arXiv:2602.07989v1 [math.DG] 8 Feb 2026

具有毛细型边界条件的分数阶平均曲率流经典解的存在性

Linlin Fan、*Peibiao Zhao*

摘要

Wang、Weng 和 Xia[《数学年刊》388 (2024年)，第 2]期，研究了半空间中带毛细边界的光滑嵌入毛细超曲面的平均曲率型流，并通过标准偏微分方程理论证实了解的存在性。本文研究半空间中具有毛细型边界的 $C^{1,1}$-正则超曲面的分数阶平均曲率流，并通过不动点论证得到其短时间存在性。

1 引言

过去十年来，分数阶（或非局部）问题一直是一个活跃的研究领域（参见 [10, 24] 及其中的参考文献）。分数阶（或非局部）问题源于应用科学领域的诸多实际问题。引入非局部几何概念，主要是为了模拟具有非局部相互作用的物理系统，例如研究经典周长无法刻画的相变长程相互作用、图像处理中的非局部扩散，以及生物学中细胞膜的非局部能量。我们运用分数阶数学工具研究并刻画非局部几何演化过程。在现代数学中，最先得到严格定义的分数阶几何量是分数阶周长。特别地， [5, 11]中引入了分数阶周长的概念。

分数阶平均曲率最初由 Caffarelli、Roquejoffre 和 Savin 在 [5], 中定义，其中 $H^s_{E_t}$ 是超曲面 E_t 的分数阶平均曲率，而 $H^s_{E_t}$ 可表示为 (1.1)，这里取主值意义

$$H^s_{E_t} = \int_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus E_t} \frac{dy}{|y-x|^{n+1+s}} - \int_{E_t} \frac{dy}{|y-x|^{n+1+s}}. \tag{1.1}$$

它在对分数阶周长进行一阶变分时自然产生。分数阶周长的极小化子通常称为非局部极小集，而它们的

关键词：Schauder估计；分数阶平均曲率流；一般毛细型边界条件；分数阶抛物型拉普拉斯算子

边界称为非局部极小曲面 [27]。分数阶周长和平均曲率也应用于其他领域，例如图像重建和非局部毛细模型([4, 15, 25])。

平均曲率流是指嵌入在黎曼流形中的超曲面或子流形沿其法向方向运动。该运动的速度项是在运动的超曲面或子流形上定义的光滑函数，通常与运动超曲面或子流形的平均曲率及其他几何量有关。平均曲率流的速度项可以有不同的表达形式，因此会产生截然不同的几何现象，详情请见 [1, 2, 12, 16, 18, 19, 26, 28, 32, 33, 36] 。

分数阶平均曲率流的研究起步较晚，目前取得的研究成果也较少。分数阶平均曲率流的定义最早由 Imbert [20]提出。基于两大应用背景——位错动力学和分数阶反应扩散方程的相场理论，Imbert 提出了适用于由奇异积分算子定义的非局部几何流中奇异相互作用势的水平集公式。Imbert 在 [20] 阐明了奇异积分算子对界面曲率的非局部测量作用，通过定义黏性解证明了稳定性和比较原理等关键性质，并建立了该方程的唯一解；此外，还揭示了在特定极限下分数阶平均曲率流收敛到经典平均曲率流。与此同时，从广义流的角度出发，Imbert 在 [20] 给出了几何流的等价定义，并验证了水平集方法的一致性和有效性。分数阶平均曲率流也可以解释为经典平均曲率流的分数阶类比 [7–9, 13, 21, 23]。事实上，分数阶平均曲率流是分数阶周长的 L^2-梯度。

多位作者采用不同方法，在黏性意义下证明了分数阶平均曲率流方程弱解的存在性与唯一性。具体而言，在 [6], Caffarelli 和 Souganidis 证明了阈值动力学格式收敛于由分数阶平均曲率驱动的运动。在 [9], Chambolle、Novaga 和 Ruffini 将 [6] 中的结果推广到了各向异性情形。Chambolle、Novaga 和 Ruffini 证明，在存在时变强迫项的情况下，阈值动力学型算法与分数阶平均曲率驱动的各向异性运动相一致。除了一致性结果之外，Chambolle、Novaga 和 Ruffini 还证明，凸集在演化过程中保持凸性，且有界凸集的演化是唯一确定的。

毛细问题已被研究四十多年。它旨在解释液体在狭窄通道中违背简单重力定律而上升或下降的现象，为土壤水分运动和植物吸水等自然现象提供坚实的物理基础，同时也推动流体力学理论的发展。Young [38] 于1805年首次从数学角度研究毛细曲面，并引入了曲面的平均曲率这一数学概念。此后，Laplace和Gauss相继开展了相关研究。在 [25], 中，Maggi和Valdinoci探讨了通过考虑非局部型表面张力能量，改造经典毛细理论中所用高斯自由能泛函的可能性

该理论。相应的变分原理导出了新的平衡条件，并将其与经典毛细理论中的平均曲率方程和杨氏定律进行了比较。作为这一类问题的一个特例，他们得到了一个具有几何意义的非局部相对等周问题。关于与平均曲率相关的毛细问题研究，详情请参阅 $[17, 28, 35–37]$。

通过采用非局部相互作用的思想，Maggi 和 Valdinoci 在 $[25]$ 重构了毛细现象的能量模型，推导出新的平衡定律，推广了经典理论，并将其与实际观察相结合。这构成了静态非局部毛细能量理论的基础性工作，其核心在于构造非局部能量泛函。本文是对动态分数阶平均曲率流的拓展研究。

对于具有一般毛细型边界条件的经典平均曲率流和平均曲率方程，Wang、Wei 和 Xu 在 $[34]$ 证明，当 Ω 是 $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ 中严格凸的有界 C^3 区域时，存在一个 $C^{2,\sigma}(\bar{\Omega} \times [0, +\infty))$ 解， $\sigma \in (0,1)$。于是自然会产生一个问题：如果 Ω 的正则性不够，例如，它仅为 $C^{1,1}$，该如何解决这个问题？在 $[22]$, Julin 和 La Manna 建立了分数阶平均曲率流经典解的短时间存在性，假设初始集是 $C^{1,1}$-正则的，或者接近一个 C^1 $C^{1+s+\alpha,1}$-正则集。

受上述研究的启发，本文从非局部视角精确地探讨这一问题，建立了带一般毛细型边界条件的分数阶平均曲率流及平均曲率方程的 Schauder估计。

本文主要从经典视角研究集合 $E_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 在一般毛细型边界条件下沿分数阶平均曲率流演化的运动。更具体地，设 M 是一个紧致可定向光滑 n维流形。对于固定的 $s \in (0, 1)$，假设 $\iota_0 := M \times \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1}_+$ 是一个光滑初始嵌入，且 $\iota_0(M)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 中的星形超曲面，并以常接触角 $\theta \in (0, \pi)$ 与 $\partial\mathbb{R}^{n+1}_+$相交。考虑一族嵌入$\iota : M \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}_+$，使得

$$\begin{cases} (\partial_t \iota)^{\perp} = -H^s \nu, & in\ M \times [0, T), \\ \langle \nu, \bar{N} \circ \iota \rangle = -\cos\theta, & on\ \partial M \times [0, T), \\ \iota(\cdot, 0) = \iota_0(\cdot), & in\ M. \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 ν 和 H^s 分别是超曲面 $\iota(\cdot, t)$ 的单位法向量和分数阶平均曲率， $\bar{N}$ 是 $\partial\mathbb{R}^{n+1}_+$ 的单位外法向量场。

我们关注方程 (1.2) 的经典解，并证明在初始集满足 $C^{1,1}$-正则的假设下，经典解具有短时间存在性。

定理1.1。 如果初始超曲面是一个 $C^{1,1}$-正则的星形超曲面，具有毛细边界和常接触角 $\theta \in (0, \pi)$，那么流 (1.2) 会瞬时变得光滑，即每个满足 $t \in (0, T]$ 的曲面 $\iota(\cdot, t)$ 都是 C^∞-超曲面。

注记 1.1。 $C^{1,1}$ 正则性是确保超曲面的 H^s 有界的最优条件。如果正则性不足，那么通过积分定义的 H^s 就不存在。

下面我们概述定理1.1的证明。主定理的证明基于抛物型方程的 Schauder估计。与 [22] 中一样，我们首先利用上半球上的径向函数对流 (1.2) 进行参数化，随后 (1.2) 等价于下列方程

$$\begin{cases} \partial_t\rho(x,t) = A(x,\rho,\nabla_\tau\rho)(\Delta^{\frac{1+s}{2}}\rho(x,t) - H^s_{\mathbb{S}^n_+} \\ \quad +R_{1,\rho}(x) + R_{2,\rho}(x)(\rho(x,t)-1)) & on\ \mathbb{S}^n_+ \times [0,T) \\ \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial\eta} = \cos\theta\sqrt{\rho^2(x,t)+|\nabla_\tau\rho(x,t)|^2}, & on\ \partial\mathbb{S}^n_+ \times [0,T), \end{cases}$$

其中 $A(x,\ \rho,\ \nabla_\tau\rho) := \frac{1}{\sqrt{\rho^2(x,\ t)+|\nabla_\tau\rho\ x\ t\ |^2(,\ )(,\ )}}$，$\Delta^{\frac{1+s}{2}}$ 表示 $\mathbb{S}^n_+$ 上的分数阶拉普拉斯算子，而 $R_{1,\ \rho}(x)$ $R_{2,\ \rho}(x)$ 是非线性项，我们将在第 3 节详细说明。

沿着 $[14, 22]$, 中的思路，我们证明非线性项 $R_{1,\ \rho}(x)$ 和 $R_{2,\ \rho}(x)$ 是可控的，随后利用 Schauder估计和标准的不动点论证，得到一个在空间上具有 $C^{1+s+\alpha}$-正则性的解。分析中的主要困难在于非线性项结构复杂，且毛细型边界条件一般，因此难以证明 $\mathbb{S}^n_+$ 上分数阶热方程的 Schauder 理论。本文的主要贡献在于证明这一正则性步骤。接着我们回顾作者在 [22] 中的结果：通过对方程多次求导并使用归纳法，可以证明 $C^{k+s+\alpha}$-正则性。

