arXiv:2602.07965v1 [math.AG] 8 Feb 2026

通过截断的布朗–彼得森上同调构造卡尔片科猜想的反例

维克托·彼得罗夫、ALOIS WOHLSCHLAGER 和叶戈尔·佐洛塔廖夫

Abstract. 设 G是一个分裂半单线性代数群，并令 X 表示 G中 Borel 子群的泛扭曲簇。尼基塔·卡尔片科猜想，从 X 的周环到X 的格罗滕迪克环上拓扑滤过的相伴分次环的映射是一个同构。该猜想已在许多 G上得到验证，后来八木田信明证明，对于某些旋量群，该猜想并不成立。此后，Baek–Karpenko 和白克–杰维亚托夫又构造了其他反例。我们提出一种构造反例的新方法，该方法基于截断的布朗–彼得森上同调与连通 K 理论之间的联系。利用这一方法，我们证明该猜想对于一些新的群并不成立，其中包括 Spin_{15}，；它是目前已知使该猜想失效的最小旋量群。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 3 3. Karpenko 猜想的推论 5 4. 分裂极大正交格拉斯曼簇的代数配边 7 5. Brown–Peterson 上同调中的近似关系 9 6. 搜寻非有理 v_2-挠元 14 附录 A. 万有 p-典型形式群律 17 附录 B. 若干对称多项式恒等式 18 参考文献 19

1. Introduction

光滑簇 $^*(X)$ 的周环 X 是一个重要的上同调性质不变量，包含了关于 X 的大量几何与算术信息。然而，一般而言，这个环很难计算。为了获得周环的良好近似，亚历山大·格罗滕迪克在 X [3] 的零次 K 群上引入了拓扑滤过，并构造了一个典范满同态

$$\varphi_X \colon \mathrm{CH}^*(X) \twoheadrightarrow \mathrm{gr}_\tau \mathrm{K}_0(X)$$

该满同态将子簇 Z 的类映射为其结构层 $[\mathcal{O}_Z]$的类，其中 gr_τ 表示拓扑滤过所对应的分次环。遗憾的是，这个满同态一般并非单射。我们可以问，对于某类簇而言，这个满同态是否为同构。对于周环在代数问题中有许多应用的一类有趣簇，就是射影齐性簇。虽然对于整个簇类而言，上述态射显然不是同构，但尼基塔

2020 *Mathematics Subject Classification.* 20G15, 14C15, 19L41.*Key words and phrases.* 线性代数群、射影齐性簇、泛扭子、周群、定向上同调理论。

Karpenko猜想，对于完全旗的普遍扭曲簇，这个问题应有肯定答案。

猜想 A ([12, 猜想 1。1])。 设 G 是域 F上的分裂半单线性代数群，且 $B \subset G$ 是一个 *Borel* 子群。取一个泛 G-扭子 E (见 [8, 第一章，§5]) 。则态射 $\varphi_{E/B}$ 是一个同构。

在 [12, 引理 2。1], 中证明了，该猜想与泛G-扭子 E的选取无关。我们还注意到，该猜想等价于将 Borel 子群替换为任意特殊抛物子群的相同陈述 $P \subset G$ [13, 引理 4。2]。特别地，若对 G 该猜想得到肯定回答，*则可计算任意此类 P的周环 $\mathrm{CH}^*(E/P)$，因为格罗滕迪克环 $\mathrm{K}_0(E/P)$ 已由 Panin 的工作给出 [21],，且对于此类簇，拓扑滤过与可计算的 γ-滤过重合 [15, 推论 7。4]。

该猜想已对 A_n 型和 C_n 型经典群在 [13, 定理 1.1],中得到验证；对特殊正交群 SO_n 在 [23, 定理 1], 中得到验证；对例外群 G_2, 、F_4,和 E_6^{sc}在 [12, 命题 5.1 和 5.2]中得到验证。对于旋量群 Spin_{2n+1}, 该猜想已对 $n \leq 5$ 在 [14, 定理 3.1] 中得到验证（注意，只需考虑奇自旋群，因为关于 Spin_{2n+1} 的猜想由 [2, 命题 2.16]等价于关于 Spin_{2n+2} 的同一猜想），后来八木田信明又在 [31, 定理 10.4 和引理 10.5]中证明了 $n = 8$ 和 $n = 9$ 情形下该猜想不成立。随后，Karpenko 针对 $n = 8$ [16, 给出了一个简化的论证，见定理 1.1], ；之后白克–卡尔片科将其推广到 $n = 9,\ 10$ [2, 见定理 1.3], ，白克–杰维亚托夫又将其推广到 n任意 2-幂 ≥ 8 [1, ，见定理 1.3]。在本文中，我们在旋量群中找到了新的反例（并为其中一些先前的反例给出了另一种论证）。具体而言，我们证明如下：

定理 B. 设 F 是一个零特征域。则猜想 A对以下两种情形均不成立：Spin_{2n+1}和 Spin_{2n+2}，其中 $n = 7$取 8、9、10、13、14、15、16 （其中 $n = 8$、9、10、16 这些情形此前已为人所知）。

特别是，我们得到了目前已知最小的反例，它由 Spin_{15}给出。唯一尚未解决的更小奇自旋情形是 Spin_{13}。我们怀疑，该猜想的界限或许与这样一个事实有关：Spin_{13} 是作用于自旋表示的射影化、且具有开轨道的最大奇自旋群。因此，我们预期该猜想对 Spin_{13}, 成立，这将使我们的反例成为所有旋量群中可能的最小反例。我们还强调，本文给出的 Spin_{15} 反例最为复杂，它源自 CH_4, 中的挠元，见注 6.8。相比之下，其他所有已知反例——无论是文献中的，还是本文新给出的——都基于 CH_3中的挠元。

1.1. **方法概述**。 根据 [17, 定理 3。1], 猜想等价于 E/P的连通 K 理论的限制映射的单射性，其中 $P \subset G$ 是一个特殊抛物子群（关于连通 K 理论的回顾，参见 §2.2）。利用这一改述，我们证明如下结论（精确表述见命题 3.1）：若 A^* 是一个可特化为连通 K 理论的自由定向上同调理论，并且猜想 A 对 G成立，则有

$$\mathrm{Tor}_1^{A^*(F)}(\underline{A}^*(E/P), \mathbb{Z}[\beta]) = 0,$$

其中 $\underline{A}^*(E/P)$ 是 E/P 的限制映射的余核（见定义 2.1）。该方法也可 p-局部地应用于素数 p。取 A^* 为截断 Brown–Peterson 上同调 $\mathrm{BP}\langle 2\rangle^*$，其系数环为 $\mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2]$，则 Tor 群同构于 v_2-挠元子群，即 $\mathrm{BP}\langle 2\rangle^*(E/P)$ 的该子群，见例 3.6。因此，要否定关于 G 的猜想，只需在 $\mathrm{BP}\langle 2\rangle^*$-上同调（ G/P 的）中找到一个非有理元素，使其乘以 v_2 后为有理的。与先前的方法相比，本方法的优点在于所有

计算都在分裂形式的上同调中进行，而不是在一般扭曲版本中进行。

1.2.**有理元素的计算**。对于 $G = \mathrm{Spin}_{2n+1}$ 的情形，我们针对特殊抛物子群 $P_n \subset \mathrm{Spin}_{2n+1}$ 进行显式计算（单根的编号遵循布尔巴基的约定）。我们首先构造分裂极大正交格拉斯曼簇 $\mathrm{OGr}(n) = \mathrm{Spin}_{2n+1}/P_n$ 的代数配边环的乘法生成元与关系（见命题4.5）。为简化计算，我们采用截断 Brown–Peterson 上同调 BP 中关系的一个近似版本$\langle 2\rangle^*(\mathrm{OGr}(n))$（命题5.3）。有理元素的一组显式生成元见引理6.3。

由于其结构，对简化关系取模后的化简十分直接（反复应用这些关系，直到所有单项式都不含平方项）。我们编写了使用 Rust 和 Singular 计算机代数系统的程序来完成这项工作，从而能够非常明确地计算 BP $\langle 2\rangle^*(\mathrm{OGr}(n))$ 中适当次数的有理元素。这些程序已作为开源项目发布于 https://codeberg.org/alois3264/karpenkos-conjecture （镜像位于 https://github.com/alois31/karpenkos-conjecture）。由于这些程序在最有趣的情形下运行时间较长，其输出也已发布在 results 分支中。

分析计算结果后，我们在命题 $v_2$6.6中找到了 n =7、8、9、10、13对应的所需 -挠元。这就证明了这些 n取值下的定理 B。对于其余情形，我们给出关于 n 的归纳论证，但该论证仅适用于挠指数 $t(\mathrm{Spin}_{2n+1})$ 严格递增的情形；该挠指数由 Totaro 计算得出。 [27]

1.3. **致谢**。 这项工作的一部分最初收录于第三作者在第一作者指导下于圣彼得堡国立大学完成的硕士学位论文中。我们由衷感谢 Nikita Geldhauser，正是他后来建议第二作者利用计算机构造反例，从而促成了本文。我们还要感谢 Alexey Ananyevskiy、Nikita Geldhauser、Andrei Lavrenov 和 Maksim Zhykhovich 富有价值的讨论。

第一作者得到理论物理与数学促进基金会“BASIS”的资助。第二作者在攻读博士学位期间（目前仍在进行中）开展了这项研究，其博士学习部分由德意志民族学术基金会资助。第三作者的工作得到德国科学基金会研究资助 AN 1545/4-1 的支持。

2. Preliminaries

本节汇总我们在正文主要部分中所使用的、按照莱文–莫雷尔意义下的定向上同调理论的预备知识。全文始终在域 F 上工作，其中 F 具有零特征。

2.1. **定向上同调理论**。 莱文–莫雷尔意义下的一个定向上同调理论 （见 [20, 定义 1.1.2]）由一个反变函子 A^* （从光滑 F-簇范畴到交换分次环范畴）以及针对射影态射的推前映射构成。具体而言，对于光滑簇之间每个相对维数为 d 的射影态射 $f\colon Y \to X$，存在一个阿贝尔群同态 $f_*\colon A^*(Y) \to A^{*+d}(X)$。这些数据需满足若干公理，例如投影公式、同伦不变性和射影丛公式。对于光滑 F-簇之间的态射 $f\colon X \to Y$，相应的环映射 $A^*(Y) \to A^*(X)$ 称为沿 f 的拉回，记作 f^*。按照惯例稍作滥用记法，我们称 A^* 为一个定向上同调理论，而省略所选定的推前映射系。

我们称定向上同调理论 A^* 满足局部化公理，如果对任意光滑的 F-簇 X及其光滑闭子簇 $i\colon Z \hookrightarrow X$ 和开补集 $j\colon U \hookrightarrow X$，

序列

$$A^{*-d}(Z) \xrightarrow{i_*} A^*(X) \xrightarrow{j^*} A^*(U) \to 0$$

是正合的。请注意，有些作者将 A^* 推广到非光滑簇，并要求对任意子概形 Z，其局部化序列都是正合的（例如参见 [29, 定义 2。1]），但上述形式已足以满足我们的需要。

