arXiv:2602.07981v1 [math.FA] 8 Feb 2026

高斯共轭罗杰斯–谢泼德不等式

Emanuel Milman*、Shohei Nakamura† 和Hiroshi Tsuji‡

摘要

我们将关于勒贝格测度的罗杰斯–谢泼德不等式与Royen 高斯相关不等式融合起来，同时将二者推广为一个关于 $\mathbb{R}^n$上高斯测度 γ 的统一尖锐不等式，其表述为

$$\gamma(K)\gamma(L) \leq \gamma(K \cap L)\gamma(K + L)$$

只要 K 与 L 是 $\mathbb{R}^n$中关于原点对称的凸集。这证实了M. Tehranchi [38]的一个猜想。事实上，我们证明：只要 K 与 L 的高斯重心位于原点，该不等式仍然成立，并刻画了等号情形。经过重新缩放后，这也给出了如下关于（勒贝格）重心位于原点的凸集的新不等式：

$$|K||L| \leq |K \cap L||K + L|;$$

这可视为Spingarn 的推广（将上文中的 $K + L$ 替换为 $K - L$ ）所对应的罗杰斯–谢泼德不等式的共轭对应形式。我们还推导了由V. Milman 和 Pajor给出的一个高斯不等式的另一种共轭形式，以及若干推广。我们的主要工具是一个关于中心化对数凹函数的新的高斯正向–反向Brascamp–Lieb不等式，其本身亦具有独立意义，并且关键地适用于退化的高斯协方差。

1 引言

令 K， L 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的两个具有非空内部的凸集。它们的闵可夫斯基和记为 $K + L = \{x + y : \ x \in K, \ y \in L\}$。给定 $\mathbb{R}^n$ 上的测度 μ，且满足 $\int_K |x| \, d\mu(x) \in (0, \ \infty)$，则 K的 μ-重心定义为 $\mu^{-1}(K) \int_K \vec{x} d\mu(x)$；省略 μ时，我们指的就是勒贝格重心。 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格测度记为 $|\cdot| = |\cdot|_n$， $\mathbb{R}^n$ 上的标准高斯概率测度记为 $\gamma = \gamma^n$。

*以色列理工学院数学系，海法 32000，以色列。电子邮箱：emil- man@tx.technion.ac.il。

†伯明翰大学数学学院，沃森大楼，埃奇巴斯顿，伯明翰，B15 2TT，英格兰。电子邮箱：s.nakamura@bham.ac.uk。

‡东京科学大学数学系，2-12-1 Ookayama，目黑区，东京 152-8551，日本。电子邮箱：tsujihiroshi@math.sci.isct.ac.jp。2020年数学主题分类：52A40、60E15、60G15。关键词：高斯相关不等式、罗杰斯–谢泼德不等式、Milman–Pajor 不等式、正向-反向布拉斯坎普-利布不等式、中心化对数凹函数。这些研究成果是欧洲研究理事会（ERC）资助项目的一部分，资助来自欧盟“地平线2020”研究与创新计划（资助协议编号：101001677）；此外，本研究也获得日本学术振兴会科学研究费助成事业项目资助，项目编号为24KJ0030 （ Tsuji ）。

1.1 罗杰斯–谢泼德–斯平加恩不等式

V. Milman 和 Pajor [30, 推论 3]证明，只要 K， L 的高斯重心位于原点，那么对所有 $a^2+b^2=1$:

$$\gamma(K)\gamma(L) \le \gamma\left(\frac{1}{b}K \cap \frac{1}{a}L\right)\gamma\left(aK-bL\right); \tag{1.1}$$

当 $K=-K$ 和 $L=-L$ 关于原点对称且 $a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，Schecthman、Schlumprecht 和 Zinn 此前已在 [36, 命题 3] 中注意到这一点。将此应用于λK 和 λL，并令 $\lambda \to 0$ 取极限，Milman–Pajor 注意到了以下结论:

定理 (罗杰斯–谢泼德–斯平加恩不等式（RSSI）)。设 K、L 是 $\mathbb{R}^n$ 中具有非空内部且重心位于原点的有界凸集。则:

$$|K||L| \le |K\cap L||K-L|. \tag{1.2}$$

为说明我们采用这一名称的原因，有必要回顾一些历史。Rogers and Shephard 在20世纪50年代研究了乘积 $|K\cap L||K-L|$ [34], ，并得到了与之互补的紧上界

$$|K\cap L||K-L| \le \binom{2n}{n}|K||L|. \tag{1.3}$$

然而，他们的方法（基于布伦–明可夫斯基不等式）很容易在$K=-K$ 和 $L=-L$ 关于原点对称时推出 (1.2)，因此 (1.2) 的关于原点对称情形通常归功于他们（例如参见 [30, 推论 3] 后的注释 (1)）。更一般地，给定一个凸集 $C\subset\mathbb{R}^N$，Rogers and Shephard 证明，对于任意 k 维线性子空间 F,

$$|C\cap F|_k|P_{F^\perp}C|_{N-k} \le \binom{N}{k}|C|_N, \tag{1.4}$$

其中 $P_{F^\perp}$ 表示到 F 的正交子空间上的正交投影。当 $C=-C$ 关于原点对称时，他们的方法可直接得到:

$$|C|_N \le |C\cap F|_k|P_{F^\perp}C|_{N-k}. \tag{1.5}$$

(1.5) 中的对称性假设由 Spingarn [37] 放宽为要求 C 的重心位于原点。利用 $C=K\times L\subset\mathbb{R}^{2n}$，当 K， L 关于原点对称且 $F=\{(y,\ y):\ y\in\mathbb{R}^n\}$ 时，可分别由 (1.5) 和 (1.4) 轻易得到 (1.2) 和 (1.3)（稍作调整也可得到 (1.1)）。类似地，Spingarn 的放宽条件立即推出了凸集 K， L 在两个重心都位于原点时满足 (1.2)。因此，我们将 (1.2) 称为罗杰斯–谢泼德–斯平加恩不等式。

1.2 高斯相关不等式

另一方面，高斯相关不等式在历经数十年悬而未决后，直到 2014年 才由 Royen 证明 [35]（参见 [26]）；此前，Pitt 已研究过二维情形 [33]。该不等式最初是一个猜想，最终由 Royen 针对

关于原点对称的凸集 $K = -K$ 和 $L = -L$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的情形得到证明（另见 [29]，其中给出了另一种证明），但 Nakamura 和 Tsuji 最近将其扩展 [31] 到 K 和L 的高斯重心位于原点的情形，并刻画了等号情形（更多扩展见 [31] ）：

定理 （高斯相关不等式（GCI） [35, 29, 31]）。 设 K、$L \subset \mathbb{R}^n$ 为具有非空内部且高斯重心位于原点的凸集。则：

$$\gamma(K)\gamma(L) \leq \gamma(K \cap L), \tag{1.6}$$

等号成立当且仅当

$$K = K_0 \times E^{\perp}, \quad L = E \times L_0 \quad up\ to\ null\text{-}sets, \tag{1.7}$$

存在某个线性子空间 $E \subset \mathbb{R}^n$ 以及凸集 $K_0 \subset E$ 和 $L_0 \subset E^{\perp}$。

1.3 高斯函数共轭罗杰斯–谢泼德不等式

我们工作的主要结果是以下定理，它融合了（1.2）和（1.6）.

定理 1.1 （高斯共轭Rogers–Shephard不等式（GCRSI））。 令 K 和 $L \subset \mathbb{R}^n$ 表示具有非空内部且高斯重心位于原点的凸集。则：

$$\gamma(K)\gamma(L) \leq \gamma(K \cap L)\gamma(K + L), \tag{1.8}$$

当且仅当 *(1.7)* 成立时等号成立。

当 $K = -K$ 和 $L = -L$ 关于原点对称时，不等式 (1.8) 由 M. Tehranchi [38] 猜想为高斯相关不等式（GCI）(1.6) 的一种可能强化（因为 $\gamma（K + L） \leq 1$）。特别地，(1.8) 导出以下稳定性估计：

$$\gamma(K \cap L) \leq (1 + \varepsilon)\gamma(K)\gamma(L) \quad \Rightarrow \quad \gamma(K + L) \geq \frac{1}{1 + \varepsilon},$$

这给出了 $K + L$ 与整个 $\mathbb{R}^n$ 相距多远的某种度量，这正是 $\varepsilon = 0$ 时等号情形所要求的。

此外，将 K，L 缩放 $\lambda > 0$ 倍并令 $\lambda \to 0$，(1.8) 立即恢复罗杰斯–谢泼德–斯平加恩不等式 (1.2)，其中 K 的（勒贝格）重心位于原点且 $L = -L$ 关于原点对称。然而，当 L 不关于原点对称时，我们得到以下看似新颖的不等式：

推论1.2 （共轭 Rogers–Shephard–Spingarn 不等式（CRSSI））。 设 $K, L \subset \mathbb{R}^n$为具有非空内部且重心位于原点的有界凸集。则：

$$|K||L| \leq |K \cap L||K + L|. \tag{1.9}$$

鉴于上文中 $K + L$ 项与出现在(1.2)中的 $K - L$ 项之间的符号差异，我们将(1.9)称为共轭 Rogers–Shephard–Spingarn 不等式（CRSSI）。通过取 $L = \lambda K$ 并令 $\lambda \to 0$ 或 $\lambda \to \infty$，显然(1.2)与(1.9)中的常数1均无法改进，但这两个不等式似乎都取不到等号。

1.4 对数超模性是自然的

从某种意义上说，GCRSI解决了高斯相关不等式的一个令人困扰的特征——为什么测度在(1.6)的一侧出现两次，而在另一侧只出现一次？显然，这使得当集合 K, L 变小时，高斯相关不等式失去了效用；尤其是由于不等式两侧的数量级不同，在缩放极限中没有任何内容得以保留。

相比之下，GCRSI 没有这些限制，因为在不等式 (1.8) 的两边都出现了高斯测度，因此或许更自然、更根本。它可以看作是高斯测度相对于关于原点对称凸集半环上的交集和闵可夫斯基求和运算所具有的一种对数超模性。

1.5 先前结果

在 [38], Tehranchi 建立了以下不等式:

$$\gamma(K)\gamma(L) \leq (1-s)^{-\frac{n}{2}} \gamma\left(\sqrt{\frac{2(1-s)}{1+t}}(K \cap L)\right) \gamma\left(\sqrt{\frac{1-s}{2(1-t)}}(K+L)\right),$$

对于所有 $0 \leq s \leq t^2 < 1$ 以及关于原点对称的凸集 K， $L \subset \mathbb{R}^n$。特别地，令 $s = 0$，他得到了:

$$\gamma(K)\gamma(L) \leq \gamma\left(\sqrt{\frac{2}{1+t}}(K \cap L)\right) \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{2(1-t)}}(K+L)\right),$$

当 $t = 0$ 时，该结果插值于 (1.1)；当 $t \nearrow 1$时，则插值于高斯相关不等式 (1.6)。此外，利用$s = \frac{1}{5}$ 和$t = \frac{3}{5}$ 可得:

$$\gamma(K)\gamma(L) \leq \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \gamma(K \cap L)\gamma(K+L),$$

从而证实了 Tehranchi 的猜想：对于所有关于原点对称的凸集 K， L ， GCRSI (1.8) 均成立，误差至多为维数 n 的指数常数。

Assouline、Chor 和 Sadovsky 最近也在 [2] 中研究了 Tehranchi 的猜想。这些作者证明，当 K， L 均为无条件凸集时，也就是说，它们在关于坐标超平面 $\{x_i = 0\}_{i=1,\dots,n}$ 的反射下保持不变时，猜想成立。他们还考察了该猜想的一个更强版本，其中 (1.8) 中的 $K+L$ 被较小的凸包 conv($K \cup L$) 取代，并通过 [2, Example 14] 证明，该版本并不成立，即使对于 $\mathbb{R}^2$ 中的（无条件）矩形集也是如此。然而，当其中一个集合是对称薄片 $\{|x_1| \leq a\}$，另一个是一般的关于原点对称凸集 [2] 时，这个更强版本确实成立；在此情形下，通常的 GCI 是 Khatri [24] 和 ˇSid´ak [40] 的经典结果。

1.6 Milman–Pajor 式推广与开放问题

我们的分析可以推广为以下结果。

定理 1.3。 设 K、$L \subset \mathbb{R}^n$ 为具有非空内部且高斯重心位于原点的凸集。则对于所有满足 $|a+b| \geq 1$ 的 $|a|$、$|b| \geq 1$，

$$\gamma(K)\gamma(L) \leq \gamma(K \cap L)\gamma(aK + bL), \tag{1.10}$$

当且仅当满足 *(1.7)* 时，$|a+b| > 1$ 取等号。

由于 K，L 在包含关系下随缩放单调变化，且高斯测度关于原点反射不变，因此，上述仅有两种值得关注的情形（其他情形均可由此推出）：

(1) $a = b = 1$，得到 GCRSI (1.8)。

(2) $a = 2$ 和 $b = -1$；一般而言（对于非关于原点对称的 L），它与 (1.8) 不可比较；若 $a > 2$，我们还可得到等号情形。

若能得到 $a = 1$ 和 $b = -1$ 的情形，将会非常有意义，因为这将在缩放极限下得到 RSSI (1.2)，而非其共轭形式 (1.9)。遗憾的是，我们的证明在这种情形下行不通，因为我们将问题归结为某个高斯饱和充分条件，而事实证明该条件并不成立。因此，我们将此情形留作一个有趣的开放问题：在定理 1.3 的假设下，是否有

$$\gamma(K)\gamma(L) \leq \gamma(K \cap L)\gamma(K - L)\,? \tag{1.11}$$

我们还可以得到（1.1）的以下共轭版本。

定理 1.4（共轭米尔曼–帕约不等式（CMPI））。 设 $K, L \subset \mathbb{R}^n$ 为具有非空内部且高斯重心位于原点的凸集。则对所有满足 $a^2 + b^2 = 1$ 的 $a, b \in \mathbb{R}$，

$$\gamma(K)\gamma(L) \leq \gamma\left(\frac{1}{b}K \cap \frac{1}{a}L\right)\gamma(aK + bL), \tag{1.12}$$

当且仅当 $K = L = \mathbb{R}^n$ 时，$a, b \neq 0$ 中取等号。

更一般地，我们提出以下问题：

问题。 刻画哪些（a, b）使得对于所有上述 K, L，*(1.12)* 均成立 .

It 不难证明（见第 8 节），任何满足 (1.12) 的（a，b）都必须满足 ：

$$|a| \leq 1\ ,\ |b| \leq 1\ ,\ |a| + |b| \geq 1.$$

我们能够证明定理 1.4 的以下推广（当特化到 $a = b = 1$ 的情形时，它包含 GCRSI (1.8)）。

定理 1.5（广义共轭 Milman–Pajor 不等式（GCMPI））。 对于上述所有 K、L，只要（a、b）属于以下范围，不等式 *(1.12)* 均成立：

$$|a| \leq 1\ ,\ |b| \leq 1\ ,\ 3\min(a^2, b^2) + \max(a^2, b^2) \geq 1.$$

此外，给定 (a, b) 处于此范围内：

(1) 若 $0 < |a| < |b| = 1$，则当且仅当 $L = \mathbb{R}^n$ 时，*(1.12)* 中取等号。*(2)* 若 $0 < |b| < |a| = 1$，则当且仅当 $K = \mathbb{R}^n$ 时，*(1.12)* 中取等号。*(3)* 若 $\max(|a|, |b|) < 1$，则当且仅当 $K = L = \mathbb{R}$ 时，*(1.12)* 中取等号

^{n}.

特别是，对于 $|a| = |b|$ 的情形，我们完整地解决了刻画问题：

推论 1.6。对于上述所有 K、L，当 $|a| = |b| = \lambda$ 时，不等式 *(1.12)* 成立当且仅当 $\lambda \in [1/2, 1]$。注意，$\lambda = 1$ 的情形对应 *GCRSI (1.8)*，而 $\lambda = 1/\sqrt{2}$ 的情形对应 *CMPI (1.12)*。特别地，当 $\lambda = 1/2$ 时，我们有：

$$\gamma(K)\gamma(L) \le \gamma\left(2(K \cap L)\right)\gamma\left(\frac{1}{2}(K + L)\right),$$

等号成立当且仅当 $K = L = \mathbb{R}^n$。

在第 8 节中，我们将定理 1.3 和定理 1.5 合并为一个统一表述（见图 8.1），并说明为何当 (1.12) 中的 $aK + bL$ 被替换为 (1.11) 中的 $aK - bL$ 时，高斯饱和充分条件必然失效；唯一的例外恰恰是 $a^2 + b^2 = 1$，如 Milman–Pajor 不等式 (1.1) 所示。

注 1.7。通过将 K，L 按 $\lambda > 0$ 的倍数进行缩放，并令 $\lambda \to 0$，可以为所有具有非空内部且勒贝格重心位于原点的有界凸集K，$L \subset \mathbb{R}^n$，得到相对于 γ的勒贝格测度的 (1.10) 和 (1.12) 的类比形式。然而，由于勒贝格测度的齐次性和单调性，唯一仍然有意义的两种情形是 (1.2) 和 (1.9)。请注意，在这一极限过程中，等号情形会丢失。

另一个方向是尝试得到 Rogers–Shephard 上界 (1.3) 的高斯类比，它将作为 GCRSI (1.8) 的反向对应形式。然而，任何如下形式的不等式：

$$\gamma(K \cap L)\gamma(C_1(K + L)) \le C_2\gamma(C_3K)\gamma(C_3L),$$

在 $\mathbb{R}^2$ 中，对于所有 $C_1 > 0$ 和 C_2，$C_3 \ge 1$，该不等式必然已经是错误的。为说明这一点，只需取$K = \{|x_1| \le a\}$ 和 $L = U_\theta(K)$，其中 U_θ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的旋转，旋转角度为 θ 度。对于所有 $\theta > 0$，$K + U_\theta(K) = \mathbb{R}^2$，而当 $\theta \to 0$趋于 $\theta \to 0$时，$\gamma(K \cap U_\theta(K)) \to \gamma(K)$。因此，选取足够小的 $a > 0$，使得 $\gamma(C_3K) < \frac{1}{C_2C_3}$，由于 $\gamma(C_3K)\gamma(C_3) \le \gamma(K)$，上述反向形式对于足够小的 $\theta > 0$必然失败。

因此，是否存在一种合理的 GCRSI 逆形式，并能在缩放极限下得出有意义的不等式，这个问题仍有待探讨。

1.7 泛函表述

虽然 Royen 最初对高斯相关不等式 [35] 的证明是在集合层面进行的，但近期的证明 [29, 31] 基于高斯相关不等式的泛函表述（稍后将对此进行介绍）。回忆一下，函数 $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ 称为拟凹函数，是指它的所有上水平集$\{f \ge t\}$ 都是凸集；若 $\log f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 是凹函数，则称其为对数凹函数。很容易看出

（只需在水平集上积分并使用尾部公式）高斯相关不等式的一个等价泛函表述为：

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1 d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} f_2 d\gamma \le \int_{\mathbb{R}^n} f_1 f_2 d\gamma \tag{1.13}$$

对于所有拟凹函数 $f_i:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$，其所有上水平集的高斯重心均位于原点。

将 GCI 扩展到 GCRSI 所面临的第一个挑战，是确定后者正确的泛函表述，因为对函数存在许多可能的运算，可以将 $f_1 = \mathbf{1}_K$ 和 $f_2 = \mathbf{1}_L$ 变为 $\mathbf{1}_{K\cap L}$ 和 $\mathbf{1}_{K+L}$；与此同时，f_1 和 f_2 中的齐次性在不等式两边应当相同。例如，我们或许会猜想应该有：

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1 d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} f_2 d\gamma \le \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{f_1 f_2} d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{z=x+y} \sqrt{f_1(x) f_2(y)} d\gamma(z)\ ?$$

事实证明，正确的泛函表述是下面这个颇为出人意料的形式：

定理 1.8（GCRSI 的泛函表述）。对于所有拟凹博雷尔函数 f_1、$f_2:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$，其上水平集的高斯重心均位于原点，我们有：

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1 d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} f_2 d\gamma \le \int_{\mathbb{R}^n} \max\nolimits_0(f_1, f_2) d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} f_1 \square f_2 d\gamma,$$

其中

$$\max\nolimits_0(p,q) = \begin{cases} \max(p,q) & p,q > 0 \\ 0 & pq = 0 \end{cases},$$

而 $f_1 \square f_2$ 表示以下这一种上确界卷积的变体：

$$f_1 \square f_2(z) = \sup_{z=x+y} \min(f_1(x), f_2(y)).$$

请注意，虽然 $\max(\mathbf{1}_K, \mathbf{1}_L) = \mathbf{1}_{K\cup L}$，但 $\max_0(\mathbf{1}_K, \mathbf{1}_L) = \mathbf{1}_{K\cap L}$，且显然 $\mathbf{1}_K \square \mathbf{1}_L = \mathbf{1}_{K+L}$，因此函数形式恢复了与之对应的几何形式。利用四函数定理，我们将在第9节证明，几何表述反过来也蕴含函数表述。我们认为这很有意思，因为在从凸集推广到对数凹函数时，$\max_0$ 和 $\square$ 并不是几何 $\cap$ 和 $+$ 运算通常对应的函数类比，而且 GCI 的函数表述 (1.13) 中直观的乘积 $f_1 f_2$ 也不再出现。GCI 与 GCRSI 的函数表述存在这一差异，说明后者并非前者的简单修改。RSSI (1.2) 和 CRSSI (1.9) 也有类似的函数形式——见推论 9.5。

1.8 高斯函数正向-反向布拉斯坎普-利布不等式

GCRSI 的泛函表述为我们需要证明的泛函不等式类型提供了线索，只需注意：

$$\begin{aligned} f_1(x_1) f_2(x_2) &= \max\nolimits_0(f_1(x_1), f_2(x_2)) \cdot \min(f_1(x_1), f_2(x_2)) \\ &\le \max\nolimits_0(f_1(x_1), f_2(x_2)) \cdot f_1 \square f_2(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

我们证明如下：

定理 1.9. 设 f_1、 f_2、 h_2: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ 与 h_1: $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}_+$ 表示四个对数凹函数，使得 $\int \vec{x} f_i(x) d\gamma(x) = \vec{0}$、 $i = 1$、2 （且对 h_j不作中心化假设）。若

$$f_1(x_1) f_2(x_2) \le h_1(x_1, x_2) h_2(x_1 + x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \tag{1.14}$$

then

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1 d\gamma^n \int_{\mathbb{R}^n} f_2 d\gamma^n \le \int_{\mathbb{R}^n} h_1(y, y) d\gamma^n(y) \int_{\mathbb{R}^n} h_2 d\gamma^n. \tag{1.15}$$

如果 *(1.15)* 中取等号，则对于几乎处处的 $y \in \mathbb{R}^n$， $h_2 \equiv c$ 必须是常值函数， $c \cdot h_1(y, y) = f_1(y) f_2(y)$，并且对于某个线性子空间 $E \subset \mathbb{R}^n$ 以及几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$， $f_1(x) = f_1(P_E x)$ 和 $f_2(x) = f_2(P_{E^\perp} x)$。

将此应用于 $f_1 = \mathbf{1}_K$、 $f_2 = \mathbf{1}_L$、 $h_1 = \mathbf{1}_{K \times L}$ 和 $h_2 = \mathbf{1}_{K+L}$，立即得到定理 1.1。更一般的版本（可推出定理 1.3 和定理 1.5）表述于定理 5.1 和定理 6.1 中（等号情形的分析分别留待定理 7.1 和定理 7.2）。

定理 1.9 的不等式陈述是以下针对中心化对数凹函数的高斯正反向布拉斯坎普–李不等式的一个特例。这是我们在本文中开发的主要新工具，也具有独立的研究价值。给定半正定（可能退化的） $n \times n$ 矩阵 Γ， $A \ge 0$，我们用 γ_Γ 表示协方差为 Γ、定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的高斯概率测度，并用 $g_A(x) = \exp(-\frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle)$表示 $\mathbb{R}^n$上的一个中心高斯函数。

定理 *1.10*（高斯正反向布拉斯坎普–李不等式）。设 $E = \oplus_{i=1}^I \mathbb{R}^{n_i}$，设 L_j: $E \to \mathbb{R}^{m_j}$ 表示线性满射， $j = 1, \ldots, J$，设 $\{c_i\}_{i=1, \ldots, I}$ 和 $\{d_j\}_{j=1, \ldots, J}$ 表示正标量，并设 $\mathcal{Q}$ 表示E上的一个对称算子（惯性指数任意）。设 $\Sigma_i > 0$ 表示定义在 $\mathbb{R}^{n_i} (i = 1, \ldots, I)$ 上的正定协方差， $\Gamma_j \ge 0$ 表示定义在 $\mathbb{R}^{m_j} (j = 1, \ldots, J)$ 上的半正定协方差（可能退化）。那么，对于所有满足 $\int \vec{x} f_i(x) d\gamma_{\Sigma_i}(x) = \vec{0} (i = 1, \ldots, I)$ 的对数凹函数 f_i: $\mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}_+$，以及所有对数凹函数 h_j: $\mathbb{R}^{m_j} \to \mathbb{R}_+$ （不要求中心化， $j = 1, \ldots, J$），均有

$$\prod_{i=1}^I f_i(x_i)^{c_i} \le e^{-\frac{1}{2} \langle \mathcal{Q} x, x \rangle} \prod_{j=1}^J h_j(L_j x)^{d_j} \quad \forall x \in E$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^I \Big(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i \, d\gamma_{\Sigma_i} \Big)^{c_i} \le \mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})} \prod_{j=1}^J \Big(\int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j \, d\gamma_{\Gamma_j} \Big)^{d_j},$$

其中， $\mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})}$ 表示使用中心高斯函数 $f_i = g_{A_i}$ 和 $h_j = g_{B_j} (A_i, B_j \ge 0)$ 检验上述蕴含关系时的最佳常数，即:

$$\mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})} := \sup \left\{ \frac{\prod_{j=1}^J \det \left(\mathrm{Id}_{m_j} + \Gamma_j B_j \right)^{d_j/2}}{\prod_{i=1}^I \det \left(\mathrm{Id}_{n_i} + \Sigma_i A_i \right)^{c_i/2}} : \ \mathrm{diag}\left(c_1 A_1, \ldots, c_I A_I \right) \ge \mathcal{Q} + \sum_{j=1}^J d_j L_j^* B_j L_j \right\}.$$

当 $\mathcal{Q} = 0$ 且所有积分均相对于勒贝格测度进行时，无需假设这些函数是对数凹的，也无需假设它们的重心位于

原点——这种情形就是原始的正向-反向布拉斯坎普-利布不等式，由 Liu–Courtade–Cuff–Verd´u 在 [28] 中提出并证明（另见 [19]），其方法涉及熵的信息论方法。“正向-反向”这一名称体现了这样一个事实：当 $I = 1$ 时，该不等式化为通常的（正向）Brascamp–Lieb 不等式 [14, 27, 17, 10], ；而当 $J = 1$ 时，该不等式则成为反向布拉斯坎普-利布不等式 [4, 5, 6, 39, 7] （更多详情见 [28] ）。