在本文中， C 表示正的常数，其值可随行而变化，且仅注明相关依赖关系。

2 记号与预备结果

为阐述本文的主要结果，我们首先介绍后续各节将用到的记号。我们用“ $\cdot$ ”表示 $\mathbb{R}^{n+1}$中两个向量的标准内积。

由于 $\mathbb{S}^n$ 嵌入于 $\mathbb{R}^{n+1}$，它具有由欧几里得度量诱导的度量 g ；同时，诱导度量 g 是标准球面度量。$(\mathbb{S}^n,\ g)$是一个黎曼流形。 $\mathbb{S}^n$ 上的光滑向量场记作 $\mathcal{T}(\mathbb{S}^n)$；对于 $X \in \mathcal{T}(\mathbb{S}^n)$， Xu 表示 $u \in C^\infty$ 沿 X方向的导数。 $\mathbb{S}^n$ 上的黎曼联络记作 D。对于 $u \in C^\infty$，其协变导数 Du 是一个 1-张量场，

$$Du(X) = D_X u = Xu,$$

它等于方向导数 Xu。$u \in C^\infty$ 的第 k 阶协变导数记作 $D^k u = D(D^{k-1}u)$，它是一个 k 阶张量场。更确切地说，假设 $X_1,\ \cdots,\ X_k \in \mathcal{T}(\mathbb{S}^n)$ 是 $\mathbb{S}^n$ 上的向量场，则 $D^k u(X_1,\ \cdots,\ X_k)$ 可表示为

$$D_{X_k}\cdots D_{X_1}u = D^k u(X_1,\cdots,X_k).$$

当对于任意向量场 X 和 Y， $k=2$、 $D^2u(X,\ Y)=D^2u(Y,\ X)$ 时，但 $D^ku(k>3)$ 并非如此。假设 $X_1,\ \cdots,\ X_k\in\mathcal{T}(\mathbb{S}^n)$ 满足 $\|X_i\|_{C^{k+2}(\mathbb{S}^n)}\leq 1,\quad i=1,\ \cdots,\ k$，则有：

$$D^ku(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_j,\cdots,X_k)=D^ku(X_1,\cdots,X_j,\cdots,X_i,\cdots,X_k)+\partial^{k-1}u,\quad (2.1)$$

其中 $\partial^{k-1}u$ 只是一个满足以下条件的记号

$$\|\partial^{k-1}u\|_{C^\gamma(\mathbb{S}^n)}\leq C_{k,\gamma}\|u\|_{C^{k-1+\gamma}(\mathbb{S}^n)},\ \gamma\in(0,2).\quad (2.2)$$

另一方面,

$$D_{X_k}\cdots D_{X_1}u=X_k,\cdots,X_1u+\partial^{k-1}u\quad (2.3)$$

其中 $\partial^{k-1}u$ 满足 (2.2)，与 (2.1) 中的 $\partial^{k-1}u$ 相同。对于任意 $\gamma\in(0,2)$，有

$$\begin{aligned}\sup\{\|X_k,\cdots,X_1u\|_{C^\gamma(\mathbb{S}^n)}:X_i\in\mathcal{T}(\mathbb{S}^n),\ \|X_i\|_{C^{k+2}(\mathbb{S}^n)}\leq 1,\ i=1,\cdots,k\}\\ \geq\frac{1}{C_k}\|u\|_{C^{k+\gamma}(\mathbb{S}^n)}-C_k\|u\|_{C^{k-1+\gamma}(\mathbb{S}^n)}.\end{aligned}\quad (2.4)$$

我们可以将任意连续可微映射 $F:\mathbb{S}^n\to\mathbb{R}^k$ 延拓为 $\tilde{F}:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{\tilde{k}}$，使得 $F=F$ 在 $\mathbb{S}^n$上成立。我们将 F 在 $x\in\mathbb{S}^n$ 处的切向微分定义为

$$\nabla_\tau F(x):=\nabla_\tau\tilde{F}(x)(I-x\otimes x)$$

其中 $\nabla_\tau F(x)$与所选的延拓无关。对于函数 $u:\ \mathbb{S}^n\to\mathbb{R}$，我们将 $\nabla_\tau u$ 记作 u的切向梯度。

对于 $u\in C(\mathbb{S}^n)$，我们以标准方式定义 α-Hölder 范数,

$$\|u\|_{C^0(\mathbb{S}^n)}:=\sup_{x\in\mathbb{S}^n}|u(x)|\ and\ \|u\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n)}:=\sup_{x\neq y\in\mathbb{S}^n}\frac{|u(y)-u(x)|}{|y-x|^\alpha}+\|u\|_{C^0(\mathbb{S}^n)}$$

对于 $\alpha\in(0,\ 1)$

$$\|u\|_{C^{k+\alpha}(\mathbb{S}^n)}:=\sum_{l=0}^k\|\nabla^lu\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n)}$$

其中 $k\in\mathbb{N}$。

以下是来自 [23]的插值不等式。为便于参考，我们在此写出。

引理 2.1. *([23])* 假设 s_1 和 s_2 是正数， $\theta\in(0,\ 1)$ 并记

$$s=\theta s_1+(1-\theta)s_2.$$

那么存在一个常数 $C\geq 1$，使得对于每个光滑函数 $u:\ \mathbb{S}^n\to\mathbb{R}$，都有

$$\|u\|_{C^s(\mathbb{S}^n)}\leq C\|u\|^\theta_{C^{s_1}(\mathbb{S}^n)}\|u\|^{1-\theta}_{C^{s_2}(\mathbb{S}^n)}.$$

我们还需要用到 [22] 中提到的散度定理及其广义形式。具体而言，假设 Σ 是有界且一致 $C^{1,\ 1}$ 正则的曲面，将光滑向量场 X 的散度记为 $divX$，则散度定理表明

$$\int_{\Sigma} divX d\mathcal{H}^n = 0.$$

向量值函数 $\tilde{X} \in C^{\infty}(\Sigma,\ \mathbb{R}^{n+1})$ 的散度定义为 $div\tilde{X} := Trace(\nabla_{\tau} X)$。散度定理可以推广为

$$\int_{\Sigma} div\tilde{X} d\mathcal{H}^n = \int_{\Sigma} H_{\Sigma}\tilde{X} \cdot \nu d\mathcal{H}^n$$

其中 H_{Σ} 是 Σ的平均曲率。

函数的导数

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{S}^n} G(y,x) d\mathcal{H}^n_y$$

关于向量场 $X \in \mathcal{T}(\mathbb{S}^n)$ 可表示为

$$D_X\psi(x) = \int_{\mathbb{S}^n} D_{X(x)}G(y,x) d\mathcal{H}^n_y, \tag{2.5}$$

其中 $D_{X(x)}G(y,\ x)$ 表示 $G(y,\ \cdot)$ 关于 X 的导数。此外，

$$div_y(G(y,x)X(y)) = D_{X(y)}G(y,x) + G(y,x)div(X)(y). \tag{2.6}$$

结合 (2.6) 与散度定理，可得

$$D_X\psi(x) = \int_{\mathbb{S}^n} (D_{X(y)} + D_{X(x)})G(y,x) d\mathcal{H}^n_y + \int_{\mathbb{S}^n} G(y,x) div(X)(y) d\mathcal{H}^n_y. \tag{2.7}$$

3 流（1.2）的参数化

为简化记号，我们用 E_t 表示由演化超曲面和超平面围成的区域，并用 ∂E_t 表示演化超曲面本身。我们指出，根据这些结果，可以通过单位上半球 $\mathbb{S}^n_+$ 上的径向函数对该流进行参数化，这意味着对于每个 $t \in [0,T)$，都存在一个函数 $\rho(\cdot,\ t) : \mathbb{S}^n_+ \to \mathbb{R}$，使得

$$\partial E_t = \{\rho(x,t)x : x \in \mathbb{S}^n_+\}.$$

我们首先处理（1.2）中的第一个方程。下面的运算暂时与 t 无关，因此为简化记号，令 $\rho(x,\ t) = \rho(x)$。本文后文再次出现相同情况时，将不再重复说明。我们定义集合 $E_{t'}$如下：$\partial E_{t'} := \{x + t'(\rho(x) - 1)x :\ x \in \mathbb{S}^n_+\}$，其中 $t' \in [0,1]$，并将微分同胚族$\Phi_{t'\rho} :\ \mathbb{S}^n_+ \to \partial E_{t'}$ 定义为

$$\Phi_{t'\rho}(x) = x + t'(\rho(x) - 1)x.$$

于是对于 $x \in \mathbb{S}^n_+$，我们有

$$-H^s_{\partial E_t}(\rho(x)x)) = -\int_0^1 \frac{d}{dt'} H^s_{\Phi_{t'\rho}(\mathbb{S}^n_+)}(\Phi_{t'\rho}(x))dt' - H^s_{\mathbb{S}^n_+}(x). \tag{3.1}$$

定义 $\Phi_a := \Phi_{(t'+a)\rho}(\Phi^{-1}_{t'\rho}(x))$ 是一个微分同胚，且 $\Phi_a : \partial E_{t'} \to \partial E_{t'+a}$。

$$\frac{d}{da}|_{a=0}\Phi_a(x) = (\rho(\Phi^{-1}_{t'\rho}(x)) - 1)\Phi^{-1}_{t'\rho}(x) \ for \ x \in \partial E_{t'}.$$

令 $J_{\Phi_{t'\rho}}$ 表示 $\Phi_{t'\rho}(x)$ 的雅可比行列式（见 [3, 22]），即:

$$J_{\Phi_{t'\rho}}(x) = \{1 + t'(\rho(x) - 1)\}^{n-1}\sqrt{\{1 + t'(\rho(x) - 1)\}^2 + |\nabla_\tau(1 + t'(\rho(x) - 1))|^2}.$$

固定环境空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一个基向量 $e_i,\ i = 1,\ldots,n+1$，并在 $\mathbb{S}^n_+$ 上得到一个切向量场:

$$\tau_i = e_i - x_i x, \ for \ x \in \mathbb{S}^n_+$$

其中 $x_i = x \cdot e_i$。这在移动边界 $\partial E_{t'}$ 上诱导出一个切向量场，记作 $X(t)$，即:

$$X(t) := [1 + t'(\rho(x) - 1)]\tau_i(x) + \nabla_i[1 + t'(\rho(x) - 1)]x,$$

其中 $\nabla_i[1 + t'(\rho(x) - 1)] = \nabla_\tau[1 + t'(\rho(x) - 1)] \cdot e_i$。为了继续计算分数阶平均曲率，我们需要使用 [22] 中的引理。

引理 3.1。*([22])* 设 $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为一个光滑有界集，Φ_a 为微分同胚族，满足 $\Phi_0(x) = x$，将速度场记为 $X(x) = \frac{d}{da}|_{a=0}\Phi_a(x)$，并假设 $X \in C^{1+s+\alpha}(\Sigma)$。则有

$$-\frac{d}{da}|_{a=0} H^s_{\Phi_a(E)}(\Phi_a(x)) = 2\int_{\partial E} \frac{(X(y) - X(x)) \cdot \nu_E(y)}{|y - x|^{n+1+s}} d\mathcal{H}^n_y.$$