设 A^* 是一种定向上同调理论。于是可以使用格罗滕迪克方法 [10] 来定义向量丛 $E \to X$ 的陈类 $c_i^A(E) \in A^i(X)$。此外，还可以构造一个$\mathbb{Z}$分次的形式群律 F_A，其定义在 $A^*(F)$ 上，并满足

$$c_1^A(L \otimes M) = F_A(c_1^A(L), c_1^A(M)) \in A^1(X)$$

对于 X 上任意一对线丛 L，M，参见 [20, 引理 1.1.3]。这个形式群律包含了关于该理论 A^*的重要信息。

2.2.代数配边、布朗–彼得森上同调与连通 K 理论。回顾一下，莱文和莫雷尔构造了一种普适的定向上同调理论 Ω^* [20]，称为代数配边。该理论满足局部化公理，并且与 Ω^* 相关联的形式群律是普适的。特别地，系数环 $\Omega^*(F)$ 与拉扎德环 $\mathbb{L} \cong \mathbb{Z}[a_1, a_2, \dots]$ 同构，且 $\deg(a_i) = -i$。

给定一个由环同态$\mathbb{L} \to R$定义的 $\mathbb{Z}$ 分次（次数为 1 的齐次）形式群律，我们可以考虑具有此形式群律的*自由* 定向上同调理论，其定义为

$$A^*(-) := \Omega^*(-) \otimes_{\mathbb{L}} R$$

并配备显然的推前映射。任何此类理论都满足局部化公理。我们需要的一个特别有用的例子是关于素数 p 的布朗–彼得森上同调 $\mathrm{BP}^*(-)$。这是一种自由定向上同调理论，其形式群律是 [25, 定理 A2.1.25]中所述的普适p-典型形式群律，其系数环为

$$\mathrm{BP}^*(F) \cong \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \dots]$$

其中 $\deg(v_k) = 1 - p^k$。BP^* 的形式群律可以用其对数来描述，见附录 A。对于自然数 n，我们还考虑截断 *Brown–Peterson* 上同调$\mathrm{BP}\langle n\rangle^*(-$，它定义为 $\mathrm{BP}^*(-)$ 对由 v_k（其中 $k > n$）生成的理想取商。该理论也是一种自由定向上同调理论，其系数环同构于 $\mathbb{Z}_{(p)}[v_1, \dots, v_n]$。

我们使用的另一种定向理论是*连通 K 理论*CK^* [4]。设 X 是一个光滑的F-簇。采用同上文献中的记号，$\mathrm{CK}^i(X)$ 是群 $\mathrm{CK}^{i,\,-i}(X)$，其定义为

$$\mathrm{CK}^i(X) := \mathrm{Im}(\mathrm{K}_0(\mathcal{M}_i(X)) \to \mathrm{K}_0(\mathcal{M}_{i-1}(X))),$$

其中 $\mathcal{M}_i(X)$ 是 X 上支集余维数为 $\geq i$ 的凝聚层范畴。与 CK^* 相关联的形式群律是在多项式环上的乘法形式群律

$$\mathrm{CK}^*(F) \cong \mathbb{Z}[\beta]$$

其生成元为 β，次数为 -1。根据 [6, 注 5.6.2 和定理 6.3], ，连通 K 理论是自由的；也就是说，典范态射 $\Omega^* \to \mathrm{CK}^*$ 诱导出一个同构

$$\Omega^*(-) \otimes_{\mathbb{L}} \mathbb{Z}[\beta] \cong \mathrm{CK}^*(-)$$

在 F上的定向理论。最后，我们注意到Artin–Hasse指数给出了 p-局部乘法形式群律与 $F_{\mathrm{BP}\langle 1\rangle}$之间的同构。特别地，对于 $p = 2$，由 [29, 定理6.9]我们有分次环预层$\mathrm{BP}\langle 1\rangle^* \cong \mathrm{CK}^* \otimes \mathbb{Z}_{(2)}$ 的同构（注意前推是不同的），而对于奇素数 p，预层$\mathrm{CK}^* \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ 分裂为$\mathrm{BP}\langle 1\rangle^*$的 $p-1$ 个平移副本的直和。

2.3. 限制映射与（非）有理元素。 设 A^* 是 F 上的自由定向上同调理论，并设 L/F 是一个域扩张。则 $A^*(-\times_F L)$是一个新的定向理论，配备自然变换

$$\mathrm{res}^A_{L/F}\colon A^*(-)\to A^*(-\times_F L)$$

上同调理论之间。我们称此态射为标量限制，或简称为限制。取 F 的代数闭包 F。

定义 2.1。 设 X 是一个光滑的 F-簇。我们用 $\overline{A}^*(X)$ 表示沿扩张 F/F 的标量限制映射的像：

$$\overline{A}^*(X):=\mathrm{Im}(A^*(X)\xrightarrow{\mathrm{res}^A_{\overline{F}/F}}A^*(X_{\overline{F}})),$$

并称其为有理元素子环。我们还用 $\underline{A}^*(X)$ 表示同一个（限制）态射的余核，它是 $A^*(F)$-模：

$$\underline{A}^*(X):=\mathrm{Coker}(A^*(X)\xrightarrow{\mathrm{res}^A_{\overline{F}/F}}A^*(X_{\overline{F}})),$$

并称其为 $A^*(F)$-模的非有理元素。

注 2.2。 在 [19, 定义 1]中，非有理元素模定义为

$$A^*(X_{\overline{F}})\otimes_{A^*(X)}A^*(F)$$

而这些定义并不等价。事实上，上述张量积同构于由 $\mathrm{res}^A_{F/F}$ 到增广理想$A^*(X)^+$的限制之像所生成的理想的商，换言之，它是分次环态射（限制映射）的余核。特别地，它是一个 $A^*(F)$-代数，而我们的非有理元素模并不具有任何自然的环结构。

3. Consequences of the Karpenko conjecture

本节证明 Karpenko猜想的一些推论，并利用这些推论寻找新的反例。本节中，G 是域 k 上的一个分裂半单线性代数群，其特征为 0，且 $P\subset G$ 是一个特殊抛物子群。我们还固定一个泛型G-挠子 E（参见 [8, 第一章，第 §5]节），它定义在扩张域 F/k上。依照惯例，我们将 $(E/P)_F\cong(G/P)_F$记作 G/P。

命题 3.1. 设 A^* 是一个自由定向上同调理论，并且存在一个从环预层到连通 K 理论的态射 $A^*\to \mathrm{CK}^*$，使得对于任意光滑的 F-簇 X，我们有$A^*(X)\otimes_{A^*(F)}\mathbb{Z}[\beta]\cong\mathrm{CK}^*(X)$。若猜想 A 对 G成立，则

$$\mathrm{Tor}_1^{A^*(F)}(\underline{A}^*(E/P),\mathbb{Z}[\beta])=0.$$

证明。考虑限制映射 $\mathrm{res}^A_{F/F}$：$A^*(E/P)\to A^*(G/P)$。它给出了显然的短正合序列：关于 $A^*(F)$-模的

$$0\to\mathrm{Ker}(\mathrm{res}^A_{\overline{F}/F})\to A^*(E/P)\to\overline{A}^*(E/P)\to 0,$$

$$0\to\overline{A}^*(E/P)\to A^*(G/P)\to\underline{A}^*(E/P)\to 0.$$

应用$-\otimes_{A^*(F)}\mathbb{Z}[\beta]$并利用 $A^*(G/P)$是自由 $A^*(F)$-模这一事实，我们得到如下正合序列

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{res}^A_{\overline{F}/F})\otimes_{A^*(F)}\mathbb{Z}[\beta]\to\mathrm{CK}^*(E/P)\to\overline{A}^*(E/P)\otimes_{A^*(F)}\mathbb{Z}[\beta]\to 0,$$

$$0\to\mathrm{Tor}_1^{A^*(F)}(\underline{A}^*(E/P),\mathbb{Z}[\beta])\to\overline{A}^*(E/P)\otimes_{A^*(F)}\mathbb{Z}[\beta]\to\mathrm{CK}^*(G/P).$$

不难看出，限制映射$\mathrm{res}^{\mathrm{CK}}_{F/F}$可分解为该复合

$$\mathrm{CK}^*(E/P) \to \overline{A}^*(E/P) \otimes_{A^*(F)} \mathbb{Z}[\beta] \to \mathrm{CK}^*(G/P)$$

并且由猜想 A可知它是单射，见 [17, 定理 3。1]因此，第一个映射是单射，但根据上面的第一个正合序列，它也是满射。由此可知第二个态射也是单射，而所需的消失性结论由上面的第二个正合序列得出。□

注 3.2. 满足前一个命题假设的定向理论，一个显而易见的例子是代数配边 Ω^*。然而，计算群

$$\mathrm{Tor}^{\mathbb{L}}_1(\underline{\Omega}^*(E/P), \mathbb{Z}[\beta])$$

一般而言似乎很复杂。

矢木田猜想，限制映射 $\Omega^*(E/P) \to \Omega^*(G/P)$ 是单射 [31, 猜想 8。6]（他只对广义一般罗斯特动机的布朗–彼得森上同调提出此猜想，但利用 [24, 26] 和奎伦幂等元，可以很容易地推出上述形式。）据我们所知，此猜想仍未解决。我们声称以下条件等价：

(1) 对于 G，矢木田猜想成立，且 $\mathrm{Tor}^{\mathbb{L}}_1(\Omega^*(E/P)\ \mathbb{Z}[\beta])$ 消失。(2) 对于 G，Karpenko猜想成立。

假设 (1) 成立。$\mathrm{res}^{\Omega}_{F/F}$ 的单射性意味着存在如下 $\mathbb{L}$-模的短正合序列

$$0 \to \Omega^*(E/P) \xrightarrow{\mathrm{res}^{\Omega}_{F/F}} \Omega^*(G/P) \to \underline{\Omega}^*(E/P) \to 0,$$

它诱导出正合序列

$$0 \to \mathrm{Tor}^{\mathbb{L}}_1(\underline{\Omega}^*(E/P), \mathbb{Z}[\beta]) \to \mathrm{CK}^*(E/P) \xrightarrow{\mathrm{res}^{\mathrm{CK}}_{F/F}} \mathrm{CK}^*(G/P). \tag{3.3}$$

左端项根据假设消失。因此，限制映射 $\mathrm{res}^{\mathrm{CK}}_{F/F}$ 是单射，这等价于 Karpenko猜想。

反过来，Karpenko猜想蕴含矢木田猜想 [31, 引理 8。7] 而结论 (1) 可再次利用正合序列得出3.3 。

由于我们将要给出的一些计算在局部化到某个素数处时要容易得多，这主要是因为与代数配边相比，布朗–彼得森环的系数环中参数的次数更为有利，因此我们需要以下命题的 p-局部版本。

命题 3.4. 设 p 为一个素数，且设 A^* 为一个自由定向上同调理论，并存在一个从环预层到 p-局部连通 K 理论 $A^* \to \mathrm{CK}^* \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ 的态射，使得对任意光滑的 X，我们有 $A^*(X) \otimes_{A^*(F)} \mathbb{Z}_{(p)}[\beta] \cong \mathrm{CK}^*(X)$。$\otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. 如果猜想 A 对 G成立，则有

$$\mathrm{Tor}^{A^*(F)}_1(\underline{A}^*(E/P), \mathbb{Z}_{(p)}[\beta]) = 0.$$

证明。 论证与前一个命题中的相同。 □

备注 3.5. 由 [24, 26] 的主要结果可以推得， $p\mathrm{CH}^*(E/P)$ 的挠元只有在 G的挠素数处才可能非平凡；并且根据 [17, 定理 3.1] 的证明，$\mathrm{CK}^*(E/P)$ 也有同样的结论。因此，前一个命题只有在 p 是 G的挠素数时才有意义。事实上，利用命题6.4 可以直接看出，若 p 不是挠素数，那么$A^*(\underline{E}/P)$ 已经 $= 0$。