相比之下，当上述积分是关于一般高斯测度进行时，或者等价地（在用高斯因子修正 f_i 和 h_j 之后），当积分是关于勒贝格测度进行、但 $\mathcal{Q}$具有一般的非平凡惯性指数时，如果不对 f_i 和 h_j 施加某些条件（超出可积性之外），定理 1.10 就不成立。事实上，如果定理 1.10 在这种一般情形下仍然成立，那么 GCI (1.6) 或 GCRSI (1.8) 就会适用于任意（非凸）集合 K, L，而这显然是错误的（即使这些集合关于原点对称）。这一现象最早是在逆布拉斯坎普-利布不等式的背景下被发现的；Barthe 和 Wolff [8]详细研究了 $\mathcal{Q}$ 的惯性指数对该不等式成立与否的影响。Courtade–Liu 在研究某些高斯测度 [19, 下的正向-反向布拉斯坎普-利布不等式时，也指出了 $\mathcal{Q}$的惯性指数的重要性（定理 4.8]）。然而，Nakamura 和 Tsuji [32, 31] 随后发现，对于（偶函数，后来扩展到中心化的）对数凹数据， $\mathcal{Q}$的惯性指数实际上无关紧要，从而带来了多种新的应用 [32, 29, 31]。正向-反向布拉斯坎普-利布不等式也存在类似现象。这并不完全令人意外，因为 Wolff 的一个观察 [19, （注 4.5]）表明，逆布拉斯坎普-利布不等式的一个版本（关键在于允许负指数）实际上等价于正向-反向布拉斯坎普-利布不等式（至少在所有函数都是偶函数且所有高斯测度均非退化时）。我们在此不会使用这一等价关系，而是从头推导定理 1.10，采用与 [32] 中类似的方法，借助自卷积和中心极限定理。为了达到我们所需的一般性（这对于确立本文中的所有应用至关重要），我们还需应对若干新的挑战：

- 允许退化协方差（它们可能不是正定的）对我们至关重要，因为在定理 1.9 的应用中，我们需要在对角子空间（y, y）上积分： $y \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{2n}$。这需要一个精细的近似论证（并按正确的顺序取极限）。

- 另一个非标准的近似步骤源于这样一个事实：假设的右侧含有函数乘积（$L_j x$），这些函数在 E上彼此相互作用；我们需要同时对它们全部进行正则化，同时保持不等式成立。

- 我们不能假设这些 h_j在原点处具有高斯重心（因为在我们的应用中，这对 $h_2 = \mathbf{1}_{K+L}$ 以及 h_1（y, y） $= \mathbf{1}_{K\cap L}$（y）可能都不成立）。
- 定理 1.9 中等号情形的分析需要一系列新的论证，因为非退化情形中的逼近论证会使我们完全无法追踪逼近过程中等号是否成立。具体而言，我们需要证明最优 h_1 和 h_2 的高斯重心必须位于原点，并分析

部分高斯饱和的等号情形（当 f_1, f_2, h_2 是中心高斯函数，而 h_1 是一般的对数凹函数时）。

因此，定理 1.10 将确定定理 1.9 右侧（以及本文讨论的其他各种版本）最优常数的任务，归结为一个关于对称矩阵的半正定代数不等式。事实证明，这是一项出乎意料地不简单的任务，我们将在第 5 节和第 6 节中完成它，并说明朴素的方法可能会失败，或导出“错误”的不等式。

本文余下部分安排如下。第 2 节中，我们引入一些便于使用的定义和记号，并陈述定理 2.6，即定理 1.10 的一个推广版本。第 3 节中，我们列出并推导一些有用的预备引理。定理 2.6 的证明将在第 4 节中给出。第 5 节和第 6 节中，我们针对对数凹函数，提出定理 1.3 和定理 1.5 的适当函数形式，并求出相应高斯饱和约化中的最佳常数 $\mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})}$。第 7 节中，我们分析不等式的等号成立条件。第 8 节中，我们提出一个一般问题：刻画哪些 α, β, a, $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ 满足不等式 $\gamma(K)\gamma(L) \le \gamma(\alpha K \cap \beta L)\gamma(aL+bL)$；我们解释为何在某些情况下高斯饱和必然会失效，并给出部分刻画。第9节中，我们针对拟凹函数，推导出几何结果的一个等价泛函表述。

2 符号约定

给定配备标量积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的欧几里得空间 E，我们用 $|x|$ 表示欧几里得范数：$=\sqrt{\langle x,x\rangle}$。$E$ 上所有对称算子的集合记为 $\mathrm{Sym}(E)$。当 $E=\mathbb{R}^n$ 时，我们简记为 $\mathrm{Sym}(n)$，并自然地将其与 $\mathbb{R}$ 上的所有对称矩阵集合等同。半正定算子和正定算子的子集分别记为 $\mathrm{Sym}^{\ge 0}(E)$ 和 $\mathrm{Sym}^{>0}(E)$。对于 $A,B\in\mathrm{Sym}(E)$，若 $B-A\in\mathrm{Sym}^{\ge 0}(E)$，则记作 $A\le B$。

E 上的勒贝格测度记为 dx。给定 $A\in\mathrm{Sym}^{\ge 0}(E)$，我们记

$$g_A(x) := e^{-\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle},$$

将 g_A 称为高斯函数（尽管 A 可能是退化的）。对于 $\Sigma\in\mathrm{Sym}^{\ge 0}(E)$，我们将 E 上协方差为 Σ 的高斯概率测度记为 γ_Σ。当 $\Sigma\in\mathrm{Sym}^{>0}(E)$ 非退化时，这表示

$$\gamma_\Sigma := \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}\langle \Sigma^{-1}x,x\rangle}\,dx,$$

而一般而言，将 γ_Σ 视为 γ_{Id_E} 经由 $\Sigma^{1/2}$ 的推前是有用的。当 $\Sigma=\mathrm{Id}_E$ 时，我们简写为 $\gamma := \gamma_{\mathrm{Id}_E}$；当 $E=\mathbb{R}^n$ 时，有时我们会使用 γ^n。

我们也将正式考虑 $\Sigma=\infty$ 的情形，此时我们将 γ_Σ 解释为 E 上的勒贝格测度 dx（这是 γ_Σ 不是概率测度的唯一例外情形）；在这种情况下，我们将 Σ^{-1} 解释为 0。为方便起见，姑且滥用一下记号，根据上下文将 γ_Σ 同时视为测度及其对应的密度 $\frac{d\gamma_\Sigma(x)}{dx}$。

定义 2.1（更对数凹／更对数凸）。若函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$ 满足 $\log f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 为凹函数（分别为凸函数），则称其为对数凹（分别为对数凸）。给定 $A\in$对称矩阵空间$_{\geq 0}(n)$，若存在某个对数凹（分别为对数凸）函数 h，使得 $f=g_A h$，则称 f 比 g_A 更对数凹（分别为更对数凸）。

当 $A=0$ 时，注意到 f 比 g_A 更对数凹，当且仅当 f 是对数凹函数。我们也形式上考虑 $A=\infty$ 的情形；此时，每个函数都比 g_A 更对数凸，而只有零函数比 g_A 更对数凹。当 $f=\exp(-V)$，其中 C^2 是光滑的 V，且给定 $0\leq A^\flat\leq A^\sharp<\infty$ 时，容易看出，f 比 $g_{A^\flat}$ 更对数凹，且比 $g_{A^\sharp}$ 更对数凸，当且仅当

$$A^\flat\leq\nabla^2 V(x)\leq A^\sharp\quad\forall x\in\mathbb{R}^n.$$

定义 *2.2*（对数凹函数类 $\mathcal{F}$）。对于矩阵 $A^\flat\in Sym_{\geq 0}(n)$ 和 $A^\sharp\in Sym_{\geq 0}(n)\cup\{\infty\}$，其中 $0\leq A^\flat\leq A^\sharp\leq\infty$（称为"正则化参数"），以及定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的测度 μ，我们用 $\mathcal{F}_{A^\flat,A^\sharp}(\mu)$ 表示定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的非负函数集合，这些函数是 μ-可积的，比 $g_{A^\flat}$ 更对数凹，且比 $g_{A^\sharp}$ 更对数凸。μ-中心函数的子类，即满足 $\int_{\mathbb{R}^n}\vec{x}f(x)\,d\mu(x)=\vec{0}$ 的 $f\in\mathcal{F}_{A^\flat,A^\sharp}(\mu)$，记为 $\mathcal{F}^{(o)}_{A^\flat,A^\sharp}(\mu)$。偶函数子类记为 $\mathcal{F}_{e)\,A^\flat,A^\sharp}(\mu)$。我们将 $\mathcal{F}_{0,\infty}(\mu)$ 简记为 $\mathcal{F}_{LC}(\mu)$，即 μ-可积对数凹函数类。

定义 *2.3*（*Brascamp–Lieb* 数据）。固定 I、$J\in\mathbb{N}$。设 $\mathbf{n}=(n_1,\ldots,n_I)\in\mathbb{N}^I$，$\mathbf{m}=(m_1,\ldots,m_J)\in\mathbb{N}^J$，$\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_I)\in(0,\infty)^I$，以及 $\mathbf{d}=(d_1,\ldots,d_J)\in(0,\infty)^J$。记作 $E:=\bigoplus_{i=1}^I\mathbb{R}^{n_i}$。令 $\mathbf{L}=(L_j)_{j=1,\ldots,J}$，其中 $L_j:E\to\mathbb{R}^{m_j}$ 为线性满射，并令 $\mathcal{Q}\in$ 对称矩阵空间(E)。对于 $i=1,\ldots,I$ 和 $j=1,\ldots,J$，令 $\Sigma_i\in$ 对称矩阵空间$_{>0}(n_i)\cup\{\infty\}$ 以及 $\Gamma_j\in$对称矩阵空间$_{\geq 0}(m_j)\cup\{\infty\}$，并令 $A_i^\flat\in$对称矩阵空间$_{\geq 0}(n_i)$、$A_i^\sharp\in$对称矩阵空间$_{\geq 0}(n_i)\cup\{\infty\}$、$B_j^\flat\in$对称矩阵空间$_{\geq 0}(m_j)$、$B_j^\sharp\in$对称矩阵空间$_{\geq 0}(m_j)\cup\{\infty\}$，其中 $0\leq A_i^\flat\leq A_i^\sharp\leq\infty$ 和 $0\leq B_j^\flat\leq B_j^\sharp\leq\infty$，统称为 $\mathbf{\Sigma}$、$\mathbf{\Gamma}$、$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$。我们称 $(\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{L}\ \mathcal{Q},\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Gamma},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 为 *Brascamp–Lieb* 数据（带有正则化参数 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$）。

当 $A_i^\flat=B_j^\flat=0$ 且对所有 $i=1,\ldots\ldots,I$ 且 $j=1,\ldots\ldots,J$ 时，我们称不存在正则化，并简记为 $(\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{L}\ \mathcal{Q},\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Gamma})$。

定义 2.4 (正反向常数)。设 $(\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{L}\ \mathcal{Q},\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Gamma},\mathbf{A},\mathbf{B})$ 是一个 *Brascamp–Lieb* 数据。对于 $*\in\{o,e,\mathcal{G}\}$，定义 $\mathrm{FR}^{(*)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}=\mathrm{FR}^{(*)}(\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{L}\ \mathcal{Q},\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Gamma},\mathbf{A},\mathbf{B})\in(0,\infty]$ 为下列蕴含中最小的常数：

$$\forall f_i\in\mathcal{C}^{(*)}_{f,i}\ \ \forall h_j\in\mathcal{C}^{(*)}_{h,j}\ \ such\ that\ \prod_{i=1}^I f_i(x_i)^{c_i}\leq e^{-\frac{1}{2}\langle\mathcal{Q}x,x\rangle}\prod_{j=1}^J h_j(L_jx)^{d_j}\quad\forall x\in E$$

$$\Rightarrow\prod_{i=1}^I\Big(\int_{\mathbb{R}^{n_i}}f_i\,d\gamma_{\Sigma_i}\Big)^{c_i}\leq\mathrm{FR}^{(*)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}\prod_{j=1}^J\Big(\int_{\mathbb{R}^{m_j}}h_j\,d\gamma_{\Gamma_j}\Big)^{d_j},\tag{2.1}$$

其中族 $\mathcal{C}^{(*)}_{f\,i}$,和 $\mathcal{C}^{(*)}_{h\,,j}$ 定义如下：

- 若 $*=o$，则 $\mathcal{C}_{o)\,f、\,i}=\mathcal{F}_{o)\,A_i^\flat、\,A_i^\sharp}(\gamma_{\Sigma_i})$ 和 $\mathcal{C}_{o)\,h、\,j}=\mathcal{F}_{B_j^\flat、\,B_j^\sharp}(\gamma_{\Gamma_j})$。注意，函数 h_j 不必以原点为重心。我们还将记 $\mathrm{FR}_{A,B}=\mathrm{FR}_{o)\,A,B}$。

- *If* $* = e$ *then* $\mathcal{C}_{f,i}^{(e)} = \mathcal{F}_{A_i^\flat, A_i^\sharp}^{(e)}(\gamma_{\Sigma_i})$ *and* $\mathcal{C}_{h,j}^{(e)} = \mathcal{F}_{B_j^\flat, B_j^\sharp}^{(e)}(\gamma_{\Gamma_j})$.

- 若 $* = \mathcal{G}$，则 $\mathcal{C}(\mathcal{G})_{f,\,i} = \{g_{A_i} \in \mathcal{F}_{(e)\,A_i^\flat,\;A_i^\sharp}(\gamma_{\Sigma_i})\}$ 和 $\mathcal{C}(\mathcal{G})_{h,\;j} = \{g_{B_j} \in \mathcal{F}_{(e)\,B_j^\flat,\;B_j^\sharp}(\gamma_{\Gamma_j})\}$。具体而言，在两个最重要的情形下，

$$\mathrm{FR}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}^{(\mathcal{G})} := \begin{cases} \sup \frac{\prod_{j=1}^{J} \det\left(\mathrm{Id}_{m_j} + \Gamma_j B_j\right)^{d_j/2}}{\prod_{i=1}^{I} \det\left(\mathrm{Id}_{n_i} + \Sigma_i A_i\right)^{c_i/2}} & \Sigma_i, \Gamma_j < \infty \\ \\ \sup \frac{\prod_{j=1}^{J} (\det(B_j/2\pi))^{d_j/2}}{\prod_{i=1}^{I} (\det(A_i/2\pi))^{c_i/2}} & \Sigma_i = \Gamma_j = \infty \end{cases}, \tag{2.2}$$

其中，上确界取遍所有满足以下条件的 $A_i^\flat \le A_i \le A_i^\sharp$ 和 $B_j^\flat \le B_j \le B_j^\sharp$（$A_i$、$B_j < \infty$、$A_i > 0$ 若 $\Sigma_i = \infty$，以及 $B_j > 0$ 若 $\Gamma_j = \infty$）：

$$\operatorname{diag}(c_1 A_1, \ldots, c_I A_I) \ge \mathcal{Q} + \sum_{j=1}^{J} d_j L_j^* B_j L_j.$$

当对所有 $i = 1$、.....、I 以及 $j = 1$、.....、J，$A_i^\flat = B_j^\flat = 0$ 和 $A_i^\sharp = B_j^\sharp = \infty$ 时，我们分别将上述常数简记为 $\mathrm{FR}_{LC} = \mathrm{FR}_{LC}^{(o)}$、$\mathrm{FR}_{LC}^{(e)}$ 和 $\mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})}$。

注 2.5. 这里及下文中，我们将直接使用以下事实：对于任意 $n \times m$ 矩阵 C 和 $m \times n$ 矩阵 D, $\det(\mathrm{Id}_n + CD) = \det(\mathrm{Id}_m + DC)$。例如，由此可得 $\det(\mathrm{Id}_{n_i} + \Sigma_i A_i) = \det(\mathrm{Id}_{n_i} + \Sigma_i^{1/2} A_i \Sigma_i^{1/2}) = \det(\mathrm{Id}_{n_i} + A_i \Sigma_i)$。

采用上述记号，我们给出定理 1.10 的一个推广版本。

定理 *2.6.* 设 $(c, d, L\ \mathcal{Q}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Gamma}, A, B)$ 是一个 *Brascamp–Lieb* 数据。假设 $\Sigma_i \in$对称矩阵空间$_{>0}(n_i)$ 且 $\Gamma_j \in$ 对称矩阵空间$_{\ge 0}(m_j)$，并且要么所有 $A_i^\sharp = B_j^\sharp = \infty$ 要么 $A_i^\sharp, B_j^\sharp < \infty$（通常，$A_i^\flat, B_j^\flat \ge 0$）。那么 $\boldsymbol{FR}^{(o)}(A,B) = \boldsymbol{FR}^{(e)}(A,B) = \boldsymbol{FR}^{(\mathcal{G})}(A,B)$。

特别地，$\mathrm{FR}_{LC}^{(o)} = \mathrm{FR}_{LC}^{(e)} = \mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})}$，也就是说，对于所有 $f_i \in \mathcal{F}_{(o)LC}(\gamma_{\Sigma_i})$ 以及 $h_j \in \mathcal{F}_{LC}(\gamma_{\Gamma_j})$满足

$$\prod_{i=1}^{I} f_i(x_i)^{c_i} \le e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}x, x\rangle} \prod_{j=1}^{J} h_j(L_j x)^{d_j} \quad \forall x \in E, \tag{2.3}$$

有

$$\prod_{i=1}^{I} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i \, d\gamma_{\Sigma_i} \right)^{c_i} \le \mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})} \prod_{j=1}^{J} \left(\int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j \, d\gamma_{\Gamma_j} \right)^{d_j}. \tag{2.4}$$

注 2.7。请注意，与允许退化的 $\Gamma_j \ge 0$ 不同，我们要求$\Sigma_i > 0$ 非退化。这样做不会失去一般性：对于退化的 $\Sigma_i \ge 0$，我们总可以重新定义 $\mathbb{R}^{n_i}$ 为与 Σ_i的零空间正交的子空间；这只会放宽假设 (2.3)，同时保留结论 (2.4)。我们还指出，当 $\Sigma_i = \Gamma_j = \infty$时，或者更一般地，当高斯测度 γ_{Σ_i} 和γ_{Γ_j} 退化为子空间 F 上的勒贝格测度与子空间 $F^\perp$上的高斯测度的乘积时，我们也可以处理这种情形，但这样会使符号和分析更加繁复。由于通过缩放极限论证可以得到这种情形，因此在我们的表述中仅考虑高斯概率测度。

3 预备引理

3.1 等价定义

引理 3.1。 设$(\mathbf{c, d, L}\ \mathcal{Q}, \mathbf{\Sigma, \Gamma, A, B})$ 是一个 *Brascamp–Lieb* 数据。对于所有 $*\in\{o,e,\mathcal{G}\}$, $\mathrm{FR}^{(*)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$ 是以下命题中所有常数 $C>0$ 的上确界:

$$\exists\{f_i\}_{i=1,\dots,I}\ \exists\{h_j\}_{j=1,\dots,J}\ \int f_i d\gamma_{\Sigma_i}=\int h_j d\gamma_{\Gamma_j}=1$$
$$\textit{such that}\quad \prod_{i=1}^{I} f_i(x_i)^{c_i}\le \frac{1}{C}e^{-\frac{1}{2}\langle\mathcal{Q}x,x\rangle}\prod_{j=1}^{J} h_j(L_jx)^{d_j}\quad \forall x\in E,$$

其中，上述 f_i 和 h_j 取自以下族:

- *If* $*=o$ *then* $f_i\in\mathcal{F}^{(o)}_{A_i^\flat,A_i^\sharp}(\gamma_{\Sigma_i})$, $h_j\in\mathcal{F}_{B_j^\flat,B_j^\sharp}(\gamma_{\Gamma_j})$.
- *If* $*=e$ *then* $f_i\in\mathcal{F}^{(e)}_{A_i^\flat,A_i^\sharp}(\gamma_{\Sigma_i})$, $h_j\in\mathcal{F}^{(e)}_{B_j^\flat,B_j^\sharp}(\gamma_{\Gamma_j})$.
- *If* $*=\mathcal{G}$ *then* $f_i=p_ig_{A_i}\in\mathcal{F}^{(e)}_{A_i^\flat,A_i^\sharp}(\gamma_{\Sigma_i})$, $h_j=q_jg_{B_j}\in\mathcal{F}^{(e)}_{B_j^\flat,B_j^\sharp}(\gamma_{\Gamma_j})$ *(for some constants* $p_i,q_j>0$*).*

证明。 回顾 $\mathrm{FR}^{(*)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$ 的原始定义，写作:

$$\mathrm{FR}^{(*)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}=\sup_{f_i,h_j}\left\{\frac{\prod_{i=1}^I\left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}}f_i\,d\gamma_{\Sigma_i}\right)^{c_i}}{\prod_{j=1}^J\left(\int_{\mathbb{R}^{m_j}}h_j\,d\gamma_{\Gamma_j}\right)^{d_j}}:\sup_{x\in E}\frac{\prod_{i=1}^I f_i(x_i)^{c_i}}{e^{-\frac{1}{2}\langle\mathcal{Q}x,x\rangle}\prod_{j=1}^J h_j(L_jx)^{d_j}}\le 1\right\},$$

其中，上确界取遍满足 $\int_{\mathbb{R}^{n_i}}f_i\,d\gamma_{\Sigma_i}>0$ 且 $\int_{\mathbb{R}^{m_j}}h_j\,d\gamma_{\Gamma_j}>0$ 的 $f_i\in\mathcal{C}^{(*)}_{f\,i}{}_{,i}$ 和 $h_j\in\mathcal{C}^{(*)}_{h}{}_{,j}$，并约定 $0/0=0$。只要族 $\mathcal{C}^{(*)}_{f\,i}{}_{,i}$ 和 $\mathcal{C}^{(*)}_{h}{}_{,j}$ 对正数倍乘封闭，我们就可以通过将 f_i,h_j 归一化，并利用齐次性，得到:

$$\begin{aligned}
&=\sup_{f_i,h_j}\left\{\frac{\prod_{i=1}^I\left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}}f_i\,d\gamma_{\Sigma_i}\right)^{c_i}}{\prod_{j=1}^J\left(\int_{\mathbb{R}^{m_j}}h_j\,d\gamma_{\Gamma_j}\right)^{d_j}}\Big/\sup_{x\in E}\frac{\prod_{i=1}^I f_i(x_i)^{c_i}}{e^{-\frac{1}{2}\langle\mathcal{Q}x,x\rangle}\prod_{j=1}^J h_j(L_jx)^{d_j}}\right\}\\
&=\sup_{f_i,h_j}\left\{1/\sup_{x\in E}\frac{\prod_{i=1}^I f_i(x_i)^{c_i}}{e^{-\frac{1}{2}\langle\mathcal{Q}x,x\rangle}\prod_{j=1}^J h_j(L_jx)^{d_j}}:\int f_i\,d\gamma_{\Sigma_i}=\int h_j\,d\gamma_{\Gamma_j}=1\right\}\\
&=1/\inf_{f_i,h_j}\left\{\sup_{x\in E}\frac{\prod_{i=1}^I f_i(x_i)^{c_i}}{e^{-\frac{1}{2}\langle\mathcal{Q}x,x\rangle}\prod_{j=1}^J h_j(L_jx)^{d_j}}:\int f_i\,d\gamma_{\Sigma_i}=\int h_j\,d\gamma_{\Gamma_j}=1\right\}.
\end{aligned}$$

这就证明了 $*\in\{o,e\}$ 的结论。

对于 $*=\mathcal{G}$，我们无法像上文那样简单地将 $g_{A_i}\in\mathcal{C}^{(\mathcal{G})}_{f\,i}$ 、或 $g_{B_j}\in\mathcal{C}^{(\mathcal{G})}_{h\,j}$ 归一化，因为我们总有 *(0) (0)* 。然而，我们注意到，*FRA*，$\mathbf{B}$ 的值确实

不会改变：我们不再对 $f_i = g_{A_i} \in \mathcal{C}_{f\,i}^{(e)}$ 和 $h_j = g_{B_j} \in \mathcal{C}_{h\,j}^{(e)}$ 取上确界，而是对所有标量 p_i，$q_j > 0$ 检验 $f_i = p_i g_{A_i} \in \mathcal{C}_{f\,i}^{(e)}$ 和 $h_j = q_j g_{B_j} \in \mathcal{C}_{h\,j}^{(e)}$。这是积分齐次性以及以下事实的直接推论：对于任意二次型 $Q \in \mathrm{Sym}(E)$ 和 $D \geq 1$,

$$\langle Qx, x\rangle + \log D \geq 0 \quad \forall x \in E \quad \Leftrightarrow \quad \langle Qx, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in E.$$

因此，将 $\mathcal{C}_{f\,i}^{(\mathcal{G})}$、以及 $\mathcal{C}_{h}^{(\mathcal{G})}$、$j$ 在正标量倍数下闭包后，前述论证仍然适用，从而也证明了 $* = \mathcal{G}$的结论。 □

3.2 对数凹界

引理 3.2。对于任意对数凹函数 $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$，存在 $a \in \mathbb{R}^n$ 和 $b \in \mathbb{R}$，使得：

$$h(x) \leq e^{\langle a,x\rangle + b} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

证明。如果 h恒等于零，则结论显然成立。否则，必要时对 h 进行平移，我们可以假设 $h(0) > 0$。现在只需使用 $b = \log h(0)$ 以及凸函数 $-\log h$ 在原点处次微分中的任意次梯度 $-a \in \partial(-\log h)(0)$。 □

推论 3.3。对于任意对数凹函数 $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ 以及 $\Sigma \in$ 对称矩阵空间$_{\geq 0}(n)$（也允许退化），h是 γ_Σ-可积的。

引理 3.4。对于任意满足 $\int h(x)\,dx = 1$的对数凹密度 $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$，

$$\|h\|_{L^\infty} \leq \frac{C_n}{\det^{\frac{1}{2}} \mathrm{Cov}(h)},$$

其中 $C_n > 1$ 是一个仅取决于 n的常数。

注 3.5. 得益于 Klartag 和 Lehec [25], 最近对切片问题的卓越解决，我们实际上已知，对于某个与维数无关的常数$C > 1$，有 $C_n \leq C^n$；不过，这里并不需要如此强有力的结果——任何与h无关的常数 C_n 都足以满足我们的应用需求。

证明。与 h 相关联的各向同性常数 $\mathcal{L}_h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ 定义为 $\mathcal{L}_h := \|h\|_{L^\infty}^{\frac{1}{n}} \det^{\frac{1}{2n}} \mathrm{Cov}(h)$，而一个众所周知的平凡估计是，对于所有对数凹 h，均有 $\mathcal{L}_h \leq C\sqrt{n}$（例如参见 [16]）。 □

3.3 高斯单位近似

定义 3.6（高斯单位近似）。若一个族 $\{\gamma_{\Sigma_t}\}_{t>0}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中满足对称矩阵空间$_{>0}(n)$ $\ni \Sigma_t \to 0$ 当 $t \to 0$时，则称其为高斯单位近似。