我们应用引理（3.1）并进行变量代换，推得

$$\begin{aligned}
&-\frac{d}{dt'} H^s_{\Phi_{t'\rho}(\mathbb{S}^n_+)}(\Phi_{t'\rho}(x)) \\
=&2\int_{\partial E_{t'}} \frac{1}{|y - x|^{n+1+s}}((\rho(\Phi^{-1}_{t'\rho}(y)) - 1)\Phi^{-1}_{t'\rho}(y) - (\rho(\Phi^{-1}_{t'\rho}(x)) - 1)\Phi^{-1}_{t'\rho}(x)) \cdot \nu_{E_{t'}}(y) d\mathcal{H}^n_y \\
=&2\int_{\mathbb{S}^n_+} \frac{1}{|\Phi_{t'\rho}(y) - \Phi_{t'\rho}(x)|^{n+1+s}}((\rho(y) - 1)y - (\rho(x) - 1)x) \cdot \nu_{E_{t'}}(\Phi_{t'\rho}(y)) J_{\Phi_{t'\rho}(y)} d\mathcal{H}^n_y \\
=&2\int_{\mathbb{S}^n_+} \frac{1}{|\Phi_{t'\rho}(y) - \Phi_{t'\rho}(x)|^{n+1+s}}((\rho(y) - 1)y - (\rho(x) - 1)x) \\
&\cdot \{[1 + t'(\rho(y) - 1)]^n y - [1 + t'(\rho(y) - 1)]^{n-1}\nabla_\tau(1 + t'(\rho(y) - 1))\} d\mathcal{H}^n_y \\
=&2\int_{\mathbb{S}^n_+} \frac{\rho(y) - \rho(x)}{|\Phi_{t'\rho}(y) - \Phi_{t'\rho}(x)|^{n+1+s}}[1 + t'(\rho(y) - 1)]^n d\mathcal{H}^n_y
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2\int_{\mathbb{S}^n_+}\frac{y-x}{|\Phi_{t'\rho}(y)-\Phi_{t'\rho}(x)|^{n+1+s}}\\
&\cdot\{[1+t'(\rho(y)-1)]^n y-[1+t'(\rho(y)-1)]^{n-1}\nabla_\tau(1+t'(\rho(y)-1))\}d\mathcal{H}^n_y(\rho(x)-1)\\
=&I_1+I_2(\rho(x)-1).
\end{aligned}
$$

我们可以将法线 $\nu_{E_{t'}}(\Phi_{t'\rho}(y))$ 写作

$$
\nu_{E_{t'}}(\Phi_{t'\rho}(y))=\frac{(1+t'(\rho(y)-1))y-\nabla_\tau(1+t'(\rho(y)-1))}{\sqrt{(1+t'(\rho(y)-1))^2+|\nabla_\tau(1+t'(\rho(y)-1))|^2}}.
$$

对于 I_1,

$$
\begin{aligned}
I_1=&2\int_{\mathbb{S}^n_+}\frac{\rho(y)-\rho(x)}{|\Phi_{t'\rho}(y)-\Phi_{t'\rho}(x)|^{n+1+s}}[1+t'(\rho(y)-1)]^n d\mathcal{H}^n_y\\
=&2\int_{\mathbb{S}^n_+}\frac{\rho(y)-\rho(x)}{|y-x|^{n+1+s}}d\mathcal{H}^n_y\\
&+2\int_{\mathbb{S}^n_+}(\rho(y)-\rho(x))[\frac{[1+t'(\rho(y)-1)]^n}{|y+t'(\rho(y)-1)y-(x+t'(\rho(x)-1)x)|^{n+1+s}}\\
&-\frac{1}{|y-x|^{n+1+s}}]d\mathcal{H}^n_y.
\end{aligned}
$$

为简化记号，我们将核 $K_\rho\colon \mathbb{S}^n_+\times\mathbb{S}^n_+\to[0,+\infty]$ 写作

$$
K_{t'\rho}(y,x):=\frac{1}{|y+t'(\rho(y)-1)y-(x+t'(\rho(x)-1)x)|^{n+1+s}}. \tag{3.2}
$$

因此，我们可以写成

$$
\begin{aligned}
&\frac{[1+t'(\rho(y)-1)]^n}{|y+t'(\rho(y)-1)y-(x+t'(\rho(x)-1)x)|^{n+1+s}}-\frac{1}{|y-x|^{n+1+s}}\\
=&\int_0^{t'}\frac{d}{d\xi}\{[1+\xi(\rho(y)-1)]^n K_{\xi\rho}(y,x)\}d\xi.
\end{aligned}
$$

我们将 $\mathbb{S}^n_+$ 上的分数阶拉普拉斯算子定义为

$$
\Delta^{\frac{1+s}{2}}u(x):=2\int_{\mathbb{S}^n_+}\frac{u(y)-u(x)}{|x-y|^{n+1+s}}d\mathcal{H}^n_y,
$$

对此应按主值意义理解，但从现在起我们不再特别说明这一点。

因此，定义在 $\mathbb{S}^n_+$ 上的 I_1 可写为

$$
I_1=\Delta^{\frac{1+s}{2}}\rho(x)
$$

$$+2\int_{\mathbb{S}^n_+}(\rho(y)-\rho(x))\int_0^{t'}\frac{d}{d\xi}\{[1+\xi(\rho(y)-1)]^n K_{\xi\rho}(y,x)\}d\xi d\mathcal{H}^n_y.$$

对于 I_2,

$$\begin{aligned}
I_2 =&2\int_{\mathbb{S}^n_+}\frac{y-x}{|\Phi_{t'\rho}(y)-\Phi_{t'\rho}(x)|^{n+1+s}}\\
&\cdot\{[1+t'(\rho(y)-1)]^n y-[1+t'(\rho(y)-1)]^{n-1}\nabla_\tau(1+t'(\rho(y)-1))\}d\mathcal{H}^n_y\\
=&\int_{\mathbb{S}^n_+}\frac{1}{|y-x|^{n-1+s}}d\mathcal{H}^n_y\\
&+\int_{\mathbb{S}^n_+}|y-x|^2\int_0^{t'}\frac{d}{d\xi}\{[1+\xi(\rho(y)-1)]^n K_{\xi\rho}(y,x)\}d\xi d\mathcal{H}^n_y\\
&-2\int_{\mathbb{S}^n_+}\frac{(y-x)\cdot t'\nabla_\tau\rho(y)\cdot[1+t'(\rho(y)-1)]^{n-1}}{|\Phi_{t'\rho}(y)-\Phi_{t'\rho}(x)|^{n+1+s}}d\mathcal{H}^n_y.
\end{aligned}$$

最后，我们可以通过分数阶拉普拉斯算子、式 (3.1) 以及前面的计算来表示 ∂E 的分数阶平均曲率

$$-H^s_{\partial E_t}(\rho(x)x)=\Delta^{\frac{1+s}{2}}\rho(x)-H^s_{\mathbb{S}^n_+}+R_{1,\rho}(x)+R_{2,\rho}(x)(\rho(x)-1).$$

余项 $R_{1,\ \rho}$ 和 $R_{2,\ \rho}$ 针对一般函数 $\rho\in C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)$ 且满足 $\|\rho\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}\le C$ 定义如下

$$R_{1,\rho}(x):=2\int_0^1\int_0^{t'}\int_{\mathbb{S}^n_+}(\rho(y)-\rho(x))\frac{d}{d\xi}\{[1+\xi(\rho(y)-1)]^n K_{\xi\rho}(y,x)\}d\mathcal{H}^n_y d\xi dt' \tag{3.3}$$

and

$$\begin{aligned}
R_{2,\rho}(x):=&\int_{\mathbb{S}^n_+}\frac{1}{|y-x|^{n-1+s}}d\mathcal{H}^n_y\\
&+\int_0^1\int_0^{t'}\int_{\mathbb{S}^n_+}|y-x|^2\frac{d}{d\xi}\{[1+\xi(\rho(y)-1)]^n K_{\xi\rho}(y,x)\}d\mathcal{H}^n_y d\xi dt'\\
&-2\int_0^1\int_{\mathbb{S}^n_+}(y-x)\cdot t'\nabla_\tau\rho(y)[1+t'(\rho(y)-1)]^{n-1}K_{t'\rho}(y,x)d\mathcal{H}^n_y dt'.
\end{aligned}$$

我们从 [22, 26, 31] 回顾可知，结合 (1.2)、(3.1) 和法向速度，最终可写出关于 $\rho(x)$的方程:

$$V_t(\rho(x)x)=\partial_t\rho(x)\frac{\rho(x)}{\sqrt{\rho^2(x)+|\nabla_\tau\rho(x)|^2}},$$

then

$$\partial_t\rho(x)=A(x,\rho,\nabla_\gamma\rho)\{\Delta^{\frac{1+s}{2}}\rho(x)-H^s_{\mathbb{S}^n_+}+R_{1,\rho}(x)+R_{2,\rho}(x)(\rho(x)-1)\}. \tag{3.4}$$

为简化记号，我们记作 $A(x,\ \rho,\ \nabla_\tau\rho)$：$= \frac{\sqrt{\rho^2(x)+|\nabla_\tau\rho(x)|^2}}{\rho(x)}$.

对于每个 $t\in[0,T)$，都存在一个函数 $\rho(\cdot):\mathbb{S}^n_+\to\mathbb{R}$，使得

$$\partial E_t=\{\rho(x)x:x\in\mathbb{S}^n_+\}.$$

单位外法向量 $\nu(\rho(x)x)$ 给出为

$$\nu(\rho(x)x)=\frac{\rho(x)x-\nabla_\tau\rho(x)}{\sqrt{\rho^2(x)+|\nabla_\tau\rho(x)|^2}},$$

其中，$\nabla_\tau\rho(x)$ 是 $\rho(x)$ 在 $\mathbb{S}^n_+$ 上的切向梯度。

沿着 $\partial\mathbb{S}^n_+\subset\partial\mathbb{R}^n_+,\quad x_{n+1}=0,\quad \bar{N}\circ\iota=-e_{n+1},\ \langle\nu(x)\ N\circ\iota\rangle=-$余弦$\theta$,

$$\langle\nu(x),\bar{N}\circ\iota\rangle=\frac{\langle\nabla_\tau\rho(x),e_{n+1}\rangle}{\sqrt{\rho^2(x)+|\nabla_\tau\rho(x)|^2}}.$$

在边界 $\partial\mathbb{S}^n_+$ 上，令 η 为外法向量。由于 $\mathbb{S}^n_+$ 的边界是赤道 $\mathbb{S}^{n-1}$，法向量 η 指向 $\mathbb{S}^n_+$ 内部的 $-e_{n+1}$ 方向。因此，$\nabla_\tau\rho(x)$ 的法向分量为

$$\frac{\partial\rho(x)}{\partial\eta}=\langle\nabla_\tau\rho(x),\eta\rangle=\langle\nabla_\tau\rho(x),-e_{n+1}\rangle.$$

Afte结合上述计算并加以总结，我们可以得到

$$\frac{\partial\rho(x)}{\partial\eta}=\cos\theta\sqrt{\rho^2(x)+|\nabla_\tau\rho(x)|^2}.$$

