文献[2-3] 中的结果表明，在寿命数据建模方面，该分布优于Weibull、对数正态、伽马和指数分布等主要寿命分布。此外，在通常采用 Weibull分布的风能领域，[4-5]也证明了林德利分布优于 Weibull分布。

相位型分布在可靠性领域具有重要价值，因为它能够通过对部件经历一系列中间阶段的过程进行建模，分析其非指数失效时间；每个阶段的停留时间均服从指数分布。

考虑一个系统，它在最终进入故障（吸收）态之前，会经历若干中间阶段（状态）。故障时间是一个服从相位型分布的随机变量。相位型分布是指连续时间马尔可夫链中到达吸收态所需时间的分布，该链包含有限个状态，其中包括若干瞬态状态和一个吸收态。相位型分布具有极强的表达能力，因为任何定义在正实数上的分布都可以用相位型分布以任意精度逼近[6]。对于独立随机变量，相位型分布在求和、取最小值、取最大值和凸组合等运算下具有封闭性。这一性质对于分析串联系统和并联系统至关重要[7]。此外，由于其特征和统计性质能够表示为矩阵形式，计算简便，这也提升了相位型分布的重要性。指数分布、Erlang分布和超指数分布等许多常见分布都是相位型分布的特例。

使用相位型分布，将一个带有一个维修设施的双部件系统的可靠性模型转化为具有特定矩阵结构的马尔可夫过程。随后，利用这一结构，提出了用于计算平稳状态分布和系统失效时间等重要量的高效数值算法。研究了基于相位型分布、具有两种修复模式（完全修复和最小修复）的单部件可修复系统。通过构造马尔可夫过程的无穷小生成矩阵，并保留指数分布的解析性质，给出了明确的公式

用于计算可用度、系统运行时间分布、平均故障间隔时间和平均修复时间等指标，并通过数值示例验证了该模型的适用性。报道了使用相位型建模对多状态不可修复系统进行动态评估的研究。他们表明，系统在某个状态子集内所经历的时间可以建模为相位型分布。提出了一个n部件系统模型，其中一个部件为运行单元，其余部件处于冷备份状态，且故障与修复时间服从离散相位型分布。利用矩阵方法，他们计算了可靠性指标，并进一步研究了具有无限单元的系统状态。利用相位型分布的闭包性质进行了可靠性分析。所提出的方法适用于结构化系统的可靠性分析，不仅能够得到可靠性点估计，还可以生成具有独立部件的系统的可靠性函数。提出了具有多个阈值的相位型分布的创新性推广。这种方法适用于在可靠性分析中对寿命数据进行建模。

在可修复系统中，经典且应用广泛的分析方法是马尔可夫方法，该方法假设故障与修复过程的时间服从指数分布，并据此建立模型。大量研究均基于这一框架开展（例如，参见[14-16]）。然而，这些模型的核心仍依赖于指数分布假设，而这一假设在现实场景中往往有所局限。

尽管相位型分布应用广泛，但迄今尚无研究在这一框架下考察具有林德利故障时间的可修复系统。本文首次运用相位型分布框架，对具有林德利故障时间的可修复系统进行可靠性分析。该方法使工业管理人员能够计算长期可用性、平均故障间隔时间和可靠性。

本文的组织结构如下：下一节介绍相位型分布以及林德利分布的表示。第3节给出Lindley可修复单部件系统模型。第4节讨论推广到n部件Lindley系统。第5节给出数值结果，并在第6节概述结论与未来工作。

2. 相位型分布

如果T 是相位型的非负连续随机变量，则其可靠性函数定义如下[10]:

$$R(t) = P(T > t) = \boldsymbol{\alpha} e^{\mathbf{A}t}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

其中 是一个m阶方阵，表示瞬态状态之间的转移强度。矩阵 主对角线上的元素为负，其余元素均为非负。 是一个 所有元素均为 1 的列矩阵，而 是一个行概率向量 $\boldsymbol{\alpha}$ (, … ,)，其分量均为非负，且 。在这些条件下，我们称T PH($\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{A}$). 服从阶数为m、转移矩阵为 、初始概率向量为 的相位型分布。