注 3.7。在有限维情形下，对称矩阵空间$(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ 上的所有范数都等价，因此本文不指定某个特定范数。不过，我们有时会用到算子范数 $\|A\|_{op}$，利用这一点：$\langle Ax, x\rangle \leq \|A\|_{op} |x|^2$ 以及 $-\|A\|_{op} \mathrm{Id}_n \leq A \leq \|A\|_{op} \mathrm{Id}_n$。

引理 3.8。 设 $\{\gamma_{\Sigma_t}\}_{t>0}$ 是 $\mathbb{R}^n$中的一个高斯单位近似。那么，对于任意对数凹函数 $h:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$:

(1) 对于 h 的任意连续点 x，都有 $\lim_{t\to 0}(h*\gamma_{\Sigma_t})(x) = h(x)$，（因此，对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$ 也成立）。

(2) 存在 $C > 0$ 和 $a \in \mathbb{R}^n$，使得 $(h * \gamma_{\Sigma_t})(x) \le Ce^{\langle a,x\rangle}$，对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 及充分小的 $t > 0$ 均成立。

证明。 为证明第一个断言，设 x 是 h 的一个连续点。根据一个标准论证，只需证明对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} h(x+y)d\gamma_{\Sigma_t}(y) = 0.$$

将引理 3.2 应用于 $h(x+\cdot)$，可得存在 $a \in \mathbb{R}^n$ 和 $b \in \mathbb{R}$，使得 $h(x+y) \le e^{\langle a,y\rangle+b}$对所有 $y \in \mathbb{R}^n$ 均成立，因此只需证明

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} e^{\langle a,y\rangle}d\gamma_{\Sigma_t}(y) = 0. \tag{3.1}$$

计算可得

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} e^{\langle a,y\rangle}d\gamma_{\Sigma_t}(y) = e^{\frac{1}{2}\langle \Sigma_t a,a\rangle}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(-\Sigma_t a,\varepsilon)}\gamma_{\Sigma_t}(z)dz = e^{\frac{1}{2}\langle \Sigma_t a,a\rangle}\gamma(\mathbb{R}^n\setminus\Sigma_t^{-1/2}B(-\Sigma_t a,\varepsilon)).$$

记 $R_t^2 := \|\Sigma_t\|_{op}$，则对于充分小的 $R_t > 0$，有:

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} e^{\langle a,y\rangle}d\gamma_{\Sigma_t}(y) \le e^{\frac{R_t^2}{2}|a|^2}\gamma\left(\mathbb{R}^n \setminus B\left(0, \frac{\varepsilon}{R_t} - R_t|a|\right)\right),$$

并且，由假设 $R_t \to 0$，我们确认 (3.1)。

对于第二个断言，若 $a \in \mathbb{R}^n$ 和 $b \in \mathbb{R}$ 满足 $h(y) \le e^{\langle a,\ y\rangle+b}$，则

$$\int h(x+y)d\gamma_{\Sigma_t}(y)dy \le \int e^{\langle a,x+y\rangle+b}d\gamma_{\Sigma_t}(y) = e^{\langle a,x\rangle+b}\int e^{\left\langle a,\Sigma_t^{1/2}y\right\rangle}d\gamma(y) = e^{\langle a,x\rangle+b+\frac{1}{2}\langle\Sigma_t a,a\rangle}.$$

记 $C = e^{b+\frac{1}{2}|a|^2}$，则对足够小的 $t > 0$，第二个断言成立。 □

3.4 行列式

引理 3.9。 对于所有 $A, B \in$ 对称矩阵空间$_{\ge 0}(n)$，我们有:

$$\frac{1}{(1+\|A-B\|_{op})^n} \le \frac{\det(\mathrm{Id}_n + A)}{\det(\mathrm{Id}_n + B)} \le (1+\|A-B\|_{op})^n.$$

证明。 交换 A、B 的角色后，只需证明第二个不等式。事实上，由于 $A \le B + \|A-B\|_{op}\mathrm{Id}_n$，我们有

$$\det(\mathrm{Id}_n + A) \le \det(\mathrm{Id}_n + B + \|A-B\|_{op}\mathrm{Id}_n) \le \det((1+\|A-B\|_{op})(\mathrm{Id}_n + B)).$$

□

引理 3.10。若 A、$D \in$ 对称矩阵空间$_{\geq 0}(n)$ 则

$$D \geq \mathrm{Id}_n \quad \Rightarrow \quad \det(\mathrm{Id}_n + DAD) \geq \det(\mathrm{Id}_n + A).$$

证明。选取适当的正交归一基后，我们可以假设 D 是对角矩阵。众所周知，$\det(\mathrm{Id}_n + A) = \sum_{S\subset\{1,\dots,n\}} \det(A_S)$，其中 A_S 表示由 S 索引的 A 的主子式。利用 $\det((DAD)_S) = \det(D_S A_S D_S) = \Pi_{i\in S} d_i^2 \det(A_S) \geq \det(A_S)$这一事实，其中 $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$是对角矩阵，且 $d_i \geq 1$ 和 $A_S \geq 0$，即可得出结论。 □

3.5 二次型

我们将反复用到下面显然成立的平行四边形恒等式：

引理 3.11. 设 E 是一个欧几里得空间，且 $Q \in$ 对称矩阵空间(E)。那么对所有的 x、$y \in E$：

$$\langle Qx, x\rangle + \langle Qy, y\rangle = \left\langle Q\,\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right\rangle + \left\langle Q\,\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\rangle. \tag{3.2}$$

定义 3.12 (重心与协方差)。 给定具有有限二阶矩且不恒等于零的 $f \in L^1(\mathbb{R}^n、\ \mathbb{R}_+)$，定义其重心与协方差如下：

$$\mathrm{bar}(f) := \mathbb{E}(X) \in \mathbb{R}^n\ ,\ \mathrm{Cov}(f) := \mathbb{E}(X\otimes X) - \mathbb{E}(X)\otimes\mathbb{E}(X) \in \mathrm{Sym}_{\geq 0}(n),$$

其中，X 是 $\mathbb{R}^n$ 中的随机向量，其密度为$\int f^{1}{}_{(y)dy} f$。

命题 3.13. 设 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ 是对数凹的，且 $\Sigma \in$ 对称矩阵空间$_{>0}(n)$。

- 协方差$(f\gamma_\Sigma) \leq \Sigma$。
- 协方差$(f\gamma_\Sigma) = \Sigma$ 当且仅当 f 是非零常数时成立。

证明。注意，由推论 3.3 可知 $f\gamma_\Sigma$ 可积。第一个断言是经典方差 Brascamp–Lieb 不等式 [15, 定理 4.1] 的一个众所周知的推论（至少对于光滑的 f成立；一般情形可由逼近论证轻易推出，参见 [22, 定理4]）。第二个断言则更为微妙，[22, 定理 4] 基于 [18, 推论 2.1]指出了这一点。 □

3.6 卷积

引理 3.14。设 $f_i \in L^1$（$\mathbb{R}^n$、$\mathbb{R}_+$）、$i = 1$、2。若 f_i 比 g_{A_i}、$A_i \in$ 对称矩阵空间$_{\geq 0}$（n）$\cup\{\infty\}$ 和 $i = 1$、2 更对数凹（分别地，更对数凸），则：

(i) 对所有 $x \in \mathbb{R}^n$、$\mathbb{R}^n \ni y \mapsto f_1\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) f_2\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)$，其比 $g_{A_1+A_2}$ 更对数凹（分别地，更对数凸）。[2]

(ii) 对于所有可逆线性映射 $L\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $L_\# f_i := f_i \circ L^{-1}$ 比 $g_{(L^{-1})^* A_i L^{-1}}$更对数凹（分别地，更对数凸）。

(iii) 若 $A_1 + A_2 > 0$，则对于 $C^{-1} = A_1^{-1} + A_2^{-1}$，$f_1 * f_2$ 比g_C更对数凹（分别地，更对数凸）（当A_i 退化时，解释为 $C = A_1 - A_1(A_1 + A_2)^{-1}A_1 \geq 0$）。特别地（当 $A_2 = \infty$ 时），若 f_1 比 g_{A_1}更对数凸，则无需对 f_2作任何额外假设，$f_1 * f_2$ 也比 g_{A_1}更对数凸。

证明。当 $A_i \in \mathrm{Sym}_{>0}(n) \cup \{\infty\}$ 时，这是众所周知的结果，例如参见 [29, 引理 2.1]。对于 $A_i \in \mathrm{Sym}_{\geq 0}(n)$ 退化的情形，（i）和（ii）的证明完全相同。对于将 $C = A_1 - A_1(A_1 + A_2)^{-1}A_1$ 作此解释时的（iii），在[29, 引理 2.1]的首个 arXiv 版本中已验证。注意，$A_1 = A_1(A_1+A_2)^{-1}(A_1+A_2)$，因此 $C = A_1(A_1+A_2)^{-1}A_2$；所以，当两者 A_i 均非退化时，我们有 $C^{-1} = A_2^{-1}(A_1 + A_2)A_1^{-1} = A_2^{-1} + A_1^{-1}$，进而对一般的 $A_1 + A_2 > 0$，$C \geq 0$ 也成立。□

命题 3.15。设 $(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{L}\ \mathcal{Q}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ 是一个 *Brascamp–Lieb* 数据。给定 $f_i \in \mathcal{F}_{A_i^\flat, A_i^\sharp}(\gamma_{\Sigma_i})$ 以及 $h_j \in \mathcal{F}_{B_j^\flat, B_j^\sharp}(\gamma_{\Gamma_j})$，定义

$$f_i^{(1)}(\overline{x}_i) := \int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i\left(\frac{\overline{x}_i + x_i}{\sqrt{2}}\right) f_i\left(\frac{\overline{x}_i - x_i}{\sqrt{2}}\right) d\gamma_{\Sigma_i}(x_i)\ ,\ \overline{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i},$$
$$h_j^{(1)}(\overline{y}_j) := \int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j\left(\frac{\overline{y}_j + y_j}{\sqrt{2}}\right) h_j\left(\frac{\overline{y}_j - y_j}{\sqrt{2}}\right) d\gamma_{\Gamma_j}(y_j)\ ,\ \overline{y}_j \in \mathbb{R}^{m_j}.$$

于是：

(1) $f_i^{(1)} \in \mathcal{F}_{A_i^\flat, A_i^\sharp}(\gamma_{\Sigma_i})$ *and* $h_j^{(1)} \in \mathcal{F}_{B_j^\flat, B_j^\sharp}(\gamma_{\Gamma_j})$.

(2) $\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i^{(1)}\, d\gamma_{\Sigma_i} = \big(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i\, d\gamma_{\Sigma_i}\big)^2$ *and* $\int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j^{(1)}\, d\gamma_{\Gamma_j} = \big(\int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j\, d\gamma_{\Gamma_j}\big)^2$.

(3) We have

$$\mathrm{bar}(f_i^{(1)}\gamma_{\Sigma_i}) = \sqrt{2}\,\mathrm{bar}(f_i\gamma_{\Sigma_i})\ ,\ \mathrm{Cov}(f_i^{(1)}\gamma_{\Sigma_i}) = \mathrm{Cov}(f_i\gamma_{\Sigma_i}),$$

h_j 也同理。

(4) 对任意 $D > 0$，若对所有 $x \in E$

$$\prod_{i=1}^{I} f_i(x_i)^{c_i} \leq D \cdot e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}x, x\rangle} \prod_{j=1}^{J} h_j(L_j x)^{d_j} \tag{3.3}$$

则对所有 $\bar{x} \in E$

$$\prod_{i=1}^{I} f_i^{(1)}(\overline{x}_i)^{c_i} \leq D^2 \cdot \mathrm{FR}^{(e)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}\overline{x}, \overline{x}\rangle} \prod_{j=1}^{J} h_j^{(1)}(L_j\overline{x})^{d_j}. \tag{3.4}$$

证明。只需对 h_j 证明第一个断言。首先假设 $\Gamma_j \in$ 对称矩阵空间$_{>0}(m_j) \cup \{\infty\}$。应用 (3.2)，可写为：

$$\begin{aligned} h_j^{(1)}(\overline{y}_j)\gamma_{\Gamma_j}(\overline{y}_j) &= \int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j\left(\frac{\overline{y}_j + y_j}{\sqrt{2}}\right) h_j\left(\frac{\overline{y}_j - y_j}{\sqrt{2}}\right) \gamma_{\Gamma_j}(\overline{y}_j)\gamma_{\Gamma_j}(y_j)dy_j \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m_j}} (h_j\gamma_{\Gamma_j})\left(\frac{\overline{y}_j + y_j}{\sqrt{2}}\right)(h_j\gamma_{\Gamma_j})\left(\frac{\overline{y}_j - y_j}{\sqrt{2}}\right) dy_j \\ &= 2^{m_j/2}(h_j\gamma_{\Gamma_j} * h_j\gamma_{\Gamma_j})(\sqrt{2}\overline{y}_j). \end{aligned}$$

由于 $h_j\gamma_{\Gamma_j} \in \mathcal{F}_{B_j^\flat+\Gamma_j^{-1},\ B_j^\sharp+\Gamma_j^{-1}}(dy)$，引理 3.14 表明 $h_j^{(1)}\gamma_{\Gamma_j} \in \mathcal{F}_{B_j^\flat+\Gamma_j^{-1},\ B_j^\sharp+\Gamma_j^{-1}}(dy)$，从而 $h_j^{(1)} \in \mathcal{F}_{B_j^\flat,\ B_j^\sharp}(\gamma_{\Gamma_j})$。注意，这一论证同样适用于$\Gamma_j = \infty$的情形；此时，回顾一下，我们将 $\gamma_{\Gamma_j} = 1$ 与 $\Gamma_j^{-1} = 0$ 作相应解释。

退化情形下的一般情形 $\Gamma_j \geq 0$ 可通过用 $\Gamma_j^{(t)} \in \mathrm{Sym}_{>0}(m_j)$ 逼近 Γ_j 来得到（例如取 $t \to 1^-$）。记：

$$h_j^{(t)}(\overline{y}_j) := \int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j\left(\frac{\overline{y}_j + y_j}{\sqrt{2}}\right) h_j\left(\frac{\overline{y}_j - y_j}{\sqrt{2}}\right) d\gamma_{\Gamma_j^{(t)}}(y_j), \tag{3.5}$$

则对所有 $t < 1$，都有 $h_j^{(t)} \in \mathcal{F}_{B_j^\flat,\ B_j^\sharp}(\gamma_{\Gamma_j^{(t)}})$。众所周知，$\gamma_{\Gamma_j^{(t)}}$ 弱收敛到γ_{Γ_j}（例如，由相应特征函数的逐点收敛可得），因此根据 Portmanteau 定理的一个版本—— [12, 定理 2.7], ——对于任意有界函数 Ψ_j，只要其不连续点集合的γ_{Γ_j} 测度为零，就有 $\int \Psi_j d\gamma_{\Gamma_j^{(t)}} \to \int \Psi_j d\gamma_{\Gamma_j}\mathbb{R}^{m_j} \to \mathbb{R}$。后一个测度支撑在某个线性子空间 F_j 上。由于 (3.5) 的被积函数关于 y_j 为偶函数且对数凹，它不超过其在原点处的值，并且在其凸的、关于原点对称的支集 $K_{y_j} \subset \mathbb{R}^{m_j}$ 的（非空）内部连续。因此，其不连续点集合恰为 ∂K_{y_j}。又由于由关于原点对称性可知 $\partial K_{y_j} \cap F_j = \partial_{F_j}(K_{y_j} \cap F_j)$（其中 ∂_{F_j} 表示 F_j 中的边界算子），且后一个集合在 F_j 中是零测集，因为 $K_{y_j} \cap F_j$ 是凸集，所以前述收敛结论适用。由此可得，当 $t \to 1^-$ 时，$h_j^{(t)} \to h_j^{(1)}$ 逐点收敛；又由于对数凹性／对数凸性更强这一性质取决于三个点，因而在逐点极限下保持，故有 $h_j^{(1)} \in \mathcal{F}_{B_j^\flat,\ B_j^\sharp}(\gamma_{\Gamma_j})$。

为证明第二个断言，我们进行变量替换$x_i^\pm = \frac{x_i \pm x_i}{\sqrt{2}}$并写出

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i^{(1)}(\overline{x}_i)\, d\gamma_{\Sigma_i} &= \int_{\mathbb{R}^{n_i}\times\mathbb{R}^{n_i}} f_i\left(\frac{\overline{x}_i + x_i}{\sqrt{2}}\right) f_i\left(\frac{\overline{x}_i - x_i}{\sqrt{2}}\right) d\gamma_{\Sigma_i}(x_i) d\gamma_{\Sigma_i}(\overline{x}_i) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n_i}\times\mathbb{R}^{n_i}} f_i(x_i^+) f_i(x_i^-)\, d\gamma_{\Sigma_i}\left(\frac{x_i^+ + x_i^-}{\sqrt{2}}\right) d\gamma_{\Sigma_i}\left(\frac{x_i^+ - x_i^-}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n_i}\times\mathbb{R}^{n_i}} f_i(x_i^+) f_i(x_i^-)\, d\gamma_{\Sigma_i}(x_i^+) d\gamma_{\Sigma_i}(x_i^-) = \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i d\gamma_{\Sigma_i}\right)^2,
\end{aligned}$$

在倒数第二步中使用了 (3.2)。关于 $h_j^{(1)}$ 的论证完全相同（即使 Γ_j退化也是如此）。

对于第三个断言，计算：

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n_i}} \overline{x}_i f_i^{(1)}(\overline{x}_i)\, d\gamma_{\Sigma_i}(\overline{x}_i) &= \int_{\mathbb{R}^{n_i}\times\mathbb{R}^{n_i}} \overline{x}_i f_i\left(\frac{\overline{x}_i + x_i}{\sqrt{2}}\right) f_i\left(\frac{\overline{x}_i - x_i}{\sqrt{2}}\right) d\gamma_{\Sigma_i}(x_i) d\gamma_{\Sigma_i}(\overline{x}_i) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n_i}\times\mathbb{R}^{n_i}} \frac{x_i^+ + x_i^-}{\sqrt{2}} f_i(x_i^+) f_i(x_i^-)\, d\gamma_{\Sigma_i}(x_i^+) d\gamma_{\Sigma_i}(x_i^-) \\
&= \sqrt{2}\int_{\mathbb{R}^{n_i}} x_i f_i(x_i) d\gamma_{\Sigma_i}(x_i) \int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i d\gamma_{\Sigma_i}.
\end{aligned}$$

同样的论证可以验证

$$\int_{\mathbb{R}^{n_i}} \overline{x}_i \otimes \overline{x}_i f_i^{(1)}(\overline{x}_i)\, d\gamma_{\Sigma_i}(\overline{x}_i) = \int_{\mathbb{R}^{n_i}} x_i \otimes x_i f_i(x_i) d\gamma_{\Sigma_i}(x_i) \int f_i(x_i) d\gamma_{\Sigma_i}(x_i) + \int_{\mathbb{R}^{n_i}} x_i f_i(x_i) d\gamma_{\Sigma_i}(x_i) \otimes \int_{\mathbb{R}^{n_i}} x_i f_i(x_i) d\gamma_{\Sigma_i}(x_i).$$

结合第二个断言和第三个断言的第一部分，(3)的证明至此完成。

对于最后一个断言，记

$$f_i^{(\overline{x}_i)}(x_i) := f_i\left(\frac{\overline{x}_i + x_i}{\sqrt{2}}\right) f_i\left(\frac{\overline{x}_i - x_i}{\sqrt{2}}\right), \quad h_j^{(\overline{y}_j)}(y_j) := h_j\left(\frac{\overline{y}_j + y_j}{\sqrt{2}}\right) h_j\left(\frac{\overline{y}_j - y_j}{\sqrt{2}}\right)$$

对每个固定的 $\overline{x} \in \bigoplus_{i=1}^I \mathbb{R}^{n_i}$ 和 $\overline{y} \in \bigoplus_{j=1}^J \mathbb{R}^{m_j}$。由(3.3)，我们有

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^I f_i^{(\overline{x}_i)}(x_i)^{c_i} &= \prod_{i=1}^I f_i\left(\frac{\overline{x}_i + x_i}{\sqrt{2}}\right)^{c_i} f_i\left(\frac{\overline{x}_i - x_i}{\sqrt{2}}\right)^{c_i} \\
&\le D^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}\frac{\overline{x}+x}{\sqrt{2}}, \frac{\overline{x}+x}{\sqrt{2}}\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}\frac{\overline{x}-x}{\sqrt{2}}, \frac{\overline{x}-x}{\sqrt{2}}\rangle} \prod_{j=1}^J h_j\left(L_j\left(\frac{\overline{x}+x}{\sqrt{2}}\right)\right)^{d_j} h_j\left(L_j\left(\frac{\overline{x}-x}{\sqrt{2}}\right)\right)^{d_j} \\
&= D^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}\overline{x}, \overline{x}\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}x, x\rangle} \prod_{j=1}^J h_j^{(L_j\overline{x})}(L_j x)^{d_j}.
\end{aligned}$$

由于我们固定了 x，将 $e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}x, x\rangle}$ 视为常数，并记

$$\prod_{i=1}^I f_i^{(\overline{x}_i)}(x_i)^{c_i} \le e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}x, x\rangle} \prod_{j=1}^J \widetilde{h}_j^{(L_j\overline{x})}(L_j x)^{d_j},$$

其中 $\widetilde{h}^{(L_j\overline{x})}(y_j) := \left(D^2 e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}\overline{x}, \overline{x}\rangle}\right)^{1/(d_j J)} h^{(L_j\overline{x})}(y_j)$。由引理 3.14，$f_i^{(\overline{x}_i)} \in \mathcal{F}^{(e)}_{A_i^\flat, A_i^\sharp}(\gamma_{\Sigma_i})$ 和 $\widetilde{h}^{(L_j\overline{x})} \in \mathcal{F}^{(e)}_{B_j^\flat, B_j^\sharp}(\gamma_{\Gamma_j})$。因此，

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^I \Big(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i^{(\overline{x}_i)}\, d\gamma_{\Sigma_i}(x_i)\Big)^{c_i} &\le \mathrm{FR}^{(e)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} \prod_{j=1}^J \Big(\int_{\mathbb{R}^{m_j}} \widetilde{h}_j^{(L_j\overline{x})}\, d\gamma_{\Gamma_j}(y_j)\Big)^{d_j} \\
&= D^2 \cdot \mathrm{FR}^{(e)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}\overline{x}, \overline{x}\rangle} \prod_{j=1}^J \Big(\int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j^{(L_j\overline{x})}\, d\gamma_{\Gamma_j}(y_j)\Big)^{d_j}.
\end{aligned}$$

回顾 $f_i^{(1)}$ 和 $h_j^{(1)}$ 的定义，即可验证 (3.4)。 □

3.7 有限性 $\mathrm{FR}^{(o)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$

引理 3.16. 设 $(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{L}\ \mathcal{Q}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ 是一个 *Brascamp–Lieb* 数据。假设 $\Sigma_i \in$对称矩阵空间$_{>0}(n_i) \cup \{\infty\}$, $\Gamma_j \in$对称矩阵空间$_{>0}(m_j) \cup \{\infty\}$, $A_i^\flat + \Sigma_i^{-1} > 0$, $B_j^\flat + \Gamma_j^{-1} > 0$ 并且 $A_i^\sharp$, $B_j^\sharp < \infty$ 对所有 $i = 1, \dots, I$ 以及 $j = 1, \dots, J$ 都成立。那么 $\mathrm{FR}^{(o)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} < \infty$。

证明. 设 $f_i \in \mathcal{F}^{(o)}_{A_i^\flat, A_i^\sharp}(\gamma_{\Sigma_i})$ 和 $h_j \in \mathcal{F}_{B_j^\flat, B_j^\sharp}(\gamma_{\Gamma_j})$ 满足

$$\prod_{i=1}^{I} f_i(x_i)^{c_i} \le e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}x, x\rangle} \prod_{j=1}^{J} h_j(L_j x)^{d_j}. \tag{3.6}$$

注意，我们的假设保证，对于某个 $0 < \varepsilon \le R < \infty$，$f_i\gamma_{\Sigma_i} \in \mathcal{F}^{(o)}_{2\varepsilon \mathrm{Id}^{n_i}, \frac{R}{2}\mathrm{Id}^{n_i}}(dx_i)$ 且 $h_j\gamma_{\Gamma_j} \in \mathcal{F}_{2\varepsilon \mathrm{Id}_{m_j}, \frac{R}{2}\mathrm{Id}^{m_j}}(dy_j)$。由此得到以下逐点控制（例如参见 [31, 引理 3.2]），

$$e^{-n_i} f_i(0)\gamma_{\Sigma_i}(0) e^{-\frac{R}{2}|x_i|^2} \le f_i(x_i)\gamma_{\Sigma_i}(x_i) \le e^{2n_i} f_i(0)\gamma_{\Sigma_i}(0) e^{-\frac{\varepsilon}{2}|x_i|^2},$$
$$e^{-m_j} h_j(b_j)\gamma_{\Gamma_j}(b_j) e^{-\frac{R}{2}|y_j - b_j|^2} \le h_j(y_j)\gamma_{\Gamma_j}(y_j) \le e^{2m_j} h_j(b_j)\gamma_{\Gamma_j}(b_j) e^{-\frac{\varepsilon}{2}|y_j - b_j|^2},$$

其中 $\vec{b}_j := \int_{\mathbb{R}^{m_j}} \vec{y}_j h_j \, d\gamma_{\Gamma_j} / \int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j \, d\gamma_{\Gamma_j}$ 表示 $h_j\gamma_{\Gamma_j}$ 的重心（回忆一下，$f_i\gamma_{\Sigma_i}$ 的重心位于原点）。由此，

$$\begin{aligned}
\frac{\prod_{i=1}^{I} \left(\int f_i \, d\gamma_{\Sigma_i}\right)^{c_i}}{\prod_{j=1}^{J} \left(\int h_j \, d\gamma_j\right)^{d_j}} &\le \frac{\prod_{i=1}^{I} \left(e^{2n_i} f_i(0)\gamma_{\Sigma_i}(0) \int e^{-\frac{\varepsilon}{2}|x_i|^2} \, dx_i\right)^{c_i}}{\prod_{j=1}^{J} \left(e^{-m_j} h_j(b_j)\gamma_{\Gamma_j}(b_j) \int e^{-\frac{R}{2}|y_j - b_j|^2} \, dy_j\right)^{d_j}} \\
&= C(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{m}, \varepsilon, R) \frac{\prod_{i=1}^{I} f_i(0)^{c_i}\gamma_{\Sigma_i}(0)^{c_i}}{\prod_{j=1}^{J} h_j(b_j)^{d_j}\gamma_{\Gamma_j}(b_j)^{d_j}}.
\end{aligned}$$