因此，流 (1.2) 等价于

$$\begin{cases}\partial_t\rho(x,t)=A(x,\rho,\nabla_\tau\rho)(\Delta^{\frac{1+s}{2}}\rho(x,t)-H^s_{\mathbb{S}^n_+}\\ \quad+R_{1,\rho}(x)+R_{2,\rho}(x)(\rho(x,t)-1)) & on\ \mathbb{S}^n_+\times[0,T)\\ \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial\eta}=\cos\theta\sqrt{\rho^2(x,t)+|\nabla_\tau\rho(x,t)|^2}, & on\ \partial\mathbb{S}^n_+\times[0,T),\end{cases}\tag{3.5}$$

其中 $A(x,\ \rho,\ \nabla_\tau\rho):=\frac{\sqrt{\rho^2(x,\ t)}}{+|\nabla_\tau\rho\ x\ t\ |^2(,\ )(,\ )\cdot}$

$\rho\ x\ t$

命题 3.2. 假设流 $(E_t)_{t\in(0,T]}$ 是 (1.2) 的一个经典解，且始于 E_0，其中 $\partial E_0=\{\rho(x,0)x:\ x\in\mathbb{S}^n_+\}$。那么，函数 $\rho\in C(\mathbb{S}^n_+\times[0,T])\bigcap C^\infty(\mathbb{S}^n_+\times(0,T])$ 其中 $\partial E_t=\{\rho(x,t)x:\ x\in\mathbb{S}^n_+\}$ 是 (3.5) 的一个解。

4 一些引理

公式 (3.4) 可写为

$$\partial_t\rho(x,t)=\Delta^{\frac{1+s}{2}}\rho(x,t)+P(x,\rho(\cdot,t),\nabla\rho(\cdot,t))-H^s_{\mathbb{S}^n_+},\ on\ \mathbb{S}^n_+\times[0,T)$$

其中，余项对一般函数 $\rho \in C^\infty$ 定义为

$$\begin{aligned} P(x,\rho(\cdot,t),\nabla\rho(\cdot,t)) =&(A(x,\rho,\nabla_\tau\rho)-1)(\Delta^{\frac{1+s}{2}}\rho(x,t)-H^s_{\mathbb{S}^n_+}) \\ &+(A(x,\rho,\nabla_\tau\rho))[R_{1,\rho}(x)+R_{2,\rho}(x)(\rho(x,t)-1)], \end{aligned}$$

其中 $A(x,\ \rho,\ \nabla_\tau\rho):=\frac{\sqrt{\rho^2(x)+|\nabla_\tau\rho\ x\ |^2()()}\cdot}{\rho x}$ 在本节中，除非另有说明，K 表示一个一般的核，而 K_ρ 是式 (3.2) 中定义的核。接下来，我们定义本节将要使用的核类。

在本节中，我们需要建立带非线性项的分数阶热方程的Schauder估计。

引理 4.1。设 $0<s<1$，若 $E\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 是一个有界的、$C^{1,\ 1}$-正则集合，且其内部非空。则存在一个常数 $C>0$，依赖于 n、直径 E，使得对任意 $x\in\partial E$，有

$$\int_{\partial E}\frac{1}{|x-y|^{n-s}}d\mathcal{H}^n_y\le C.$$

证明。我们可以假设 x 是原点。由于 ∂E 是光滑且一致 $C^{1,\ 1}$-正则的，因此我们可以在局部将其表示为一个光滑函数的图，即存在一个光滑函数 ϕ: $B_\delta\subset\mathbb{R}^{n+1}$，使得

$$E_\delta:=\partial E\cap C_\delta=\{(x',x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}:\ x_{n+1}=\phi(x')\}$$

其中 C_δ 表示柱体 $C_\delta=\{x=(x',\ \ x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}:\ \ |x'|<\delta,\ \ |x_{n+1}|<\delta\}$。

我们注意到 ∂E 是一致 $C^{1,\ 1}$-正则的，

$$\begin{aligned} \int_{\partial E\cap E_\delta}\frac{1}{|y|^{n-s}}d\mathcal{H}^n_y &\le \int_{\substack{y'\in\mathbb{R}^n\\ |y'|\le\delta}}\frac{\sqrt{1+|\nabla\phi(y')|^2}}{|y'|^{n-s}}dy' \\ &\le C\int_0^\delta\frac{\tau^{n-1}}{\tau^{n-s}}d\tau \\ &=\frac{C}{s}\delta^s. \end{aligned}$$

对于积分的剩余部分，由于 $E\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 有界，我们可以假设$|y|\le R$ 足够大，

$$\lim_{\delta\to0}\int_{\partial E\setminus E_\delta}\frac{1}{|y|^{n-s}}d\mathcal{H}^n_y=\omega_{n+1}\int_\delta^R r^{s-n}\cdot r^{n-1}dr<\frac{\omega_{n+1}}{s}R^s.$$

结合上述计算，我们得到了结论。 □

引理 4.2。假设 $\rho,\ w\in C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+),\ \ s\in(0,1)\ \ \alpha\in(0,1-s)$，则以下结论成立。

(i) 在 (3.2) 中定义的核 K_ρ，其中 $t'=1$，属于定义 ***6.1*** 中的类 $\mathcal{S}_{\kappa_1}$，且 $\kappa_1\le C$。

(ii) 核 $\frac{d}{d\xi}|_{\xi=0}K_{\overline{\rho}\mp\xi w}$ 属于定义 ***6.1*** 中的类 $\mathcal{S}_{\kappa_2}$，并且

$$\kappa_2\le C\|w\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}.$$

证明。 断言 (i)：我们回顾一下

$$\Phi_\rho(x)=\rho(x)x,\ K_\rho(y,x):=\frac{1}{|\rho(y)y-\rho(x)x|^{n+1+s}},\ x,y\in\mathbb{S}^n_+.$$

由假设 $\rho\in C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)$ 可知，存在常数 $c,C>0$，使得 $0<c<\rho<C$ 且 $\|\nabla\rho\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)}\leq C$,

$$\begin{aligned}|\Phi_\rho(y)-\Phi_\rho(x)|&\leq|\rho(y)||y-x|+|\rho(y)-\rho(x)||x|\\&\leq C|y-x|+\|\nabla\rho\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)}|y-x|\\&=C_\rho|y-x|\end{aligned}\tag{4.1}$$

and

$$\begin{aligned}|\Phi_\rho(y)-\Phi_\rho(x)|&\geq|\rho(y)||y-x|-|\rho(y)-\rho(x)||x|\\&\geq C|y-x|-\|\nabla\rho\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)}|y-x|\\&=C'|y-x|.\end{aligned}$$

换言之

$$\begin{aligned}|\nabla_x K_\rho(y,x)|&=|-(n+1+s)\frac{\rho(y)y-\rho(x)x}{|\rho(y)y-\rho(x)x|^{n+3+s}}\nabla_x\Phi_\rho(x)^T|\\&\leq\frac{C_3}{|\rho(y)y-\rho(x)x|^{n+2+s}}.\end{aligned}$$

K_ρ 满足定义 6.1 的条件 (i) 和 (ii)。因此，我们只需验证 K_ρ 满足定义 6.1 的第三个条件。以下证明思路源自 [22], 。其思路是通过分部积分将 $\int_{\mathbb{S}^n_+}|\Phi(y)-\Phi(x)|^{-n+1+s}d\mathcal{H}^n_y$ 写成非奇异积分。

为简化记号，我们将 $\Phi_\rho(x)$ 写作 $\Phi(x)$，并注意到 $y\mapsto|\Phi(y)-\Phi(x)|^{-n+1-s}$ 的切向梯度为

$$\begin{aligned}\nabla_{\tau(y)}|\Phi(y)-\Phi(x)|^{-n+1-s}&=-(n-1+s)\frac{\nabla_\tau\Phi(y)^T(\Phi(y)-\Phi(x))}{|\Phi(y)-\Phi(x)|^{n+1+s}}\\&=-(n-1+s)\frac{\nabla_\tau\Phi(x)^T(\Phi(y)-\Phi(x))}{|\Phi(y)-\Phi(x)|^{n+1+s}}\\&\quad-(n-1+s)\frac{(\nabla_\tau\Phi(y)-\nabla_\tau\Phi(x))^T(\Phi(y)-\Phi(x))}{|\Phi(y)-\Phi(x)|^{n+1+s}},\end{aligned}$$

其中，$\nabla_\tau\Phi(x)^T$表示 $\nabla_\tau\Phi(x)$ 的转置，以确保计算所得的维数彼此匹配。

为了在 $\mathbb{S}^n$ 上定义 $\Phi(x)$，我们需要将 $\rho(\cdot,t)\colon\mathbb{S}^n_+\to\mathbb{R}$ 延拓为定义在 $\mathbb{S}^n$ 上的函数，同时保持一定程度的正则性。我们将 $x\in\mathbb{S}^n_-$ 关于超平面 $\partial\mathbb{S}^n_+$ 的反射记为

$$x^\star=(x_1,\dots,x_n,-x_{n+1})\in\mathbb{S}^n_+.$$

我们将函数 $\tilde{\rho}(x)$ 定义如下

$$\tilde{\rho}(x) = \begin{cases} \rho(x), & if\ x \in \mathbb{S}^n_+; \\ \rho(x^\star), & if\ x \in \mathbb{S}^n_-. \end{cases}$$

这样，我们定义 $\Phi_{\tilde{\rho}}(x) := \tilde{\rho}(x)x$ ，其中 $x \in \mathbb{S}^n$。

此外，利用球面上的散度定理，我们可以得到如下方程,

$$\int_{\mathbb{S}^n} \nabla_{\tau(y)} |\Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \Phi_{\tilde{\rho}}(x)|^{-n+1-s} d\mathcal{H}^n_y = \int_{\mathbb{S}^n} \frac{H_{\mathbb{S}^n(y)}\nu(y)}{|\Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \Phi_{\tilde{\rho}}(x)|^{n-1+s}} d\mathcal{H}^n_y.$$

换言之,

$$\begin{aligned} &\nabla_\tau \Phi_{\tilde{\rho}}(x)^T \int_{\mathbb{S}^n} \frac{\Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \Phi_{\tilde{\rho}}(x)}{|\Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \Phi_{\tilde{\rho}}(x)|^{n+1+s}} d\mathcal{H}^n_y \\ =& -\frac{1}{(n-1+s)} \int_{\mathbb{S}^n} \frac{H_{\mathbb{S}^n(y)}\nu(y)}{|\Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \Phi_{\tilde{\rho}}(x)|^{n-1+s}} d\mathcal{H}^n_y \\ &- \int_{\mathbb{S}^n} \frac{(\nabla_\tau \Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \nabla_\tau \Phi_{\tilde{\rho}}(x))^T (\Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \Phi_{\tilde{\rho}}(x))}{|\Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \Phi_{\tilde{\rho}}(x)|^{n+1+s}} d\mathcal{H}^n_y. \end{aligned} \tag{4.2}$$