已知林德利分布可以表示为 $f_L(t;\ \lambda) =$ $f_E(t;\ \lambda) +$ $f_G(t;\ 2, \lambda)$，其中权重为 —— 和 $= 1 -$ 。这里， $f_E(t;\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}$ 和$f_G(t;$ 2 $^{\lambda t}$。

该分布可解释如下：非负随机变量 以概率 服从指数分布，并以概率 服从形状参数为2的伽马分布。为便于理解，图1展示 其对应的马尔可夫链。

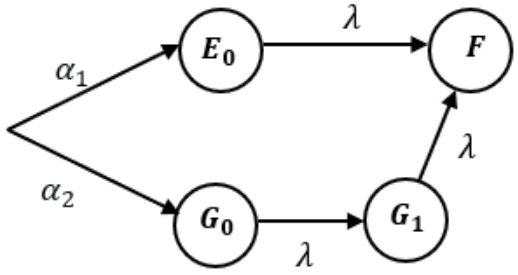

图1 林德利分布作为相位型表示的马尔可夫链

在图1中，有 3 个瞬态状态 E、 G_0 和 G_1，以及一个吸收态 F。状态 E 表示指数分量，该分量以概率 被选中，并以速率 λ直接转移到失效态 F 。状态 G_0和 G_1 表示形状参数为 2 的伽马分量，我们将其建模为两个指数阶段的序列：首先，以概率 选中 G_0 ，并以速率 λ转移到 G_1 ；然后，从 G_1以速率 λ转移到失效态 F 。

请注意，在伽马路径中，不可能从状态 G_1 开始；因此，其初始概率为零。

为将该分布表示为相位型形式，定义如下的 3 阶转移矩阵 和初始概率向量 ：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & \lambda\\ 0 & 0 & -\lambda\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{\lambda}{\lambda+1},\frac{1}{\lambda+1},0\right)$$

根据方程（1），可靠性表示为：

$$R(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+1},\frac{1}{\lambda+1},0\right)\begin{bmatrix}e^{-\lambda t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-\lambda t} & \lambda t e^{-\lambda t}\\ 0 & 0 & e^{-\lambda t}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\left(1+\frac{\lambda t}{\lambda+1}\right)e^{-\lambda t}. \qquad (2)$$

3. 单部件可修复系统在林德利 分布下的分析 n

考虑一个单部件系统。根据 图1，该链的状态空间为 $S=\{E_0,G_0,G_1,F\}$。现在，将可修复性假设纳入其中。假设模型中有一名维修人员，在系统故障时负责修复故障部件。如果系统沿指数路径发生故障，则以速率 μ 进行修复；如果沿伽马路径发生故障，则以速率 μ 进行修复。

起始状态也在 图1中明确给出。也就是说，$P_{E_0}(0)=$ ，$P_{G_0}(0)=$ ，以及 $P_{G_1}(0)=P_F(0)=0.$

当系统进入故障状态 F 时，将启动单一维修过程。假设维修时间服从速率为 μ 的指数分布。维修

的概率返回状态 G_0。这确保了维修后的寿命仍保持林德利分布结构

因此，连续时间马尔可夫链的转移率矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为：

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}-\lambda & 0 & 0 & \lambda\\ 0 & -\lambda & \lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda\\ \mu\alpha_1 & \mu\alpha_2 & 0 & -\mu\end{bmatrix}$$

请注意，最后一行中，从故障状态 F 到运行状态 E_0和 G_0 的转移率分别为 μ 和 μ 。这些值是将总修复率 μ 乘

现在，矩阵微分方程（或柯尔莫哥洛夫方程）可通过$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}$ 计算如下：

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P_{E_0}(t) &= -\lambda P_{E_0}(t) + \mu\alpha_1 P_F(t),\\
\frac{d}{dt}P_{G_0}(t) &= -\lambda P_{G_0}(t) + \mu\alpha_2 P_F(t),\\
\frac{d}{dt}P_{G_1}(t) &= \lambda P_{G_0}(t) - \lambda P_{G_1}(t),\\
\frac{d}{dt}P_F(t) &= \lambda P_{E_0}(t) + \lambda P_{G_1}(t) - \mu P_F(t).
\end{aligned} \tag{3}$$