另一方面，将逐点估计与 (3.6) 结合，

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{I} \left(e^{-n_i} f_i(0)\gamma_{\Sigma_i}(0) e^{-\frac{R}{2}|x_i|^2}\right)^{c_i} \le \prod_{i=1}^{I} f_i(x_i)^{c_i}\gamma_{\Sigma_i}(x_i)^{c_i} \\
&\le e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}x, x\rangle} \prod_{j=1}^{J} h_j(L_j x)^{d_j}\gamma_{\Gamma_j}(L_j x)^{d_j} \frac{\prod_{i=1}^{I} \gamma_{\Sigma_i}(x_i)^{c_i}}{\prod_{j=1}^{J} \gamma_{\Gamma_j}(L_j x)^{d_j}} \\
&\le e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}x, x\rangle} \prod_{j=1}^{J} \left(e^{2m_j} h_j(b_j)\gamma_{\Gamma_j}(b_j) e^{-\frac{\varepsilon}{2}|L_j x - b_j|^2}\right)^{d_j} \frac{\prod_{i=1}^{I} \gamma_{\Sigma_i}(x_i)^{c_i}}{\prod_{j=1}^{J} \gamma_{\Gamma_j}(L_j x)^{d_j}}.
\end{aligned}$$

特别地，在 $x = 0$ 处可得

$$\prod_{i=1}^{I} \left(e^{-n_i} f_i(0)\gamma_{\Sigma_i}(0)\right)^{c_i} \le \prod_{j=1}^{J} \left(e^{2m_j} h_j(b_j)\gamma_{\Gamma_j}(b_j) e^{-\frac{\varepsilon}{2}|b_j|^2}\right)^{d_j} \frac{\prod_{i=1}^{I} \gamma_{\Sigma_i}(0)^{c_i}}{\prod_{j=1}^{J} \gamma_{\Gamma_j}(0)^{d_j}}.$$

重新整理可得

$$\frac{\prod_{i=1}^{I} f_i(0)^{c_i}\gamma_{\Sigma_i}(0)^{c_i}}{\prod_{j=1}^{J} h_j(b_j)^{d_j}\gamma_{\Gamma_j}(b_j)^{d_j}} \le C'(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Gamma}) e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sum_j d_j |b_j|^2}.$$

综合以上结果，我们得出

$$\frac{\prod_{i=1}^{I} \left(\int f_i \, d\gamma_{\Sigma_i}\right)^{c_i}}{\prod_{j=1}^{J} \left(\int h_j \, d\gamma_j\right)^{d_j}} \le CC' e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sum_j d_j |b_j|^2} \le CC' < \infty,$$

从而完成证明。 □

3.8 约化到偶情形

利用最后一个引理和 Courtade–Wang 的一个论证 [20], ，我们可以将问题归结为 f_i 和 h_j 均为偶数的情形。

命题 3.17. 设 $(\mathbf{c, d, L}\ \mathcal{Q}, \mathbf{\Sigma, \Gamma, A, B})$ 为一个 *Brascamp–Lieb* 数据。假设 $\Sigma_i > 0$ 与 $\Gamma_j > 0$ 均为非退化，并且对所有 $i = 1, \dots, I$ 与 $j = 1, \dots, J$，有 $A_i^\sharp, B_j^\sharp < \infty$。则 $\mathrm{FR}^{(o)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} = \mathrm{FR}^{(e)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$。

证明。 假设

$$f_i \in \mathcal{F}^{(o)}_{A_i^\flat, A_i^\sharp}(\gamma_{\Sigma_i}),\ h_j \in \mathcal{F}_{B_j^\flat, B_j^\sharp}(\gamma_{\Gamma_j}),\ \prod_{i=1}^I f_i(x_i)^{c_i} \le e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}x, x\rangle} \prod_{j=1}^J h_j(L_j x)^{d_j}\ \ \forall x \in E. \quad (3.7)$$

回顾命题 3.15 中 $f_i^{(1)}$ 与 $h_j^{(1)}$ 的定义，下文将始终使用它们。由第 (4) 部分，我们有逐点界

$$\prod_{i=1}^I f_i^{(1)}(\overline{x}_i) \le e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}\overline{x}, \overline{x}\rangle} \prod_{j=1}^J \widetilde{h}_j^{(1)}(L_j\overline{x})^{d_j}, \quad \text{where} \quad \widetilde{h}_j^{(1)} := (\mathrm{FR}^{(e)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}})^{1/(d_j J)} h_j^{(1)}.$$

由第 (3) 部分，由于 $\int x_i f_i(x_i)\, d\gamma_{\Sigma_i}(x_i) = 0$，我们有 $\int_{\mathbb{R}^{n_i}} x_i f_i^{(1)}(x_i)\, d\gamma_{\Sigma_i}(x_i) = 0$。由第 (1) 部分，我们推出 $f_i^{(1)} \in \mathcal{F}^{(o)}_{A_i^\flat, A_i^\sharp}(\gamma_{\Sigma_i})$ 与 $\widetilde{h}_j^{(1)} \in \mathcal{F}_{B_j^\flat, B_j^\sharp}(\gamma_{\Gamma_j})$。

根据 $\mathrm{FR}^{(o)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$ 的定义可知

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^I \Big(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i^{(1)}\, d\gamma_{\Sigma_i}\Big)^{c_i} &\le \mathrm{FR}^{(o)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} \prod_{j=1}^J \Big(\int_{\mathbb{R}^{m_j}} \widetilde{h}_j^{(1)}\, d\gamma_{\Gamma_j}\Big)^{d_j} \\ &= \mathrm{FR}^{(o)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} \mathrm{FR}^{(e)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} \prod_{j=1}^J \Big(\int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j^{(1)}\, d\gamma_{\Gamma_j}\Big)^{d_j}.\end{aligned}$$

由第 (2) 部分可得:

$$\prod_{i=1}^I \Big(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i\, d\gamma_{\Sigma_i}\Big)^{c_i} \le \sqrt{\mathrm{FR}^{(o)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} \mathrm{FR}^{(e)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}} \prod_{j=1}^J \Big(\int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j\, d\gamma_{\Gamma_j}\Big)^{d_j}.$$

由于这对所有满足 (3.7) 的 f_i 和 h_j 都成立，因此根据 $\mathrm{FR}^{(o)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$ 的定义可得 $\mathrm{FR}^{(o)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} \le \sqrt{\mathrm{FR}^{(o)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} \mathrm{FR}^{(e)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}}$。由于 $\mathrm{FR}^{(o)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} < \infty$，根据引理 3.16，我们可推出 $\mathrm{FR}^{(o)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} \le \mathrm{FR}^{(e)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$。反方向显然成立，从而完成证明。 □

4 高斯正反向布拉施坎–李定理的证明

设 $(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{L}\ \mathcal{Q}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ 是一个 Brascamp–Lieb 数据。定理 1.10 的证明，更一般地说，定理 2.6 的证明，分为 5 个步骤:

步骤 1。（偶正则化输入与勒贝格测度下的高斯饱和）对于 $\gamma_{\Sigma_i} = dx_i$ 和 $\gamma_{\Gamma_j} = dy_j$、$0 < A_i^\flat \le A_i^\sharp < \infty$ 和 $0 < B_j^\flat \le B_j^\sharp < \infty$ 的情形，证明 $\mathrm{FR}^{(e)}{}_{\mathbf{A},\,\mathbf{B}} = \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}{}_{\mathbf{A},\,\mathbf{B}}$。

步骤 2。（将勒贝格测度替换为非退化高斯测度）对于$\Sigma_i \in$ 对称矩阵空间$_{>0}(n_i)$、$\Gamma_j \in$ 对称矩阵空间$_{>0}(m_j)$、$0 \le A_i^\flat \le A_i^\sharp < \infty$ 和 $0 \le B_j^\flat \le B_j^\sharp < \infty$的情形，证明 $\mathrm{FR}^{(e)}{}_{\mathbf{A},\,\mathbf{B}} = \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}{}_{\mathbf{A},\,\mathbf{B}}$。

步骤 3。（去除偶性假设）对于 $\Sigma_i \in$对称矩阵空间$_{>0}(n_i)$、$\Gamma_j \in$对称矩阵空间$_{>0}(m_j)$、$0 \le A_i^\flat \le A_i^\sharp < \infty$ 和 $0 \le B_j^\flat \le B_j^\sharp < \infty$的情形，证明 $\mathrm{FR}^{(o)}{}_{\mathbf{A},\,\mathbf{B}} = \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}{}_{\mathbf{A},\,\mathbf{B}}$。

步骤 4。（用非退化对象逼近退化的γ_{Γ_j}）对于 $\Sigma_i \in$ 对称矩阵空间$_{>0}(n_i)$、$\Gamma_j \in$ 对称矩阵空间$_{\ge 0}(m_j)$、$0 \le A_i^\flat \le A_i^\sharp < \infty$ 和 $0 \le B_j^\flat \le B_j^\sharp < \infty$的情形，证明 $\mathrm{FR}^{(o)}{}_{\mathbf{A},\,\mathbf{B}} = \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}{}_{\mathbf{A},\,\mathbf{B}}$。

步骤 5。（移除正则化）对于 $\Sigma_i \in$对称矩阵空间$_{>0}(n_i)$、$\Gamma_j \in$对称矩阵空间$_{\ge 0}(m_j)$ 且 $0 \le A_i^\flat < A_i^\sharp = \infty$ 和 $0 \le B_j^\flat < B_j^\sharp = \infty$ 的情形（尤其是不进行正则化），证明 $\mathrm{FR}^{(o)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} = \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$（尤其是，$\mathrm{FR}^{(o)}_{LC} = \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}_{LC}$）。

4.1 步骤 1

步骤 *1* 的证明。首先，我们考虑 $d\gamma_{\Sigma_i} = dx_i$ 和 $d\gamma_{\Gamma_j} = dy_j$ 的情形（因此$\Sigma_i = \Gamma_j = \infty$），以及 $0 < A_i^\flat \le A_i^\sharp < \infty$ 和 $0 < B_j^\flat \le B_j^\sharp < \infty$。

由引理 3.16，$\mathrm{FR}^{(e)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} \le \mathrm{FR}^{(o)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} < \infty$是有限的；通过运用 Arzel`a–Ascoli 定理的紧性论证（如定理 2.1], 的证明中所示），存在使其达到最大值的函数 $\mathfrak{f}_i \in \mathcal{F}^{(e)}_{A_i^\flat, A_i^\sharp}(dx_i)$ 和 $\mathfrak{h}_j \in \mathcal{F}^{(e)}_{B_j^\flat, B_j^\sharp}(dy_j)$，使得等号在（2.1）中成立。将它们归一化为 $\int \mathfrak{f}_i(x_i)dx_i = \int \mathfrak{h}_j(y_j)dy_j = 1$，由引理 3.1 可得：

$$\prod_{i=1}^{I} \mathfrak{f}_i(x_i)^{c_i} \le \frac{1}{\mathrm{FR}^{(e)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}} e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}x, x\rangle} \prod_{j=1}^{J} \mathfrak{h}_j(L_j x)^{d_j} \quad \forall x \in E.$$

现在递归定义：

$$\mathfrak{f}_i^{(N+1)}(\overline{x}_i) := \int_{\mathbb{R}^{n_i}} \mathfrak{f}_i^{(N)}\left(\frac{\overline{x}_i + x_i}{\sqrt{2}}\right) \mathfrak{f}_i^{(N)}\left(\frac{\overline{x}_i - x_i}{\sqrt{2}}\right) dx_i = 2^{n_i/2}(\mathfrak{f}_i^{(N)} * \mathfrak{f}_i^{(N)})(\sqrt{2}\overline{x}_i),$$

$$\mathfrak{h}_j^{(N+1)}(\overline{y}_j) := \int_{\mathbb{R}^{m_j}} \mathfrak{h}_j^{(N)}\left(\frac{\overline{y}_j + y_j}{\sqrt{2}}\right) \mathfrak{h}_j^{(N)}\left(\frac{\overline{y}_j - y_j}{\sqrt{2}}\right) dy_j = 2^{m_j/2}(\mathfrak{h}_j^{(N)} * \mathfrak{h}_j^{(N)})(\sqrt{2}\overline{y}_j),$$

其中 $\mathfrak{f}_i^{(0)} := \mathfrak{f}_i$ 且 $\mathfrak{h}_j^{(0)} := \mathfrak{h}_j$，并反复应用命题 3.15。由第 (1) 部分可得$\mathfrak{f}_i^{(N)} \in \mathcal{F}^{(e)}_{A_i^\flat,\, A_i^\sharp}(dx_i)$ 和 $\mathfrak{h}_j \in \mathcal{F}^{(e)}_{B_j^\flat,\, B_j^\sharp}(dy_j)$ 对所有 $N \ge 1$ 均成立。当然，由第 (2) 部分可得 $\int \mathfrak{f}_i^{(N)}(x_i)dx_i = \int \mathfrak{h}_j^{(N)}(y_j)dy_j = 1$ 对所有 $N \ge 1$ 均成立。将第 (4) 部分应用于 ~~$D = 1$~~ $\mathrm{FR}^{(e)}{}_{\mathbf{A},\,\mathbf{B}}$，可知对所有$N \ge 1$,

$$\prod_{i=1}^{I} \mathfrak{f}_i^{(N)}(\overline{x}_i)^{c_i} \le \frac{1}{\mathrm{FR}^{(e)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}} e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}\overline{x}, \overline{x}\rangle} \prod_{j=1}^{J} \mathfrak{h}_j^{(N)}(L_j \overline{x})^{d_j} \quad \forall \overline{x} \in E. \tag{4.1}$$

由于 f_i 和 h_j 均为偶函数且对数凹，它们在原点处取得最大值，因此有界。根据局部中心极限定理的一个版本（例如参见 [11,定理 19.1]或 [13]），可得如下的一致收敛（因而也是逐点收敛）：

$$\lim_{N\to\infty} \mathfrak{f}_i^{(N)} = \gamma_{\mathrm{Cov}(\mathfrak{f}_i)}, \quad \lim_{N\to\infty} \mathfrak{h}_j^{(N)} = \gamma_{\mathrm{Cov}(\mathfrak{h}_j)}.$$

由于更具对数凹性／对数凸性是关于三个点的性质，因此在逐点极限下保持不变，由此可知 $\gamma_{\mathrm{Cov}(\mathfrak{f}_i)} \in \mathcal{F}^{(e)}_{A_i^\flat, A_i^\sharp}(dx_i)$ 和 $\gamma_{\mathrm{Cov}(\mathfrak{h}_j)} \in \mathcal{F}^{(e)}_{B_j^\flat, B_j^\sharp}(dy_j)$。此外，不等式 (4.1) 在取极限时仍然成立：

$$\prod_{i=1}^I \gamma_{\mathrm{Cov}(\mathfrak{f}_i)}(\overline{x}_i)^{c_i} \le \frac{1}{\mathrm{FR}^{(e)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}} e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}\overline{x},\overline{x}\rangle} \prod_{j=1}^J \gamma_{\mathrm{Cov}(\mathfrak{h}_j)}(L_j\overline{x})^{d_j} \quad \forall \overline{x}\in E.$$

当然 $\int \gamma_{\mathrm{Cov}(\mathfrak{f}_i)} dx_i = \int \gamma_{\mathrm{Cov}(\mathfrak{h}_j)} dy_j = 1$。

再次应用引理 3.1，可得 $\mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} \ge \mathrm{FR}^{(e)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$。由于逆不等式显然成立，我们 deduce that $\mathrm{FR}^{(e)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} = \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$。 □

4.2 步骤 2

步骤 *2* 的证明。现在假设

$$\Sigma_i \in \mathrm{Sym}_{>0}(n_i),\ \Gamma_j \in \mathrm{Sym}_{>0}(m_j),\ 0 \le A_i^\flat \le A_i^\sharp < \infty,\ 0 \le B_j^\flat \le B_j^\sharp < \infty. \tag{4.2}$$

我们的目标是证明 $\mathrm{FR}^{(e)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} = \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$。

设 $f_i \in \mathcal{F}_{(e)\,A_i^\flat, A_i^\sharp}(\gamma_{\Sigma_i})$ 和 $h_j \in \mathcal{F}^{(e)}_{B_j^\flat, B_j^\sharp}(\gamma_{\Gamma_j})$ 满足

$$\prod_{i=1}^I f_i(x_i)^{c_i} \le e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}x,x\rangle} \prod_{j=1}^J h_j(L_jx)^{d_j}. \tag{4.3}$$

由于 Σ_i 和 Γ_j 是非退化的，我们可以定义：

$$\mathfrak{f}_i := f_i g_{\Sigma_i^{-1}},\ \mathfrak{h}_j := h_j g_{\Gamma_j^{-1}},\ e^{-\frac{1}{2}\langle \mathfrak{Q}x,x\rangle} := \frac{\prod_{i=1}^I g_{\Sigma_i^{-1}}(x_i)^{c_i}}{\prod_{j=1}^J g_{\Gamma_j^{-1}}(L_jx)^{d_j}} e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}x,x\rangle}.$$

于是我们有

$$\prod_{i=1}^I \mathfrak{f}_i(x_i)^{c_i} \le e^{-\frac{1}{2}\langle \mathfrak{Q}x,x\rangle} \prod_{j=1}^J \mathfrak{h}_j(L_jx)^{d_j},$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^{n_i}} \mathfrak{f}_i\, dx_i = \det(2\pi\Sigma_i)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i\, d\gamma_{\Sigma_i}, \quad \int_{\mathbb{R}^{m_j}} \mathfrak{h}_j\, dy_j = \det(2\pi\Gamma_j)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j\, d\gamma_{\Gamma_j}.$$

此外，$\mathfrak{f}_i \in \mathcal{F}^{(e)}_{\mathfrak{A}_i^\flat, \mathfrak{A}_i^\sharp}(dx_i)$ 和 $\mathfrak{h}_j \in \mathcal{F}_{(e)\mathfrak{B}_j^\flat, \mathfrak{B}_j^\sharp}(dy_j)$，其中

$$\mathfrak{A}_i^* := A_i^* + \Sigma_i^{-1} \in \mathrm{Sym}_{>0}(n_i), \quad \mathfrak{B}_j^* := B_j^* + \Gamma_j^{-1} \in \mathrm{Sym}_{>0}(m_j),\ *\in\{\flat,\sharp\}.$$

将对应于新 Brascamp–Lieb 数据的高斯常数记为

$$\mathfrak{FR}^{(\mathcal{G})}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} := \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}(\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{L},\infty,\infty,\mathfrak{Q},\mathfrak{A},\mathfrak{B}),$$

由步骤 1 可知

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{I}\big(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i\,d\gamma_{\Sigma_i}\big)^{c_i} &= \prod_{i=1}^{I}\det(2\pi\Sigma_i)^{-c_i/2}\prod_{i=1}^{I}\big(\int_{\mathbb{R}^{n_i}}\mathfrak{f}_i\,dx_i\big)^{c_i}\\ &\le \prod_{i=1}^{I}\det(2\pi\Sigma_i)^{-c_i/2}\mathfrak{FR}^{(\mathcal{G})}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}\prod_{j=1}^{J}\big(\int_{\mathbb{R}^{m_j}}\mathfrak{h}_j\,dy_j\big)^{d_j}\\ &= \frac{\prod_{i=1}^{I}\det(2\pi\Sigma_i)^{-c_i/2}}{\prod_{j=1}^{J}\det(2\pi\Gamma_j)^{-d_j/2}}\mathfrak{FR}^{(\mathcal{G})}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}\prod_{j=1}^{J}\big(\int_{\mathbb{R}^{m_j}}h_j\,d\gamma_{\Gamma_j}\big)^{d_j}.\end{aligned}$$

回顾 (2.2)，不难验证

$$\frac{\prod_{i=1}^{I}\det(2\pi\Sigma_i)^{-c_i/2}}{\prod_{j=1}^{J}\det(2\pi\Gamma_j)^{-d_j/2}}\mathfrak{FR}^{(\mathcal{G})}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} = \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}(\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{L},\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Gamma},\mathcal{Q},\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}_{\mathbf{A},\mathbf{B}},$$

因此 $\mathrm{FR}^{(e)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} \le \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$。由于逆不等式显然成立，证明完毕 .

□

4.3 步骤 3

步骤 *3* 的证明。 在此步骤中，我们弱化偶性假设，并确认在 (4.2) 的情形下，$\mathrm{FR}^{(o)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} = \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$。然而，我们已经在命题 3.17 中看到，在假设 (4.2) 的情况下，$\mathrm{FR}^{(o)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} = \mathrm{FR}^{(e)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$。由于我们在步骤 2 中证明了 $\mathrm{FR}^{(e)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} = \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$，证明完毕。

□

4.4 第 4 步

第 *4* 步的证明。 现在，我们将 (4.2) 中 $\Gamma_j \in \mathrm{Sym}_{>0}(m_j)$ 这一假设弱化为 $\Gamma_j \in \mathrm{Sym}_{\ge 0}(m_j)$。我们的目标是在这些假设下证明 $\mathrm{FR}^{(o)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} = \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}{}_{\mathbf{A},\mathrm{B}}$

设 $f_i \in \mathcal{F}^{(o)}_{A_i^\flat,A_i^\sharp}(\gamma_{\Sigma_i})$ 和 $h_j \in \mathcal{F}_{B_j^\flat,B_j^\sharp}(\gamma_{\Gamma_j})$ 满足 (4.3)。给定 $\varepsilon > 0$，令

$$\Gamma_{j,\varepsilon} := \Gamma_j + \varepsilon\mathrm{Id}_{m_j} \in \mathrm{Sym}_{>0}(m_j).$$

由于 h_j 是对数凹的，根据引理 3.2 可知 $h_j(y_j) \le e^{\langle a_j,\ y_j\rangle + b_j}$ 其中 $a_j \in \mathbb{R}^{m_j}$和 $b_j \ge 0$满足条件。因此 $h_j \in L^1(\gamma_{\Gamma_{j,\ \varepsilon}})$，于是 $h_j \in \mathcal{F}_{B_j^\flat,\ B_j^\sharp}(\gamma_{\Gamma_{j,\ \varepsilon}})$。记

$$\mathrm{FR}^{(*)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\varepsilon) := \mathrm{FR}^{(*)}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{L},\mathbf{\Sigma},\mathbf{\Gamma}_\varepsilon,\mathcal{Q}).$$

由于 $\Gamma_{j,\ \varepsilon}$ 均为非退化的，根据步骤 3 可知 $\mathrm{FR}^{(o)}{}_{\mathbf{A},\ \mathbf{B}}(\varepsilon)$ =$\mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}{}_{\mathbf{A},\ \mathbf{B}}(\varepsilon)$，因此

$$\prod_{i=1}^{I}\Big(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i\, d\gamma_{\Sigma_i}\Big)^{c_i} \le \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\varepsilon)\prod_{j=1}^{J}\Big(\int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j\, d\gamma_{\Gamma_{j,\varepsilon}}\Big)^{d_j}.$$

令 $\varepsilon \to 0$ 取极限，形式上便得到所需结论 $\mathrm{FR}^{(o)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} \le \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$。为严格证明这一结论，我们将验证存在一个子列 $\varepsilon_k \to 0$,

$$\lim_{\varepsilon_k\to 0}\mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\varepsilon_k) = \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}, \tag{4.4}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j\, d\gamma_{\Gamma_{j,\varepsilon}} = \int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j\, d\gamma_{\Gamma_j}. \tag{4.5}$$

我们从 (4.5) 开始。注意到

$$\int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j\, d\gamma_{\Gamma_{j,\varepsilon}} = \int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j(\Gamma_{j,\varepsilon}^{1/2}y_j)\, d\gamma(y_j), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} h_j(\Gamma_{j,\varepsilon}^{1/2}y_j) = h_j(\Gamma_j^{1/2}y_j).$$

因此，只需找到一个控制函数。回顾 $h_j(y_j) \le e^{\langle a_j, y_j\rangle + b_j}$，我们使用

$$h_j(\Gamma_{j,\varepsilon}^{1/2}y_j) \le e^{|\Gamma_{j,\varepsilon}^{1/2}a_j||y_j|+b_j} \le e^{|\Gamma_{j,1}^{1/2}a_j||y_j|+b_j} \in L^1(d\gamma).$$

因此，勒贝格控制收敛定理为 (4.5) 提供了依据。

接下来我们验证 (4.4)。回顾

$$\begin{aligned}\mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\varepsilon) &= \sup\frac{\prod_{j=1}^{J}\det\left(\mathrm{Id}_{m_j}+\Gamma_{j,\varepsilon}B_j\right)^{d_j/2}}{\prod_{i=1}^{I}\det\left(\mathrm{Id}_{n_i}+\Sigma_i A_i\right)^{c_i/2}}\\ &= \sup\frac{\prod_{j=1}^{J}\det\left(\mathrm{Id}_{m_j}+\Gamma_j B_j+\varepsilon B_j\right)^{d_j/2}}{\prod_{i=1}^{I}\det\left(\mathrm{Id}_{n_i}+\Sigma_i A_i\right)^{c_i/2}},\end{aligned} \tag{4.6}$$

其中，上确界取遍所有满足条件的 A_i, B_j

$$A_i^{\flat} \le A_i \le A_i^{\sharp},\ B_j^{\flat} \le B_j \le B_j^{\sharp},\ \text{对角矩阵}\ (c_1A_1,\dots,c_IA_I)\ \ge \mathcal{Q} + \sum_{j=1}^{J} d_jL_j^*B_jL_j. \tag{4.7}$$

特别地，由 (4.6) 可知，对于所有 $\varepsilon > 0$，$\mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}{}_{\mathbf{A},\ \mathbf{B}} \le \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}{}_{\mathbf{A},\ \mathbf{B}}(\varepsilon)$。为了在某个子列极限 $\varepsilon_k \to 0$ 中证明反向不等式，回顾 $A_i^{\sharp}$，$B_j^{\sharp} < \infty$。因此，利用紧性，我们可以找到极值元 $A_{i,\ \varepsilon}$ 和 $B_{j,\ \varepsilon}$，使得 (4.6) 中的上确界能够取到。由于对于所有 $\varepsilon > 0$，$A_i^{\flat} \le A_{i,\ \varepsilon} \le A_i^{\sharp}$ 且 $B_j^{\flat} \le B_{j,\ \varepsilon} \le B_j^{\sharp}$，必要时经过有限次取子列，

$$\exists A_{i,0} := \lim_{k\to\infty} A_{i,\varepsilon_k},\ \exists B_{j,0} = \lim_{k\to\infty} B_{j,\varepsilon_k},\ \lim_{k\to\infty}\varepsilon_k B_{j,\varepsilon_k} = 0,$$

对于所有 i, j。由于对于所有 $\varepsilon>0$, $A_{i,\varepsilon}$, $B_{j,\varepsilon}$ 满足 (4.7)，因此 $A_{i,0}$, $B_{j,0}$ 也满足 (4.7)。因此，

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\varepsilon_k)=\lim_{k\to\infty}\frac{\prod_{j=1}^{J}\det\left(\mathrm{Id}_{m_j}+\Gamma_j B_{j,\varepsilon_k}+\varepsilon_k B_{j,\varepsilon_k}\right)^{d_j/2}}{\prod_{i=1}^{I}\det\left(\mathrm{Id}_{n_i}+\Sigma_i A_{i,\varepsilon_k}\right)^{c_i/2}}$$
$$=\frac{\prod_{j=1}^{J}\det\left(\mathrm{Id}_{m_j}+\Gamma_j B_{j,0}\right)^{d_j/2}}{\prod_{i=1}^{I}\det\left(\mathrm{Id}_{n_i}+\Sigma_i A_{i,0}\right)^{c_i/2}}\le\mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}.$$