例 3.6. 我们这里的主要例子是 $A^* = \mathrm{BP}\langle 2\rangle^*$ 对于 $p = 2$ 的情形，其系数环由 $\mathbb{Z}_{(2)}[v_1, v_2]$ 给出。在此情形下，投影 $\mathrm{BP}\langle 2\rangle^*(F) \to \mathrm{CK}^*(F) \otimes \mathbb{Z}_{(2)} = \mathbb{Z}_{(2)}[\beta]$ 是对由 v_2 生成的主理想取商（元素 v_1 映到 β）。由此可得群

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_{(2)}[v_1,v_2]}(\underline{\mathrm{BP}\langle 2\rangle}^*(E/P), \mathbb{Z}_{(2)}[\beta])$$

同构于由 v_2-挠元构成的非有理元素群

$${}_{v_2}\underline{\mathrm{BP}\langle 2\rangle}^*(E/P) = \{\alpha \in \underline{\mathrm{BP}\langle 2\rangle}^*(E/P) \mid v_2 \cdot \alpha = 0\}.$$

具体而言，要在上述群中构造一个非平凡元素，只需在 $\mathrm{BP}\langle 2\rangle^*(G/P)$ 中找到一个非有理元素，使其 v_2 倍是有理的。

4. Algebraic cobordism of split maximal orthogonal Grassmannians

本节构造分裂极大正交格拉斯曼簇的代数配边环的乘法生成元。该构造是在周群中已知构造的基础上稍作修改而得 [7,§86]（原始参考文献为 [28,§2]）。我们需要以下技术性引理。

引理 4.1（参见 [7, 命题 58。10]）。设 $q : E \to X$ 是一个向量丛，且 $E' \subset E$ 是一个余秩为 r 的子丛。那么存在一个元素 $\alpha \in \Omega^0(\mathbb{P}(E'))$，使得

$$j_*(\alpha) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k c_k^{\Omega}(E/E')\xi^{r-k}, \tag{4.2}$$

其中 ξ 表示 $\mathcal{O}(1)$在 $\mathbb{P}(E)$上的第一陈类，而 j 是相应射影丛 $j : \mathbb{P}(E') \to \mathbb{P}(E)$的嵌入。

证明。利用 E/E' 的射影丛公式，我们有

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k c_k^{\Omega}(E/E')\tilde{\xi}^{r-k} = 0,$$

~在 $\Omega^*(\mathbb{P}(E/E'))$中，其中 ξ 是典范线丛在 $\mathbb{P}(E/E')$上的第一陈类。应用关于典范映射 $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(E') \to \mathbb{P}(E/E')$的拉回态射，可见公式 4.2 右端在 $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(E')$上的限制为平凡。结论由局部化序列的正合性得出

$$\Omega^0(\mathbb{P}(E')) \xrightarrow{j_*} \Omega^r(\mathbb{P}(E)) \to \Omega^r(\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(E')) \to 0.$$

□

记号 4.3。 设 V 是域 F 上的一个维数为 $2n+1$ 的向量空间，配有二次型 $q : V \to F$。考虑 V 中极大全各向同性子空间构成的簇，它是通常的格拉斯曼簇 $\mathrm{Gr}(n, V)$ 的闭子概形。我们称该簇为 q 的极大正交格拉斯曼簇，并记作 $\mathrm{OGr}(q)$。若 q 是分裂二次型 $q = q_s$，则简记为 $\mathrm{OGr}(n)$。该簇可识别为 Spin^{2n+1} 对抛物子群 P_n取商所得的空间。定义 $\mathrm{OGr}(n)$上的秩为 n的典范向量丛 $\mathcal{T}_n$ 为沿着典范丛的拉回 $\mathrm{OGr}(n) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(n, V)$。给定一条各向同性直线 $L \subset V$，可得到一个嵌入 $j_n : \mathrm{OGr}(n-1) \hookrightarrow \mathrm{OGr}(n)$。

记号 4.4. 我们将对应于分裂二次型 q_s 的射影二次超曲面记为 Q。选取 V的一个极大全各向同性子空间 U，并将其射影化在该二次超曲面中的嵌入记为 $i : \mathbb{P}(U) \to Q$。我们将相应的类记为 $l := i_*(1) \in \Omega^n(Q)$，它属于 Q 的代数配边环；并将典范丛的第一陈类记为 $h = c_1^{\Omega}(\mathcal{O}_Q(1)) \in \Omega^1(Q)$。

命题 4.5. 存在唯一的元素 $z_k \in \Omega^k(\mathrm{OGr}(n))$，对应于 $1 \leqslant k \leqslant n$，使得单项式 $z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_n^{i_n}$对应于 $i_k \in \{0,1\}$，并构成$\Omega^*(\mathrm{OGr}(n))$作为 $\mathbb{L}$上的自由基；而 $\mathcal{T}_n^\vee$的陈类计算如下（其中 $F_\Omega(t,t) =: \sum_{i=1}^\infty d_i t^i$）：

$$c_k^\Omega(\mathcal{T}_n^\vee) = (-1)^k \sum_{i=0}^{n-k} d_{i+1} z_{k+i}.$$

证明。由于 $\mathrm{OGr}(n) = \mathrm{Spin}_{2n+1}/P_n$，由 Bruhat 分解可知，$\mathrm{OGr}(n)$ 的 Chow 动机分裂为 Tate 直和项的直和。由 [30, 推论 2.8] 可知，Ω^*- 动机也分裂。因此，$\Omega^*(\mathrm{OGr}(n))$ 是一个秩为 $\mathbb{L}$的自由 2^n -模，并且我们有 K¨unneth 同构：

$$\Omega^*(Q) \otimes_{\mathbb{L}} \Omega^*(\mathrm{OGr}(n)) \xrightarrow{\simeq} \Omega^*(Q \times \mathrm{OGr}(n))$$

由 $x \otimes y \mapsto x \times y$ 给出。因此，环 $\Omega^*(Q \times \mathrm{OGr}(n))$ 是一个以 $\{h^i \times 1, lh^i \times 1\}$ 为基的自由 $\Omega^*(\mathrm{OGr}(n))$-模，其中 $0 \leq i \leq n-1$ 由 [9, §4.1] 给出。将引理 4.1 应用于 $\mathcal{T}_n \subset V\mathbb{1} = V \times \mathrm{OGr}(n)$，我们得到一个元素 $\alpha \in \Omega^0(\mathbb{P}(\mathcal{T}_n))$，它满足公式 4.2。现在，我们沿着闭嵌入 $k\colon \mathbb{P}(\mathcal{T}_n) \hookrightarrow Q \times \mathrm{OGr}(n)$ 对 α 取推前，得到一个分解

$$k_*(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} h^{n-i} \times z_i + \sum_{i=0}^{n-1} lh^i \times y_i.$$

我们断言，这些 z_i's 就是我们所需的元素。首先证明，z_i's 中的单项式是 $\Omega^*(\mathrm{OGr}(n))$ 的自由生成元。考虑定向上同调理论的典范态射 $\mathrm{pr}_{\mathrm{CH}}\colon \Omega^* \to \mathrm{CH}^*$，它与模去 $\mathbb{L}^{<0}\Omega^*$ 的商相同。按照 [7, pp. 357–358] 中的记号，我们有 $\mathrm{pr}_{\mathrm{CH}}(z_k) = e_k$。因此，由周环中相应的结论 [7, Theorem 86.12] 以及分次 Nakayama 引理 [9, Lemma 5.5] 可知，$i_k \in \{0,1\}$ 的单项式 $z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_n^{i_n}$ 构成 $\Omega^*(\mathrm{OGr}(n))$ 关于 $\mathbb{L}$ 的自由基。

为了计算 $c_k^\Omega(\mathcal{T}_n^\vee)$ 关于我们的基的表达式，我们用 $m\colon Q \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$ 表示显然的嵌入，并沿 $m \times \mathrm{id}^{\mathrm{OGr}(n)}$ 对 $k_*(\alpha)$ 取推前。利用投影公式，我们得到

$$(m \times \mathrm{id}_{\mathrm{OGr}(n)})_*(k_*(\alpha)) = \sum_{i=1}^{n} m_*(1) z_i \xi^{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1} m_*(l) y_i \xi^i,$$

其中 ξ 表示 $\mathcal{O}(1)$ 在 $\mathbb{P}(V)$ 上的第一陈类。由于 $m_*(l) = m_*(i_*(1))$ 是 $\mathbb{P}(V)$ 中 $(n-1)$ 维射影子空间的类，因此可得 $m_*(l) = \xi^{n+1}$。根据归一化恒等式（见 [22, §2.5]），有 $m_*(1) = c_1^\Omega(\mathcal{O}(2)) = F_\Omega(\xi, \xi) = \sum_{i \geqslant 1} d_i \xi^i$。注意，

$$(m \times \mathrm{id}_{\mathrm{OGr}(n)})_* \circ k_*(\alpha) = ((m \times \mathrm{id}_{\mathrm{OGr}(n)}) \circ k)_*(\alpha) = j_*(\alpha),$$

其中 $j\colon \mathbb{P}(\mathcal{T}_n) \to \mathbb{P}(V) \times \mathrm{OGr}(n)$ 是该射影子丛的嵌入。另一方面，α 的选取满足 $j_*(\alpha)$ 满足公式 4.2。综上所述，我们得到如下公式

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k c_k^\Omega(V\mathbb{1}/\mathcal{T}_n) \xi^{n+1-k} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \geqslant 1} d_j z_i \xi^{n+j-i} + \sum_{i=0}^{n-1} y_i \xi^{n+1+i}.$$

利用射影丛公式，我们可以比较系数，得到

$$c_k^\Omega(V\mathbb{1}/\mathcal{T}_n) = (-1)^k \sum_{i=0}^{n-k} d_{i+1} z_{k+i}$$

对于 $1 \leq k \leq n$ 和 $c_{n+1}^\Omega(V\mathbb{1}/\mathcal{T}_n) = 0$。剩下要证明的是，$V\mathbb{1}/\mathcal{T}_n$ 和$\mathcal{T}_n^\vee$的陈类相同。考虑向量丛的短正合序列

$$0 \to V\mathbb{1}/\mathcal{T}_n^\perp \to V\mathbb{1}/\mathcal{T}_n \to \mathcal{T}_n^\perp/\mathcal{T}_n \to 0.$$

由对偶性可得 $V\mathbb{1}/\mathcal{T}_n^{\perp} \cong \mathcal{T}_n^{\vee}$。线丛 $\mathcal{T}_n^{\perp}/\mathcal{T}_n$ 带有一个非退化二次型，因此与其对偶同构。由于 $\mathrm{Pic}(\mathrm{OGr}(n)) = \mathrm{CH}^1(\mathrm{OGr}(n))$ 是无挠的，我们得出 $\mathcal{T}_n^{\perp}/\mathcal{T}_n \cong \mathcal{O}_{\mathrm{OGr}(n)}$。因此，总陈类有如下等式： $c^{\Omega}(\mathcal{T}_n^{\vee}) = c^{\Omega}(V\mathbb{1}/\mathcal{T}_n^{\perp}) = c^{\Omega}(V\mathbb{1}/\mathcal{T}_n)$。