3.1. 可用度函数

可修复系统中最重要的因素是可用度函数。可用度是指系统在t时刻处于运行状态的概率。

在方程（3）中，除 $P_F(t)$以外，上述所有状态均表示系统的运行状态。因此，在可用度分析中，必须确定这些状态。为求解这些状态，可以对方程（3）进行拉普拉斯变换。

进行拉普拉斯变换后，所有概率状态均可用$P_F(s)$表示。因此，$P_F(s)$为：

$$P_F(s) = \frac{\lambda^2(s+\lambda+1)}{s[(\lambda+1)s^2 + (\lambda+1)(2\lambda+\mu)s + \lambda(\lambda+1)(\lambda+\mu) + \lambda\mu]}. \tag{4}$$

现在，对方程（4）进行拉普拉斯逆变换，即可轻松求得$P_F(t)$。由此可得可用度函数，记为$A(t;\ \lambda,\mu)\ = 1 - P_F(t)$。

通过直接的数学计算，$A(t;\ \lambda,\mu)$ 可表示为：

$$\begin{aligned}
A(t;\lambda,\mu) = {} & \frac{\mu(\lambda+2)}{\lambda(\lambda+1)+\mu(\lambda+2)} \\
& + \frac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda(\lambda+1)+\mu(\lambda+2)}\left(cosh\left(\frac{\omega}{2}t\right) - \mathrm{M}\ sinh\left(\frac{\omega}{2}t\right)\right)e^{-(\lambda+0.5\mu)t},
\end{aligned} \tag{5}$$

where $\omega = \sqrt{\mu^2 - \frac{4\lambda\mu}{\lambda+1}}$, and $\mathrm{M} = \frac{(\mu-2)\lambda^2+2(\mu-1)\lambda-\mu}{\omega(\lambda+1)^2}$.

可以验证，当 $\mu \to 0$ 时，公式（5）可化简为公式（2）中给出的林德利可靠性函数。

3.2. 稳态可用度

稳态（或长期）可用度记为 A_∞，可由可用度函数在 $t \to \infty$ 时的极限得到。换言之，

$$A_\infty = \lim_{t\to\infty} A(t;\lambda,\mu) = \frac{\mu(\lambda+2)}{\lambda(\lambda+1)+\mu(\lambda+2)}. \quad (6)$$

可以证明，对于任意非负的 λ 和 μ，林德利长期可用度始终大于指数分布长期可用度。我们知道，指数分布的稳态可用度为 $A_\infty^E = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$。将项（$\lambda+2$）同时加到分子和分母上，$A_\infty^E$ 可改写为 $A_\infty^E =$ $^{\mu}$（λ+2）（$\lambda+\mu$）（λ+2）。另一方面，根据公式（6），林德利的长期可用度可表示为 $A_\infty^L =$ $^{\mu}$（λ+2）（$\lambda+\mu$）（λ+2）$-\lambda$。对于任意非负的 λ 和 μ，显然不等式 $0 <$（λ + μ）（$\lambda+2$）$-\lambda <$ ~~$(\lambda+\mu)$~~（$\lambda+2$）始终成立。因此，^{1}（$\lambda+\mu$）（λ+2）$-\lambda >$ $\frac{}{\lambda+2}$（$\lambda+\mu$）（）。现在，将所得不等式两边乘以正表达式μ（$\lambda+2$），可得：$A_\infty^L > A_\infty^E$。

3.3. 可靠性函数

当不再假设系统可修复时，即 $\mu = 0$（系统组件不可修复），可靠性分析的两个关键指标是可靠性函数和平均失效时间（MTTF）。要计算可靠性函数，只需在可用度函数的公式（5）中将修复率设为零（$\mu = 0$）。因此，

$$R(t;\lambda) = A(t;\lambda,\mu=0) = (1+\alpha_2\lambda t)e^{-\lambda t} = \frac{1+\lambda+\lambda t}{\lambda+1}e^{-\lambda t}. \quad (7)$$

这正是林德利分布的生存函数，本研究也采用相位型框架对其进行了评估。确定可靠性函数后，即可计算平均失效时间（MTTF）。该指标由 $\int_0^\infty R(t)\,dt = \frac{\lambda+2}{\lambda(\lambda+1)}$ 得出。