证明到此结束。 □

4.5 步骤 5

步骤 5 的证明。在这最后一步中，我们允许使用 $A_i^\sharp, B_j^\sharp=\infty$，从而证明对于任意 Brascamp–Lieb 数据 $(\mathrm{c},\mathrm{d},\mathrm{L}\ \boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\Gamma},\mathcal{Q},\mathrm{A},\mathrm{B})$，若 $\Sigma_i\in\mathrm{Sym}_{>0}(n_i)$、$\Gamma_j\in\mathrm{Sym}_{\ge 0}(m_j)$ 且 $A_i^\sharp$, $B_j^\sharp=\infty$（对 $A_i^\flat, B_j^\flat\ge 0$ 不作限制），则有 $\mathrm{FR}^{(o)}\mathrm{A,B}=\mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}\mathrm{A,B}$。特别地，$\mathrm{FR}^{(o)}_{LC}=\mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}_{LC}$。

令 $f_i\in\mathcal{F}^{(o)}{}_{\mathbf{A},\ \mathbf{B}}(\gamma_{\Sigma_i})$ 和 $h_j\in\mathcal{F}_{\mathbf{A},\ \mathbf{B}}(\gamma_{\Gamma_j})$ 满足 (4.3)。思路是通过应用不变测度为 γ_{Σ_i} 的 Ornstein–Uhlenbeck 流 $P_t^{\Sigma_i}$，经过时间 $t\ge 0$ 对 f_i 进行正则化；该流对任意 $\varphi_i\in L^2(\gamma_{\Sigma_i})$ 定义（根据密度，参见例如 [3]）：

$$\partial_t P_t^{\Sigma_i}\varphi_i=\mathcal{L}^{\Sigma_i}P_t^{\Sigma_i}\varphi_i\ ,\ \mathcal{L}^{\Sigma_i}\psi_i:=\Delta_{\mathbb{R}^{n_i}}\psi_i-\langle\Sigma_i^{-1}x_i,\nabla_{\mathbb{R}^{n_i}}\psi_i\rangle,\quad P_0^{\Sigma_i}=\mathrm{Id}.$$

我们将相对于勒贝格测度的对应积分核记为 $p_t^{\Sigma_i}(x_i,\hat{x}_i)$，于是

$$P_t^{\Sigma_i}\varphi_i(x_i)=\int_{\mathbb{R}^{n_i}}\varphi_i(\hat{x}_i)p_t^{\Sigma_i}(x_i,\hat{x}_i)\,d\hat{x}_i.\tag{4.8}$$

具体而言，它由 Mehler 公式给出：

$$p_t^{\Sigma_i}(x_i,\hat{x}_i)=\gamma_{\Sigma_{i,t}}(\hat{x}_i-e^{-t\Sigma_i^{-1}}x_i),\quad \Sigma_{i,t}:=\Sigma_i(\mathrm{Id}_{n_i}-e^{-2t\Sigma_i^{-1}}).\tag{4.9}$$

根据构造，半群 $P_t^{\Sigma_i}$ 在 $L^2(\gamma_{\Sigma_i})$ 上是自伴的：

$$\int_{\mathbb{R}^{n_i}}\varphi_i(P_t^{\Sigma_i}\psi_i)\,d\gamma_{\Sigma_i}=\int_{\mathbb{R}^{n_i}}(P_t^{\Sigma_i}\varphi_i)\psi_i\,d\gamma_{\Sigma_i}\quad\forall\varphi_i,\psi_i\in L^2(\gamma_{\Sigma_i}).\tag{4.10}$$

记

$$\Sigma:=\mathrm{diag}\left(\Sigma_1,\dots,\Sigma_I\right)\in\mathrm{Sym}_{>0}(E)\ ,\ p_t^{\Sigma}(x,\hat{x}):=\prod_{i=1}^{I}p_t^{\Sigma_i}(x_i,\hat{x}_i),$$

我们有

$$p_t^{\Sigma}(x,\hat{x})=\gamma_{\Sigma_t}(\hat{x}-e^{-t\Sigma^{-1}}x),\ \text{where}\ \Sigma_t:=\mathrm{diag}\left(\Sigma_{1,t},\dots,\Sigma_{I,t}\right)=\Sigma(\mathrm{Id}_E-e^{-2t\Sigma^{-1}}).\tag{4.11}$$

令 $c_{\min}:=\min(c_1,\ .....,\ c_I)$，并对 $t\ge 0$ 定义

$$u_{i,t}:=P_t^{\Sigma_i}f_i\ ,\ v_{j,t}(y_j):=\left(\mathfrak{c}_t^{\frac{1}{J}}\int_{\mathbb{R}^{m_j}}h_j(\hat{y}_j)^{\frac{d_j(J+1)}{c_{\min}}}\gamma_{L_j\Sigma_t L_j^*}(y_j-\hat{y}_j)\,d\hat{y}_j\right)^{\frac{c_{\min}}{d_j(J+1)}}\tag{4.12}$$

其中常数 $\mathfrak{c}_t>0$ 将在下文确定。现在我们断言，对于所有足够小的 $t>0$：

(1) $u_{i,\ t} \in \mathcal{F}^{(o)}_{A_{i\ t}^{\flat},\ ,\ A_i^{\sharp}\ ,\ t}(\gamma_{\Sigma_i})$，其中 $A^*_{i,\ t} \in$ 对称矩阵空间$_{\geq 0}(n_i)$，$0 \leq A^{\flat}_{i,\ t} < A^{\sharp}_i\ ,\ _t < \infty$，使得 $\lim_{t\to 0} A^{\flat}_{i,\ t} = A^{\flat}_i$，且 $\int u_{i,\ t} d\gamma_{\Sigma_i} = \int f_i d\gamma_{\Sigma_i}$。

(2) $v_{j,t} \in \mathcal{F}_{B^{\flat,t}_j, B^{\sharp}_j\ ,t}(\gamma_{\Gamma_j})$ 对某些 $B^*_{j,t} \in$ 对称矩阵空间$_{\geq 0}(m_j)$，$0 \leq B^{\flat}_{j,t} < B^{\sharp}_{j\ ,t} < \infty$，使得 $\lim_{t\to 0} B^{\flat}_{j,t} = B^{\flat}_j$。

(3) 成立如下

$$\prod_{i=1}^{I} u_{i,t}(x_i)^{c_i} \leq e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}_t x, x\rangle} \prod_{j=1}^{J} v_{j,t}(L_{j,t}x)^{d_j} \quad \forall x \in E, \tag{4.13}$$

对某些 $\mathcal{Q}_t \in$ 对称矩阵空间(E)，使得 $\lim_{t\to 0} \mathcal{Q}_t = \mathcal{Q}$，并且

$$L_{j,t} := L_j e^{-t\Sigma^{-1}} : E \to \mathbb{R}^{m_j}, \tag{4.14}$$

它们显然是满足 $\lim_{t\to 0} L_{j,t} = L_j$ 的线性满射。此外，$\lim_{t\to 0} \mathfrak{c}_t = 1$。

为看出断言 (1)，注意到（逐坐标） $x_i \in L^2(\gamma_{\Sigma_i})$ 且 $P_t^{\Sigma_i} x_i = e^{-t\Sigma^{-1}} x_i$，因为 $\mathcal{L}^{\Sigma_i} x_i = -\Sigma_i^{-1} x_i$，从而由 (4.10) 可知，对所有 $t \geq 0$，$u_{i,t}$ 的 γ_{Σ_i}-重心仍保持在原点:

$$\int_{\mathbb{R}^{n_i}} x_i u_{i,t} d\gamma_{\Sigma_i} = \int_{\mathbb{R}^{n_i}} x_i P_t^{\Sigma_i} f_i d\gamma_{\Sigma_i} = \int_{\mathbb{R}^{n_i}} P_t^{\Sigma_i}(x_i) f_i d\gamma_{\Sigma_i} = e^{-t\Sigma^{-1}} \int x_i f_i d\gamma_{\Sigma_i} = 0.$$

同理,

$$\int_{\mathbb{R}^{n_i}} u_{i,t} d\gamma_{\Sigma_i} = \int_{\mathbb{R}^{n_i}} P_t f_i d\gamma_{\Sigma_i} = \int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i d\gamma_{\Sigma_i}.$$

此外，由于 $u_{i,t} = (e^{t\Sigma^{-1}})\#(f_i * \gamma_{\Sigma_{i,t}})$，根据 (4.8) 和 (4.9)，由引理 3.14 可得 $u_{i,t} \in \mathcal{F}^{(o)}_{A_{i\ t}^{\flat},,A_i^{\sharp}\ ,\ _t}$，其中

$$A^*_{i,t} = e^{-t\Sigma_i^{-1}}((A_i^*)^{-1} + \Sigma_{i,t})^{-1} e^{-t\Sigma_i^{-1}}\ ,\ * \in \{\flat, \sharp\},$$

并且，回想一下，当 A_i^* 退化时（由于 $\Sigma_{i,t} > 0$，这是良定义的），我们将 $((A_i^*)^{-1} + \Sigma_{i,t})^{-1}$解释为 $A_i^* - A_i^*(A_i^* + \Sigma_{i\ t}^{-1})^{-1} A_i^* \geq 0$。特别地，只要 $A_i^{\flat} = 0$，就有 $A^{\flat}_{i,t} = 0$。显然$A^{\flat}_{i,\ t} \leq A^{\sharp}_{i\ ,t} < \infty$，且 $\lim_{t\to 0} A^{\flat}_{i,t} = A^{\flat}_i$，因为当 $t \to 0$ 时，$\Sigma_{i,t} \to 0$。由此证明了断言 (1)。

同样，引理 3.14 意味着 $v_{j,\ t} \in \mathcal{F}_{B^{\flat,\ t,}_j\ B^{\sharp}_j\ ,\ t}$，其中

$$B^*_{j,t} = \left((B_j^*)^{-1} + \frac{d_j(J+1)}{c_{\min}} L_j \Sigma_t L_j^*\right)^{-1}\ ,\ * \in \{\flat, \sharp\}.$$

由于 L_j 是满射，$L_j \Sigma_t L_j^* > 0$ 是非退化的，因此上述相同的说明也适用，从而证明了结论 (2)。

为验证结论 (3)，我们回顾 (4.8)，并对每个概率测度 $p_t^{\Sigma_i}(x_i,\ \hat{}x_i)d\hat{}x_i$ （固定 x_i ）应用詹森不等式，如下所示：

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{I} u_{i,t}(x_i)^{c_i} &= \left(\prod_{i=1}^{I} u_{i,t}(x_i)^{\frac{c_i}{c_{\min}}}\right)^{c_{min}} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{I} \big(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i(\hat{x}_i) p_t^{\Sigma_i}(x_i,\hat{x}_i)\,d\hat{x}_i\big)^{\frac{c_i}{c_{\min}}}\right)^{c_{\min}} \\ &\le \left(\prod_{i=1}^{I} \int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i(\hat{x}_i)^{\frac{c_i}{c_{\min}}} p_t^{\Sigma_i}(x_i,\hat{x}_i)\,d\hat{x}_i\right)^{c_{\min}} \\ &= \left(\int_E \big(\prod_{i=1}^{I} f_i(\hat{x}_i)^{c_i}\big)^{\frac{1}{c_{\min}}} p_t^{\Sigma}(x,\hat{x})\,d\hat{x}\right)^{c_{\min}}.\end{aligned}$$

We t然后利用逐点假设 (4.3) 将该量估计为

$$\begin{aligned}&\le \left(\int_E e^{-\frac{1}{2}\langle \frac{1}{c_{\min}}\mathcal{Q}\hat{x},\hat{x}\rangle} \prod_{j=1}^{J} h_j(L_j\hat{x})^{\frac{d_j}{c_{\min}}} p_t^{\Sigma}(x,\hat{x})\,d\hat{x}\right)^{c_{\min}} \\ &\le \left(\int_E e^{-\frac{1}{2}\langle \frac{J+1}{c_{\min}}\mathcal{Q}\hat{x},\hat{x}\rangle} p_t^{\Sigma}(x,\hat{x})\,d\hat{x}\right)^{\frac{c_{\min}}{J+1}} \prod_{j=1}^{J}\left(\int_E h_j(L_j\hat{x})^{\frac{d_j(J+1)}{c_{\min}}} p_t^{\Sigma}(x,\hat{x})\,d\hat{x}\right)^{\frac{c_{\min}}{J+1}},\end{aligned}$$

其中最后一步使用了 H¨lder 不等式。通过将 $t>0$ 取得足够小（使得$\frac{J+1}{c_{\min}}\mathcal{Q}+\Sigma_t^{-1}>0$），第一个积分对所有 x 都有限，并且

$$\left(\int_E e^{-\frac{1}{2}\langle \frac{J+1}{c_{\min}}\mathcal{Q}\hat{x},\hat{x}\rangle} p_t^{\Sigma}(x,\hat{x})\,d\hat{x}\right)^{\frac{c_{\min}}{J+1}} = \mathfrak{c}_t^{\frac{c_{\min}}{J+1}} e^{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_t\langle x,x\rangle}$$

对于某些 $\mathfrak{c}_t>0$ 和 $\mathcal{Q}_t\in$ 对称矩阵空间(E)，满足 $\lim_{t\to 0}\mathfrak{c}_t=1$ 以及 $\lim_{t\to 0}\mathcal{Q}_t=\mathcal{Q}$（这可由直接的高斯计算得出）。另一方面，回顾表达式 (4.11)，

$$\begin{aligned}&\int_E h_j(L_j\hat{x})^{\frac{d_j(J+1)}{c_{\min}}} p_t^{\Sigma}(x,\hat{x})\,d\hat{x} \\ &= \int_E h_j(L_j\hat{x})^{\frac{d_j(J+1)}{c_{\min}}} \gamma_{\Sigma_t}(e^{-t\Sigma^{-1}}x-\hat{x})\,d\hat{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j(\hat{y}_j)^{\frac{d_j(J+1)}{c_{\min}}} (L_j)_{\#}\big[\gamma_{\Sigma_t}(e^{-t\Sigma^{-1}}x-\hat{x})d\hat{x}\big](d\hat{y}_j) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j(\hat{y}_j)^{\frac{d_j(J+1)}{c_{\min}}} \gamma_{L_j\Sigma_t L_j^*}(L_j e^{-t\Sigma^{-1}}x-\hat{y}_j)d\hat{y}_j.\end{aligned}$$

综合上述结果，并回顾 (4.12) 中 $v_{j,t}$ 以及 (4.14) 中$L_{j,t}$ 的定义，即可确认(4.13)，从而得出结论 (3)。

确认对于足够小的 $t>0$，命题 (1)–(3) 成立后，我们可以应用步骤 4 的推论，并使用正则化布拉斯坎普–利布数据

$$\mathbf{c},\ \mathbf{d},\ \mathbf{L}_t=(L_{j,t})_{j=1,\dots,J},\ \mathcal{Q}_t,\ \mathbf{\Sigma},\ \mathbf{\Gamma},\ 0\le A_{i,t}^{\flat}<A_{i,t}^{\sharp}<\infty,\ 0\le B_{j,t}^{\flat}<B_{j,t}^{\sharp}<\infty,$$

得出结论:

$$\prod_{i=1}^{I}\Big(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} u_{i,t}\,d\gamma_{\Sigma_i}\Big)^{c_i} \le \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}(t)\prod_{j=1}^{J}\Big(\int_{\mathbb{R}^{m_j}} v_{j,t}\,d\gamma_{\Gamma_j}\Big)^{d_j}. \tag{4.15}$$

这里,

$$\mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}(t) := \sup \frac{\prod_{j=1}^{J}\det\left(\mathrm{Id}_{m_j}+\Gamma_j^{1/2}B_{j,t}\Gamma_j^{1/2}\right)^{d_j/2}}{\prod_{i=1}^{I}\det\left(\mathrm{Id}_{n_i}+\Sigma_i^{1/2}A_{i,t}\Sigma_i^{1/2}\right)^{c_i/2}}, \tag{4.16}$$

其中上确界取遍所有

$$\begin{aligned} &A_{i,t}^{\flat} \le A_{i,t} \le A_{i,t}^{\sharp},\ B_{j,t}^{\flat} \le B_{j,t} \le B_{j,t}^{\sharp}\ :\\ &\mathrm{diag}\left(c_1A_{1,t},\dots,c_IA_{I,t}\right) \ge \mathcal{Q}_t + \sum_{j=1}^{J} d_jL_{j,t}^{*}B_{j,t}L_{j,t}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

回顾$\int_{\mathbb{R}^{n_i}} u_{i,t}\,d\gamma_{\Sigma_i} = \int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i\,d\gamma_{\Sigma_i}$。因此，我们将通过证明如下内容来完成$\mathrm{FR}^{(o)}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} = \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$ 的证明

$$\limsup_{t\to 0}\mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}(t) \le \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}, \tag{4.18}$$

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^{m_j}} v_{j,t}\,d\gamma_{\Gamma_j} = \int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j\,d\gamma_{\Gamma_j}. \tag{4.19}$$

为证明(4.19)，回顾$v_{j,t}$的定义(4.12):

$$v_{j,t}(y_j) = \left(\mathfrak{c}_t^{\frac{1}{J}}\int_{\mathbb{R}^{m_j}} h_j(\hat{y}_j)^{\frac{d_j(J+1)}{c_{\min}}}\gamma_{L_j\Sigma_tL_j^{*}}(y_j-\hat{y}_j)\,d\hat{y}_j\right)^{\frac{c_{\min}}{d_j(J+1)}}.$$

由于$\lim_{t\to 0}\mathfrak{c}_t = 1$，并且由于 $h^{\frac{d_j(J+1)}{c_{\min}j}}$ 是对数凹的，而$\gamma_{L_j\Sigma_tL_j^{*}}$ 是恒等算子的高斯函数逼近，由引理 3.8可知，对几乎处处$y_j\in\mathbb{R}^{m_j}$有$\lim_{t\to 0} v_{j,t}(y_j) = h_j(y_j)$，并且此外，

$$v_{j,t}(y_j) \le Ce^{\langle a,y_j\rangle}\quad \forall y_j\in\mathbb{R}^{m_j},$$

对某些 $C>0$、 $a\in\mathbb{R}^{m_j}$ 以及所有足够小的 $t>0$成立。注意，无论 $\Gamma_j\ge 0$ 是否退化，右端都属于 $L^1(\gamma_{\Gamma_j})$。因此，由勒贝格控制收敛定理可得(4.19)。

为证明 (4.18)，任取满足 (4.17) 的 $A_{i,\,t}$，$B_{j,\,t}$。由于 $\lim_{t\to 0}B_{j,\,t}^{\flat} = B_j^{\flat}$，存在 $B_j^t\in$ 对称矩阵空间$_{\ge 0}(m_j)$、 $B_j^{\flat}\le B_j^t<\infty$，使得对某个 $R_t\to 0$，当$t\to 0$ 对所有 j成立时，有 $\|B_j^t - B_{j,\,t}\|_{op}\le R_t$。类似地，由于 $\lim_{t\to 0}e^{t\Sigma_i^{-1}}A_{i,\,t}^{\flat}e^{t\Sigma_i^{-1}} = A_i^{\flat}$，存在 $A_i^t\in$ 对称矩阵空间$_{\ge 0}(n_i)$、$A_i^{\flat}\le A_i^t<\infty$，使得对所有 i，有 $\|A_i^t - e^{t\Sigma_i^{-1}}A_{i,\,t}e^{t\Sigma_i^{-1}}\|_{op}\le R_t$（我们可以假设对所有 i、 j，均取同一个 R_t）。

用 $e^{t\Sigma^{-1}}$ 对 (4.17) 作共轭变换，回顾 (4.14)，并利用 $B_{j,\,t}\ge B_j^t - R_t\mathrm{Id}_{m_j}$，得到

$$e^{t\Sigma^{-1}}\mathcal{Q}_te^{t\Sigma^{-1}} - \sum_{j=1}^{J}d_jL_j^{*}L_jR_t + \sum_{j=1}^{J}d_jL_j^{*}B_j^tL_j \le e^{t\Sigma^{-1}}\mathrm{diag}\left(c_1A_{1,t},\dots,c_IA_{I,t}\right)e^{t\Sigma^{-1}}.$$

记 $\lambda_t = \left\| \mathcal{Q} - e^{t\Sigma^{-1}}\mathcal{Q}_t e^{t\Sigma^{-1}} + \sum_{j=1}^J d_j L_j^* L_j R_t \right\|_{op}$，我们有 $\lim_{t\to 0}\lambda_t = 0$，并且

$$\mathcal{Q} + \sum_{j=1}^J d_j L_j^* B_j^t L_j \le \lambda_t \mathrm{Id}_E + e^{t\Sigma^{-1}} \mathrm{diag}\,(c_1 A_{1,t}, \dots, c_I A_{I,t}) e^{t\Sigma^{-1}}.$$

回顾 $e^{t\Sigma_i^{-1}} A_{i,t} e^{t\Sigma_i^{-1}} \le A_i^t + R_t \mathrm{Id}_{n_i}$，若我们定义

$$\bar{A}_i^t := A_i^t + \left(\frac{\lambda_t}{c_i} + R_t\right) \mathrm{Id}_{n_i},$$

我们看到 $A_i^\flat \le \bar{A}_i^t < A_i^\sharp = \infty$ 与 $B_j^\flat \le B_j^t < B_j^\sharp = \infty$ 满足

$$\mathcal{Q} + \sum_{j=1}^J d_j L_j^* B_j^t L_j \le \mathrm{diag}\,(c_1 \bar{A}_1^t, \dots, c_I \bar{A}_I^t).$$

因此，根据 $\mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}{}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} = \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{L}\ \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Gamma}, \mathcal{Q}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ 的定义，我们有

$$\prod_{j=1}^J \det\left(\mathrm{Id}_{m_j} + \Gamma_j^{1/2} B_j^t \Gamma_j^{1/2}\right)^{d_j/2} \le \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} \prod_{i=1}^I \det\left(\mathrm{Id}_{n_i} + \Sigma_i^{1/2} \bar{A}_i^t \Sigma_i^{1/2}\right)^{c_i/2}.$$

另一方面，应用引理 3.9，

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{Id}_{m_j} + \Gamma_j^{1/2} B_{j,t} \Gamma_j^{1/2}) &\le \det(\mathrm{Id}_{m_j} + \Gamma_j^{1/2} B_j^t \Gamma_j^{1/2})(1 + \|\Gamma_j^{1/2}(B_{j,t} - B_j^t)\Gamma_j^{1/2}\|_{op})^{m_j} \\
&\le \det(\mathrm{Id}_{m_j} + \Gamma_j^{1/2} B_j^t \Gamma_j^{1/2})(1 + \|\Gamma_j\|_{op} R_t)^{m_j},
\end{aligned}$$

类似地，

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{Id}_{n_i} + \Sigma_i^{1/2} A_{i,t} \Sigma_i^{1/2}) &= \det(\mathrm{Id}_{n_i} + \Sigma_i^{1/2} e^{-t\Sigma_i^{-1}} e^{t\Sigma_i^{-1}} A_{i,t} e^{t\Sigma_i^{-1}} e^{-t\Sigma_i^{-1}} \Sigma_i^{1/2}) \\
&\ge \frac{\det(\mathrm{Id}_{n_i} + \Sigma_i^{1/2} e^{-t\Sigma_i^{-1}} \bar{A}_i^t e^{-t\Sigma_i^{-1}} \Sigma_i^{1/2})}{(1 + \|\Sigma_i e^{-2t\Sigma_i^{-1}}\|_{op} \|e^{t\Sigma_i^{-1}} A_{i,t} e^{t\Sigma_i^{-1}} - \bar{A}_i^t\|_{op})^{n_i}} \\
&\ge \frac{\det(e^{-2t\Sigma_i^{-1}} + e^{-t\Sigma_i^{-1}} \Sigma_i^{1/2} \bar{A}_i^t \Sigma_i^{1/2} e^{-t\Sigma_i^{-1}})}{(1 + \|\Sigma_i e^{-2t\Sigma_i^{-1}}\|_{op}(2R_t + \frac{\lambda_t}{c_i}))^{n_i}}, \\
&= \frac{\det(\mathrm{Id}_{n_i} + \Sigma_i^{1/2} \bar{A}_i^t \Sigma_i^{1/2})}{\det(e^{2t\Sigma_i^{-1}})(1 + \|\Sigma_i e^{-2t\Sigma_i^{-1}}\|_{op}(2R_t + \frac{\lambda_t}{c_i}))^{n_i}}.
\end{aligned}$$

综合以上各项，我们推出

$$\begin{aligned}
&\frac{\prod_{j=1}^J \det\left(\mathrm{Id}_{m_j} + \Gamma_j^{1/2} B_{j,t} \Gamma_j^{1/2}\right)^{d_j/2}}{\prod_{i=1}^I \det\left(\mathrm{Id}_{n_i} + \Sigma_i^{1/2} A_{i,t} \Sigma_i^{1/2}\right)^{c_i/2}} \le \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} \cdot M_t, \\
&M_t := \Pi_{j=1}^J (1 + \|\Gamma_j\|_{op} R_t)^{m_j} \Pi_{i=1}^I \det(e^{2t\Sigma_i^{-1}})(1 + \|\Sigma_i e^{-2t\Sigma_i^{-1}}\|_{op}(2R_t + \frac{\lambda_t}{c_i}))^{n_i}.
\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}(t) \le \mathrm{FR}^{(\mathcal{G})}{}_{\mathbf{A},\ \mathbf{B}} \cdot M_t$，由于 $\lim_{t\to 0}\lambda_t = \lim_{t\to 0} R_t = 0$，$\lim_{t\to 0} \det(e^{2t\Sigma_i^{-1}}) = 1$ 且 $\|\Sigma_i e^{-2t\Sigma_i^{-1}}\|_{op} \le \|\Sigma_i\|_{op}$ 保持有界，我们看到 $\lim_{t\to 0} M_t = 1$，从而（4.18）得证。证明至此完成。 □

5 GCRSI 中的高斯饱和

现在我们回到高斯正反向布拉施坎–李定理1.10在本文中的主要应用——高斯共轭罗杰斯–谢泼德不等式及其变体。

在本文的所有应用中，我们都将使用如下给出的 Brascamp–Lieb 数据：

$$\begin{cases} I = J = 2\ ,\ c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 1\ ,\ n_1 = n_2 = m_2 = n,\ \ m_1 = 2n, \\ L_1(x) = (\alpha x_1, \beta x_2)\ ,\ L_2(x) = ax_1 + bx_2\ ,\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \\ \mathcal{Q} = 0\ ,\ \Sigma_1 = \Sigma_2 = \Gamma_2 = \mathrm{Id}_n \text{ and the degenerate } \Gamma_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n & \mathrm{Id}_n \\ \mathrm{Id}_n & \mathrm{Id}_n \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{5.1}$$

其中常数为 α，β，a，$b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$。本节分析 $\alpha = \beta = 1$ 的情形，即 $L_1(x) = x$ 是恒等映射。