为证明唯一性，假设存在满足相同条件的元素 $z'_k \in \Omega^i(\mathrm{OGr}(n))$。我们要证明 $z_k = z'_k$ 对于 $1 \le k \le n$ 成立。对 k 使用降序归纳。假设对于 $k > k_0$，有 $z_k = z'_k$（对于 $k_0 = n$，该条件显然成立）。那么

$$(-1)^{k_0}(2z_{k_0} + d_2 z_{k_0+1} + \cdots + d_{n+1-k_0} z_n) = c^{\Omega}_{k_0}(\mathcal{T}_n^{\vee}) = (-1)^{k_0}(2z'_{k_0} + d_{k_0+1} z'_2 + \cdots + d_{n+1-k_0} z'_n).$$

最后一个和由归纳假设等于 $(-1)^{k_0}(2z'_{k_0} + d_{k_0+1} z_2 + \cdots + d_{n+1-k_0} z_n)$。因此，我们得到 $2z_{k_0} = 2z'_{k_0}$；由于 $\Omega^*(\mathrm{OGr}(n))$ 无挠，结论成立。□

注 4.6. 请注意，$\mathrm{pr}_{\mathrm{CH}}(c^{\Omega}_k(\mathcal{T}_n^{\vee})) = c^{\mathrm{CH}}_k(\mathcal{T}_n^{\vee}) = (-1)^k 2e_k$ 与以下内容相差一个符号： [7, 命题 86。13]原因在于陈类定义所采用的约定不同。

定理中构造的乘法生成元与分裂极大正交格拉斯曼流形的嵌入相容，具体如下。

引理 4.7.

$$j_n^*(z_k) = \begin{cases} z_k, & if\ k < n \\ 0, & it\ k = n \end{cases}$$

证明。证明与前一个命题中唯一性的证明类似。对 k 使用降序归纳。设对于 $k > k_0$，有 $j_n^*(z_k) = z_k$（此处令 $z_n \in \Omega^*(\mathrm{OGr}(n-1))$ 为零）。那么 $j_n^*(c^{\Omega}_{k_0}(\mathcal{T}_n^{\vee}))$ 等于

$$j_n^*((-1)^{k_0}(2z_{k_0} + d_{k_0+1} z_2 + \cdots + d_{n+1-k_0} z_n)) = (-1)^{k_0}(2j_n^*(z_{k_0}) + d_{k_0+1} z_2 + \cdots + d_{n+1-k_0} z_n).$$

另一方面，由于 $j_n^*(\mathcal{T}_n^{\vee}) \cong \mathcal{T}_{n-1}^{\vee} \oplus \mathcal{O}_{\mathrm{OGr}(n)}$，我们有

$$j_n^*(c^{\Omega}_{k_0}(\mathcal{T}_n^{\vee})) = c^{\Omega}_{k_0}(\mathcal{T}_{n-1}^{\vee}) = (-1)^{i_0}(2z_{k_0} + d_{k_0+1} z_2 + \cdots + d_{n-k_0} z_{n-1}).$$

It 可得 $2j_n^*(z_{k_0}) = 2z_{k_0}$。由于 $\Omega^*(\mathrm{OGr}(n-1))$ 无挠，证毕 . □

引理 4.8. 典范丛 $\mathcal{T}_n$ 的陈类及其对偶满足以下关系，其中 $1 \le k \le n$:

$$\sum_{i=0}^{2k} c^{\Omega}_i(\mathcal{T}_n) c^{\Omega}_{2k-i}(\mathcal{T}_n^{\vee}) = 0.$$

证明。 我们有总陈类的等式 $c^{\Omega}(\mathcal{T}_n^{\vee}) = c^{\Omega}(V\mathbb{1}/\mathcal{T}_n)$，由命题4.5的证明可得。所需关系由惠特尼公式推出。□

注 4.9。 在 Chow 环 $\mathrm{CH}^*(\mathrm{OGr}(n))$ 中，所有关系都可以通过将上述陈类之间的关系除以 4 得到。对于代数配边，理论上同样的策略可行，但我们没有对偶向量丛的陈类的闭式公式。

5. Approximate relations in Brown–Peterson cohomology

原则上，上一节的结果给出了 $\mathrm{BP}\langle 2\rangle^*(\mathrm{OGr}(n))$（事实上，对于任何自由上同调理论 A^*，也给出了 $A^*(\mathrm{OGr}(n))$）的显式计算，其表达式由乘法生成元 z_i 及它们之间的关系构成。实际上，我们已借助计算机对 $n \le 7$ 明确完成了这一计算。对于更大的 n，以下将给出一些有用的近似结果。

引理 5.1. 在 $\mathrm{BP}^*(\mathrm{OGr}(n))$ 中（因此，在 $\mathrm{BP}\langle 2\rangle^*(\mathrm{OGr}(n))$中也是如此），对所有 $1 \le k \le n$，以下关系成立：

$$\begin{aligned}(-1)^{k+1}(c_k^*)^2 &= \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i 2c^*_{i,2k-i} - v_1\sum_{i=0}^{k}(-1)^i P_{1,0}(k-i)c^*_{i,2k+1-i} + v_1^2\sum_{i=0}^{k}(-1)^i P_{2,0}(k-i)c^*_{i,2k+2-i}\\ &- v_1^3\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i P_{3,0}(k-i)c^*_{i,2k+3-i} - v_2\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i P_{0,1}(k-i)c^*_{i,2k+3-i}\\ &+ v_1^4\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i P_{4,0}(k-i)c^*_{i,2k+4-i} + v_1v_2\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i P_{1,1}(k-i)c^*_{i,2k+4-i} + O(v^5).\end{aligned}$$

所用的简记为 $c_I^* = \prod_{i\in I} c_i^{\mathrm{BP}}(\mathcal{T}_n^\vee)$，其中 $c_0^* = 1$ 和 $c_i^* = 0$ 表示 $i > n$；$O(v^5)$表示若干项之和，这些项都能被若干个次数为 ≤ -5 的 v_i 的幂的乘积整除（注意，每个 v_i 的次数为 $1-2^i$）。系数中出现的多项式为：

$$\begin{aligned}P_{1,0}(t) &= 2t+1,\\ P_{2,0}(t) &= t^2+2t+1,\\ P_{3,0}(t) &= \tfrac{2t^3+9t^2+25t+24}{6},\\ P_{0,1}(t) &= 2t+3,\\ P_{4,0}(t) &= \tfrac{t^4+8t^3+47t^2+124t+108}{12},\\ P_{1,1}(t) &= 2t^2+8t+8.\end{aligned}$$

证明。证明是直接计算，使用了已得到的陈类之间的关系，以及与形式群律 F_{BP}相关的形式逆幂级数的近似公式。详情如下。设

$$\begin{aligned}P &:= 1 - v_1c_1^* + v_1^2c_2^* - v_1^3(c^*_{1,1,1} - 3c^*_{1,2} + 4c_3^*) - v_2(c^*_{1,1,1} - 3c^*_{1,2} + 3c_3^*)\\ &- v_1^4(c^*_{1,1,1,1} - 5c^*_{1,1,2} + 4c^*_{2,2} + 5c^*_{1,3} - 9c_4^*) - v_1v_2(c^*_{1,1,1,1} - 5c^*_{1,1,2} + 4c^*_{2,2} + 5c^*_{1,3} - 8c_4^*).\end{aligned}$$

所选取的 P 值没有特殊意义，只是因为它可逆，且能尽可能简化接下来的计算。记 x_i 为向量丛$\mathcal{T}_n^\vee$在 BP上同调中的陈根，并记 $[-1]_F$ 为对应于 BP 形式群律的形式逆*。再设 $c_i = c_i^{\mathrm{BP}}(\mathcal{T}_n)$。利用附录 A中的形式逆近似式，我们得到：

$$(-1)^i c_i P = (-1)^i\sigma_i([-1]_F(x_1),\dots,[-1]_F(x_n))P = R(x_1,\dots,x_n)\cdot P + O(v^5)$$

对于该对称多项式

$$\begin{aligned}R &:= m_{1^i} + v_1m_{2,1^{i-1}} + v_1^2(m_{3,1^{i-1}} + m_{2^2,1^{i-2}}) + v_1^3(2m_{4,1^{i-1}} + m_{3,2,1^{i-2}} + m_{2^3,1^{i-3}}) + v_2m_{4,1^{i-1}}\\ &+ v_1^4(4m_{5,1^{i-1}} + 2m_{4,2,1^{i-2}} + m_{3^2,1^{i-2}} + m_{3,2^2,1^{i-3}} + m_{2^4,1^{i-4}}) + v_1v_2(3m_{5,1^{i-1}} + m_{4,2,1^{i-2}}),\end{aligned}$$

其中 m_λ 是与整数分拆 λ 相关联的单项式对称多项式（定义见附录 B）。利用附录 m_λ中以 σ_λ表示 m_λ的表达式进行化简，并代回 $c_i^* = \sigma_i$（x_1，……，x_n），可得元素（-1）^ic_iP具有如下近似形式

$$\begin{aligned}&c_i^* - v_1(i+1)c^*_{i+1} + v_1^2\tfrac{i^2+3i+2}{2}c^*_{i+2} - v_1^3(-c^*_{1,i+2} + \tfrac{i^3+6i^2+17i+24}{6}c^*_{i+3}) - v_2(-c^*_{1,i+2} + (i+3)c^*_{i+3})\\ &+v_1^4(-(i+2)c^*_{1,i+3} + \tfrac{i^4+10i^3+59i^2+194i+216}{24}c^*_{i+4}) + v_1v_2(-(i+2)c^*_{1,i+3} + (i^2+6i+8)c^*_{i+4}) + O(v^5).\end{aligned}$$

将陈类上的第 k 个关系（引理 4.8）乘以 P，并应用上述关于 $(-1)^i c_i P$ 的公式，我们得到表达式

$$
\begin{aligned}
(-1)^{k+1}(c_k^*)^2 = {} & Q_{0,0} - v_1 Q_{1,0} + v_1^2 Q_{2,0} - v_1^3(Q_{3,0} + T_{3,0}) - v_2(Q_{0,1} + T_{0,1}) \\
& + v_1^4(Q_{4,0} + T_{4,0}) + v_1 v_2(Q_{1,1} + T_{1,1}) + O(v^5).
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

这里 $Q_{s,t}$ 和 $T_{s,t}$ 是对偶陈类中的多项式，其中每个 $Q_{s,t}$ 由两个陈类的单项式组成，而每个 $T_{s,t}$ 由三个陈类的单项式组成。直接计算可得，$Q_{0,0}$, $Q_{1,0}$ 和 $Q_{0,1}$ 已经具有所需形式，而其余的 $Q_{s,t}$ 与 $P_{s,t}$ 之间的关系如下：

$$
\begin{aligned}
Q_{2,0} &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \left(P_{2,0}(k-i) + \tfrac{(k^2+k)}{2} \cdot 2 \right) c^*_{i,2k+2-i} + (-1)^{k-1} \tfrac{k^2+k}{2} (c^*_{k+1})^2 \\
Q_{3,0} &= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \left(P_{3,0}(k-i) + \tfrac{k^2+k}{2} P_{1,0}(k+1-i) \right) c^*_{i,2k+3-i} \\
Q_{4,0} &= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \left(P_{4,0}(k-i) + \tfrac{k^2+k}{2} P_{2,0}(k+1-i) + \tfrac{k^4+2k^3+23k^2+46k}{24} \cdot 2 \right) c^*_{i,2k+4-i} \\
&\quad + (-1)^{k-2} \tfrac{k^4+2k^3+23k^2+46k}{24} (c^*_{k+2})^2 \\
Q_{1,1} &= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \left(P_{1,1}(k-i) + (k^2+2k) \cdot 2 \right) c^*_{i,2k+4-i} + (-1)^{k-2}(k^2+2k)(c^*_{k+2})^2.
\end{aligned}
$$