3.4. 平均修复时间

稳态可用度的另一种定义为：$A_\infty =$ 平均失效时间 平均失效时间+平均修复时间，其中，平均修复时间（MTTR）是指修复发生故障的部件所需的平均时间。现在，可以轻松计算出MTTR：MTTR $= (\frac{1-A_\infty}{A_\infty})$ 平均失效时间 $= {}^{1}.\mu$

–

4. 林德利分布下的n部件可修复系统分析

假设该系统由两个相互独立的林德利部件组成。在这种情况下，状态空间扩展为 4^2, ，即16种状态。这16种不同状态可以表示为有序对，如表1所示：

表1. Lindley故障时间下双单元系统的状态空间。

状态	第一单元	第二单元	故障次数
1	E_0	E_0	0
2	E_0	G_0	0
3	E_0	G_1	0
4	E_0	F	1
5	G_0	E_0	0
6	G_0	G_0	0
7	G_0	G_1	0
8	G_0	F	1
9	G_1	E_0	0
10	G_1	G_0	0
11	G_1	G_1	0
12	G_1	F	1
13	F	E_0	1
14	F	G_0	1
15	F	G_1	1
16	F	F	2

上表的概率矩阵为：

$$
\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix}
-2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \lambda & 0 \\
0 & -2\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\
0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\lambda & 0 & -2\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\lambda & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda+\mu) & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \lambda & 0 \\
\mu\alpha_1 & 0 & 0 & \mu\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & \lambda \\
0 & \mu\alpha_1 & 0 & 0 & \mu\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda+\mu) & 0 & 0 & \lambda \\
0 & 0 & \mu\alpha_1 & 0 & 0 & \mu\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda+\mu) & 0 & \lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu\alpha_1 & \mu\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda+\mu) & \lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu\alpha_1 & \mu\alpha_2 & \mu\alpha_1 & \mu\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & -2\mu
\end{bmatrix}
$$

系统的微分方程通过 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{Q}$ 确定。要为这些方程求得显式参数解以推导可用度函数，颇具挑战性。不过，通过求解由稳态条件 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{P}(\infty) = 0$ 得出的代数方程组，即$\boldsymbol{P}(\infty)\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}$，可以计算长期可用度这一重要指标。

鉴于各部件的故障与修复过程完全独立，且假设每个部件都有一名专属维修人员，则可根据单个部件的可用度，直接计算串联和并联配置的n部件系统的稳态可用度。若 $A_{\infty}^{(i)}$ 表示根据前述分析得到的第i个部件的长期可用性，则n部件系统在串联和并联配置下的稳态可用度分别为 $A_{\infty}^{\text{Series}} = \prod_{i=1}^{n} A_{\infty}^{(i)}$ 和 $A_{\infty}^{\text{Parallel}} = 1 - \prod(1 - A_{\infty}^{(i)})_{i=1}^{n}$。$A_{\infty}^{\text{Series}}$ 和 $A_{\infty}^{\text{Parallel}}$ 的计算公式可由以下关系推导得出：

$$A_{\infty}^{\text{Series}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu_i(\lambda_i + 2)}{\lambda_i(\lambda_i + 1) + \mu_i(\lambda_i + 2)}, \tag{8}$$

$$A_{\infty}^{\text{Parallel}} = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda_i(\lambda_i + 1)}{\lambda_i(\lambda_i + 1) + \mu_i(\lambda_i + 2)} \right). \tag{9}$$

方程（8）和（9）给出了由n个具有林德利故障率和维修率的独立部件组成的串联或并联系统的长期可用度。由于许多工业生产线采用此类配置，这些公式对生产和维修管理具有很高的适用价值。

5. 数值示例

在本节中，我们将考察一项先前研究中的数值示例，该研究基于指数分布考虑了可维修性假设。[17], 分析的是一个生物质燃料冷热电联供（CCHP）系统，该系统由三个串联的主要子系统组成：1）将生物质转化为合成气的气化系统（G）；2）利用合成气发电的内燃机（ICE）；3）吸收式制冷机

（AC），用于生产冷却用冷冻水。只有当三个子系统（G、ICE 和 AC）同时正常运行时，系统才被视为完全可用（状态 1）。

来自 [17] 的系统故障率和修复率相关信息列于
表2：

表2。 冷热电联供系统的故障率和修复率 [17]