首先，我们来表述定理 1.9（不等式陈述）的一个推广版本，它也立即推出定理 1.3（不等式陈述）。等号情形的分析推迟到第 7 节。

定理 5.1。设 $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{(o)LC}(\gamma^n)$，并设 $h_1\colon\ \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}_+$ 和 $h_2\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ 为两个对数凹函数。设 $a, b \in \mathbb{R}$ 满足 $|a|, |b|, |a+b| \geq 1$。若

$$f_1(x_1) f_2(x_2) \leq h_1(x_1, x_2) h_2(ax_1 + bx_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \tag{5.2}$$

then

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1 d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} f_2 d\gamma \leq \int_{\mathbb{R}^n} h_1(y, y) d\gamma(y) \int_{\mathbb{R}^n} h_2 d\gamma. \tag{5.3}$$

注意，由推论 3.3 可知，对于任意 $\Sigma < \infty$，所有对数凹函数自动都是 γ_Σ-可积的。将定理 1.10 应用于上述 Brascamp–Lieb 数据可知，(5.3) 右侧的最优常数由满足 (5.2) 的中心高斯函数取到。因此，要证明 (5.3)，剩下的任务是证明对于此数据，$\mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})} \leq 1$ (因此，通过在 (5.2) 中检验常值函数，事实上 $\mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})} = 1$)。

换言之，对于所有满足以下条件的 $A_1, A_2, C \in$ 对称矩阵空间$_{\geq 0}(n)$ 和 $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2^* & B_4 \end{pmatrix} \in$ 对称矩阵空间$_{\geq 0}(2n)$：

$$g_{A_1}(x_1) g_{A_2}(x_2) \leq g_B(x_1, x_2) g_C(ax_1 + bx_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n,$$

我们需要证明（假设 $|a|, |b|, |a+b| \geq 1$）：

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_{A_1} d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} g_{A_2} d\gamma \leq \int_{\mathbb{R}^n} g_{\bar{B}} d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} g_C d\gamma,$$

其中：

$$\bar{B} := B_1 + B_2 + B_2^* + B_4.$$

等价地，只要

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2^* & B_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2 C & abC \\ abC & b^2 C \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

我们就希望证明：

$$\det(\mathrm{Id}_n + A_1)\det(\mathrm{Id}_n + A_2) \geq \det(\mathrm{Id}_n + \bar{B})\det(\mathrm{Id}_n + C). \tag{5.5}$$

5.1 一些失败的尝试

在建立（5.5）之前，我们首先说明，一个朴素的论证注定会失败，即使是在 $a = b = 1$ 这一最简单的情形下。事实上，在（5.4）的两边同时加上 Id_{2n} 并取行列式，若能证明下式，则（5.5）即可推出：

$$\det\left(\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_n & 0\\ 0 & \mathrm{Id}_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_2^* & B_4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}C & C\\ C & C\end{pmatrix}\right) \geq \det(\mathrm{Id}_n + \bar{B})\det(\mathrm{Id}_n + C).$$

相对于正交归一基 $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(e_i, -e_i)\}_{i=1,\dots,n} \cup \{\frac{1}{\sqrt{2}}(e_i, e_i)\}_{i=1,\dots,n}$ 进行坐标变换后，我们的目标变为证明：若 $\begin{pmatrix}D_1 & D_2\\ D_2^* & D_4\end{pmatrix} \in$ 对称矩阵空间$\geq 0(2n)$，则

$$\det\left(\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_n & 0\\ 0 & \mathrm{Id}_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}D_1 & D_2\\ D_2^* & D_4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2C\end{pmatrix}\right) \geq \det(\mathrm{Id}_n + 2D_4)\det(\mathrm{Id}_n + C).$$

然而，即使对于 $n = 1$，简单的例子（例如 $D_1 = D_2 = C = 0$ 和 $D_4 = 1$）也表明，这通常是不成立的。

作为另一种替代方案，对于偶函数而言这不会造成任何差别，我们可以尝试使用 $a = -b = 1$ 并假设

$$g_{A_1}(x_1)g_{A_2}(x_2) \leq g_B(x_1, x_2)g_C(x_1 - x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n,$$

so

$$\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_2^* & B_4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}C & -C\\ -C & C\end{pmatrix}.$$

要证明 (5.5)，与上文相同的论证可将任务归结为证明

$$\det\left(\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_n & 0\\ 0 & \mathrm{Id}_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}D_1 & D_2\\ D_2^* & D_4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2C & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) \geq \det(\mathrm{Id}_n + 2D_4)\det(\mathrm{Id}_n + C).$$

一般而言，这同样不成立，但利用舒尔补，不难证明左端有如下下界：

$$\geq \det(\mathrm{Id}_n + D_4)\det(\mathrm{Id}_n + 2C).$$

应用定理 1.10，容易验证，这可以推出 Milman–Pajor 不等式 (1.1)，其中 $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$（对于重心位于原点的凸集 K，L）：

$$\gamma(K)\gamma(L) \leq \gamma(\sqrt{2}(K \cap L))\gamma(\frac{1}{\sqrt{2}}(K - L)),$$

但这并非我们原本想要的结果。

此外，与 $a = b = 1$ 的情形相反，当$a = -b = 1$时，即使对于 $n = 1$，(5.4) 推出 (5.5) 也显然不成立。例如，取 $A_1 = A_2 = 1$ 和 $B_1 = B_2 = B_2^* = B_4 = C = 1/2$ 满足 (5.4)，但不满足 (5.5)，因为 $2 \cdot 2 < 3 \cdot \frac{3}{2}$。更多类似的反例见第 8.1 小节。

上述尝试均告失败，这出乎我们的意料，也说明假设 (5.4) 中包含的信息比我们迄今为止所用的更多。

5.2 高斯情形的高斯相关不等式

为证明 (5.5)，我们首先需要以下结论。

引理 5.2（高斯情形的高斯相关不等式）。对于 A，$B \in$ 对称矩阵空间$_{\geq 0}(n)$，我们有：

$$\det(\mathrm{Id}_n + A + B) \leq \det(\mathrm{Id}_n + A)\det(\mathrm{Id}_n + B).$$

注 5.3。请注意，这实际上是将高斯相关不等式 (1.13) 的函数形式应用于高斯输入：$\int g_A g_B d\gamma \geq \int g_A d\gamma \int g_B d\gamma$。为完整起见，我们给出一个简短的独立证明。

证明。记 $U = \begin{pmatrix} A^{1/2} \\ B^{1/2} \end{pmatrix}$ 为一个 $2n \times n$ 矩形矩阵。注意到 $U^*U = A + B$，但是

$$UU^* = \begin{pmatrix} A & A^{1/2}B^{1/2} \\ B^{1/2}A^{1/2} & B \end{pmatrix}.$$

由于对于任意 $n \times m$ 矩阵 C 和 $m \times n$ 矩阵 D，$\det(\mathrm{Id}_n + CD) = \det(\mathrm{Id}_m + DC)$，因此可得：

$$\det(\mathrm{Id}_n + A + B) = \det \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n + A & A^{1/2}B^{1/2} \\ B^{1/2}A^{1/2} & \mathrm{Id}_n + B \end{pmatrix} \leq \det(\mathrm{Id}_n + A)\det(\mathrm{Id}_n + B),$$

其中，在最后一个不等式中，我们使用了正定矩阵的 Fischer 不等式 [23,定理 7.8。5]（Hadamard 不等式的一种等价形式）。 □

推论 5.4（高斯情形的高斯相关不等式）。对于任意 $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$，$\mathcal{C} \in$ 对称矩阵空间$_{\geq 0}(n)$ 有：

$$\det(\mathcal{C})\det(\mathcal{C} + \mathcal{A} + \mathcal{B}) \leq \det(\mathcal{C} + \mathcal{A})\det(\mathcal{C} + \mathcal{B}).$$

证明。若 $\det(\mathcal{C}) = 0$，则无需证明，因此不妨设 $\mathcal{C} > 0$。现在，通过写成 $A = \mathcal{C}^{-1/2}\mathcal{A}\mathcal{C}^{-1/2}$ 和 $B = \mathcal{C}^{-1/2}\mathcal{B}\mathcal{C}^{-1/2}$，将问题化归为 $\mathcal{C} = \mathrm{Id}_n$ 的情形，并应用引理 5.2。

□

5.3 高斯函数的 GCRSI

命题 5.5。设 $A_1, A_2, C \in$ 对称矩阵空间$_{\geq 0}$（n）且 $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2^* & B_4 \end{pmatrix} \in$ 对称矩阵空间$_{\geq 0}$（$2n$），并假设

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2^* & B_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2C & abC \\ abC & b^2C \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

对于某些 $a, b \in \mathbb{R}$，使得 $|a|, |b|, |a+b| \geq 1$。那么

$$\det(\mathrm{Id}_n + A_1)\det(\mathrm{Id}_n + A_2) \geq \det(\mathrm{Id}_n + C)\det(\mathrm{Id}_n + \bar{B} + ((a+b)^2 - 1)C),$$

其中回顾一下，$\bar{B} = B_1 + B_2 + B_2^* + B_4$。特别地，

$$\det(\mathrm{Id}_n + A_1)\det(\mathrm{Id}_n + A_2) \geq \det(\mathrm{Id}_n + C)\det(\mathrm{Id}_n + \bar{B}), \tag{5.7}$$

并且，如果 $|a+b| > 1$ 且 (5.7) 中等号成立，那么必然有 $C = 0$。

注 5.6. 从证明中可以看出，要求 $B \geq 0$ 并非必需，只需假设 B_1，$B_4 \geq 0$ 且 $\mathrm{Id}_n + \bar{B} + ((a+b)^2 - 1)C \geq 0$。

证明。注意，由于 $B_1, B_4 \geq 0$ and $a^2, b^2 \geq 1$，根据 (5.6) 可得 $\mathcal{A} := A_1 - C \geq 0$ and $\mathcal{B} := A_2 - C \geq 0$。取 $\mathcal{C} = \mathrm{Id}_n + C$，应用推论 5.4，得到：

$$\det(\mathrm{Id}_n + A_1)\det(\mathrm{Id}_n + A_2) \geq \det(\mathrm{Id}_n + C)\det(\mathrm{Id}_n + A_1 + A_2 - C). \tag{5.8}$$

在对角线 (y, y) 上对二次型应用不等式 (5.6)，只需注意到

$$A_1 + A_2 \geq \bar{B} + (a+b)^2 C,$$

因此 $A_1 + A_2 - C \geq \bar{B} + ((a+b)^2 - 1)C$。由于 $(a+b)^2 \geq 1$，后者是半正定的，因此将其代入 (5.8) 后，不等式方向保持不变，结论得证。

若等号在 $(a+b)^2 > 1$ 处成立，则行列式在 $\mathrm{Sym}_{>0}(n)$ 上关于半正定序的严格单调性意味着必有 $C = 0$。 □

结合定理 1.10，定理 5.1 的证明至此完成。

5.4 一个更一般的版本

为了恰当地分析定理 5.1 中的等号情形（以及引言中的定理 1.1、1.3 和 1.9），我们需要命题 5.5 的一个更一般的版本。

命题 5.7。 设 A_1、A_2、B、$C \in$ 对称矩阵空间$_{\geq 0}(n)$，并假设：

$$g_{A_1}(x_1) g_{A_2}(x_2) \leq H(x_1, x_2) g_C(a x_1 + b x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \tag{5.9}$$

对于某些 $|a|$、$|b|$、$|a+b| \geq 1$，以及一个对数凹函数 H：$\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}_+$，满足

$$H(y, y) = p_{\bar{B}} g_{\bar{B}}(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

对于某个常数 $p_{\bar{B}} > 0$。那么

$$\int g_{A_1} d\gamma \int g_{A_2} d\gamma \leq \int g_{\bar{B}} d\gamma \int g_C d\gamma,$$

当 $|a+b| > 1$ 时等号成立，这必然意味着 $C = 0$。

证明。由于 $x_1 \mapsto H(x_1, 0)$ 和 $x_2 \mapsto H(0, x_2)$ 是对数凹的，引理 3.2 和 (5.9) 表明

$$\big\langle (A_i - c_i^2 C) x_i, x_i \big\rangle \geq \langle v_i, x_i \rangle + w_i \quad \forall x_i \in \mathbb{R}^n,$$

对于某个向量 $v_i \in \mathbb{R}^n$、标量 $w_i \in \mathbb{R}$ 和 $c_1 = a$、$c_2 = b$。由于根据假设 $|c_i| \geq 1$，令 x_i 趋于无穷大，可得 $A_i - C \geq 0$。考察对角矩阵上的 (5.9)（y，y），用类似的论证可验证 $A_1 + A_2 \geq \bar{B} + (a+b)^2 C$。由命题 5.5 的证明中的论证以及界 $A_1 + A_2 - C \geq \bar{B} + ((a+b)^2 - 1) C \geq 0$，可得

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{Id}_n + A_1)\det(\mathrm{Id}_n + A_2) &\geq \det(\mathrm{Id}_n + C)\det(\mathrm{Id}_n + A_1 + A_2 - C) \\ &\geq \det(\mathrm{Id}_n + C)\det(\mathrm{Id}_n + \bar{B} + ((a+b)^2 - 1)C). \end{aligned}$$

由此可得

$$\int g_{A_1} d\gamma \int g_{A_2} d\gamma \le \int g_{((a+b)^2-1)C} g_{\bar{B}} d\gamma \int g_C d\gamma,$$

从而完成证明，包括等号情形。 □

由于上面的 $p_{\bar{B}}$ 值完全无关紧要，我们可以将其改写如下。

推论 5.8。 在与前一个命题相同的假设下，现假设 *(5.9)* 被以下条件取代：

$$p_{A_1} g_{A_1}(x_1) \cdot p_{A_2} g_{A_2}(x_2) \le H(x_1, x_2) \cdot p_C g_C(ax_1 + bx_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n,$$

对于某些常数 p_{A_1}、p_{A_2}、$p_C > 0$，则

$$\int p_{A_1} g_{A_1} d\gamma \int p_{A_2} g_{A_2} d\gamma \le \int p_{\bar{B}} g_{\bar{B}} d\gamma \int p_C g_C d\gamma,$$

等号成立意味着当 $|a+b| > 1$ 时，必有 $C = 0$ 且 $p_{A_1} p_{A_2} = p_{\bar{B}} p_C$。

证明。 由命题 5.7 可知：

$$\int p_{A_1} g_{A_1} d\gamma \int p_{A_2} g_{A_2} d\gamma \le \frac{p_{A_1} p_{A_2}}{p_{\bar{B}} p_C} \int p_{\bar{B}} g_{\bar{B}} d\gamma \int p_C g_C d\gamma,$$

等号成立意味着，当 $|a+b| > 1$ 时，必有 $C = 0$。由于 $p_{A_1} p_{A_2} \le p_{\bar{B}} p_C$（通过在 $x_1 = x_2 = 0$ 处检验我们的假设），结论立即得出。 □

6 GCMPI 中的高斯饱和

本节中，我们运用所建立的方法，从定理 1.5 推导出广义共轭 Milman–Pajor 不等式。我们得到如下正向—反向函数形式。

定理 6.1. 设 $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{(o)LC}(\gamma^n)$，并设 $h_1 \colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}_+$ 和 $h_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ 是两个对数凹函数。设 $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 满足

$$a^2, b^2 \le 1 \ , \ 3\min(a^2, b^2) + \max(a^2, b^2) \ge 1. \tag{6.1}$$

If

$$f_1(x_1) f_2(x_2) \le h_1\left(\frac{1}{b} x_1, \frac{1}{a} x_2\right) h_2(ax_1 + bx_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \tag{6.2}$$

then

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1 d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} f_2 d\gamma \le \int_{\mathbb{R}^n} h_1(y, y) d\gamma(y) \int_{\mathbb{R}^n} h_2 d\gamma. \tag{6.3}$$

将定理 6.1 应用于 $f_1 = \mathbf{1}_K$、$f_2 = \mathbf{1}_L$、$h_1 = \mathbf{1}_{\frac{1}{b}K \times \frac{1}{a}L}$ 和 $h_2 = \mathbf{1}_{aK+bL}$，即可立即得到定理 1.5 的不等式结论（当 a，$b \neq 0$ 时；$ab = 0$ 的情形显然成立）。等号情形的分析留待第 7 节。

为证明定理 6.1，我们将定理 1.10 应用于 Brascamp–Lieb 数据 (5.1)，取 $\alpha = \frac{1}{b}$ 和 $\beta = \frac{1}{a}$，即取 $L_1(x) = (\frac{1}{b}x_1, \frac{1}{a}x_2)$，其中 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$。由此可知，(6.3) 右端的最优常数由满足 (6.2) 的中心高斯函数取到。因此，为证明 (6.3)，剩下的任务是证明对于该数据，$\mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})} \leq 1$ （因此，通过在 (6.2) 中代入常值函数，实际上有 $\mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})} = 1$）。

换言之，对于所有满足.....的 A_1，A_2，$C \in$ 对称矩阵空间$_{\geq 0}(n)$ 和 $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2^* & B_4 \end{pmatrix} \in$ 对称矩阵空间$_{\geq 0}(2n)$，

$$g_{A_1}(x_1) g_{A_2}(x_2) \leq g_B\left(\frac{1}{b}x_1, \frac{1}{a}x_2\right) g_C(ax_1 + bx_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n,$$

我们需要证明（假设 a，b 满足（6.1））

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_{A_1} d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} g_{A_2} d\gamma \leq \int_{\mathbb{R}^n} g_{\bar{B}} d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} g_C d\gamma,$$

其中，照例 $B := B_1 + B_2 + B_2^* + B_4$。等价地，每当

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2}B_1 & \frac{1}{ab}B_2 \\ \frac{1}{ab}B_2^* & \frac{1}{a^2}B_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2 C & abC \\ abC & b^2 C \end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

我们希望证明：

$$\det(\mathrm{Id}_n + A_1) \det(\mathrm{Id}_n + A_2) \geq \det(\mathrm{Id}_n + \bar{B}) \det(\mathrm{Id}_n + C). \tag{6.5}$$

6.1 两个引理

引理 6.2。设 A、B、$C \in$ 对称矩阵空间$_{\geq 0}(n)$ 满足 A、$B \geq C$。那么对于任意 $t_2 \geq t_1 \geq 0$，

$$\det(\mathrm{Id}_n + t_1 A) \det(\mathrm{Id}_n + t_2 B) \geq \det(\mathrm{Id}_n + t_2 C) \det(\mathrm{Id}_n + t_1(A + B - C)).$$

证明。当 $t_1 = 0$ 时结论显然，因此不妨设 $t_1 > 0$。通过重新定义 A，B，C，事实上我们可以设 $t_1 = 1$。注意，当 $t_2 = 1$ 时，所述不等式

$$\det(\mathrm{Id}_n + A) \det(\mathrm{Id}_n + B) \geq \det(\mathrm{Id}_n + C) \det(\mathrm{Id}_n + A + B - C)$$

可由推论 5.4 结合 $\mathcal{A} = A - C \geq 0$、$\mathcal{B} = B - C \geq 0$ 和 $\mathcal{C} = \mathrm{Id}_n + C$ 得出（上一节中曾多次使用这一点）。因此，只需证明 $t_2 \mapsto \det(\mathrm{Id}_n + t_2 B)/\det(\mathrm{Id}_n + t_2 C)$ 关于 t_2 非递减即可。

为此，通过逼近不妨设 $B \geq C > 0$。因此

$$\begin{aligned}
&B^{-1} + t_2 \mathrm{Id}_n \leq C^{-1} + t_2 \mathrm{Id}_n \\
&\Leftrightarrow B^{-1/2}(\mathrm{Id}_n + t_2 B)B^{-1/2} \leq C^{-1/2}(\mathrm{Id}_n + t_2 C)C^{-1/2} \\
&\Leftrightarrow B^{1/2}(\mathrm{Id}_n + t_2 B)^{-1}B^{1/2} \geq C^{1/2}(\mathrm{Id}_n + t_2 C)^{-1}C^{1/2} \\
&\Rightarrow \mathrm{tr}((\mathrm{Id}_n + t_2 B)^{-1}B) \geq \mathrm{tr}((\mathrm{Id}_n + t_2 C)^{-1}C) \\
&\Leftrightarrow \frac{d}{dt_2}\left(\log\det(\mathrm{Id}_n + t_2 B) - \log\det(\mathrm{Id}_n + t_2 C)\right) \geq 0,
\end{aligned}$$

因为 $\frac{d}{dt}\log\det(A_t) = \mathrm{tr}((A_t)^{-1}\frac{d}{dt}A_t)$。证明至此结束。 □

引理 6.3。 设 $C, Z \in$ 对称矩阵空间$^{\geq 0}(n)$，并设 $\alpha, \beta \geq 0$ 满足 $\alpha + \beta = 1$。则：

$$\det(\mathrm{Id}_n + \alpha C)\det(\mathrm{Id}_n + \beta C + Z) \geq \det(\mathrm{Id}_n + C)\det(\mathrm{Id}_n + \alpha Z), \tag{6.6}$$

当 $\alpha = 1$ 时等号成立。当 $\alpha = 0$ 时，等号成立当且仅当 $Z = 0$；当 $\alpha \in$ （0，1） 时，等号成立当且仅当 $C = Z = 0$。

证明。 选取适当的正交归一基，我们可以假设 C 是对角矩阵。由行列式在 $\mathrm{Sym}^{\geq 0}(n)$ 上的单调性，注意到

$$\begin{aligned}
&\det(\mathrm{Id}_n + \alpha C)\det(\mathrm{Id}_n + \beta C + Z)\\
&= \det((\mathrm{Id}_n + \alpha C)(\mathrm{Id}_n + \beta C) + \sqrt{\mathrm{Id}_n + \alpha C} Z \sqrt{\mathrm{Id}_n + \alpha C})\\
&\geq \det(\mathrm{Id}_n + C + \sqrt{\mathrm{Id}_n + \alpha C} Z \sqrt{\mathrm{Id}_n + \alpha C})\\
&= \det(\mathrm{Id}_n + C)\det(\mathrm{Id}_n + DZD),
\end{aligned}$$

其中 $D = \sqrt{(\mathrm{Id}_n + \alpha C)(\mathrm{Id}_n + C)^{-1}}$。因此，只需证明

$$\det(\mathrm{Id}_n + DZD) \geq \det(\mathrm{Id}_n + \alpha Z).$$

若 $\alpha = 0$，则无需证明，因此不妨设 $\alpha \in (0, 1]$。将 Z 重命名为 αZ，并将 D 重命名为 $D/\sqrt{\alpha} = \sqrt{(\mathrm{Id}_n + \alpha C)(\alpha \mathrm{Id}_n + \alpha C)^{-1}}$，注意到 $D \geq \mathrm{Id}_n$。于是，不等式 $\det(\mathrm{Id}_n + DZD) \geq \det(\mathrm{Id}_n + Z)$ 由引理 3.10 得出。

若 (6.6) 中等号成立，则上述所用的所有不等式都必须取等号。特别是，我们所用的第一个不等式意味着 $\alpha\beta C^2 = 0$，因此当 $\alpha \in (0, 1)$ 时，必有 $C = 0$；将其代入 (6.6)，可得 $Z = 0$ 也成立。当 $\alpha = 0$ 时，(6.6) 直接表明，等号成立当且仅当 $Z = 0$；而当 $\alpha = 1$ 时，(6.6) 恒等地取等号。 □

6.2 高斯函数的 GCMPI

命题 6.4. 设 $A_1, A_2, C \in$ 对称矩阵空间$^{\geq 0}(n)$ 且 $B \in$ 对称矩阵空间$^{\geq 0}(2n)$，并设 $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 满足 *(6.1)*。则 *(6.4)* 推出 *(6.5)*。假设 *(6.4)* 成立，若 *(6.5)* 中等号成立，则 $^-$ 必有 $C = 0$, $B = A_1 + A_2$，并且：

(1) 若 $a^2 < 1$，则 $A_2 = 0$。*(2)* 若 $b^2 < 1$，则 $A_1 = 0$。*(3)* 若 $\max(a^2, b^2) < 1$，则 *(6.5)* 中等号成立，当且仅当 $A_1 = A_2 = C = 0$ 且$B = 0$。

注 6.5。 当 (6.5) 中等号成立时，此外还有 $B_4 = B_2 = 0$ 若 $a^2 < 1$，$B_1 = B_2 = 0$ 若 $b^2 < 1$，以及 $A_1 A_2 = 0$ 若 $a^2 = b^2 = 1$，但此处不需要这些条件。

证明。 不失一般性，假设 $a^2 \leq b^2 (\leq 1)$。我们可以将 (6.4) 改写为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} A_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} A_2 \end{pmatrix} \geq \frac{1}{a^2 b^2} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2^* & B_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & C \\ C & C \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

由于 $B_1,\ B_4 \geq 0$，我们可知 $\frac{A_1}{a^2},\ \frac{A_2}{b^2} \geq C$。将这三个矩阵和 $t_1 = a^2 \leq b^2 = t_2$ 代入引理 6.2，可得：

$$\det(\mathrm{Id}_n + A_1)\det(\mathrm{Id}_n + A_2) \geq \det(\mathrm{Id}_n + b^2 C)\det\left(\mathrm{Id}_n + a^2\left(\frac{A_1}{a^2} + \frac{A_2}{b^2} - C\right)\right).$$

记 $Z = \frac{A_1}{a^2} + \frac{A_2}{b^2} - 4C$，并通过考察 (6.7) 的对角矩阵元素（$y,\ y$）可知 $Z \geq \frac{1}{a^2 b^2}\bar{B} \geq 0$。因此，要推出 (6.5)，只需证明：

$$\det(\mathrm{Id}_n + b^2 C)\det(\mathrm{Id}_n + a^2(3C + Z)) \geq \det(\mathrm{Id}_n + C)\det(\mathrm{Id}_n + a^2 b^2 Z).$$

由于 $3a^2 \geq 1 - b^2$，我们有

$$\det(\mathrm{Id}_n + a^2(3C + Z)) \geq \det(\mathrm{Id}_n + (1 - b^2)C + a^2 Z), \tag{6.8}$$

因此只需证明

$$\det(\mathrm{Id}_n + b^2 C)\det(\mathrm{Id}_n + (1 - b^2)C + a^2 Z) \geq \det(\mathrm{Id}_n + C)\det(\mathrm{Id}_n + a^2 b^2 Z). \tag{6.9}$$

但这由引理 6.3（取 $\alpha = b^2,\ \beta = 1 - b^2 \geq 0$ （以及 $a^2 Z$））可得。

若 (6.5) 中等号成立，则我们上面用到的所有不等式都必须取等号。特别地，由引理 6.3 可知，当 $b^2 \in (0,\ 1)$ 时，(6.9) 中等号成立当且仅当$C = Z = 0$。由于 $Z = \frac{A_1}{a^2} + \frac{A_2}{b^2}$ 与 $A_1,\ A_2 \geq 0$，可得 $A_1 = A_2 = 0$。将$A_1 = A_2 = C = 0$ 代入 (6.7)，我们推出 $B \leq 0$；但由于 $B \geq 0$，可得 $B = 0$。