反过来，三次多项式 $T_{s,t}$ 由以下公式给出

$$
\begin{aligned}
T_{3,0} = T_{0,1} &= -c_1^* \sum_{i=0}^{2k+2} (-1)^i c^*_{i,2k+2-i}, \\
T_{4,0} = T_{1,1} &= c_1^* \sum_{i=0}^{2k+3} (-1)^i (i-1) c^*_{i,2k+3-i}.
\end{aligned}
$$

现在我们继续证明所有不需要的项都会相消。将关系式 5.2 截断至 $O(v^2)$ 并重新排列，可得：

$$
\sum_{i=0}^{2k+2} (-1)^i c^*_{i,2k+2-i} + v_1 \sum_{i=0}^{2k+3} (-1)^i (i-1) c^*_{i,2k+3-i} = O(v^2)
$$

因此，$v_1^3(-T_{3,0} + v_1 T_{4,0})$ 和 $v_2(-T_{0,1} + v_1 T_{1,1})$ 均为 $O(v^5)$，关系式 5.2 中的所有“三次”项相消，只留下“二次”项。为完成证明，先截断至 $O(v^4)$，再代入 $(c^*_{k+1})^2$ 的表达式；由此可得所需关系成立至 $O(v^4)$。最后，代入 $(c^*_{k+1})^2$ 和 $(c^*_{k+2})^2$, 的表达式，即完成证明。□

现在我们转而讨论 z_i 之间的关系。根据命题 4.5，这些关系应当给出这些生成元的平方关于单项式 $z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_n^{i_n}$ 的表达式，其中 $i_j \in \{0,1\}$。下面我们利用前一个命题以及 c_i^* 的公式，给出这类关系的近似形式。

命题 5.3。 在 $\mathrm{BP}^*(\mathrm{OGr}(n))$ 中，元素 $(-1)^{k+1}z_k^2$ 对$k \geq 3$具有如下近似形式：

$$
\begin{aligned}
&z_{2k} + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i 2z_{i,2k-i} + v_1\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i R_{1,0}(k,i)z_{i,2k+1-i}\right) + v_1^2\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i R_{2,0}(k,i)z_{i,2k+2-i}\right)\\
&+v_1^3\left(\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i R_{3,0}(k,i)z_{i,2k+3-i}\right) + v_2\left(\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i R_{0,1}(k,i)z_{i,2k+3-i}\right)\\
&+v_1^4\left(\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i R_{4,0}(k,i)z_{i,2k+4-i}\right) + v_1v_2\left(\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i R_{1,1}(k,i)z_{i,2k+4-i}\right) + O(v^5),
\end{aligned}
$$

其中 $z_0 = 1$，整值函数 $R_{s,t}(k, i) = P_{s,t}(k-i)$ 对 $i > s + 3t$ 成立，例外值如下：

	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(0, 1)	(4, 0)	(1, 1)
0	k	$\frac{k^2+k-2}{2}$	$\frac{k^3+3k^2+2k-24}{6}$	$k-2$	$\frac{k^4+6k^3+23k^2-54k-504}{24}$	k^2-21
1	$2k-2$	k^2-k-2	$\frac{k^3-k-24}{3}$	$2k-6$	$\frac{k^4+2k^3+11k^2-86k-432}{12}$	$2k^2-4k-40$
2		k^2-2k-1	$\frac{2k^3-3k^2+k-54}{6}$	$2k-8$	$\frac{k^4+11k^2-108k-384}{12}$	$2k^2-7k-37$
3			$\frac{2k^3-9k^2+25k-72}{6}$	$2k-10$	$\frac{k^4-4k^3+29k^2-146k-288}{12}$	$2k^2-11k-28$
4					$\frac{k^4-8k^3+47k^2-124k-204}{12}$	$2k^2-8k-22$

TABLE 1. R_s的值，$t(k, i)$，对应于 $i \leq s + 3t$ 和 $3 \leq k \leq n$。
各列对应于数对 (s, t)，各行对应于 i的值。

此外，前两个生成元的平方为：

$$
\begin{aligned}
z_1^2 &= z_2 + v_1z_3 + v_1^2(2z_4 - 2z_{1,3}) + v_1^3(z_5 + 4z_{1,4} + z_{2,3}) + v_2(-z_5 + 4z_{1,4} + z_{2,3})\\
&\quad + v_1^4(16z_6 - 26z_{1,5}) + v_1v_2(17z_6 - 32z_{1,5} + 2z_{2,4}) + O(v^5),\\
-z_2^2 &= z_4 - 2z_{1,3} + v_1(2z_5 - 2z_{1,4} + z_{2,3}) + v_1^2(2z_6 - z_{2,4}) + v_1^3(6z_{1,6} - 8z_{2,5} + 7z_{3,4})\\
&\quad + v_2(2z_{1,6} - 4z_{2,5} + 6z_{3,4}) + v_1^4(7z_8 - 8z_{1,7} + 7z_{2,6} - 12z_{3,5})\\
&\quad + v_1v_2(13z_8 - 20z_{1,7} + 17z_{2,6} - 18z_{3,5}) + O(v^5).
\end{aligned}
$$

证明。 对于 $k > 0$，解方程 $c_k^* = (-1)^k \sum_{i=0}^{\infty} d_{i+1}z_{k+i}$ 可得：

$$
z'_k := z_k = (-1)^k \tfrac{1}{2}c_k^* + \tfrac{v_1}{2}z_{k+1} - v_1^2 z_{k+2} + (4v_1^3 + \tfrac{7}{2}v_2)z_{k+3} - (13v_1^4 + 15v_1v_2)z_{k+4} + O(v^5).
$$

对于 $k \leq 0$，我们将此公式作为 z'_k 的一个（递归）定义，其中 $c_i = 0$ 对于 $i < 0$。注意，尽管二者都有定义，$z'_0 \neq z_0 = 1$，而且即使对于 $k < 0$，z'_k 也都有定义且非零（不过目前尚不清楚它们是否具有自然的解释）。将此表达式代入项 $(-1)^{k+1}z_k'^2$ 中，利用多项式定理以及前一个引理中涉及 $(c_k^*)^2$ 的关系展开，除以 4，最后再次利用 $c_k^* = (-1)^k \sum_{i=0}^{\infty} d_{i+1}z'_{k+i}$ 展开后

得到：

$$
\begin{aligned}
(-1)^{k+1}z_k'^2 = &\sum_{i=-\infty}^{k-1} 2z'_{i,2k-i} + v_1 \sum_{i=-\infty}^{k} (-1)^i P_{1,0}(k-i) z'_{i,2k+1-i} \\
&+ v_1^2 \left(\sum_{i=-\infty}^{k} (-1)^i \left(P_{2,0}(k-i) + \tfrac{9}{4}\cdot 2 \right) z'_{i,2k+2-i} + (-1)^{k+1} \tfrac{9}{4} z_{k+1}'^2 \right) \\
&+ v_1^3 \sum_{i=-\infty}^{k+1} (-1)^i \left(P_{3,0}(k-i) + \tfrac{9}{4} P_{1,0}(k+1-i) \right) z'_{i,2k+3-i} \\
&+ v_2 \sum_{i=-\infty}^{k+1} (-1)^i P_{0,1}(k-i) z'_{i,2k+3-i} \\
&+ v_1^4 \left(\sum_{i=-\infty}^{k+1} (-1)^i \left(P_{4,0}(k-i) + \tfrac{9}{4} P_{2,0}(k+1-i) + 36\cdot 2 \right) z'_{i,2k+4-i} + (-1)^{k+2} 36 z_{k+2}'^2 \right) \\
&+ v_1 v_2 \left(\sum_{i=-\infty}^{k+1} (-1)^i \left(P_{1,1}(k-i) + \tfrac{75}{2}\cdot 2 \right) z'_{i,2k+4-i} + (-1)^{k+2} \tfrac{75}{2} z_{k+2}'^2 \right) + O(v^5).
\end{aligned}
$$

按照前一个引理证明中的类似策略，对 $z_{k+1}'^2$ 和 $z_{k+2}'^2$ 逐次截断，并通过代换进行“细化”，即可得到以下不再含有平方项的关系：

$$
\begin{aligned}
(-1)^{k+1}z_k'^2 = &\sum_{i=-\infty}^{k-1} 2z'_{i,2k-i} + v_1 \sum_{i=-\infty}^{k} (-1)^i P_{1,0}(k-i) z'_{i,2k+1-i} + v_1^2 \sum_{i=-\infty}^{k} (-1)^i P_{2,0}(k-i) z'_{i,2k+2-i} \\
&+ v_1^3 \sum_{i=-\infty}^{k+1} (-1)^i P_{3,0}(k-i) z'_{i,2k+3-i} + v_2 \sum_{i=-\infty}^{k+1} (-1)^i P_{0,1}(k-i) z'_{i,2k+3-i} \\
&+ v_1^4 \sum_{i=-\infty}^{k+1} (-1)^i P_{4,0}(k-i) z'_{i,2k+4-i} + v_1 v_2 \sum_{i=-\infty}^{k+1} (-1)^i P_{1,1}(k-i) z'_{i,2k+4-i} + O(v^5).
\end{aligned}
$$

注意，这个公式对所有正的 k 都成立，包括 $k=1$，2。现在我们消去无穷和。根据定义直接计算可得：

$$
\begin{aligned}
z'_0 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{v_1}{2} z_1 - v_1^2 z_2 + (4v_1^3 + \tfrac{7}{2} v_2) z_3 - (13 v_1^4 + 15 v_1 v_2) z_4 + O(v^5), \\
z'_{-1} &= \tfrac{v_1}{4} - \tfrac{3}{4} v_1^2 z_1 + (\tfrac{7}{2} v_1^3 + \tfrac{7}{2} v_2) z_2 - (11 v_1^4 + \tfrac{53}{4} v_1 v_2) z_3 + O(v^5), \\
z'_{-2} &= -\tfrac{3}{8} v_1^2 + (\tfrac{25}{8} v_1^3 + \tfrac{7}{2} v_2) z_1 - (\tfrac{41}{4} v_1^4 + \tfrac{53}{4} v_1 v_2) z_2 + O(v^5), \\
z'_{-3} &= (\tfrac{25}{16} v_1^3 + \tfrac{7}{4} v_2) - (\tfrac{139}{16} v_1^4 + \tfrac{23}{2} v_1 v_2) z_1 + O(v^5), \\
z'_{-4} &= -(\tfrac{139}{32} v_1^4 + \tfrac{23}{4} v_1 v_2) + O(v^5), \\
z'_i &= O(v^5) \quad \text{for} \quad i \le -5.
\end{aligned}
$$

代入这些关系后，立即可得所需的 $k \ge 3$ 结果。

对于 $k=1$,2，从 $O(v^2)$ 出发，会出现求和项 z_i^2 for $2 \le i \le 4$。再次利用已知关系和细化论证，即可得出此处所述结果。□

6. Search for irrational v_2-torsion

在本节中， $\tilde{q}_{\mathrm{gen}}$ 是一个维数为 $2n+1$、判别式平凡且克利福德不变量平凡的通用二次型。换言之，这是一个对应于通用 Spin_{2n+1}-挠子的二次型。