上述方程的左端可以改写为

$$\begin{aligned} &\nabla_\tau \Phi_{\tilde{\rho}}(x)^T \int_{\mathbb{S}^n} \frac{\Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \Phi_{\tilde{\rho}}(x)}{|\Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \Phi_{\tilde{\rho}}(x)|^{n+1+s}} d\mathcal{H}^n_y \\ =& \{\nabla_\tau \Phi_{\tilde{\rho}}(x)^T \nabla_\tau \Phi_{\tilde{\rho}}(x)\} \int_{\mathbb{S}^n} \frac{y-x}{|\Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \Phi_{\tilde{\rho}}(x)|^{n+1+s}} d\mathcal{H}^n_y \\ &+ \nabla_\tau \Phi_{\tilde{\rho}}(x)^T \int_{\mathbb{S}^n} \frac{\Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \Phi_{\tilde{\rho}}(x) - \nabla_\tau \Phi_{\tilde{\rho}}(x)(y-x)}{|\Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \Phi_{\tilde{\rho}}(x)|^{n+1+s}} d\mathcal{H}^n_y. \end{aligned} \tag{4.3}$$

$\int_{\mathbb{S}^n} \frac{y-x}{|\Phi_{\tilde{\rho}}\ y\ -\Phi_{\tilde{\rho}}\ x\,()()|^{n+1+s}} d\mathcal{H}^n_y$ 是我们所关心的。由方程 (4.2)、(4.3) 可得

$$\begin{aligned} &\{\nabla_\tau \Phi_{\tilde{\rho}}(x)^T \nabla_\tau \Phi_{\tilde{\rho}}(x)\} \int_{\mathbb{S}^n} \frac{y-x}{|\Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \Phi_{\tilde{\rho}}(x)|^{n+1+s}} d\mathcal{H}^n_y \\ =& -\frac{1}{(n-1+s)} \int_{\mathbb{S}^n} \frac{H_{\mathbb{S}^n}(y)\nu(y)|\Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \Phi_{\tilde{\rho}}(x)|^2}{|\Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \Phi_{\tilde{\rho}}(x)|^{n+1+s}} d\mathcal{H}^n_y \\ &- \int_{\mathbb{S}^n} \frac{(\nabla_\tau \Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \nabla_\tau \Phi_{\tilde{\rho}}(x))^T (\Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \Phi_{\tilde{\rho}}(x))}{|\Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \Phi_{\tilde{\rho}}(x)|^{n+1+s}} d\mathcal{H}^n_y \\ &- \nabla_\tau \Phi_{\tilde{\rho}}(x)^T \int_{\mathbb{S}^n} \frac{\Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \Phi_{\tilde{\rho}}(x) - \nabla_\tau \Phi_{\tilde{\rho}}(x)(y-x)}{|\Phi_{\tilde{\rho}}(y) - \Phi_{\tilde{\rho}}(x)|^{n+1+s}} d\mathcal{H}^n_y \\ :=& \int_{\mathbb{S}^n} N_1 K_{\tilde{\rho}}(y,x) d\mathcal{H}^n_y + \int_{\mathbb{S}^n} N_2 K_{\tilde{\rho}}(y,x) d\mathcal{H}^n_y + \int_{\mathbb{S}^n} N_3 K_{\tilde{\rho}}(y,x) d\mathcal{H}^n_y. \end{aligned} \tag{4.4}$$

这里，$\nabla_\tau\Phi_{\tilde\rho}(x)^T\nabla_\tau\Phi_{\tilde\rho}(x)$ 表示 ∂E 的度量张量矩阵，该矩阵可逆。因此，我们只需验证 N_1、N_2 和 N_3 满足引理 6.1 的条件。

对于 $N_1(y,x)$,

$$\begin{aligned}|N_1(y,x)| &= |-\frac{1}{(n-1+s)}H_{\mathbb{S}^n}(y)\nu(y)|\Phi_{\tilde\rho}(y)-\Phi_{\tilde\rho}(x)|^2,\\ &\le C|\Phi_{\tilde\rho}(y)-\Phi_{\tilde\rho}(x)|^2.\end{aligned}$$

由 $\tilde\rho\in C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n)$，容易验证 $N_1(y,x)$ 以 $\kappa_0<C$ 满足引理 6.1 的假设。此外，我们有 $N_2(y,x)$、$N_3(y,x)$ 也满足引理 6.1 的假设。这表明 (4.4) 的右端是 Hölder 连续的，并进一步推出 $\int_{\mathbb{S}^n}\frac{|\Phi_{\tilde\rho}(y)-\Phi_{\tilde\rho}(x)|(y-x)}{|y-x|^{n+1+s}}d\mathcal{H}^n_y$ 是 Hölder 连续的，因此，$\int_{\mathbb{S}^n_+}\frac{|\Phi(y)-\Phi(x)|(y-x)}{|y-x|^{n+1+s}}d\mathcal{H}^n_y$ 也是 Hölder 连续的。这证明了断言 (i)。

断言 (ii)：我们考虑

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}|_{\xi=0}K_{\rho+\xi w} &= -(n+1+s)\frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{|\Phi(y)-\Phi(x)|^{n+3+s}}\cdot(w(y)y-w(x)x)\\ &:= \partial_w K_w.\end{aligned}$$

由 $\rho,w\in C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)$ 与 (4.1)，容易验证 $\partial_w K_w$ 以 $\kappa_0<C$ 满足定义 6.1 的假设。因此，我们只需验证 $\partial_w K_w$满足定义 6.1 的第三个条件。

按照与方程 (4.4) 相同的推导过程，我们还需要将 $\rho(\cdot,t)$ $w:\mathbb{S}^n_+\to\mathbb{R}$ 扩展到定义在 $\mathbb{S}^n$ 上的 $\tilde\rho$, $\tilde w$，同时保持一定程度的正则性，由此可得

$$\begin{aligned}&\{\nabla_\tau\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(x)^T\nabla_\tau\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(x)\}\int_{\mathbb{S}^n}\frac{y-x}{|\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(y)-\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(x)|^{n+1+s}}d\mathcal{H}^n_y\\ =&-\frac{1}{(n-1+s)}\int_{\mathbb{S}^n}\frac{H_{\mathbb{S}^n}(y)\nu(y)|\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(y)-\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(x)|^2}{|\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(y)-\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(x)|^{n+1+s}}d\mathcal{H}^n_y\\ &-\int_{\mathbb{S}^n}\frac{(\nabla_\tau\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(y)-\nabla_\tau\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(x))^T(\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(y)-\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(x))}{|\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(y)-\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(x)|^{n+1+s}}d\mathcal{H}^n_y\\ &-\nabla_\tau\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(x)^T\int_{\mathbb{S}^n}\frac{\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(y)-\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(x)-\nabla_\tau\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(x)(y-x)}{|\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(y)-\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(x)|^{n+1+s}}d\mathcal{H}^n_y\\ :=&\int_{\mathbb{S}^n}N_1K_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(y,x)d\mathcal{H}^n_y+\int_{\mathbb{S}^n}N_2K_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(y,x)d\mathcal{H}^n_y+\int_{\mathbb{S}^n}N_3K_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(y,x)d\mathcal{H}^n_y.\end{aligned}$$

通过求导可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\xi}|_{\xi=0}\{\nabla_\tau\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(x)^T\nabla_\tau\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(x)\}\int_{\mathbb{S}^n}\frac{y-x}{|\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(y)-\Phi_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(x)|^{n+1+s}}d\mathcal{H}^n_y\\ =&\int_{\mathbb{S}^n}\frac{d}{d\xi}|_{\xi=0}\{N_1+N_2+N_3\}K_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(y,x)d\mathcal{H}^n_y+\int_{\mathbb{S}^n}\{N_1+N_2+N_3\}\partial_{\tilde w}K_{\tilde w}d\mathcal{H}^n_y\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}|_{\xi=0}\{N_1+N_2+N_3\} = &-\frac{2}{(n-1+s)}H_{\mathbb{S}^n}(y)\nu(y)(\Phi_{\tilde\rho}(y)-\Phi_{\tilde\rho}(x))(\tilde w(y)y-\tilde w(x)x)\\ &-(\nabla_\tau(\tilde w(y)y))^T(\Phi_{\tilde\rho}(y)-\Phi_{\tilde\rho}(x))-\nabla_\tau\Phi_{\tilde\rho}(y)(\tilde w(y)y-\tilde w(x)x)\\ &+\{\nabla_\tau(\tilde w(x)x)^T\nabla_\tau\Phi_{\tilde\rho}(x)+\nabla_\tau\Phi_{\tilde\rho}(x)^T\nabla_\tau(\tilde w(x)x)\}(y-x).\end{aligned}$$

由于 $\|\tilde w(x)x\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n)}$ $\|\nabla_\tau(\tilde w(x)x)\|_{C^{s+\alpha}(\mathbb{S}^n)} \le C\|\tilde w\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n)}$，我们可以利用引理 6.2 推得

$$\|\int_{\mathbb{S}^n}\frac{d}{d\xi}|_{\xi=0}\{N_1+N_2+N_3\}K_{\tilde\rho+\xi\tilde w}(y,x)d\mathcal{H}^n_y\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n)} \le C_\rho\|\tilde w\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n)}.$$

根据断言 (i)，我们已经知道 $N_1(y,x)$、 $N_2(y,x)$ 和 $N_3(y,x)$ 也满足引理 6.1 的假设。因此，$\|\int_{\mathbb{S}^n}\{N_1+N_2+N_3\}\partial_{\tilde w}K_{\tilde w}d\mathcal{H}^n_y\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n)} < C.$ 由此可推出 $\|\int_{\mathbb{S}^n}(y-x)\partial_{\tilde w}K_{\tilde w}\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n)}$ $\le C_\rho\|\tilde w\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n)}$，进而意味着 $\|\int_{\mathbb{S}^n_+}(y-x)\partial_w K_w\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \le C_\rho\|w\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}$。这证明了断言 (ii)。 □

引理 4.3. 假设 $\rho\in C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)$，则对 $C>0$ 成立

$$\|R_{1,\rho}(x)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \le C\|\rho\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)} \quad and \quad \|R_{2,\rho}(x)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \le C_{\xi,\rho}.$$

证明. 对于$R_{1,\ \rho}(x)$，我们已经知道

$$R_{1,\rho}(x) := 2\int_0^1\int_0^{t'}\int_{\mathbb{S}^n_+}(\rho(y)-\rho(x))\frac{d}{d\xi}\{[1+\xi(\rho(y)-1)]^nK_{\xi\rho}(y,x)\}d\mathcal{H}^n_y d\xi dt'.$$