当 $b^2 = 1$ 时，$3a^2 > 0 = 1 - b^2$，因此 (6.8) 中取等号意味着 $C = 0$。考察 (6.7) 的对角元（$y,\ y$）可知 $A_1 + A_2 \geq A_1 + a^2 A_2 \geq \bar{B}$；再结合 (6.5) 中的等号以及引理 5.2，得到：

$$\begin{aligned}&\det(\mathrm{Id}_n + A_1)\det(\mathrm{Id}_n + A_2) = \det(\mathrm{Id}_n + \bar{B})\\ &\leq \det(\mathrm{Id}_n + A_1 + A_2) \leq \det(\mathrm{Id}_n + A_1)\det(\mathrm{Id}_n + A_2).\end{aligned}$$

这意味着上述各处都必须取等号，因此特别有 $B = A_1 + A_2$。若假设 $a^2 < 1$，则 $A_1 + A_2 \geq A_1 + a^2 A_2$ 中的等号意味着 $A_2 = 0$。交换 $a,\ b$的角色，证明即告完成。□

6.3 一个更一般的版本

为了恰当地分析定理 6.1（以及引言中的定理 1.5）中的等号情形，我们需要命题 6.4 的一个更一般的版本。

命题 6.6。设 A_1、A_2、B、$C \in$ 对称矩阵空间$_{\geq 0}(n)$，并假设：

$$g_{A_1}(x_1)g_{A_2}(x_2) \leq H\left(\frac{1}{b}x_1, \frac{1}{a}x_2\right) g_C(ax_1 + bx_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \tag{6.10}$$

对于某些满足 *(6.1)* 的 a、$b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，以及某个对数凹函数 H：$\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}_+$，使得

$$H(y, y) = p_{\bar{B}} g_{\bar{B}}(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

对于某个常数 $p_{\bar{B}} > 0$。于是

$$\int g_{A_1} d\gamma \int g_{A_2} d\gamma \le \int g_{\bar{B}} d\gamma \int g_C d\gamma. \tag{6.11}$$

若 *(6.11)* 中等号成立，则与命题 *6.4* 相同的结论也成立（其中将 $B = 0$ 替换为 $\bar{B} = 0$）。特别地，若 $\max(a^2, b^2) < 1$，则 *(6.11)* 中等号成立当且仅当 $A_1 = A_2 = B = C = 0$。

证明。 由于 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x_1, x_2) \mapsto H(\frac{1}{b}x_1, \frac{1}{a}x_2)$ 仍为对数凹函数，引理 3.2 和 (6.10) 推出

$$\left\langle \left[\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 C & abC \\ abC & b^2 C \end{pmatrix} \right] x, x \right\rangle \ge \langle v, x \rangle + w \quad \forall x \in \mathbb{R}^{2n},$$

对于某个向量 $v \in \mathbb{R}^{2n}$ 和标量 $w \in \mathbb{R}$。令 x 趋于无穷大，可推得

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} a^2 C & abC \\ abC & b^2 C \end{pmatrix}.$$

另一方面，考察 $x_1 = by$ 和 $x_2 = ay$对应的 (6.10)，可得

$$\left\langle (b^2 A_1 + a^2 A_2 - \bar{B} - 4a^2 b^2 C) y, y \right\rangle \ge -2 \log p_{\bar{B}} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

令 y 趋于无穷大，并记 $Z = \frac{A_1}{a^2} + \frac{A_2}{b^2} - 4C$，可推得

$$a^2 b^2 Z = b^2 A_1 + a^2 A_2 - 4a^2 b^2 C \ge \bar{B}. \tag{6.12}$$

现在，我们可以完全按照命题 6.4 的方式得出 (6.11) 及其等号情形。唯一的区别是，一旦证明了 $A_1 = A_2 = C = 0$，那么 (6.12) 就意味着 $B = 0$。

□

与推论 5.8 一样，由于上文中 $p_{\bar{B}}$ 的取值完全无关紧要，我们可以将其改写如下。

推论 6.7。 在与前一命题相同的假设下，现假设用以下条件代替 *(6.10)*:

$$p_{A_1} g_{A_1}(x_1) \cdot p_{A_2} g_{A_2}(x_2) \le H\left(\frac{1}{b}x_1, \frac{1}{a}x_2\right) \cdot p_C g_C(a x_1 + b x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n,$$

对于某些常数 p_{A_1}、p_{A_2}、$p_C > 0$。那么

$$\int p_{A_1} g_{A_1} d\gamma \int p_{A_2} g_{A_2} d\gamma \le \int p_{\bar{B}} g_{\bar{B}} d\gamma \int p_C g_C d\gamma,$$

等号意味着 $p_{A_1} p_{A_2} = p_{\bar{B}} p_C$，并且命题 *6.6* 中的相同结论成立。特别地，当 $\max(a^2, b^2) < 1$ 时，等号成立当且仅当 $A_1 = A_2 = \bar{B} = C = 0$ 且 $p_{A_1} p_{A_2} = p_{\bar{B}} p_C$。

7 等号分析

现在我们转而分析定理 5.1 和定理 6.1 中的等号情形。由于我们对高斯 FRBL 定理 1.10 的证明涉及若干逼近论证，因此在这种一般性下追踪等号成立的情形似乎确实难以处理。尽管如此，对于我们的具体应用，我们仍能证明如下结论。

定理 7.1. 设 $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{(o)LC}(\gamma^n)$，并设 $h_1\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}_+$ 和 $h_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ 表示两个对数凹函数。设 $a, b \in \mathbb{R}$ 满足 $|a|, |b| \geq 1$ 和 $|a+b| > 1$。假设

$$f_1(x_1) f_2(x_2) \leq h_1(x_1, x_2) h_2(a x_1 + b x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \tag{7.1}$$

并且等号成立

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1 d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} f_2 d\gamma = \int_{\mathbb{R}^n} h_1(y, y) d\gamma(y) \int_{\mathbb{R}^n} h_2 d\gamma > 0. \tag{7.2}$$

那么，对几乎处处的 $y \in \mathbb{R}^n$，$\bar{}$ $\bar{}$，$h_2 \equiv c > 0$ 是一个常值函数，$c \cdot h_1(y, y) = f_1(y) f_2(y)$；并且对于某个线性子空间 $E \subset \mathbb{R}^n$ 和几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$，$f_1(x) = f_1(P_E x)$ 以及 $f_2(x) = f_2(P_{E^\perp} x)$。

将 $f_1 = \mathbf{1}_K$，$f_2 = \mathbf{1}_L$，$h_1 = \mathbf{1}_{K \times L}$ 和 $h_2 = \mathbf{1}_{aK+bL}$ 代入定理 7.1，立即可得引言中定理 1.3 的等号情形。

定理 7.2。 设 $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{(o)LC}(\gamma^n)$，并设 $h_1\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}_+$ 和 $h_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ 是两个对数凹函数。设 $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 满足 $3\min(a^2, b^2) + \max(a^2, b^2) \geq 1$ 且 $\max(a^2, b^2) \leq 1$。假设

$$f_1(x_1) f_2(x_2) \leq h_1\left(\frac{1}{b} x_1, \frac{1}{a} x_2\right) h_2(a x_1 + b x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \tag{7.3}$$

并且等号成立

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1 d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} f_2 d\gamma = \int_{\mathbb{R}^n} h_1(y, y) d\gamma(y) \int_{\mathbb{R}^n} h_2 d\gamma > 0. \tag{7.4}$$

那么 h_2 是常数，此外：

(1) 若 $a^2 < b^2 = 1$，则 f_2 是常数，且对于几乎处处的 $y \in \mathbb{R}^n$，$h_1(y, y) = c \cdot f_1(y)$。*(2)* 若 $b^2 < a^2 = 1$，则 f_1 是常数，且对于几乎处处的 $y \in \mathbb{R}^n$，$h_1(y, y) = c \cdot f_2(y)$。*(3)* 若 $\max(a^2, b^2) < 1$，则 f_1、f_2、h_1 和 h_2 均为常数。

将定理 7.2 应用于 $f_1 = \mathbf{1}_K$、$f_2 = \mathbf{1}_L$、$h_1 = \mathbf{1}_{\frac{1}{b}K \times \frac{1}{a}L}$ 和 $_- h_2 = \mathbf{1}_{aK+bL}$，即可立即得到引言中定理 1.4 和定理 1.5 的等号情形。

7.1 部分高斯饱和

我们对定理 7.1 和定理 7.2 的证明基于以下内容。

命题 7.3 （等号的部分高斯饱和）。设 $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{(o)\ LC}(\gamma^n)$，并令$h_1\colon\ \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}_+$和 $h_2\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$表示两个对数凹函数。令 $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$。假设

$$f_1(x_1)f_2(x_2) \leq \frac{1}{\mathrm{FR}_{LC}} h_1(\alpha x_1, \beta x_2) h_2(a x_1 + b x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \tag{7.5}$$

其中 $\mathrm{FR}_{LC} \in (0, \infty)$ 是对应于我们的 *Brascamp–Lieb* 数据（*5.1*）的正反向常数，并且我们有等号

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1 d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} f_2 d\gamma = \int_{\mathbb{R}^n} h_1(y, y) d\gamma(y) \int_{\mathbb{R}^n} h_2 d\gamma > 0. \tag{7.6}$$

记

$$\mathcal{A}_i := \mathrm{Cov}(f_i \gamma), \quad \bar{\mathcal{B}} := \mathrm{Cov}(y \mapsto h_1(y, y)\gamma(y)), \quad \mathcal{C} := \mathrm{Cov}(h_2 \gamma),$$

and

$$A_i := \mathcal{A}_i^{-1} - \mathrm{Id}_n, \quad \bar{B} := \bar{\mathcal{B}}^{-1} - \mathrm{Id}_n, \quad C := \mathcal{C}^{-1} - \mathrm{Id}_n.$$

那么 $A_1, A_2, B, C \in$对称矩阵空间$_{\geq 0}(n)$，并且存在常数 $p_{A_1}, p_{A_2}, p_{\bar{B}}, p_C > 0$ 以及一个对数凹函数 $H\colon\ \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}_+$ 使得

$$p_{A_1} g_{A_1}(x_1) \cdot p_{A_2} g_{A_2}(x_2) \leq \frac{1}{\mathrm{FR}_{LC}} H(\alpha x_1, \beta x_2) \cdot p_C g_C(a x_1 + b x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$
$$H(y, y) = p_{\bar{B}} g_{\bar{B}}(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^n} p_{A_1} g_{A_1} d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} p_{A_2} g_{A_2} d\gamma = \int_{\mathbb{R}^n} p_{\bar{B}} g_{\bar{B}} d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} p_C g_C d\gamma. \tag{7.7}$$

证明。注意到 $\mathcal{A}_i$，$\mathcal{B}$，$\mathcal{C} \leq \mathrm{Id}_n$ 由命题 3.13 得出，因此 A_i，B，$C \in$对称矩阵空间$_{\geq 0}(n)$。由于（7.6）中取等号且四个积分均为正，我们可以对 f_1，f_2，h_1，h_2进行归一化，并假设四个积分均等于 1，而不改变（7.5）。

与第 4 节中步骤 1 和 2 的证明一样，令 $f^{(0)} = f$对于 $f \in \{f_1, f_2, h_1, h_2\}$，并归纳地定义 $f^{(N+1)}\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$对于 $f \in \{f_1, f_2, h_2\}$，以及 $h_1^{(N+1)}\colon\ \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}_+$，其中

$$f^{(N+1)}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f^{(N)}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) f^{(N)}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) d\gamma_{\mathrm{Id}_n}(y)\ ,\ x \in \mathbb{R}^n,$$
$$h_1^{(N+1)}(x) := \int_{\mathbb{R}^{2n}} h_1^{(N)}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) h_1^{(N)}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) d\gamma_{\Gamma_1}(y)\ ,\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} h_1^{(N)}\left(\frac{(x_1, x_2)}{\sqrt{2}} + \frac{(y, y)}{\sqrt{2}}\right) h_1^{(N)}\left(\frac{(x_1, x_2)}{\sqrt{2}} - \frac{(y, y)}{\sqrt{2}}\right) d\gamma_{\mathrm{Id}_n}(y).$$

分别记为 $f \in \{f_1, f_2, h_2\}$ 和 $\mathfrak{f} \in \{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{h}_2\}$，

$$\mathfrak{f}^{(N)} := f^{(N)} \gamma_{\mathrm{Id}_n} = f^{(N)} \frac{g_{\mathrm{Id}_n}}{(2\pi)^{n/2}}\ ,\ \mathfrak{h}_1^{(N)} := h_1^{(N)} \frac{g_{\frac{1}{2}\mathrm{Id}_{2n}}}{(2\pi)^{n/2}},$$

利用 (3.2) 和 $\left\langle \frac{1}{2}\mathrm{Id}_{2n}(y,\ y),\ (y,\ y)\right\rangle = \langle \mathrm{Id}_n y,\ y\rangle$，很容易验证它们满足：

$$\mathfrak{f}^{(N+1)}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{f}^{(N)}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)\mathfrak{f}^{(N)}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)dy = 2^{n/2}(\mathfrak{f}^{(N)} * \mathfrak{f}^{(N)})(\sqrt{2}x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
$$\mathfrak{h}_1^{(N+1)}(x_1,x_2) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{h}_1^{(N)}\left(\frac{(x_1,x_2)}{\sqrt{2}}+\frac{(y,y)}{\sqrt{2}}\right)\mathfrak{h}_1^{(N)}\left(\frac{(x_1,x_2)}{\sqrt{2}}-\frac{(y,y)}{\sqrt{2}}\right)dy, \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

我们将进一步把 $h_1^{(N)}$ 和 $\mathfrak{h}_1^{(N)}$ 在对角矩阵上的限制记为

$$\bar{h}_1^{(N)}(y) := h_1^{(N)}(y,y)\ ,\ \bar{\mathfrak{h}}_1^{(N)}(y) := \mathfrak{h}_1^{(N)}(y,y) = \bar{h}_1^{(N)}(y)\frac{g_{\mathrm{Id}_n}(y)}{(2\pi)^{n/2}}\ ,\ y \in \mathbb{R}^n,$$

并注意到

$$\bar{\mathfrak{h}}_1^{(N+1)}(y) = 2^{n/2}(\bar{\mathfrak{h}}_1^{(N)} * \bar{\mathfrak{h}}_1^{(N)})(\sqrt{2}y), \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

回顾定理 2.6，有$\mathrm{FR}_{LC} = \mathrm{FR}_{LC}^{(e)} = \mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})}$。由命题 3.15 的 (1) 和 (4)，应用于 $D = {}^{1}\mathrm{FR}_{LC}$，可得 $f^{(N)}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ 和 $h_1^{(N)}: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}_+$ 对所有 $N \geq 1$仍保持对数凹，并且

$$f_1^{(N)}(x_1)f_2^{(N)}(x_2) \leq \frac{1}{\mathrm{FR}_{LC}}h_1^{(N)}(\alpha x_1, \beta x_2)h_2^{(N)}(ax_1+bx_2) \quad \forall x_1,x_2 \in \mathbb{R}^n. \tag{7.8}$$

此外，命题 3.15 验证了对于 $\mathfrak{f} \in \{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1\}$，对所有 $N \geq 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{f}^{(N)}(x)dx = 1\ ,\ \mathrm{bar}(\mathfrak{f}_1^{(N)}) = \mathrm{bar}(\mathfrak{f}_2^{(N)}) = 0,$$

and

$$\mathrm{bar}(\mathfrak{h}_2^{(N)}) = 2^{N/2}\mathrm{bar}(\mathfrak{h}_2^{(0)})\ ,\ \mathrm{bar}(\bar{\mathfrak{h}}_1^{(N)}) = 2^{N/2}\mathrm{bar}(\bar{\mathfrak{h}}_1^{(0)}). \tag{7.9}$$

我们将在下面的引理 7.4 中看到，上述结果足以推出 (7.9) 中的重心必然全部等于 0；让我们在此假设下继续。

由于 $\mathfrak{f}_1^{(0)}, \mathfrak{f}_2^{(0)}, \bar{\mathfrak{h}}_1^{(0)}, \mathfrak{h}_2^{(0)}$ 是对数凹的（事实上，比 g_{Id_n}更加对数凹）且可积，它们都是有界的（例如由引理 3.4）。如第 4 节中的步骤 1 那样应用局部中心极限定理，我们在$\mathbb{R}^n$上有如下逐点收敛：

$$\lim_{N\to\infty} \mathfrak{f}_i^{(N)} = \gamma_{\mathrm{Cov}(\mathfrak{f}_i^{(0)})} = \gamma_{\mathcal{A}_i},\ \lim_{N\to\infty} \bar{\mathfrak{h}}_1^{(N)} = \gamma_{\mathrm{Cov}(\bar{\mathfrak{h}}_1^{(0)})} = \gamma_{\bar{\mathcal{B}}},\ \lim_{N\to\infty} \mathfrak{h}_2^{(N)} = \gamma_{\mathrm{Cov}(\mathfrak{h}_2^{(0)})} = \gamma_{\mathcal{C}}.$$

因此，我们得到逐点收敛：

$$\lim_{N\to\infty} f_i^{(N)} = \frac{\gamma_{\mathcal{A}_i}}{\gamma_{\mathrm{Id}_n}} = p_{A_i}g_{A_i},\ \lim_{N\to\infty} \bar{h}_1^{(N)} = \frac{\gamma_{\bar{\mathcal{B}}}}{\gamma_{\mathrm{Id}_n}} = p_{\bar{B}}g_{\bar{B}},\ \lim_{N\to\infty} h_2^{(N)} = \frac{\gamma_{\mathcal{C}}}{\gamma_{\mathrm{Id}_n}} = p_C g_C,$$

对于适当的常数 $p_{A_i}, p_{\bar{B}}, p_C > 0$。因此，定义

$$H(x_1,x_2) := \liminf_{N\to\infty} h_1^{(N)}(x_1,x_2)\ ,\ x_1,x_2 \in \mathbb{R}^n,$$

并在 (7.8) 中取 $N \to \infty$ 的逐点下极限，我们得到：

$$p_{A_1} g_{A_1}(x_1) \cdot p_{A_2} g_{A_2}(x_2) \le \frac{1}{\mathrm{FR}_{LC}} H(\alpha x_1, \beta x_2) \cdot p_C g_C(a x_1 + b x_2) \ \ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

还需指出，$H(x_1,\ x_2)$ 是对数凹函数，因为它是对数凹函数列的下极限；$H(y,\ y) = p_{\bar{B}} g_{\bar{B}}(y)$；并且 (7.7) 中的 4 个积分都等于 1，因此 (7.7) 成立，因为例如

$$\int_{\mathbb{R}^n} p_C g_C d\gamma = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\gamma_{\mathcal{C}}}{\gamma_{\mathrm{Id}_n}} d\gamma = \int_{\mathbb{R}^n} d\gamma_{\mathcal{C}} = 1.$$

至此，证明完成，但还需用到下面的引理 7.4。 □

引理 7.4. *在命题 7.3 的证明中相同的假设和记号下，我们有*

$$\mathrm{bar}(\bar{\mathfrak{h}}_1^{(0)}) = 0 \ , \ \mathrm{bar}(\mathfrak{h}_2^{(0)}) = 0.$$

证明. 为简化记号，我们将 $\mathfrak{h}_1^{(N)} = \bar{\mathfrak{h}}_1^{(N)}$ 简写为（这不会与命题 7.3 证明中使用的记号 $\mathfrak{h}_1^{(N)}$ 混淆）。

记 $\xi_j := \mathrm{bar}(\mathfrak{h}_j^{(0)})$，并回忆 $\xi_j^{(N)} := \mathrm{bar}(\mathfrak{h}_j^{(N)}) = 2^{N/2}\xi_j,\ j = 1,\ 2$。在 $(x_1,\ x_2) = (\frac{1}{\alpha} y,\ \frac{1}{\beta} y)$ 处计算 (7.8)，则对所有 $N \ge 1$,

$$f_1^{(N)}(y/\alpha) f_2^{(N)}(y/\beta) \le \frac{(2\pi)^n}{\mathrm{FR}_{LC}} e^{\frac{(a/\alpha + b/\beta)^2 + 1}{2} |y|^2} \mathfrak{h}_1^{(N)}(y) \mathfrak{h}_2^{(N)}((a/\alpha + b/\beta) y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

还要记住 $\int \mathfrak{h}_j^{(N)}(y) dy = 1$，并且根据命题 3.15，$\mathrm{Cov}(\mathfrak{h}_j^{(N)}) = \mathrm{Cov}(\mathfrak{h}_j^{(0)})$。

现在，反设 $\xi_j \neq 0$。记半空间 $H_\theta := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y,\ \theta \rangle \le 0\}$，由马尔可夫–切比雪夫不等式应用于 $\mathfrak{h}_j^{(N)}$ 在 $u_j = \xi_j/|\xi_j| = \xi_j^{(N)}/|\xi_j^{(N)}|$ 的线性张成空间上的投影，可得：

$$\int_{H_{\xi_j}} \mathfrak{h}_j^{(N)}(y) dy \le \frac{\langle \mathrm{Cov}(\mathfrak{h}_j^{(N)}) u_j, u_j \rangle}{|\xi_j^{(N)}|^2} = \frac{\langle \mathrm{Cov}(\mathfrak{h}_j^{(0)}) \xi_j, \xi_j \rangle}{2^N |\xi_j|^4}.$$

回想一下，对于所有 $N \ge 1$，$\mathfrak{h}_j^{(N)}$ 仍然比 g_{Id_n} 更对数凹，特别地，它是对数凹的。因此，由引理 3.4,

$$\left\| \mathfrak{h}_j^{(N)} \right\|_{L^\infty} \le \frac{C_n}{\det^{\frac{1}{2}} \mathrm{Cov}(\mathfrak{h}_j^{(N)})} = \frac{C_n}{\det^{\frac{1}{2}} \mathrm{Cov}(\mathfrak{h}_j^{(0)})} := M_j < \infty \quad \forall N \ge 1.$$

现在，如果 $\xi_1 \neq 0$，那么：

$$\frac{\mathrm{FR}_{LC}}{(2\pi)^n} e^{-\frac{(a/\alpha + b/\beta)^2 + 1}{2} |y|^2} f_1^{(N)}(y/\alpha) f_2^{(N)}(y/\beta) \le M_2 \mathfrak{h}_1^{(N)}(y),$$

并对 H_{ξ_1} 积分，我们得到：

$$\frac{\mathrm{FR}_{LC}}{(2\pi)^n} \int_{H_{\xi_1}} e^{-\frac{(a/\alpha + b/\beta)^2 + 1}{2} |y|^2} f_1^{(N)}(y/\alpha) f_2^{(N)}(y/\beta) dy \le \frac{M_2 \langle \mathrm{Cov}(\mathfrak{h}_1^{(0)}) \xi_1, \xi_1 \rangle}{2^N |\xi_1|^4}.$$

回想一下，$\lim_{N\to\infty} f_i^{(N)} = p_{A_i} g_{A_i}$（逐点成立），因此 Fatou引理意味着，当 $N \to \infty$ 趋于极限时，左侧的下极限有一个下界，即在某个半平面上对中心高斯函数积分，故该下界严格为正；另一方面，右侧趋于 0，矛盾。

同样，如果 $\xi_2 \neq 0$，那么：

$$\frac{\mathrm{FR}_{LC}}{(2\pi)^n} e^{-\frac{(a/\alpha+b/\beta)^2+1}{2}|y|^2} f_1^{(N)}(y/\alpha) f_2^{(N)}(y/\beta) \leq M_1 \mathfrak{h}_2^{(N)}((a/\alpha+b/\beta)y),$$

因此，对 H_{ξ_2} 积分后，我们得到

$$\frac{\mathrm{FR}_{LC}}{(2\pi)^n} \int_{H_{\xi_2}} e^{-\frac{(a/\alpha+b/\beta)^2+1}{2}|y|^2} f_1^{(N)}(y/\alpha) f_2^{(N)}(y/\beta) dy \leq \frac{M_1 \langle \mathrm{Cov}(\mathfrak{h}_2^{(0)})\xi_2, \xi_2 \rangle}{2^N (a/\alpha+b/\beta)^n |\xi_2|^4},$$

再次得到矛盾，因为 $N \to \infty$。由此可知 $\xi_1 = \xi_2 = 0$，证明完毕。

□

注记7.5. 从证明中可以清楚看出，命题 7.3 适用范围远比我们这里所用的特定 Brascamp–Lieb 数据 (5.1) 广泛，但此处我们不作进一步讨论。

7.2 结论

定理 *7.1* 的证明。 回顾一下，在此情形下，根据定理 5.1，$\mathrm{FR}_{LC} = \mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})} = 1$。结合命题 7.3 和推论 5.8，我们推得 $C = 0$，因此 $\mathrm{Cov}(h_2\gamma) = \mathcal{C} = \mathrm{Id}_n$。根据命题 3.13，这意味着 h_2 必定恒等于某个常数$c > 0$。因此

$$f_1(x_1) f_2(x_2) \leq c \cdot h(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

并在对角矩阵 $(x_1, x_2) = (y, y)$ 上对 γ 积分，得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1 f_2 d\gamma \leq c \int_{\mathbb{R}^n} h(y, y) d\gamma = \int_{\mathbb{R}^n} f_1 d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} f_2 d\gamma,$$

其中在最后一步变换中再次使用了 (7.2)。另一方面，根据 [31], 中建立的关于 $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{(o)LC}(\gamma)$ 的高斯相关不等式，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1 f_2 d\gamma \geq \int_{\mathbb{R}^n} f_1 d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} f_2 d\gamma,$$

因此，等号必须成立。根据 [31, 定理 5.5], 中等号情形的刻画，我们必须有 $f_1(x) = f_1(P_E x)$ 且 $f_2(x) = f_2(P_{E^\perp} x)$，其中某个线性子空间为 $E \subset \mathbb{R}^n$，并且对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$ 都成立。最后，由于 $f_1(y) f_2(y) \leq c \cdot h(y, y)$，且它们关于 γ 的积分相同，因此这些表达式对几乎处处的 $y \in \mathbb{R}^n$都必须相同。证明至此完成。

□

定理 7.2 的证明。回顾一下，在这种情况下，根据定理 6.1，有 $\mathrm{FR}_{LC}=\mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})}=1$。结合命题 7.3 和推论 6.7 的等号情形，我们先处理 $\max(a^2,b^2)<1$ 的情况。在这种情况下，推论 6.7 蕴含 $A_1=A_2=\bar{B}=C=0$，因此 $\mathrm{Cov}(f_i\gamma)=\mathcal{A}_i=\mathrm{Id}_n$，$\mathrm{Cov}(y\mapsto h_1(y,y)\gamma(y))=\mathrm{Id}_n$，且 $\mathrm{Cov}(h_2\gamma)=\mathcal{C}=\mathrm{Id}_n$。由命题 3.13 可知，$f_1$、$f_2$、$y\mapsto h_1(y,y)$ 和 h_2 必须恒等于某些正常数 p_1、p_2、q_1 和 q_2。根据 (7.4)，有 $p_1p_2=q_1q_2$；而 (7.3) 蕴含，对于所有 $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$，$h_1(x_1,x_2)\geq\frac{p_1p_2}{q_2}=q_1>0$。由于 h_1 是对数凹的，可知 if 必须为常数（等于 q_1）。