定义 6.1. 设 A^* 是满足 [5] 的全局前提的定向上同调理论；对我们的目的而言，只需知道 A^* 是自由理论且 $2 \in A^*(F)$ 正则即可。仍用 x_i 表示 $\mathrm{OGr}(n)$ 上向量丛 $\mathcal{T}_n^\vee$ 的陈根。与 [18,§8.2], 一样，用 y 表示满足 $2y = x_1 + \ldots + x_n$ 的特征。根据 [5, 定理 9.1] 以及显然的对称性，陈类 $c_1^A(y) \in A^1(\mathrm{Spin}_{2n+1}/B)$ 属于典范单射（投影的拉回） $A^*(\mathrm{OGr}(n)) \to A^*(\mathrm{Spin}_{2n+1}/B)$ 的像。将其唯一的原像定义为 $u \in A^1(\mathrm{OGr}(n))$。

根据定义，可以直接计算元素u的如下近似值。我们将在最后的计算中用到这一结果。

引理 6.2. *The following identity holds in* $\mathrm{BP}^1(\mathrm{OGr}(n))$（因此也在$\mathrm{BP}\langle 2\rangle^1(\mathrm{OGr}(n))$中成立）：

$$u = -z_1 - v_1^2 z_{1,2} + v_1^3(5z_4 - z_{1,3}) + v_2(4z_4 - z_{1,3}) + v_1^4(-4z_5 - 6z_{1,4} - z_{2,3}) + v_1 v_2(-6z_5 - 8z_{1,4} + z_{2,3}) + O(v^5).$$

证明。 为简洁起见，记 F 为 BP 的形式群律。根据 $u \in \mathrm{BP}^1(\mathrm{OGr}(n))$的定义，显然有 $[2]_F(u) = c_1(x_1) +_F \ldots +_F c_1(x_n)$。换言之，如果

$$l(t) = \sum_{i=1}^{\infty} l_i t^i \in \mathbb{Q}[v_1, v_2, \ldots][[t]]$$

是 BP^*的形式群律的对数，则有：

$$u = l^{-1}\left(\tfrac{l(c_1(x_1))+\ldots+l(c_1(x_n))}{2}\right) = l^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} l_i \sum_{j=1}^{n} c_1(x_j)^i\right)$$
$$= l^{-1}\left(\tfrac{1}{2}(l_1 p_1(c_1(x_1), \ldots, c_1(x_n)) + \ldots + l_5 p_5(c_1(x_1), \ldots, c_1(x_n)))\right) + O(v^5),$$

其中 p_i是幂和对称多项式。将这些对称多项式用初等对称多项式表示，可得

$$u = l^{-1}(\tfrac{1}{2}(l_1 c_1^* + \ldots + l_5((c_1^*)^5 - 5(c_1^*)^4 c_2^* + 5c_1^*(c_2^*)^2 + 5(c_1^*)^2 c_3^* - 5c_2^* c_3^* - 5c_1^* c_4^* + 5c_5^*)) + O(v^5).$$

代入对数和指数的显式表达式（见附录 A），并利用命题4.5和命题5.3对各项进行彻底化简，即可得到所述结果。具体而言，对于 $n = 5$，化简借助计算机完成（参见§1.2，其中有代码和输出文件的链接）；可以观察到，对于所有 $n \geq 5$，所得表达式必定相同。□

引理 6.3。 设 A^* 是一个自由定向上同调理论，且 n 是一个自然数。那么，有理元素 $A^*(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}})) \subset A^*(\mathrm{OGr}(n))$ 的$A^*(F)$子模由以下元素生成

$$u^k (c_2^*)^{i_2} (c_3^*)^{i_3} \ldots (c_n^*)^{i_n},$$

其中，指标遍历 $0 \leq i_j \leq 1$ 和 $0 \leq k \leq \dim(\mathrm{OGr}(n))$。

证明。 上面的所有元素显然都是有理元素。我们断言，它们的任意提升都生成$A^*(F)$-模 $A^*(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}}))$. 为证明这一点，只需考虑代数配边$A^* = \Omega^*$的情形。此外，众所周知，这些单项式的（提升的）像在投影 $\Omega^* \to \mathrm{CH}^*$ 下生成 $\mathrm{CH}^*(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}}))$，例如参见 [14, 命题 2。1]（注意，对于$A^* = \mathrm{CH}^*$，我们有 $u = -z_1$）。由分次 Nakayama 引理即可得到结论。□

为简化非有理元素的计算，我们需要以下这个广为人知的事实，但我们没有找到适用于如此一般情形的参考文献。

命题 6.4. 设 A^* 为自由定向上同调理论。用 t 表示 Spin^{2n+1} 的挠指数。则有理元素 $A^*(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}}))$ 的 $A^*(F)$-子模包含 $t\cdot A^*(\mathrm{OGr}(n))$。换言之，$\overline{t}$ 的任意倍数都是有理的。

证明。只需考虑代数配边 $A^*=\Omega^*$ 的情形，因为任何其他自由理论都是由它经张量积得到的。事实上，假设我们有 $\Omega^*(\mathrm{OGr}(n))$ 的子群包含关系 $t\cdot\Omega^*(\mathrm{OGr}(n))\subset\Omega^*(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}}))$。张量积 $-\otimes_{\mathbb{L}}A^*(F)$ 以及 $\Omega^*\to A^*$ 与限制的相容性给出映射

$$t\cdot A^*(\mathrm{OGr}(n))\to\overline{\Omega}^*(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}}))\otimes_{\mathbb{L}}A^*(F)\to\overline{A}^*(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}})).$$

由于复合映射与作为 $A^*(\mathrm{OGr}(n))$ 子集的显然包含映射相容，因此它必定是单射。因此，$t\cdot A^*(\mathrm{OGr}(n))$ 是 $A^*(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}}))$ 的子群，正如所要求的。

设 L/F 是一个完全分裂 $\tilde{q}_{\mathrm{gen}}$ 的有限域扩张。由此可得 $\Omega^*(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}})_L)=\Omega^*(\mathrm{OGr}(n))$。我们断言

$$\Omega^*(\mathrm{OGr}(n))\xrightarrow{N^{\Omega}_{L/F}}\Omega^*(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}}))\xrightarrow{\mathrm{res}^{\Omega}_{L/F}}\Omega^*(\mathrm{OGr}(n))$$

是乘以 $[L:F]$ 的映射：其中 $N^{\Omega}_{L/F}$ 是范数映射（沿基变换的推前）。设 $x\in\Omega^*(\mathrm{OGr}(n))$。我们有环预层的同构：

$$\Omega^*\otimes\mathbb{Q}\xrightarrow{\simeq}\mathrm{CH}^*[b_1,b_2,\dots]\otimes\mathbb{Q}\xleftarrow{\simeq}\mathrm{K}_0[b_1,b_2,\dots]\otimes\mathbb{Q},$$

其中第一个同构由泛形式群律的对数诱导（见[20, 定理 4.1。28]），第二个同构由陈特征诱导。此外，根据 Panin 的结果 [21], 限制映射 $\mathrm{res}^{\mathrm{K}_0}_{L/F}$ 对 $\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}})$ 是同构。因此，限制映射 $\mathrm{res}^{\Omega\otimes\mathbb{Q}}_{L/F}$ 也是双射。于是，存在 $z\in\Omega^*(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}}))$ 和 $n\in\mathbb{Z}$ 使得 $nx=\mathrm{res}^{\Omega}_{L/F}(z)$。现在考虑以下等式链：

$$n(\mathrm{res}^{\Omega}_{L/F}\circ N^{\Omega}_{L/F})(x)=(\mathrm{res}^{\Omega}_{L/F}\circ N^{\Omega}_{L/F}\circ\mathrm{res}^{\Omega}_{L/F})(z)=\mathrm{res}^{\Omega}_{L/F}([L:F]z)=n[L:F]x.$$

其中，第二个等式由投影公式得出（根据引理 2.3.5(1)，1 的范数等于 $[L:F]$ by[20, Lemma 2.3.5(1)]）。将等式两边分别除以 n，即可得出结论；这是可行的，因为 $\Omega^*(\mathrm{OGr}(n))$ 是无挠的。

该结论蕴含所求结果。事实上，对于二次型 $\tilde{q}_{\mathrm{gen}}$，指标 $\mathrm{ind}(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}}))$（它等于分裂 $\tilde{q}_{\mathrm{gen}}$ 的扩张次数 L/F 的最大公约数）与挠指数 t 相同，这是 Grothendieck 定理 [11, Th´eor`eme 2] 的结论。□

注 6.5. 上述命题适用于任意由内型半单群 G 作用的射影齐性簇 X。最后一个假设是结果 [21], 所必需的；该结果给出了对任意分裂域 L/F 的同构 $\mathrm{res}^{\mathrm{K}_0\otimes\mathbb{Q}}_{L/F}:\mathrm{K}_0(X)\otimes\mathbb{Q}\xrightarrow{\simeq}\mathrm{K}_0(X_L)\otimes\mathbb{Q}$。

命题 6.6. 以下元素在$\mathrm{BP}\langle 2\rangle^*(\mathrm{OGr}(n))$中不是有理的，但它们的 v_2 倍是：

$$\begin{aligned}4v_1z_{1,2,3,4,5,6,7}&\in\mathrm{BP}\langle 2\rangle^*(\mathrm{OGr}(7)),\\ 8z_{1,2,3,4,5,6,7,8}&\in\mathrm{BP}\langle 2\rangle^*(\mathrm{OGr}(8)),\\ 8z_{1,2,3,4,5,6,7,8,9}&\in\mathrm{BP}\langle 2\rangle^*(\mathrm{OGr}(9)),\\ 16z_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}&\in\mathrm{BP}\langle 2\rangle^*(\mathrm{OGr}(10)),\\ 64z_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13}&\in\mathrm{BP}\langle 2\rangle^*(\mathrm{OGr}(13)).\end{aligned}$$

证明. 根据命题 6.4，只需将所有计算模挠指数进行，而该挠指数由 [27, 定理 0.1] 确定，因为 $t = 2^{u(n)}$ 对于一个明确给定的数 $u(n)$（不要与我们的元素 u混淆）。具体而言，使用计算机（见§1.2；这里我们只需要近似计算），将所有形如 $u^k c_I^*$ 的元素用 z_I表示，得到：

$$\begin{aligned}
u^{15}c^*_{4,5} &\equiv 4v_1v_2z_{1,2,3,4,5,6,7} + O(v^5) \mod 8\mathrm{BP}\langle 2\rangle^*(\mathrm{OGr}(7)),\\
u^{15}c^*_{2,3,6,7} + 2u^{23}c^*_{4,6} &\equiv 8v_2z_{1,2,3,4,5,6,7,8} + O(v^5) \mod 16\mathrm{BP}\langle 2\rangle^*(\mathrm{OGr}(8)),\\
u^{31}c^*_{2,3,6} + v_1u^{31}c^*_{2,4,6} &\equiv 8v_2z_{1,2,3,4,5,6,7,8,9} + O(v^5) \mod 16\mathrm{BP}\langle 2\rangle^*(\mathrm{OGr}(9)),\\
u^{31}c^*_{4,8,9} &\equiv 16v_2z_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} + O(v^5) \mod 32\mathrm{BP}\langle 2\rangle^*(\mathrm{OGr}(10)),\\
u^{63}c^*_{4,9,12} &\equiv 64v_2z_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13} + O(v^5) \mod 128\mathrm{BP}\langle 2\rangle^*(\mathrm{OGr}(13)).
\end{aligned}$$

Fo由于维数原因， $O(v^5)$ 项必须为 0，因此这些等式严格成立 ly.