Let

$$\varphi(x) := \int_{\mathbb{S}^n_+}(h(y)-h(x))\frac{d}{d\xi}\{[1+\xi(\rho(y)-1)]^nK_{\xi\rho}(y,x)\}d\mathcal{H}^n_y,\ \xi\in[0,1],$$

我们断言

$$\|\varphi(x)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \le C\|h(x)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}. \tag{4.5}$$

则 $\|R_{1,\ \rho}(x)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)}$ 可通过选取 $h(y) = \rho(y)$ 由 (4.5) 得到。$\varphi(x)$ 也可改写为

$$\begin{aligned}\varphi(x) = &\int_{\mathbb{S}^n_+}(h(y)-h(x))\frac{d}{d\xi}\{[1+\xi(\rho(y)-1)]^n\}K_{\xi\rho}(y,x)d\mathcal{H}^n_y\\ &+\int_{\mathbb{S}^n_+}(h(y)-h(x))[1+\xi(\rho(y)-1)]^n\frac{d}{d\xi}\{K_{\xi\rho}(y,x)\}d\mathcal{H}^n_y.\end{aligned}$$

根据引理 4.2，我们已经知道 $K_{\xi\rho}\in\mathcal{S}_{\kappa_1}$，其中 $\kappa_1\le C$ 和核 $\frac{d}{d\xi}|_{\xi=0}K_{\rho+\xi w}$ 属于类 $\mathcal{S}_{\kappa_2}$，且对所有 $\xi\in[0,1]$，均有 $\kappa_2 \le C\|w\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}$。换言之，$\rho\in C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)$，因此有 $\|\frac{d}{d\xi}\{[1+\xi(\rho(y)-1)]^n\}\|_{C^{s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}$ $\|[1+\xi(\rho(y)-1)]^n\|_{C^{s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)} \le C_{\xi,\ \rho}\|\rho\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)} < C$。由引理 6.2，我们可以直接得到 $\|\varphi(x)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \le C\|h(x)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}$。

对于 $R_{2,\ \rho}$,

$$\begin{aligned}R_{2,\rho}(x) :=& \int_{\mathbb{S}^n_+} \frac{1}{|y-x|^{n-1+s}} d\mathcal{H}^n_y \\ &+ \int_0^1 \int_0^{t'} \int_{\mathbb{S}^n_+} |y-x|^2 \frac{d}{d\xi}\{[1+\xi(\rho(y)-1)]^n K_{\xi\rho}(y,x)\} d\mathcal{H}^n_y d\xi dt' \\ &- 2\int_0^1 \int_{\mathbb{S}^n_+} (y-x)\cdot t' \nabla_\tau \rho(y)[1+t'(\rho(y)-1)]^{n-1} K_{t'\rho}(y,x) d\mathcal{H}^n_y dt'.\end{aligned}$$

由引理 **4.1**, $\int_{\mathbb{S}^n_+} \frac{1}{|y-x|^{n-1+s}} d\mathcal{H}^n_y$ 有界。

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \int_0^{t'} \int_{\mathbb{S}^n_+} |y-x|^2 \frac{d}{d\xi}\{[1+\xi(\rho(y)-1)]^n K_{\xi\rho}(y,x)\} d\mathcal{H}^n_y d\xi dt' \\ =& -2x\int_0^1 \int_0^{t'} \int_{\mathbb{S}^n_+} (y-x)\frac{d}{d\xi}\{[1+\xi(\rho(y)-1)]^n\} K_{\xi\rho}(y,x) d\mathcal{H}^n_y d\xi dt' \\ &-2x\int_0^1 \int_0^{t'} \int_{\mathbb{S}^n_+} (y-x)[1+\xi(\rho(y)-1)]^n \frac{d}{d\xi}\{K_{\xi\rho}(y,x)\} d\mathcal{H}^n_y d\xi dt' \\ :=& R_{21,\rho} + R_{22,\rho}.\end{aligned}$$

然后，通过取 $h(y) = y$，可由 **(4.5)** 得出 $\|R_{21,\ \rho}(x)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)}$ 以及 $\|R_{22,\ \rho}(x)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)}$。因此，$\|R_{2,\ \rho}(x)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} < C_{\xi,\ \rho}$。 □

推论 4.4. 假设 ρ, $w \in C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)$，令

$$\partial_w R_{1,\rho}(x) = \frac{d}{d\zeta}|_{\zeta=0} R_{1,\rho+\zeta w}(x),\ \partial_w R_{2,\rho}(x) = \frac{d}{d\zeta}|_{\zeta=0} R_{2,\rho+\zeta w}(x),$$

then

$$\begin{aligned}&\|\partial_w R_{1,\rho}(x)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \le C_{w,\zeta,\rho}\|w(x)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}, \\ &\|\partial_w R_{2,\rho}(x)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \le C_{w,\rho}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

证明。 对于$R_{1,\ \rho}(x)$，我们已经知道

$$R_{1,\rho}(x) := 2\int_0^1 \int_0^{t'} \int_{\mathbb{S}^n_+} (\rho(y)-\rho(x))\frac{d}{d\xi}\{[1+\xi(\rho(y)-1)]^n K_{\xi\rho}(y,x)\} d\mathcal{H}^n_y d\xi dt'.$$

通过求导可得

$$\begin{aligned}\partial_w R_{1,\rho}(x) =& \frac{d}{d\zeta}|_{\zeta=0} R_{1,\rho+\zeta w}(x) \\ =& 2\int_0^1 \int_0^{t'} \int_{\mathbb{S}^n_+} (w(y)-w(x))\frac{d}{d\xi}\{[1+\xi(\rho(y)-1)]^n K_{\xi\rho}(y,x)\} d\mathcal{H}^n_y d\xi dt'\end{aligned}$$

$$+2\int_0^1\int_{\mathbb{S}^n_+}(\rho(y)-\rho(x))\frac{d}{d\zeta}|_{\zeta=0}\{[1+t'((\rho+\zeta w)(y)-1)]^n\}K_{t'\rho}(y,x)d\mathcal{H}^n_y dt'$$
$$+2\int_0^1\int_{\mathbb{S}^n_+}(\rho(y)-\rho(x))[1+t'(\rho(y)-1)]^n\frac{d}{d\zeta}|_{\zeta=0}K_{t'(\rho+\zeta w)}(y,x)d\mathcal{H}^n_y dt'.$$

第一项由 (4.5) 得出，取 $h(y)=w(y)$，这意味着其 C^α-范数有界于 $\|w(x)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}$。换言之，$w,\ \rho\in C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)$，因此有 $\|\frac{d}{d\zeta}|_{\zeta=0}\{[1+t'((\rho+\zeta w)(y)-1)]^n\}\|_{C^{s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}\le C_{w\rho}$，$\|[1+t'(\rho(y)-1)]^n\|_{C^{s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}\le C_\rho\|\rho\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}<C$。由引理 4.2 并利用其证明过程可得，第二项的 C^α-范数有界于 $C_{w,\rho}\|\rho\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}$，而第三项的 C^α-范数有界于 $C_{\zeta,\rho}\|\rho\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}$。关于 $\partial_w R_{2,\rho}(x)$ 的论证类似。因此得到 (4.6)。

□

定理 4.5. *([22, 29])* 假设 $f\colon \mathbb{R}^n\times[0,T]\to\mathbb{R}$ 是光滑的，且 $|f(x,t)|\le C(1+|x|)^{-n-1-s}$ 对所有 $(x,t)\in\Sigma\times[0,T]$ 均成立。假设 u 是满足对所有 $t\in[0,T]$ 均有 $supp\,u(\cdot,t)\subset B_1$ 的解

$$\begin{cases}\partial_t u(x,t)=\Delta^{\frac{1+s}{2}}u(x,t)+f(x,t), & in\ \mathbb{R}^n\times(0,T],\\ u(x,0)=0.\end{cases}$$

则有

$$\sup_{0<t<T}\|u(\cdot,t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{R}^n)}\le\sup_{0<t<T}\|f(\cdot,t)\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

定理 4.6. 假设 $f\colon \mathbb{S}^n_+\times[0,T]\to\mathbb{R}$ 和 $u_0, g\colon \mathbb{S}^n_+\to\mathbb{R}$ 均为光滑函数，并固定 $\alpha\in(0,1-s)$。假设 u 是一个解

$$\begin{cases}\partial_t u(x,t)=\Delta^{\frac{1+s}{2}}u(x,t)+f(x,t)+g(x), & in\ \mathbb{S}^n_+\times[0,T),\\ u(x,0)=u_0(x),\\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial\eta}=\cos\theta\sqrt{u^2(x,t)+|\nabla_\tau u(x,t)|^2}, & on\ \partial\mathbb{S}^n_+\times[0,T).\end{cases}$$

则有

$$\sup_{0<t<T}\|u(\cdot,t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\overline{\mathbb{S}^n_+})}\le C\|u_0\|_{C^\alpha(\overline{\mathbb{S}^n_+})}+C(1+T)(\sup_{0<t<T}\|f(\cdot,t)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)}+\|g\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)})$$
$$+\sup_{0<t<T}\|\cos\theta\sqrt{u^2(x,t)+|\nabla_\tau u(x,t)|^2}\|_{C^{s+\alpha}(\partial\mathbb{S}^n_+)}$$

and

$$\sup_{0<t<T}\|u\|_{C^0(\overline{\mathbb{S}^n_+})}\le\|u_0\|_{C^0(\overline{\mathbb{S}^n_+})}+CT(\sup_{0<t<T}\|f(\cdot,t)\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)}+\|g\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)}$$
$$+\sup_{0<t<T}\|\cos\theta\sqrt{u^2(x,t)+|\nabla_\tau u(x,t)|^2}\|_{C^0(\partial\mathbb{S}^n_+)}).$$

证明。我们将把 u 分解为和 u_1+u_2，其中

$$\begin{cases} \partial_t u_1(x,t) = \Delta^{\frac{1+s}{2}} u_1(x,t) + f(x,t) + g(x), & in\ \mathbb{S}^n_+ \times (0,T], \\ u_1(x,0) = u(x,0) = u_0(x), & \\ \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial \eta} = 0, & on\ \partial\mathbb{S}^n_+ \times [0,T), \end{cases} \tag{4.7}$$

and

$$\begin{cases} \partial_t u_2(x,t) = \Delta^{\frac{1+s}{2}} u_2(x,t), & in\ \mathbb{S}^n_+ \times (0,T], \\ u_2(x,0) = 0. & \\ \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial \eta} = \cos\theta \sqrt{u_2^2(x,t) + |\nabla_\tau u_2(x,t)|^2}, & on\ \partial\mathbb{S}^n_+ \times [0,T). \end{cases} \tag{4.8}$$