当 $a^2<1=b^2$ 时，推论 6.7 蕴含 $A_2=C=0$。因此，$\mathrm{Cov}(f_2\gamma)=\mathcal{A}_2=\mathrm{Id}_n$，且 $\mathrm{Cov}(h_2\gamma)=\mathcal{C}=\mathrm{Id}_n$，所以命题 3.13 蕴含 f_2 和 h_2 必须分别恒等于某些正的常数 p_2 和 q_2。考察 $(x_1,\ x_2)=(y,\ ay)$ 上的 (7.3)，可知对所有 $y\in\mathbb{R}^n$，$f_1(y)\leq\frac{q_2}{p_2}h_1(y,\ y)$。但由于 (7.4) 中等号成立，它们关于 γ 的积分相等，因此它们几乎处处在 $y\in\mathbb{R}^n$ 上重合。交换 a，b 的角色，证明即告完成。 □

8 一般问题

前几节的结果引出了以下自然问题：对于哪些 α，β，a，$b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，对于所有具有非空内部且高斯重心位于原点的凸集 K，$L\subset\mathbb{R}^n$，是否都有

$$\gamma(K)\gamma(L)\leq\gamma(\alpha K\cap\beta L)\gamma(aK+bL)\ ?$$

由于 γ 在反射下不变，必要时交换 K，$-K$ 与 L，$-L$，这等价于要求

$$\gamma(K)\gamma(L)\leq\gamma(|\alpha|\,K\cap|\beta|\,L)\gamma(|a|\,K+\sigma\,|b|\,L)\ ,\ \sigma=\mathrm{sgn}(\alpha\beta ab). \tag{8.1}$$

这将问题化简为 α，β，a，$b>0$ 且 $\sigma\in\{-1,+1\}$的情形，因此我们在这些假设下继续讨论。

取 K 或 L 等于 $\mathbb{R}^n$（或其近似值），显然必有α，$\beta\geq1$。将 (8.1) 应用于 λK，λL，并令 $\lambda\to0$取极限，必有

$$|K|\,|L|\leq|\alpha K\cap\beta L|\,|aK+\sigma bL|\,,$$

对于所有具有非空内部、重心位于原点的有界凸集 K，$L\subset\mathbb{R}^n$ 均成立。等价地，将 K 和 L分别替换为 βK 和 αL，必有

$$|K|\,|L|\leq|K\cap L|\,|a\beta K+\sigma b\alpha L|\,,$$

因此，取 L 为以原点为中心的小球，可知必有 $a\beta$，$b\alpha\geq1$。由此，我们能期望的最好结果是 $\alpha=\max(1/b,\ 1)$且 $\beta=\max(1/a,\ 1)$。这引出以下结论：

问题 8.1. 对于每个 $\sigma\in\{-1,+1\}$，刻画满足以下条件的 $a,b>0$

$$\gamma^n(K)\gamma^n(L)\leq\gamma^n(\max(\frac{1}{b},1)K\cap\max(\frac{1}{a},1)L)\gamma^n(aK+\sigma bL), \tag{8.2}$$

对所有 $n\geq1$，以及所有具有非空内部且高斯重心位于原点的凸集 K、$L\subset\mathbb{R}^n$。

引理 8.2。 如果对于上述所有 K、L，式 *(8.2)* 均成立，那么必有 $a+b\geq 1$。

证明。 考虑柱集后，我们可以将问题归约到情形 $n=1$。取 $K=L=[-R,R]$，(8.2) 推出

$$\gamma^1([-R,R])^2\leq\gamma^1((a+b)[-R,R]).$$

记 $\Phi_0(R)=\gamma^1([R,\infty))$，则可推出

$$\Phi_0((a+b)R)\leq 2\Phi_0(R).$$

令 $R\to\infty$，并使用标准高斯尾部估计

$$\frac{R}{R^2+1}\gamma^1(R)\leq\Phi_0(R)\leq\frac{1}{R}\gamma^1(R),$$

即可轻易得出所述结论。 □

注意，必要条件 $\alpha,\beta,a+b\geq 1$ 已经意味着，当 $\lambda<1/2$ 或 $\lambda>1$ 时，(8.1) 对 $a=b=1/\alpha=1/\beta=\lambda$ 不成立。另一方面，定理 1.5 验证了 (8.1) 对 $\sigma=+1$ 和 $\lambda\in[1/2,1]$ 成立。综合起来，这就验证了推论 1.6。

8.1 正向-反向高斯饱和的局限性

鉴于引理 8.2，可以合理地预期 (8.2) 对所有 $a+b\geq 1$ 都成立。明确的是，在该定义域的某些部分，高斯饱和并不成立。本小节将给出一些反例。

- $\sigma=+1$, $a,\ b\in(0,\ 1)$, $a+b=1$。在这种情况下，除非 $a=b=1/2$，否则高斯饱和无法推出 (8.2)（后一种情形已在命题 6.4 中验证）。事实上，我们有

$$\gamma(K)\gamma(L)\leq \mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})}(a,b)\cdot\gamma\left(\frac{1}{b}K\cap\frac{1}{a}L\right)\gamma(aK+bL),$$

其中，高斯饱和常数 $\mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})}(a,\ b)=\mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})}$ 定义为

$$(\mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})})^2:=\sup\frac{\det(\mathrm{Id}_n+\bar{B})\det(\mathrm{Id}_n+C)}{\det(\mathrm{Id}_n+A_1)\det(\mathrm{Id}_n+A_2)},\tag{8.3}$$

上确界取遍满足以下条件的 $A_1,\ A_2,\ C\in$ 对称矩阵空间$_{\geq 0}(n)$ 和 $B\in$ 对称矩阵空间$_{\geq 0}(2n)$:

$$\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}\geq\begin{pmatrix}\frac{1}{b^2}B_1&\frac{1}{ab}B_2\\\frac{1}{ab}B_2^*&\frac{1}{a^2}B_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a^2C&abC\\abC&b^2C\end{pmatrix}.$$

通过检验柱集 $K,\ L$，只需检查维度$n=1$中的情形。对于任意 $r,\ s\geq 0$，以下选择满足该要求:

$$A_1=\frac{1}{b^2}sr,\ A_2=\frac{1}{a^2}s,\ C=\frac{1}{a^2b^2}s\frac{r}{r+1},\ B=s\begin{pmatrix}\frac{r^2}{r+1}&-\frac{r}{r+1}\\-\frac{r}{r+1}&\frac{1}{r+1}\end{pmatrix}\geq 0.$$

将其代入（8.3）后，经过冗长的计算可验证

$$(\mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})})^2 - 1 \geq \frac{s\Big((r+1)\phi(r) - 4sr^2\Big)}{(b^2+sr)(a^2+s)(r+1)^2},$$

其中

$$\phi(r) := a^2(b^2-1)r^2 + (1-2a^2b^2-(a^2+b^2))r + (a^2-1)b^2.$$

若 $r>0$ 满足 $\phi(r)\geq 0$，则我们可以选择

$$s(r) = \frac{\phi(r)(r+1)}{8r^2} \geq 0,$$

使得

$$(\mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})})^2 - 1 \geq \frac{4r^2 s(r)^2}{(b^2+s(r)r)(a^2+s(r))(r+1)^2}. \tag{8.4}$$

取

$$r_a := \frac{(1-a)(1-a+a^2)}{a^2(2-a)} > 0,$$

经过另一番冗长计算可得

$$\phi(r_a) = \frac{(1-a)^2(2a-1)^2}{a(2-a)} \geq 0.$$

因此，对于 $a\in(0,1)$，$\phi(r_a)=0$ 当且仅当 $a=1/2$。由此，若 $a\neq 1/2$，则$\phi(r_a)>0$，进而 $s(r_a)>0$，故 (8.4) 验证了 $(\mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})})^2>1$。

- $\sigma=-1$, $a,\ b\in(0,1]$。在这种情况下，除非$a^2+b^2=1$（如 Milman–Pajor 不等式 (1.1) 中所示），否则高斯饱和无法推出 (8.2)。事实上，我们有

$$\gamma(K)\gamma(L) \leq \mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})}(a,b)\cdot\gamma\left(\frac{1}{b}K\cap\frac{1}{a}L\right)\gamma(aK-bL),$$

其中高斯饱和常数 $\mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})}(a,\ b)=\mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})}$由 (8.3) 给出，上确界取遍满足下列条件的 $A_1,\ A_2,\ C\in$ 对称矩阵空间$\geq 0(n)$ 和 $B\in$ 对称矩阵空间$\geq 0(2n)$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2}B_1 & \frac{1}{ab}B_2 \\ \frac{1}{ab}B_2^* & \frac{1}{a^2}B_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2C & -abC \\ -abC & b^2C \end{pmatrix}.$$

通过对柱集 $K,\ L$进行测试，只需检查维数为$n=1$时的情况。对于任意 $z>0$，以下选择满足要求：

$$A_1 = A_2 = z,\ C = \frac{z}{a^2+b^2},\ B = \frac{z}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^4 & a^2b^2 \\ a^2b^2 & a^4 \end{pmatrix} \geq 0.$$

由于 $\bar{B}=(a^2+b^2)z$，我们看到

$$(\mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})})^2(a,b) \geq \sup_{z>0}\frac{(1+(a^2+b^2)z)(1+\frac{1}{a^2+b^2}z)}{(1+z)^2} = \sup_{z>0}\frac{1+z^2+(a^2+b^2+\frac{1}{a^2+b^2})z}{1+z^2+2z}.$$

特别地，由算术几何平均不等式，

$$1 \geq \mathrm{FR}_{LC}^{(\mathcal{G})}(a,b) \quad \Rightarrow \quad a^2+b^2+\frac{1}{a^2+b^2} \leq 2 \quad \Rightarrow \quad a^2+b^2=1.$$

不难验证，逆向蕴含同样成立，但由于这只能恢复原始的 Milman–Pajor 不等式（1.1），因此我们在此不再进行证明。

8.2 统一表述

由于当 $\sigma=-1$ 不满足我们的正反向Brascamp–Lieb约化所要求的高斯饱和充分条件时，“经典”情形，除了已知的（Milman–Pajor）情形 $a^2+b^2=1$ 外，我们在本文中只考虑“共轭”情形 $\sigma=+1$。正如我们在前几节中已经看到的，约化为高斯饱和问题后，对于共轭情形下的广泛范围（$a,\ b$），可以得到一个尖锐常数。下面，我们给出一个统一表述，从而部分解决 $\sigma=+1$ 的问题 8.1。

定理 8.3。设 $a,\ b\geq 0$。

(1) 如果

$$3\min(a^2,b^2)+\max(a^2,b^2)\geq 1,$$

那么，对于任意具有非空内部且高斯重心位于原点的凸集 K、$L\subset\mathbb{R}^n$，均有

$$\gamma(K)\gamma(L)\leq\gamma(\max(\frac{1}{b},1)K\cap\max(\frac{1}{a},1)L)\gamma(aK+bL), \tag{8.5}$$

等号成立的条件如下：

(a) 此外，$0<a<1\leq b$ 当且仅当 $L=\mathbb{R}^n$。*(b)* 此外，$0<b<1\leq a$ 当且仅当 $K=\mathbb{R}^n$。*(c)* 此外，$\max(a,b)<1$ 当且仅当 $K=L=\mathbb{R}^n$。*(d)* 此外，$\min(a,b)\geq 1$ 当且仅当 *(1.7)* 成立。

(2) 当

$$a+b<1,$$

那么，对于某些如上所述的 K,L，*(8.5)* 不成立。

证明。当 $\min(a,b)=0$ 时，结论显然；当 $a,b\geq 1$ 时（尤其是 $a+b>1$），定理 1.3 已处理过这种情形；当 $0<a,b\leq 1$ 时，定理 1.5 已处理过这种情形。至于剩下的情形 $0<a\leq 1\leq b$（a 和 b互换时同理），我们要证明的是

$$\gamma(K)\gamma(L)\leq\gamma(K\cap\frac{1}{a}L)\gamma(aK+bL).$$

但是，由于 L 包含原点，$bL\supset L$ 因此，这个不等式及其等号成立条件可由 $b=1$ 的情形推出，而该情形已经处理过了。证明至此完成。

□

这样还剩下一小段 (a,b) 取值范围，即

$$\{a,b>0,\ a+b\geq 1,\ 3\min(a^2,b^2)+\max(a^2,b^2)<1\},$$

对于这些情形，(8.5) 是否成立仍未有定论；见图 8.1。

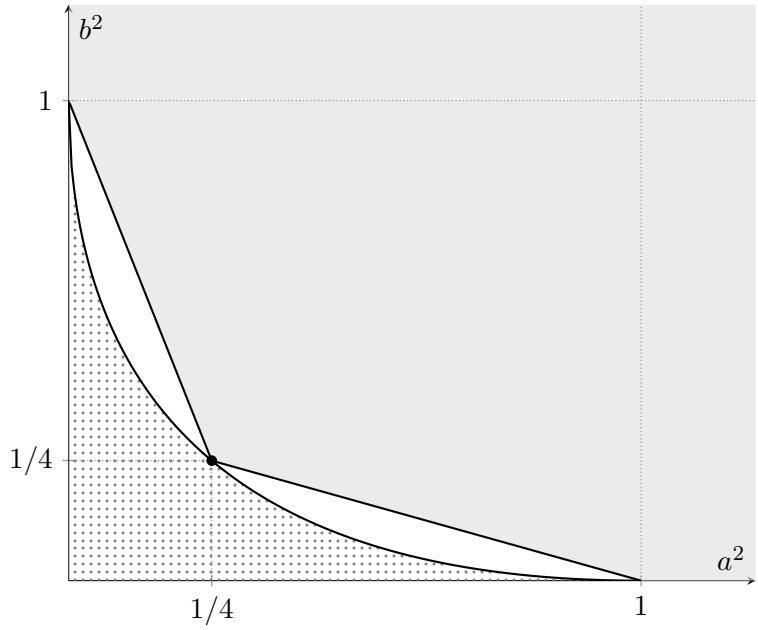

图 8.1：定理 8.3 涵盖的 (a^2,b^2) 的各个区域：(8.5) 在灰色区域内成立，在点状区域内不成立，而在白色区域内仍未有定论。

9 几何不等式的函数表述

本节将推导适用于凸集的高斯（共轭）罗杰斯–谢泼德不等式的一种等价函数表述，从而证明定理 1.8；此外，还将给出本文所得几何不等式的若干其他等价函数表述。

回顾一下，我们定义

$$\max\nolimits_0(p,q):=\begin{cases}\max(p,q) & p,q>0\\ 0 & pq=0\end{cases},$$

并且，对于两个函数 $u,v:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$，记

$$u\Box v(z):=\sup_{z=x+y}\min(u(x),v(y)).$$

我们也用 $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 表示：

$$u_c:=u(\cdot/c).$$

注 9.1。 只要 u, v 是 Borel 可测的, $u\square v$ 就是解析集，因此也是 Lebesgue 可测的。

命题 9.2。 设 $\mathcal{C}$ 表示由 $\mathbb{R}^n$的 *Borel* 子集组成的一个族，并设 $\mu_i,\ i=1,\ldots,4$表示定义在赋有勒贝格 σ-代数的 $\mathbb{R}^n$ 上的四个测度。那么，对于任意固定的 $\alpha,\beta,a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，以下陈述等价：

(1) 对所有 $K,L\in\mathcal{C}$:

$$\mu_1(K)\mu_2(L)\leq\mu_3(\alpha K\cap\beta L)\mu_4(aK+bL).$$

(2) 对所有上水平集属于 $\mathcal{C}$的函数 $f,h:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$，均有：

$$\int f d\mu_1\int h d\mu_2\leq\int\max{}_0(f_\alpha,h_\beta)d\mu_3\int f_a\square h_b d\mu_4.$$

证明需要用到以下四函数定理的一个初等版本。该版本最初由 Ahlswede 和 Daykin 在离散格 [1], 上证明，随后在 [9]中推广到连续情形（另见 [21]中的重要推广）。

引理 9.3。 设 $a,b,c,d:(0,\infty)\to\mathbb{R}_+$表示满足以下条件的四个可测函数：

$$a(t)b(s)\leq c(t\vee s)d(t\wedge s)\quad\forall t,s>0.$$

那么：

$$\int_0^\infty a(t)dt\int_0^\infty b(s)ds\leq\int_0^\infty c(p)dp\int_0^\infty d(q)dq.$$

˜证明。 定义 $h(r_0):=h(e^{r_0})e^{r_0}$对所有 $h\in\{a,b,c,d\}$和 $r_0\in\mathbb{R}$均成立。由于 $t_0+s_0=t_0\wedge s_0+t_0\vee s_0$我们有：

$$\tilde{a}(t_0)\tilde{b}(s_0)\leq\tilde{c}(t_0\wedge s_0)\tilde{d}(t_0\vee s_0)\quad\forall t_0,s_0\in\mathbb{R},$$

因此，根据 $\mathbb{R}$ [9, 21] 上的四函数定理，我们得到：

$$\int_{-\infty}^\infty\tilde{a}(t_0)dt_0\int_{-\infty}^\infty\tilde{b}(s_0)ds_0\leq\int_{-\infty}^\infty\tilde{c}(p_0)dp_0\int_{-\infty}^\infty\tilde{d}(q_0)dq_0.$$

在四个积分中应用变量替换 $r=e^{r_0}$ 后，这恰好就是所要证明的不等式。

□

命题 *9.2* 的证明。 显然，将其应用于 $f=\mathbf{1}_K$和 $h=\mathbf{1}_L$即可由 (2) 推出 (1)，因为 $\max{}_0((\mathbf{1}_K)_\alpha,(\mathbf{1}_L)_\beta)=\mathbf{1}_{\alpha K\cap\beta L}$且 $(\mathbf{1}_K)_a\square(\mathbf{1}_L)_b=\mathbf{1}_{aK+bL}$。 为证明反向结论，定义以下四个函数，它们定义在 $(0,\infty)$上：

$$a(t):=\mu_1\{x:f(x)\geq t\}\ ,\ b(s):=\mu_2\{y:h(y)\geq s\},$$

and

$$c(p):=\mu_3\{x:\max{}_0(f_\alpha(x),h_\beta(x))\geq p\}\ ,\ d(q):=\mu_4\{z:f_a\square h_b(z)\geq q\}.$$

若 $K:=\{x:\ f(x)\ \geq t\}$ 且 $L:=\{y:\ h(y)\ \geq s\}$，其中 $t,s>0$，注意：

$$\alpha K\cap\beta L\subset\{x:\max{}_0(f_\alpha(x),h_\beta(x))\geq t\vee s\}\ ,$$
$$aK+bL\subset\{x+y:\min(f_a(x),h_b(y))\geq t\wedge s\}\subset\{z:f_a\square h_b(z)\geq t\wedge s\}.$$

因此，我们的假设恰好意味着：

$$a(t)b(s)\leq c(t\vee s)d(t\wedge s)\quad\forall t,s>0.$$

由四函数引理 9.3 可得：

$$\int_0^\infty a(t)dt\int_0^\infty b(s)ds\leq\int_0^\infty c(p)dp\int_0^\infty d(q)dq,$$

由尾部公式即可完成证明。 □

将命题 9.2 应用于 GCRSI (1.8)，即可立即得到定理 1.8。更一般地，将其应用于定理 1.3 和 8.3，可得：

推论 9.4。 设 $\alpha,\beta,a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$。对于所有拟凹博雷尔函数 $f,h:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$，若其上水平集的高斯重心位于原点，则有

$$\int fd\gamma\int hd\gamma\leq\int\max{}_0(f_\alpha,h_\beta)d\gamma\int f_a\square h_bd\gamma,$$

在以下任一情形中：

(1) $\alpha=\beta=1$ 和 $|a|$、$|b|$、$|a+b|\geq1$。

(2) $\alpha=\max(1/b,1)$、$\beta=\max(1/a,1)$、a、$b>0$ 其中 $3\min(a^2,b^2)+\max(a^2,b^2)\geq1$。

鉴于注 1.7，在缩放极限下从 γ 转到勒贝格测度时，唯一值得关注的两种情形是将命题 9.2 应用于 RSSI (1.2) 和 CRSSI(1.9) 不等式所得到的情形。

推论 9.5。 对于任意拟凹博雷尔函数 $f,h:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$，若其上水平集的勒贝格重心位于原点，则对于 $\pm\in\{+,-\}$的两种取值，我们都有：

$$\int fdx\int hdx\leq\int\max{}_0(f,h)dx\int f\square h_\pm dx,$$

其中 $h_\pm:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$ 定义为 $h_\pm(x)\ =h(\pm x)$。

参考文献

[1] R. Ahlswede 和 D. E. Daykin. 关于两个集族的权重、它们的并集与交集的不等式. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 43(3):183–185, 1978.[2] R. Assouline、A. Chor 和 S. Sadovsky. ˇ Sid´ak-Khatri不等式的一个改进及强高斯相关猜想. arXiv:2407.15684, 2024.

[3] D. Bakry、I. Gentil 和 M. Ledoux. 马尔可夫扩散算子分析与几何，第348卷，数学科学基础丛书 /数学科学基本原理/. 施普林格，尚，2014年.[4] F. Barthe. Brascamp-Lieb不等式与凸性. 巴黎科学院报告，数学系列 I，324(8):885–888, 1997.[5] F. Barthe. 关于Brascamp-Lieb不等式的一种逆形式. 数学发明，134(2):335–361, 1998.[6] F. Barthe 和 D. Cordero-Erausquin. 热方程下的逆Brascamp-Lieb不等式. 见《泛函分析的几何方面》，数学讲义第1850卷，第65–71页. 施普林格，柏林，2004.[7] F. Barthe 和 N. Huet. 关于高斯Brunn-Minkowski不等式. 数学研究，191(3):283–304, 2009.[8] F. Barthe 和 P. Wolff. 正高斯核也有高斯极小化子. 美国数学学会回忆录，276(1359):v+90, 2022.[9] C. J. K. Batty 和 H. W. Bollmann. 测度空间及其乘积上的广义 Holley-Preston不等式. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 53(2):157–173, 1980.[10] J. Bennett、A. Carbery、M. Christ 和 T. Tao. Brascamp-Lieb不等式：有限性、结构与极值函数. 几何与泛函分析，17(5):1343–1415, 2008.[11] R. N. Bhattacharya 和 R. R. Rao. 正态逼近与渐近展开，应用数学经典第64卷. 工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州，校订版，2010.[12] P. Billingsley. 概率测度收敛. Wiley概率与统计丛书：概率与统计. 约翰·威利父子公司，纽约，第二版，1999. Wiley-Interscience出版物.[13] S. G. Bobkov. Orlicz空间中密度函数的局部极限定理. J. Math. Sci. (N.Y.), 242(1):52–68, 2019.[14] H. J. Brascamp 和 E. H. Lieb. Young不等式的最佳常数、其逆命题及其向三个以上函数的推广. Advances in Math., 20(2):151–173, 1976.[15] H. J. Brascamp 和 E. H. Lieb. 关于Brunn-Minkowski和Pr´ekopa-Leindler定理的推广，包括对数凹函数的不等式，以及在扩散方程中的应用. J. Func. Anal., 22(4):366–389, 1976.[16] S. Brazitikos、A. Giannopoulos、P. Valettas 和 B.-H. Vritsiou. 各向同性凸体的几何，第196卷，数学调查与专著. 美国数学学会，2014年.[17] E. A. Carlen、E. H. Lieb 和 M. Loss. S^N上 Young不等式的一个尖锐类比及相关熵不等式. 几何分析杂志，14(3):487–520, 2004.[18] L. H. Y. Chen 和 J. H. Lou. 通过Poincar´e型不等式刻画概率分布. Ann. Inst. H. Poincar´e Probab. Statist., 23(1):91–110, 1987.[19] T. A. Courtade 和 J. Liu. 欧氏正反 Brascamp-Lieb不等式：有限性、结构与极值函数. 几何分析杂志，31(4):3300–3350, 2021.[20] T. A. Courtade 和 E. Wang. 无对称性限制的广义Blaschke–Santal´o型不等式. 手稿，arXiv:2509.08998, 2025.[21] D. Halikias、B. Klartag 和 B. A. Slomka. Brunn-Minkowski型不等式的离散变体. 图卢兹数学科学院年刊（第6辑），30(2):267–279, 2021.

[22] E. Hillion、O. Johnson 与 A. Saumard. 正态分布的一个极值性质及其离散类比. 统计与概率快报，145:181–186，2019年。[23] R. A. Horn 与 C. R. Johnson. 矩阵分析. 剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2013年。[24] C. G. Khatri. 关于正态分布的若干不等式及其在同时置信界中的应用. 数学统计年刊，38:1853–1867，1967年。[25] B. Klartag 与 J. Lehec. 利用Guan界对Bourgain切片问题的肯定性解决. 几何与泛函分析，35(4):1147–1168，2025年。[26] R. Lata-la 与 D. Matlak. 高斯相关不等式的Royen的证明. 载于泛函分析的几何方面，数学讲义第2169卷，第265–275页. 施普林格，尚，2017年。[27]E. H. Lieb. 高斯核仅有高斯极大化子. 数学发明，102(1):179–208，1990年。[28] J. Liu、T. A. Courtade、P. W. Cuff 与 S. Verd´u. 正向-反向 Brascamp-Lieb 不等式：熵对偶性与高斯最优性. 熵，20(6):论文编号418，32，2018年。[29] E. Milman. 经由逆 Brascamp–Lieb 的高斯相关. 概率论及相关领域，2025年. https://doi.org/10.1007/s00440-025-01445-x.[30] V. D. Milman 与 A. Pajor. 非对称凸体的熵与渐近几何. 数学进展，152(2):314–335，2000年。[31] S. Nakamura 与 H. Tsuji. 中心对称凸集的高斯相关不等式及等号成立情形. arXiv:2504.04337，2025年。[32] S. Nakamura 与 H. Tsuji. 广义勒让德对偶关系与高斯饱和. 数学发明，243:607–655，2026年。[33] L. D. Pitt. 对称凸集的高斯相关不等式. 概率年刊，5(3):470–474，1977年。[34] C. A. Rogers 与 G. C. Shephard. 与给定凸体相关联的凸体.伦敦数学会杂志，33:270–281，1958年。[35] T. Royen. 高斯相关猜想的一个简单证明及其向某些多元伽马分布的推广. 远东理论统计学杂志，48(2):139–145，2014年。[36] G. Schechtman、Th. Schlumprecht 与 J. Zinn. 论交集的高斯测度. 概率年刊，26(1):346–357，1998年。[37] J. E. Spingarn. 凸集的截面与投影的一个不等式. 美国数学会会刊，118(4):1219–1224，1993年。[38] M. R. Tehranchi. 凸集的高斯测度不等式. 电子概率通讯，22:论文编号51，7，2017年。[39] S. I. Valdimarsson. 论最优传输势的海森矩阵. 比萨高等师范学院科学年刊 *(5)*，6(3):441–456，2007年。[40] Z. ˇSid´ak. 多元正态分布均值的矩形置信域. 美国统计学会杂志，62:626–633，1967年。