子系统	λ，每天	μ，每天
G	0.004	0.03
ICE	0.002	0.08
AC	0.002	0.08

5.1. 可靠性分析

根据 表2，分析了各个子系统在修复和未修复（$\mu = 0$）情况下的可靠性。图2展示了结果。

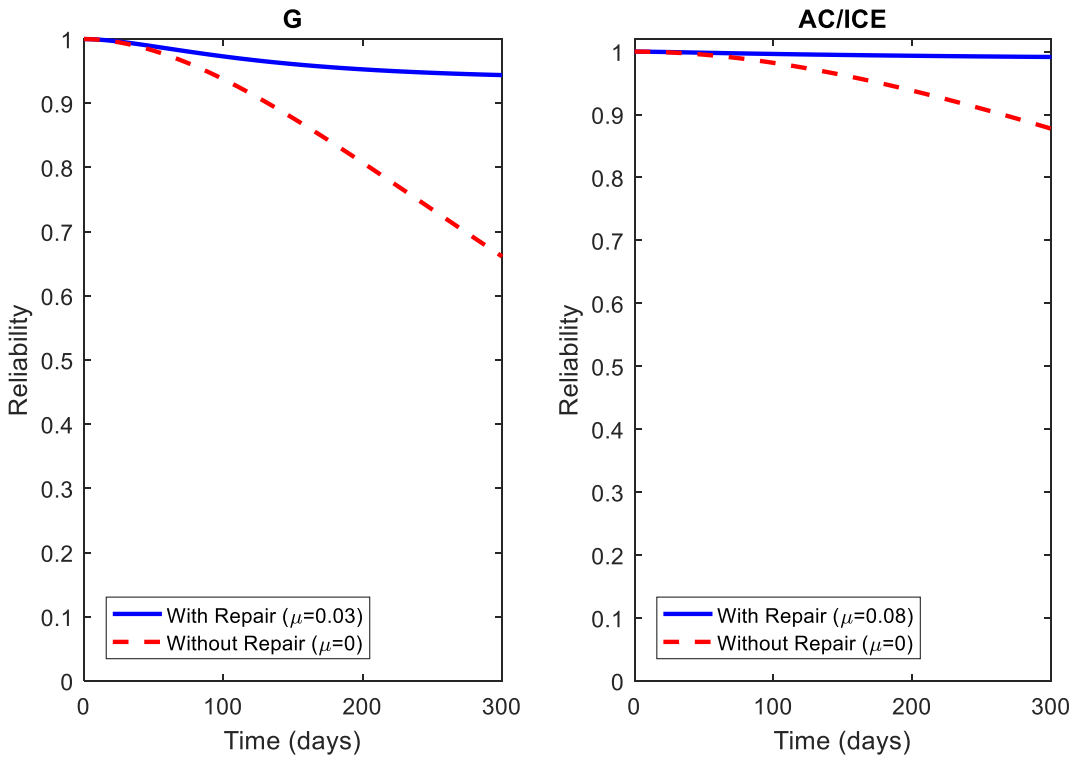

图2。 冷热电联供子系统修复与未修复情况下的可靠性曲线

图2比较了各子系统在有修复和无修复情况下的可靠性。有修复时的实线曲线先是下降，随后稳定在稳态值，这反映了故障与修复过程之间的平衡。相比之下，无修复时的虚线曲线呈单调指数衰减。ICE 和 AC 子系统的可靠性高于

G子系统，这归因于它们的故障率较低、修复率较高。ICE 和 AC 的可靠性曲线完全相同，是因为它们的故障和修复参数相同。

这里，我们希望比较在林德利分布和指数分布故障时间假设下各子系统的时变可用度。为此，我们使用公式（5）计算 $A_L(t;\ \lambda,\mu)$ 在林德利分布下的结果，并使用单组件指数系统的经典解析公式 $A_E(t;\ \lambda,\mu)\ = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$ 计算指数模型下的结果。