另一方面，在 $n = 7$ 的情形下，计算所得的表达式中没有一项能被 $4z_{1,2,3,4,5,6,7}$ 或 $4v_1z_{1,2,3,4,5,6,7}$ 整除，从而完成了这一 n 的证明。在其他情形下，只需注意到，若 $2^{u(n)-1}z_{1,\dots,n} \in \mathrm{BP}\langle 2\rangle^*(\mathrm{OGr}(n))$ 是有理的，那么 $\mathrm{H}^*(\mathrm{OGr}(n)) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}$ 中的情形也同样如此，这与 Grothendieck 定理 [11, Th´eor`eme 2] 矛盾。□

主定理中的情形 $n = 14$，15，16 将通过从 $n = 13$ 进行归纳法得出（同样的论证也适用于从 $n = 9$ 到 $n = 10$，但上面给出的反例看起来稍微更漂亮一些）。为此，我们还需要以下引理。

引理 6.7. 设 A^* 是一个自由定向上同调理论，且 $2 \in A^*(F)$ 是正则的。假设对于某个 $m \in \mathbb{Z}$，$mz_{1,\dots,n} \in A^*(\mathrm{OGr}(n))$ 是有理的。那么 $2mz_{1,\dots,n+1} \in A^*(\mathrm{OGr}(n+1))$ 是有理的。

证明。 利用表达式 $[2]_F(u) = c_1(x_1) +_F \dots +_F c_1(x_{n+1})$ 并采用引理4.7中的相同方法，可知 $j^*_{n+1}(u) = u \in A^1(\mathrm{OGr}(n))$。根据引理 6.3，对于某个（不一定唯一，因此我们固定一个选择）$a_{k,I} \in A^*(F)$，存在 $mz_{1,\dots,n} = \sum_{k,I} a_{k,I}u^k c^*_I$。于是下面的消失显而易见：

$$j^*_{n+1}\left(\sum_{k,I} a_{k,I}u^k c^*_I - mz_{1,\dots,n}\right) = 0.$$

根据引理 4.7 再次， j^*_{n+1} 的核由 z_{n+1}作为理想生成。因此，我们得到 :

$$\sum_{k,I} a_{k,I}u^k c^*_{I\cup\{n+1\}} - mz_{1,\dots,n}c^*_{n+1} \in (z_{n+1}c^*_{n+1}) \subseteq A^*(\mathrm{OGr}(n+1)).$$

由于$(c^*_{n+1})^2 = 0$ 且 $c^*_{n+1} = (-1)^{n+1}2z_{n+1}$，我们有 $z_{n+1}c^*_{n+1} = 0$。将这一观察与前面的公式结合起来，我们得到

$$0 = \sum_{k,I} a_{k,I}u^k c^*_{I\cup\{n+1\}} - mz_{1,\dots,n}c^*_{n+1} = \sum_{k,I} a_{k,I}u^k c^*_{I\cup\{n+1\}} - (-1)^{n+1}2mz_{1,\dots,n+1}.$$

这给出了将$2mz_{1,\dots,n+1}$ 表示为有理元素线性组合的表达式，正如所需。

□

定理B的证明。由 [2, 命题 216] ，只需考虑 Spin$_{2n+1}$的情形。对于$n = 7$、8、9、10、13，命题 6.6 给出了 Tor 群中的一个非平凡元素（见例3.6）

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_{(2)}[v_1,v_2]}(\underline{\mathrm{BP}\langle 2\rangle}^*(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}})), \mathbb{Z}_{(2)}[\beta]),$$

而前一个引理允许我们通过归纳法，对 $n = 14$、15、16 得出相同结论，因为在这些情形下 $u(n) = u(n-1) + 1$。由命题 3.4，此类元素的存在与该猜想相矛盾。□

注 6.8。由 命题 3.4 的证明中，我们构造了 核

$$\overline{\mathrm{BP}\langle 2\rangle}^*(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}})) \otimes_{\mathbb{Z}_{(2)}[v_1,v_2]} \mathbb{Z}_{(2)}[\beta] \to \mathrm{CK}^*(\mathrm{OGr}(n)),$$

它们由以下元素的 v_2倍给出，这些元素在命题 6.6 中陈述（注意，这些 v_2倍在张量积中非平凡，因为我们无法将 v_2 移至第二个因子）。这些元素在满同态下提升到 $\mathrm{CK}^*(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}}))$

$$\mathrm{CK}^*(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}})) \twoheadrightarrow \overline{\mathrm{BP}\langle 2\rangle}^*(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}})) \otimes_{\mathbb{Z}_{(2)}[v_1,v_2]} \mathbb{Z}_{(2)}[\beta]$$

给出 $\mathrm{CK}^*(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}}))$ 中的挠元。这些元素的次数在所有情况下均为 $\dim(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}})) - 3$，但 $n = 7$ 除外，此时其次数为 $\dim(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}})) - 4$。我们断言所得元素不能被 β 整除。事实上，对于 $n = 7$，若它能被 β 整除，则

$$4v_1v_2z_{1,2,3,4,5,6,7} \otimes 1 \in \overline{\mathrm{BP}\langle 2\rangle}^*(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}})) \otimes_{\mathbb{Z}_{(2)}[v_1,v_2]} \mathbb{Z}_{(2)}[\beta]$$

将被 β 整除，这是不可能的，因为 $4v_2z_{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7}$ 不是有理数，而且 $\mathrm{BP}\langle 2\rangle^*\overline{(\mathrm{OGr}}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}}))$ 没有 v_2-挠元。在其余情形中，相应的 v_2 倍显然无法被 v_1 整除，即使是在 $\mathrm{BP}\langle 2\rangle^*(\mathrm{OGr}(n))$ 中也是如此。

由 [17, 定理 3.1] 的断言和证明可知，这些元素在 $\mathrm{CH}^*(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}}))$ 中产生了相同次数的挠元，而这些挠元在 $\varphi_{\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}})}$ 下消失。特别地，对于 $n = 7$，构造出的挠元属于 $\mathrm{CH}_4(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}}))$；而对于所有其他 n，相应元素都属于 $\mathrm{CH}_3(\mathrm{OGr}(\tilde{q}_{\mathrm{gen}}))$。

Appendix A. The universal p-typical formal group law

布朗-彼得森上同调的形式群律可以通过其对数相当明确地给出。更确切地说，将其写作 $l(t) = \sum_{i\geq 0} l_i t^{p^i} \in \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \ldots][[t]]$，一种选取由 Hazewinkel 递归公式给出，见 [25,A2.2.1]

$$\begin{aligned} l_0 &= 1, \\ l_n &= p^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} l_i v_{n-i}^{p^i}. \end{aligned}$$

具体而言，对于 $p = 2$，幂级数及其复合逆（手工计算或使用 Sage 得出）如下：

$$\begin{aligned} l(t) &= t + \tfrac{1}{2}v_1t^2 + \left(\tfrac{1}{4}v_1^3 + \tfrac{1}{2}v_2\right)t^4 + O(v^5), \\ l^{-1}(t) &= t - \tfrac{1}{2}v_1t^2 + \tfrac{1}{2}v_1^2t^3 - \left(\tfrac{7}{8}v_1^3 + \tfrac{1}{2}v_2\right)t^4 + \left(\tfrac{13}{8}v_1^4 + \tfrac{3}{2}v_1v_2\right)t^5 + O(v^5). \end{aligned}$$

现在可以轻松计算形式群律的近似式 F_{BP}

$$\begin{aligned} x +_F y = l^{-1}(l(x) + l(y)) = x + y &- v_1xy + v_1^2(x^2y + xy^2) - v_1^3(2x^3y + 4x^2y^2 + 2xy^3) \\ &- v_2(2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3) + v_1^4(3x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 3xy^4) \\ &+ v_1v_2(4x^4y + 11x^3y^2 + 11x^2y^3 + 4xy^4) + O(v^5). \end{aligned}$$

在正文的主要部分，我们还使用逆幂级数的近似以及乘以 2 的形式乘法

$$\begin{aligned} [-1]_F(t) = l^{-1}(-l(t)) &= -t - v_1t^2 - v_1^2t^3 - (2v_1^3 + v_2)t^4 - (4v_1^4 + 3v_1v_2)t^5 + O(v^5), \\ [2]_F(t) = l^{-1}(2l(t)) &= 2t - v_1t^2 + 2v_1^2t^3 - (8v_1^3 + 7v_2)t^4 + (26v_1^4 + 30v_1v_2)t^5 + O(v^5). \end{aligned}$$

Appendix B. Some symmetric polynomial identities

考虑对称多项式环 $R = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$。用 $\sigma_k \in R$ 表示第 k 个初等对称多项式。众所周知，它们作为环自由生成 R。对于整数分拆 $\lambda = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_m)$，记作 $\sigma_\lambda = \prod_{i=1}^m \sigma_{\lambda_i} \in R$。此外，对于 λ，我们还引入单项式对称多项式 $m_\lambda = \sum_{g \in S_n/(S_n)_\lambda} x^{g\lambda} \in R$。我们还用 λ^k 表示 $k\lambda$ 的分拆 $(\lambda, \ldots\ldots, \lambda)$。

我们的目标是将某些单项式对称多项式表示为 σ_λ 的线性组合。以下恒等式将至多两个初等对称多项式或单项式对称多项式的乘积表示为单项式对称多项式的线性组合。这些恒等式可由定义轻易得到，且将会派上用场：

$$
\begin{aligned}
\sigma_i &= m_{1^i} \\
\sigma_{1,i} &= m_{2,1^{i-1}} + (i+1)m_{1^{i+1}} \\
\sigma_{2,i} &= m_{2^2,1^{i-2}} + im_{2,1^i} + \binom{i+2}{2} m_{1^{i+2}} \\
\sigma_{3,i} &= m_{2^3,1^{i-3}} + (i-1)m_{2^2,1^{i-1}} + \binom{i+1}{2} m_{2,1^{i+1}} + \binom{i+3}{3} m_{1^{i+3}} \\
\sigma_{4,i} &= m_{2^4,1^{i-4}} + (i-2)m_{2^3,1^{i-2}} + \binom{i}{2} m_{2^2,1^i} + \binom{i+2}{3} m_{2,1^{i+2}} + \binom{i+4}{4} m_{1^{i+4}} \\
\sigma_1 m_{2,1^{i-1}} &= m_{3,1^{i-1}} + 2m_{2^2,1^{i-2}} + im_{2,1^i} \\
\sigma_2 m_{2,1^{i-1}} &= m_{3,2,1^{i-2}} + im_{3,1^i} + 3m_{2^3,1^{i-3}} + 2(i-1)m_{2^2,1^{i-1}} + \binom{i+1}{2} m_{2,1^{i+1}} \\
\sigma_3 m_{2,1^{i-1}} &= m_{3,2^2,1^{i-3}} + (i-1)m_{3,2,1^{i-1}} + \binom{i+1}{2} m_{3,1^{i+1}} + 4m_{2^4,1^{i-4}} + 3(i-2)m_{2^3,1^{i-2}} \\
&\quad + 2\binom{i}{2} m_{2^2,1^i} + \binom{i+2}{3} m_{2,1^{i+2}} \\
\sigma_1 m_{3,1^{i-1}} &= m_{4,1^{i-1}} + m_{3,2,1^{i-2}} + im_{3,1^i} \\
\sigma_2 m_{3,1^{i-1}} &= m_{4,2,1^{i-2}} + im_{4,1^i} + m_{3,2^2,1^{i-3}} + (i-1)m_{3,2,1^{i-1}} + \binom{i+1}{2} m_{3,1^{i+1}} \\
\sigma_2 m_{2^2,1^{i+2}} &= m_{3^2,1^{i-2}} + 2m_{3,2_2,1^{i-3}} + (i-1)m_{3,2,1^{i-1}} + 6m_{2^4,1^{i-4}} + 3(i-2)m_{2^3,1^{i-2}} + \binom{i}{2} m_{2^2,1^i} \\
\sigma_1 m_{4,1^{i-1}} &= m_{5,1^{i-1}} + m_{4,2,1^{i-2}} + im_{4,1^i}
\end{aligned}
$$