接下来，我们将分别计算上述两个方程。先证明第二个不等式。对于 (4.7)，我们再次将 u_1 拆分为 u_{11} 和 u_{12} 之和，其中

$$\begin{cases} \partial_t u_{11}(x,t) = \Delta^{\frac{1+s}{2}} u_{11}(x,t), & in\ \mathbb{S}^n_+ \times (0,T], \\ u_{11}(x,0) = u_0(x), & \\ \frac{\partial u_{11}(x,t)}{\partial \eta} = 0, & on\ \partial\mathbb{S}^n_+ \times [0,T), \end{cases} \tag{4.9}$$

and

$$\begin{cases} \partial_t u_{12}(x,t) = \Delta^{\frac{1+s}{2}} u_{12}(x,t) + f(x,t) + g(x), & in\ \mathbb{S}^n_+ \times (0,T], \\ u_{12}(x,0) = 0. & \end{cases} \tag{4.10}$$

根据最大值原理，$|u_{11}(x,\ t)| \le |u_0(x)|$，$x \in \overline{\mathbb{S}^n_+}$。

假设 $g(x) = 0$，取一个较小的 $\epsilon > 0$，定义 $u_\epsilon(x,\ t) = (t+\epsilon)^{-1} u_{12}(x,\ t)$，则存在 $(x_0,\ t_0) \in \mathbb{S}^n_+ \times (0,\ T-\epsilon)$，使得

$$u_\epsilon(x_0,t_0) = \sup_{\mathbb{S}^n_+ \times (0,T-\epsilon)} u_\epsilon(x,t),$$

then

$$\partial_t u_\epsilon(x_0,t_0) = -\frac{u_{12}(x_0,t_0)}{(t_0+\epsilon)^2} + \frac{\partial_t u_{12}(x_0,t_0)}{t_0+\epsilon} \ge 0,$$

$$\Delta^{\frac{1+s}{2}} u_{12}(x_0,t_0) + f(x_0,t_0) \ge \frac{u_{12}(x_0,t_0)}{t_0+\epsilon}.$$

$u_\epsilon(x_0,\ t_0)$的方程意味着

$$\frac{u_{12}(x_0,t_0)}{t_0+\epsilon} \le \sup_{0<t<T} f(x,t).$$

令 $\epsilon \to 0$即可得到该估计。对 $-u_{12}$ 重复上述论证，可得

$$|u_{12}(x,\ t)| \le CT \text{ 上确界}_{0<t<T}\ f(x,\ t)。$$

对于 (4.8)，固定一个较小的 $\varepsilon > 0$，令 $W := \sup |\overline{\cos\ \theta\sqrt{u_2^2(x,t)\ + |\nabla_\tau u_2}(x,t)|^2}|$，定义$_{x\in\partial\mathbb{S}^n_+, 0<t<T} u_\varepsilon(x,t)\ = u_2 + W\psi(d(x))$，距离函数 $d(x) := dist(x, \partial\mathbb{S}^n_+)$ 表示测地

距离，即从 x 到边界 $\partial\mathbb{S}^n_+$的距离。这里， $\psi(d(x))$ 是一个光滑函数，记作 $\psi(d(x)) := 1 - \int^{d_{(x)}}_0 \quad \delta(l)dl$。令 $\delta(l)$ 为满足 $\delta(l) = 1$ for $l \le \frac{1}{2}\epsilon$,$\delta\ l\ = 0 \quad l \ge \epsilon \qquad \epsilon \qquad\qquad l\ dl = 1 \qquad \psi \qquad \psi\ 0\ = 1$ ( ) for where sufficiently small and $\int_0^\epsilon \delta(\,)$ 的光滑函数。事实上，满足 ( ) ,$\psi(d(x)) = 0$ for $d(x) \ge \epsilon$, $\psi'_d|_{d(x)=0} = -1$。那么， $u_\varepsilon(x,t)$ 满足以下方程

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon(x,t) = \Delta^{\frac{1+s}{2}} u_\varepsilon(x,t) - W\Delta^{\frac{1+s}{2}}\psi(d(x)), & in\ \mathbb{S}^n_+ \times (0,T], \\ u_\varepsilon(x,0) = W\psi(d(x)). & \\ \frac{\partial u_\varepsilon(x,t)}{\partial \eta} \le 0, & on\ \partial\mathbb{S}^n_+ \times [0,T). \end{cases}$$

根据方程 (4.7) 中 u_1 的计算，我们可以直接得到 $|u_\varepsilon(x,t)| \le W\psi(d(x))| + (1+T)$ $W\Delta^{\frac{1+s}{2}}\psi(d(x))$。由 $u_\varepsilon(x,t)\overline{\ } = u_2 + W\psi(d(x))$，我们可以得到

$$|u_2(x,t)| \le CT \sup_{x\in\partial\mathbb{S}^n_+, 0<t<T} |\cos\theta\sqrt{u_2^2(x,t) + |\nabla_\tau u_2^2(x,t)||}.$$

我们来证明第一个不等式。对于 (4.10)，由于 $\mathbb{S}^n_+$ 嵌入在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中，以便将 $u_{12},\ f \in C^1(\mathbb{S}^n_+;$ $\mathbb{R})$ 延拓为 $\tilde{u}_{12},\ f \in C^1(\mathbb{S}^n;\ \mathbb{R})$，使得 $\tilde{u}_{12} = u_{12},\ f = f$ 在 $\mathbb{S}^n_+$ 上。固定 $x_0 \in \mathbb{S}^n$ ，并通过旋转坐标系，不妨设其为北极，即 $x_0 = e_{n+1}$。我们首先将方程局部化到 x_0 附近。为此，我们固定一个较小的 $\epsilon > 0$ ，并选取一个光滑的截断函数 $\varsigma\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ ，使得当 $|r| < \frac{\epsilon}{2}$ 时， $\varsigma(r) = 1$ ；当 $r \ge \epsilon$ 时， $\varsigma(r) = 0$。下文中，我们总记 $x = (x', x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ，其中 $x' \in \mathbb{R}^{\overline{n}}$,

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u}_{12}(x,t) = \Delta^{\frac{1+s}{2}}\tilde{u}_{12}(x,t) + f(x,t) + g(x), & in\ \mathbb{S}^n \times (0,T], \\ \tilde{u}_{12}(x,0) = 0, \end{cases} \tag{4.11}$$

我们假设 $g(x) = 0$ 且

$$\begin{aligned} \partial_t\tilde{u}_{12}(x,t) =& 2\int_{\mathbb{S}^n} \varsigma(|y'|)\frac{\tilde{u}_{12}(y,t) - \tilde{u}_{12}(x,t)}{|y-x|^{n+1+s}} d\mathcal{H}^n_y \\ &+ 2\int_{\mathbb{S}^n} (1-\varsigma(|y'|))\frac{\tilde{u}_{12}(y,t) - \tilde{u}_{12}(x,t)}{|y-x|^{n+1+s}} d\mathcal{H}^n_y + f(x,t) \\ :=& 2\int_{\mathbb{S}^n} \varsigma(|y'|)\frac{\tilde{u}_{12}(y,t) - \tilde{u}_{12}(x,t)}{|y-x|^{n+1+s}} d\mathcal{H}^n_y + M_1(x,t) + f(x,t). \end{aligned} \tag{4.12}$$

由于函数 $1-\varsigma(|y'|)$ 在 $|y'| < \frac{\epsilon}{2}$ 上为零，上述积分 $M_1(x,t)$ 在 $|y'| < \frac{\epsilon}{2}$ 上非奇异，因此我们有

$$\sup_{0<t<T} \|\varsigma(|4x'|)M_1(x,t)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n)} \le C_\epsilon \sup_{0<t<T} \|u_{12}(x,t)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)}. \tag{4.13}$$

我们将 $\mathbb{S}^n$ 局部表示为函数 $\varphi(x') = \sqrt{1-|x'|^2}$ 的图形， $y,\quad x \in \overline{\mathbb{S}^n,\ |y'|},\quad |x'| < \epsilon,$ 记作

$$B_\delta = \{(x', x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x'| < \epsilon, |x_{n+1}| < \epsilon\},$$

那么我们记作

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{S}^n} \varsigma(|y'|)\frac{\tilde{u}_{12}(y,t)-\tilde{u}_{12}(x,t)}{|y-x|^{n+1+s}}d\mathcal{H}^n_y\\
=&\int_{\mathbb{S}^n} \sqrt{1-|y'|^2}\varsigma(|y'|)\frac{\tilde{u}_{12}(y,t)-\tilde{u}_{12}(x,t)}{|y-x|^{n+1+s}}d\mathcal{H}^n_y\\
&+\int_{\mathbb{S}^n} (1-\sqrt{1-|y'|^2})\varsigma(|y'|)\frac{\tilde{u}_{12}(y,t)-\tilde{u}_{12}(x,t)}{|y-x|^{n+1+s}}d\mathcal{H}^n_y\\
=&\int_{\mathbb{R}^n} \varsigma(|y'|)\frac{\tilde{u}_{12}(y',t)-\tilde{u}_{12}(x',t)}{|(y'-x')^2+(\varphi(y')-\varphi(x'))^2|^{\frac{n+1+s}{2}}}dy'\\
&+\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\sqrt{1-|y'|^2}}{\sqrt{1-|y'|^2}}\varsigma(|y'|)\frac{\tilde{u}_{12}(y',t)-\tilde{u}_{12}(x',t)}{|(y'-x')^2+(\varphi(y')-\varphi(x'))^2|^{\frac{n+1+s}{2}}}dy'.
\end{aligned}$$

为简化记号，我们记 $\tilde{u}_{12}(y',t)=\tilde{u}_{12}((y',\varphi(y')),t)$，类似地记 $f(x',t)$ 和

$$K_\varphi(y',x')=\frac{1}{|(y'-x')^2+(\varphi(y')-\varphi(x'))^2|^{\frac{n+1+s}{2}}}.$$

于是有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{S}^n} \varsigma(|y'|)\frac{\tilde{u}_{12}(y,t)-\tilde{u}_{12}(x,t)}{|y-x|^{n+1+s}}d\mathcal{H}^n_y\\
=&\int_{\mathbb{R}^n} \varsigma(|y'|)(\tilde{u}_{12}(y',t)-\tilde{u}_{12}(x',t))K_\varphi(y',x')dy'\\
&+\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\sqrt{1-|y'|^2}}{\sqrt{1-|y'|^2}}\varsigma(|y'|)(\tilde{u}_{12}(y',t)-\tilde{u}_{12}(x',t))K_\varphi(y',x')dy'.
\end{aligned}$$