图 3分别展示了采用表2中的参数对G子系统和AC/ICE子系统（两者参数相同）进行上述比较的结果。表2。

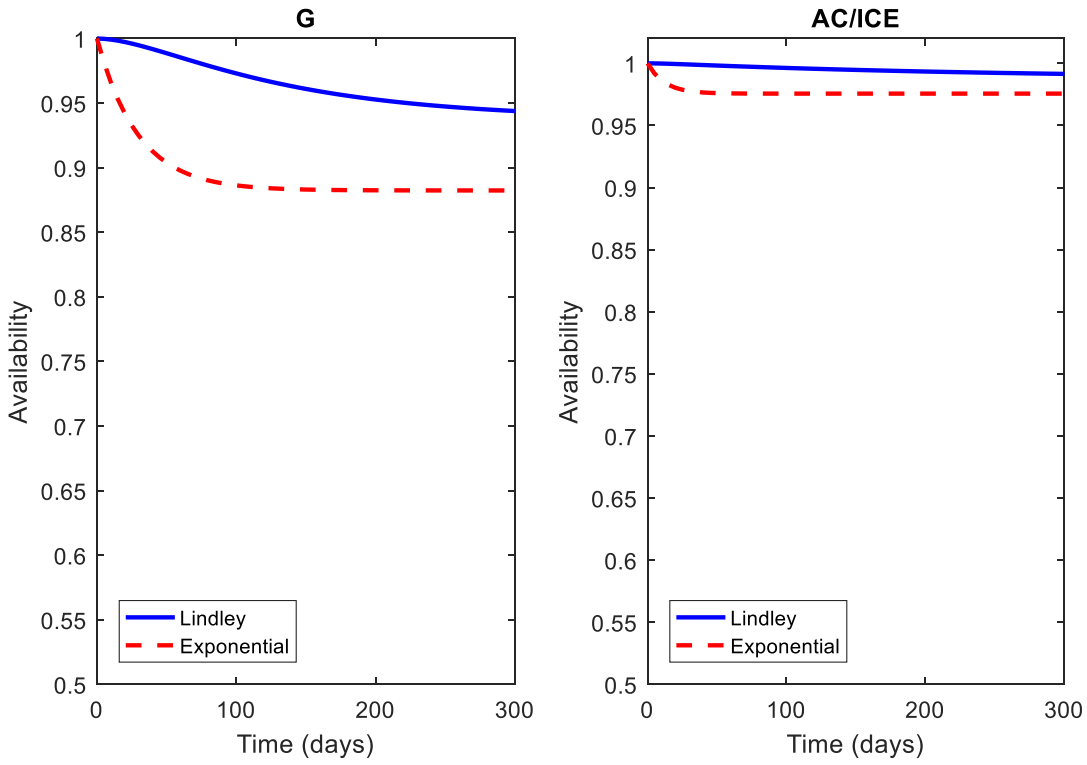

图3。 冷热电联供子系统的可用度图——林德利分布与指数分布对比

可以观察到，在整个时间范围内，林德利可用度曲线$A_L(t;\ \lambda,\ \mu)$始终高于指数曲线 $A_E(t;\ \lambda,\ \mu)$。与指数模型相比，林德利模型（由于采用相位型表示）具有更复杂的瞬态结构，这一点从这些曲线的形状中显而易见。

这些结果表明，在所有时间范围内，指数模型都可以对组件的运行可用度给出保守（悲观）的估计。采用更贴近实际的林德利模型来捕捉非指数失效时间行为，对于可靠性较低的组件（例如本研究中的 G 子系统）似乎尤为重要，有助于更准确地进行维护与维修规划。

5.2. 林德利分布与指数分布下的A_∞ 比较

本节对各子系统的A_∞ 进行比较分析，分别采用林德利和指数故障时间分布进行评估。比较旨在突出分布假设对A_∞ 估计值的影响。

对于故障率为λ 、修复率为μ的可修复系统，其在指数分布下的稳态可用度可由经典公式表示： $A_\infty^E = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$；根据公式（6）的推导，在林德利分布下，稳态可用度为： $A_\infty^L = \mu(\lambda+2)\lambda(\lambda+1)+\mu(\lambda+2)$。 使用表2中列出的故障率和修复率，计算两种分布下各子系统的长期可用度，并汇总于表3。

表3。 指数分布和林德利分布假设下的A_∞

子系统	A_∞^E	A_∞^L
G	0.8824	0.9374
AC/ICE	0.9756	0.9876

表中的结果表3清楚地表明，对于所有子系统，林德利分布得出的长期可用度估计值始终高于指数分布。这个上移源于林德利分布能够对更符合实际的故障行为进行建模——具体而言，它表示了即时故障路径与延迟故障路径的混合，从而有效降低了故障率对长期可用度的表观影响。