我们现在可以按分次字典序求解这些关于单项式对称多项式的方程。基本思路是：先将首项单项式分解，使两个因子的指数都保持非递增，然后考察相应单项式对称多项式的乘积。我们已经知道如何用初等对称多项式表示这两个因子；对于乘积中出现的不需要的单项式，同样可以如此表示，因为按构造，该乘积的首项单项式正是所需的那一项。由此得到下列表达式（这两个因子始终是上述关系中给出正确首项单项式的唯一一对）：

$$
\begin{aligned}
m_{1^i} &= \sigma_i \\
m_{2,1^{i-1}} &= \sigma_{1,i} - (i+1)\sigma_{i+1} \\
m_{2^2,1^{i-2}} &= \sigma_{2,i} - i\sigma_{1,i+1} + \tfrac{i^2+i-2}{2}\sigma_{i+2} \\
m_{3,1^{i-1}} &= \sigma_{1^2,i} - 2\sigma_{2,i} - \sigma_{1,i+1} + (i+2)\sigma_{i+2}
\end{aligned}
$$

$$m_{2^3,1^{i-3}} = \sigma_{3,i} - (i-1)\sigma_{2,i+1} + \frac{i^2-i-2}{2}\sigma_{1,i+2} - \frac{i^3-7i+6}{6}\sigma_{i+3} m_{3,2,1^{i-2}} = \sigma_{1,2,i} - 3\sigma_{3,i} + (2i-2)\sigma_{2,i+1} - i\sigma_{1^2,i+1} + (2i+1)\sigma_{1,i+2} - (i^2+2i-3)\sigma_{i+3} m_{4,1^{i-1}} = \sigma_{1^3,i} - 3\sigma_{1,2,i} + 3\sigma_{3,i} - \sigma_{1^2,i+1} + 2\sigma_{2,i+1} + \sigma_{1,i+2} - (i+3)\sigma_{i+3} m_{2^4,1^{i-4}} = \sigma_{4,i} - (i-2)\sigma_{3,i+1} + \frac{i^2-3i}{2}\sigma_{2,i+2} - \frac{i^3-3i^2-4i+12}{6}\sigma_{1,i+3} + \frac{i^4-2i^3-13i^2+38i-24}{24}\sigma_{i+4} \quad m_{3,2^2,1^{i-3}} = \sigma_{1,3,i} - 4\sigma_{4,i} + (3i-6)\sigma_{3,i+1} - (i-1)\sigma_{1,2,i+1} - (i^2-4i)\sigma_{2,i+2} + \frac{i^2-i-2}{2}\sigma_{1^2,i+2} - \frac{3i^2-i-10}{2}\sigma_{1,i+3} + \frac{i^3+i^2-10i+8}{2}\sigma_{i+4} m_{3^2,1^{i-2}} = \sigma_{2^2,i} - 2\sigma_{1,3,i} + 2\sigma_{4,i} - \sigma_{1,2,i+1} + 3\sigma_{3,i+1} - (2i+1)\sigma_{2,i+2} + (i+1)\sigma_{1^2,i+2} - (i+1)\sigma_{1,i+3} + \frac{i^2+3i-4}{2}\sigma_{i+4} m_{4,2,1^{i-2}} = \sigma_{1^2,2,i} - 2\sigma_{2^2,i} - \sigma_{1,3,i} + 4\sigma_{4,i} + (3i-1)\sigma_{1,2,i+1} - i\sigma_{1^3,i+1} - (3i-3)\sigma_{3,i+1} - (2i-2)\sigma_{2,i+2} + i\sigma_{1^2,i+2} = (2i+2)\sigma_{1,i+3} + (i^2+3i-4)\sigma_{i+4} m_{5,1^{i-1}} = \sigma_{1^4,i} - 4\sigma_{1^2,2,i} + 4\sigma_{1,3,i} + 2\sigma_{2^2,i} - 4\sigma_{4,i} - \sigma_{1^3,i+1} + 3\sigma_{1,2,i+1} - 3\sigma_{3,i+1} + \sigma_{1^2,i+2} - 2\sigma_{2,i+2} - \sigma_{1,i+3} + (i+4)\sigma_{i+4}$$

References

[1] S. Baek and R. Devyatov, *Counter-examples to a conjecture of Karpenko for spin groups*,《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔），在线优先发表（2024 1 37 10 5802 3725 2），第 – 页。doi: . /aif. . , ,《数学档案》，

[2] S. Baek and N. Karpenko *Yagita's counter-examples and beyond* 61（2023），第1–17页。doi: 10 4310 2023 61 1 1 2 16 . /ARKIV. .v .n .a . , , , and L. Illusie,

[3] P. Berthelot A. Grothendieck *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie (SGA6): Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch* 225 ,《数学讲义》，第 1971 1 卷，施普林格出版社。，*Algebraic connective K-theory and the niveau filtration*,《纯粹与应用代数杂志》，

[4] S. Cai 212:7（2008），第1695– 1715 10 1016 2007 12 002 4 页。doi: . /j.jpaa. . . . , , and C. Zhong,

[5] B. Calmès K. Zainoulline *Equivariant oriented cohomology of flag varieties*,《数学文献》，增刊卷（2015 113 144 10 4171 7 6 14），第–页。doi: . /dms/ / . , *Connective algebraic K-theory*,《K理论杂

[6] S. Dai and M. Levine 志》，13:1（2014），第9–56页。doi: 10 1017 013012007 249 4 . /is jkt . , , and A. Merkurjev,

[7] R. Elman N. Karpenko *The Algebraic and Geometric Theory of Quadratic Forms*,《Colloquium Publications》第 58, 2008 7 8 9 卷，. , , , , and J.-P. Serre, *Cohomological invariants in Galois cohomology*,美国

[8] S. Garibaldi A. Merkurjev 数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2003 2 5 。, , A. Lavrenov, V. Petrov, and P. Sechin,

[9] N. Geldhauser *Morava K-theory of orthogonal groups and motives of projective quadrics* 446 2024 109657 10 1016 2024 109657 ,《数学进展》，（），第 8 页。doi: . /j.aim. . .

[10] A. Grothendieck *La théorie des classes de Chern* 86 1958 , ,《法国数学会通报》，（），第137–154页。doi:10.24033/bsmf.1501. 4

[11] , *Torsion homologique et sections rationnelles*,克劳德·谢瓦莱研讨会，3（1958），第1–29页。报告第 5 15 16 号。, , *Chow ring of generic flag varieties*,《数学新刊》，290（2017），第2641–2647页。doi:

[12] N. Karpenko 10 1002 201600529 2 . /mana. . , *Chow ring of generically twisted varieties of complete flags*,《数学进展》，306（2017），第789–806页。doi:

[13] 10 1016 2016 10 037 2 . /j.aim. . . . ,

[14] *On generic flag varieties of Spin*(11) *and Spin*(12),《数学手稿》，157（2018），第13–21页。doi: 10 1007 00229 017 0994 8 2 14 . /s - - - . , , *On generically split generic flag varieties*,《伦敦数学学会通报》，50（2018），第496–508页。doi:

[15] 10 1112 12161 2 . /blms. . , *A counter-example by Yagita*,《国际数学杂志》，31:3（2020），第1–10页。doi:10.1142/S0129167X20500251. 2

[16]

[17] , —A— *remark on connective K-theory*,《代数杂志》, 560（2020）, 第1211–1218页。doi:
10 1016 2020 06 015 2 6 17 . /j.jalgebra. . . . , , , *Canonical p-dimension of algebraic groups*,《数学进展》,
[18] N. A. Karpenko and A. S. Merkurjev
205（2006）, 第 410 433 10 1016 2005 07 013 14 –页。doi: . /j.aim. . . . ,
[19] A. Lavrenov and V. Petrov
Morava K-theory and Rost invariant,《国际数学研究通知》, 2025:8（2025）。rnaf
101 10 1093 101 5 . doi: . /imrn/rnaf . , *Algebraic Cobordism*,施普林格数学专著, 施普林格出版社·柏林
[20] M. Levine and F. Morel
海德堡, 2007 10 1007 3 540 36824 8 3 4 15 。doi: . / - - - . , , , ,《K理论》, 8:6（1994）,
[21] I. Panin *On the algebraic K-theory of twisted flag varieties*
第541–585页。doi: 10 1007 00961020 2 15 . /BF . , , *Oriented cohomology theories of algebraic varieties II*,《同调与
[22]
同伦应用》, 11:1（2009）, 第349– 405 10 4310 2009 11 1 14 8 页。doi: . /HHA. .V .N .A . ,
[23] V. Petrov
Chow Ring of Generic Maximal Orthogonal Grassmannians,《数学科学杂志》, 222（2017）, 第463–465页。
doi:10.1007/s10958-017-3317-4. 2[24] V. Petrov, N. Semenov, and K. Zainoulline, *J-invariant of linear algebraic groups*,
《高等师范学校科学年刊》 ´, : ( ), 第–页。doi: . /asens. . , ,美国数学学会切尔西出版社, 罗得岛州普罗维登斯,
2004 2 4 17 。第二版。 , ,
[26] N. Semenov and M. Zhykhovich
Integral motives and Maranda-type ,
theorems 363 2015 61 75 10 1007 00208 014 1158 8
relative Krull–Schmidt principle, ,《数学年刊》, （）, 第–页。doi: . /s - - - . 6
[27] B. Totaro *The torsion index of the spin groups* 129 2 2005 , ,《杜克数学杂志》, : ( ), 第249–290页。
doi:10.1215/S0012- 7094 05 12923 4 3 16 - - - . , , *On the Chow groups of Quadratic Grassmannians*,《数学文献》,
[28] A. Vishik
10（2005）, 第111–130页。doi:10.4171/dm/184. 7[29] , *Stable and Unstable operations in Algebraic Cobordism*,《高等师范学校
科学年刊》 ´, 52:3（2019）, 第561– 630 10 24033 2393 4 页。doi: . /asens. . ,
[30] A. Vishik and N. Yagita
Algebraic cobordisms of a Pfister quadric,《伦敦数学学会杂志》, 76:2（2007）, 第
586 604 10 1112 056 8 –页。doi: . /jlms/jdm . , *The gamma filtrations for the spin groups*,《小平数学
[31] N. Yagita
杂志》, 44:1（2021）, 第137–165页。doi: 10.2996/kmj44109. 2, 6St. Petersburg State University,
14th Line V.O. 29b, 199178 Saint Petersburg, Russia and PDMIRAS, Fontanka 27, 191023 Saint Petersburg,
Russia*Email address*: victorapetrov@googlemail.comLudwig-Maximilians-Universität München, Theresienstr. 39,
D-80333 München, Germany*Email address*: wohlschlager@math.lmu.deLudwig-Maximilians-Universität München,
Theresienstr. 39, D-80333 München, Germany*Email address*: zolotarev@math.lmu.de, zolotarev-egv@yandex.ru