由于该系统采用串联结构，总系统可用度（A_∞^{Series}）可使用公式（8）计算。结果见表4。

表4. A_∞ 在指数分布和林德利分布假设下

系统	A_∞^{Series}	相对增幅
指数分布	0.8398	-
林德利	0.9143	7.5%

表4展示了在故障时间分别服从指数分布和林德利分布的假设下，串联配置的冷热电联供系统的总体稳态可用度。林德利分布得出的

系统级可用度为 0.9143，比基于指数分布的估计值 0.8398 高出 7.5%。这种持续上升的趋势再次证实，使用灵活性更高的林德利分布对故障时间建模，可为整个系统得出更乐观、也可以说更贴近实际的可用度预测。

5.3. 故障率的影响

稳态可用度对故障率λ 变化的敏感性由其偏导数量化。将公式（6）对λ 求导，可得：

$$\frac{\partial A_{\infty}^{L}}{\partial \lambda} = -\frac{\mu(\lambda^2 + 4\lambda + 2)}{[\lambda(\lambda+1) + \mu(\lambda+2)]^2}. \tag{10}$$

对于每个正的 λ 和 μ，公式（10）始终为负。在极限行为中：$\lim_{\lambda \to 0} A_{\infty}^{L} = 1$，以及$\lim_{\lambda \to \infty} A_{\infty}^{L} = 0$。这证实$A_{\infty}^{L}$ 是λ的严格递减函数。

5.4.修复率的影响

类似地，对修复率μ 的敏感性可通过将公式（6）对μ求导得到：

$$\frac{\partial A_{\infty}^{L}}{\partial \mu} = \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{[\lambda(\lambda+1) + \mu(\lambda+2)]^2}. \tag{11}$$

对于所有 λ 和 $\mu > 0$，方程（11）中的导数始终为正。在极限行为中：$\lim_{\mu \to 0} A_{\infty}^{L} = 0$，以及$\lim_{\mu \to \infty} A_{\infty}^{L} = 1$。这证实了$A_{\infty}^{L}$ 是μ的严格递增函数。

我们分析每个子系统中λ 在其标称值附近变化的影响，同时保持其μ 固定。 对于气化（G）子系统（标称值：$\lambda = 0.004$， $\mu = 0.03$）以及 ICE/AC 子系统（标称值： $\lambda = 0.002$， $\mu = 0.08$），表 5和6 分别展示了这些子系统的A_{∞}^{L} 如何随λ变化。

表5.G子系统中A_{∞}^{L} 对λ 的敏感性（μ — 0.03固定）

λ，每天	A_{∞}^{L}	$\frac{\partial A_{\infty}^{L}}{\partial \lambda}$
0.002	0.9677	-15.5
0.004（标称值）	0.9374	-14.7
0.006	0.9083	-13.9
0.008	0.8802	-13.1

表6. 在固定 μ = 0.08 时，ICE/AC 子系统的 A_∞^L 对 λ 的敏感性

λ，每天	A_∞^L	$\frac{\partial A_\infty^L}{\partial \lambda}$
0.001	0.9938	-6.21
0.002（标称值）	0.9876	-6.11
0.003	0.9809	-6.01
0.004	0.9738	-5.91

结果表明，A_∞^L 是λ的递减函数，这符合预期。用偏导数衡量的敏感度为负值，且其绝对值随λ增加而增大。改变λ 对 G 子系统的影响更为显著。例如，将λ 增加 50%（从 0.004 增至 0.006）会使其可用度从 0.9374 降至 0.9083，约减少 2.9 个百分点。相比之下，AC/ICE 子系统同样增加 50%（从 0.002 增至 0.003），其可用度从 0.9876 降至 0.9809，减少幅度较小，约为 0.7 个百分点。这表明，如果将可靠性改进工作（降低λ）重点放在基准可用度较低的 G 子系统上，将会带来更大的收益。

现在，我们分析在保持故障率不变的情况下，各子系统的μ 在标称值附近变化所产生的影响。对于气化（G）子系统（标称值：$\lambda = 0.004$， $\mu = 0.03$），以及 ICE/AC 子系统（标称值：$\lambda = 0.002$， $\mu = 0.08$），表 7 和 表 8 分别展示了这些子系统的A_∞^L随μ变化的情况。

表7. 在固定 λ = 0.004 时，G子系统的 A_∞^L 对 μ 的敏感性

μ，每天	A_∞^L	$\frac{\partial A_\infty^L}{\partial \mu}$
0.015	0.8820	3.91
0.030（标称值）	0.9374	1.96
0.045	0.9605	1.17
0.060	0.9722	0.80

表8。 ICE/AC子系统的A_∞^L 对μ 的敏感性（λ = 0.002固定）

μ，每天	A_∞^L	$\frac{\partial A_\infty^L}{\partial \mu}$
0.04	0.9756	0.31
0.08（标称值）	0.9876	0.15
0.12	0.9922	0.10
0.16	0.9945	0.07

结果证实，A_∞^L 是μ的递增函数，符合预期。敏感性（偏导数）为正，但随着μ 增加而降低，表明维修速度投入的边际收益递减。改善μ 对G子系统的绝对影响更为显著。例如，将 μ 从0.03加倍至0.06，可使其可用度从0.9374提高到0.9722，

可提升约 3.5 个百分点。相比之下，将 AC/ICE 子系统的修复率加倍（从 0.08 提高到 0.16），可用度从 0.9876 提高到 0.9945；鉴于其基准可用度本已很高，提升幅度要小得多，仅约 0.7 个百分点。这表明，将用于加快修复的维护资源投向 G 子系统会更有效。

6. 结论

本文提出了一种新颖的相位型框架，用于分析故障时间服从林德利分布的可修复系统，克服了经典马尔可夫模型的指数分布局限。我们推导了单部件系统和多组件（串联/并联）系统关键指标（可用度、平均失效时间、平均修复时间）的闭式解。对冷热电联供系统的数值研究表明，与指数模型相比，林德利模型预测的系统可用度高出 8.87%。敏感性分析确定气化子系统是关键瓶颈，证明将维护工作集中于此可带来最大改进。总之，本研究为可靠性工程提供了一种更灵活、更贴近实际的分析工具。未来的研究可在此框架下探讨相关部件、非指数修复时间以及最优维护策略。

参考文献

[1] Ghitany, M. E., Atieh, B., & Nadarajah, S. (2008). 林德利分布及其应用。
193–506.

[2] Zakerzadeh, H., & Dolati, A. (2009). 广义林德利分布. Journal of Mathematical
ajah, S., Bakouch, H. S., & Tahmasbi, R. (2011). 一种广义林德利分布. Sankhya B, 73(2), 331–359.[4] Ahsan-ul-Haq, M., Choudhary, S.
11.[5] Yang, T., & Chen, D. (2025). 贝塔广义林德利分布：一种新颖的风速概率模型. arXiv 预印本 arXiv:2503.09912.

[6] Bladt, M., & Nielsen, B. F. (2017). 用于保险和金融的相位型分布. Wiley.[7] Assaf,

[8] Neuts, M. F.和Meier, K. S.（1981）。论相位型分布在含两个组件的系统可靠性建模

[9] Peng, D.、Fang, L.和Tong, C.（2013年7月）。基于相位型分布的单部件可修复系统

[10] Eryılmaz, S.（2015）。采用相位型建模对多状态系统进行动态评估。《可靠性工程

[11] Ruiz-Castro, J. E.、Pérez-Ocón, R.和Fernández-Villodre, G.（2008）。受离散相

[12] Alkaff, A.， & Qomarudin, M. N.（2020）。利用相位型分布闭包性质对系统可

[13] Ruiz-Castro, J. E.、Acal, C.， & Roldán, J. B.（2023）。通过多个切分点研究非齐次

[14] Liang, Q.、Yang, Y.、Zhang, H.、Peng, C.， & Lu, J.（2022）。复杂安全系统基于

[15] Kumar, P.、Singh, L. K.， & Kumar, C.（2019）。安全关键系统可靠性分析的优化

[16] Son, K. S., Kim, D. H., Kim, C. H., & Kang, H. G.（2016）。采用系统化方法对具有

[17] Wang, J., Li, M., Ren, F., Li, X., & Liu, B.（2018）。考虑可靠性的基于能级的

104-116