定义 $v(x',t)=\varsigma(4|x'|)\tilde{u}_{12}(x',t)$。于是有

$$\begin{aligned}
\partial_t v(x',t)=&\varsigma(4|x'|)\{\Delta^{\frac{1+s}{2}}\tilde{u}_{12}(x',t)+f(x',t)\}\\
=&2\int_{\mathbb{R}^n} \varsigma(4|x'|)\varsigma(|y'|)(\tilde{u}_{12}(y',t)-\tilde{u}_{12}(x',t))K_\varphi(y',x')dy'\\
&+2\int_{\mathbb{R}^n} \varsigma(4|x'|)\frac{1-\sqrt{1-|y'|^2}}{\sqrt{1-|y'|^2}}\varsigma(|y'|)(\tilde{u}_{12}(y',t)-\tilde{u}_{12}(x',t))K_\varphi(y',x')dy'\\
&+\varsigma(4|x'|)M_1(x',t)+\varsigma(4|x'|)f(x',t)
\end{aligned}$$

并记

$$\begin{aligned}
&\varsigma(4|x'|)\varsigma(|y'|)(\tilde{u}_{12}(y',t)-\tilde{u}_{12}(x',t))\\
=&\varsigma(|y'|)(v(y',t)-v(x',t))-\varsigma(|y'|)\tilde{u}_{12}(y',t)(\varsigma(4|y'|)-\varsigma(4|x'|))\\
=&v(y',t)-v(x',t)-(1-\varsigma(|y'|))(v(y',t)-v(x',t))\\
&-\varsigma(|y'|)\tilde{u}_{12}(y',t)(\varsigma(4|y'|)-\varsigma(4|x'|)),
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{d}{d\xi} K_{\xi\varphi} d\xi = \frac{1}{|(y' - x')^2 + (\varphi(y') - \varphi(x'))^2|^{\frac{n+1+s}{2}}} - \frac{1}{|y' - x'|^{n+1+s}},$$

其中 $K_{\xi\varphi}(y', x') = \frac{}{|\ y'-x'^{\ 2}+\xi\ \varphi\ y'\ ()(()\ -\varphi(x'))^2|^{\ \frac{}{2}}}^{n+1+s}$。整理各项后，记为

$$\begin{aligned}
\partial_t v(x',t) =& \Delta^{\frac{1+s}{2}} v(x',t) + 2\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} (v(y',t) - v(x',t)) \frac{d}{d\xi} K_{\xi\varphi} dy' d\xi \\
& - 2\int_{\mathbb{R}^n} (1 - \varsigma(|y'|))(v(y',t) - v(x',t)) K_\varphi dy' \\
& - 2\int_{\mathbb{R}^n} \varsigma(|y'|)\tilde{u}_{12}(y',t)(\varsigma(4|y'|) - \varsigma(4|x'|)) K_\varphi dy' \\
& + 2\int_{\mathbb{R}^n} \varsigma(4|x'|) \frac{1 - \sqrt{1 - |y'|^2}}{\sqrt{1 - |y'|^2}} \varsigma(|y'|)(\tilde{u}_{12}(y',t) - \tilde{u}_{12}(x',t)) K_\varphi(y', x') dy' \\
& + \varsigma(4|x'|) M_1(x',t) + \varsigma(4|x'|) f(x',t) \\
:=& \Delta^{\frac{1+s}{2}} v(x',t) + M_2(x',t) - M_3(x',t) - M_4(x',t) + M_5(x',t) \\
& + \varsigma(4|x'|)\{M_1(x',t) + f(x',t)\}.
\end{aligned}$$

我们需要估计 C^α-范数 $M_2(x',t)$ $M_3(x',t)$ $M_4(x',t)$ 和 $M_5(x',t)$。首先，考虑 $M_2(x',t)$: $= 2\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} (v(y',t) - v(x',t)) \frac{d}{d\xi} K_{\xi\varphi} dy' d\xi$。引理 6.2 对 $\Sigma = \mathbb{R}^n$ 和 $K_{\xi\varphi}$ 同样成立。因此，由引理 6.2 可得

$$\sup_{0<t<T} \|M_2(x',t)\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \le C \sup_{0<t<T} \|v(x',t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.14}$$

类似地， $M_4(x',t)$、 $M_5(x',t)$ 也利用引理 6.2 得到

$$\sup_{0<t<T} \|M_4(x',t)\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \le C \sup_{0<t<T} \|\tilde{u}_{12}(x',t)\|_{C^{s+\alpha}(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.15}$$

$$\sup_{0<t<T} \|M_5(x',t)\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \le C \sup_{0<t<T} \|\tilde{u}_{12}(x',t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.16}$$

由于 $1-\varsigma(|y'|)$ 在 $|y'| < \frac{\epsilon}{2}$ 时为零，上述积分 $M_3(x,t)$ 在 $|y'| < \frac{\epsilon}{2}$ 上是非奇异的，因此我们有 -

$$\sup_{0<t<T} \|M_3(x',t)\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \le C_\epsilon \sup_{0<t<T} \|\tilde{u}_{12}(x',t)\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.17}$$

综上，由 (4.12)、(4.13)、(4.14)、(4.15)、(4.16)、(4.17) 以及定理 4.5 可得

$$\begin{aligned}
\sup_{0<t<T} \|v(x',t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le & C_\epsilon \sup_{0<t<T} \|u_{12}(x,t)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} + \sup_{0<t<T} \|f(x',t)\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \\
& + C\{\sup_{0<t<T} \|\tilde{u}_{12}(x',t)\|_{C^{s+\alpha}(\mathbb{R}^n)} + \sup_{0<t<T} \|\tilde{u}_{12}(x',t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{R}^n)}\}.
\end{aligned}$$

根据 $v(x',t)$ 与 $\tilde{u}_{12}(x,t)$ 之间的关系，我们可以得到$\|\tilde{u}_{12}(x,t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n \cap B_{\frac{\epsilon}{8}})} \le C\sup \|v($ $x',t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{R}^n)}$ 对于 $t \in (0,T]$。我们使用标准覆盖论证得出

$$\sup_{0<t<T} \|\tilde{u}_{12}(x,t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n)} \le C_\epsilon \sup_{0<t<T} \|u_{12}(x,t)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} + \sup_{0<t<T} \|f(x,t)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n)}$$

$$+C\sup_{0<t<T}\|\tilde{u}_{12}(x,t)\|_{C^{s+\alpha}(\mathbb{S}^n)}.$$

此外，根据插值不等式 2.1，我们可以得到

$$\sup_{0<t<T}\|\tilde{u}_{12}(x,t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n)}\leq C_\epsilon\sup_{0<t<T}\|\tilde{u}_{12}(x,t)\|_{C^0(\mathbb{S}^n)}+\sup_{0<t<T}\|f(x,t)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n)}.$$

更准确地说,

$$\sup_{0<t<T}\|u_{12}(x,t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}\leq C_\epsilon\sup_{0<t<T}\|u_{12}(x,t)\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)}+\sup_{0<t<T}\|f(x,t)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)}. \tag{4.18}$$

对于（4.9），令

$$\tilde{u}_{11}(x,t)=e^{\lambda t}u_{11}(x,t),\ U(x,t)=e^{\lambda t}(\tilde{u}_{11}(x,t)-u_{11}(x,t)),$$

其中 $\lambda>0$ 是一个常数。根据 $U(x,\ t)$ 的定义及（4.9），$U(x,\ t)$ 满足

$$\begin{cases}\partial_t U(x,t)=\Delta^{\frac{1+s}{2}}U(x,t)+2\lambda U+\lambda\tilde{u}_{11}(x,t), & in\ \mathbb{S}^n_+\times(0,T],\\ U(x,0)=0. & \\ \frac{\partial U(x,t)}{\partial\eta}=0, & on\ \partial\mathbb{S}^n_+\times[0,T).\end{cases}$$

我们需要将 $U(x,\ t)$ 延拓为定义在 $\mathbb{S}^n$ 上的函数，同时保持一定程度的正则性。我们将 $x\in\mathbb{S}^n_-$ 关于超平面 $\partial\mathbb{S}^n_+$ 的反射记为

$$x^\star=(x_1,\ldots,x_n,-x_{n+1})\in\mathbb{S}^n_+.$$

我们将延拓函数定义如下

$$\tilde{U}(x)=\begin{cases}U(x), & if\ x\in\mathbb{S}^n_+;\\ U(x^\star), & if\ x\in\mathbb{S}^n_-.\end{cases}$$

~令 $x\in\partial\mathbb{S}^n_+$。当从上半球趋近 x 时，$U(x,t)=U(x,t)$。当从下半球趋近 x 时，由于 $x\in\partial\mathbb{S}^n_+$，其反射点就是其自身，

~因此 $U(x,t)=U(x^\star,t)=U(x,t)$。因此，函数 $U(x,t)$ 连续。由于在 $\partial\mathbb{S}^n_+$ 上，上半球和下半球定义的函数值相同，切向导数自然连续。此外，诺伊曼边界条件恰好保证延拓后函数在边界~处的法向导数连续。通过延拓，我们得到函数 $U(x,t)$，它是整个球面 $\mathbb{S}^n$ 上的一个 C^1 函数。因此，$\tilde{U}(x,t)$ 满足以下方程

$$\begin{cases}\partial_t\tilde{U}(x,t)=\Delta^{\frac{1+s}{2}}\tilde{U}(x,t)+2\lambda\tilde{U}+\lambda\tilde{u}_{11}(x,t), & in\ \mathbb{S}^n\times(0,T],\\ \tilde{U}(x,0)=0.\end{cases}$$

由（4.11），可得

$$\sup_{0<t<T}\|\tilde{U}(x,t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n)}\leq C_\epsilon\sup_{0<t<T}\|\tilde{U}(x,t)\|_{C^0(\mathbb{S}^n)}+\sup_{0<t<T}\|\tilde{U}(x,t)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n)}$$

$$+\sup_{0<t<T}\|\tilde{u}_{11}(x,t)\|_{C^{\alpha}(\mathbb{S}^n)}.$$

更准确地说,

$$\sup_{0<t<T}\|u_{11}(x,t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\overline{\mathbb{S}^n_+})}\leq\|u_0(x)\|_{C^{\alpha}(\overline{\mathbb{S}^n_+})}. \tag{4.19}$$

对于（4.8），我们希望证明

$$\sup_{0<t<T}\|u_2(\cdot,t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\overline{\mathbb{S}^n_+})}\leq\sup_{0<t<T}\|\cos\theta\sqrt{u^2(x,t)+|\nabla_\tau u(x,t)|^2}\|_{C^{s+\alpha}(\partial\mathbb{S}^n_+)}. \tag{4.20}$$

假设（4.20）不成立。以下证明源自 [30] 中的定理4.1。也就是说，对于 $k\in\mathbb{N}$，存在 $u_{2k}\in C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)$ 使得

$$\begin{cases}\partial_t u_{2k}(x,t)=\Delta^{\frac{1+s}{2}}u_{2k}(x,t), & in\ \mathbb{S}^n_+\times(0,T],\\ u_{2k}(x,0)=0.\\ \frac{\partial u_{2k}(x,t)}{\partial\eta}=\cos\theta\sqrt{u^2_{2k}(x,t)+|\nabla_\tau u_{2k}(x,t)|^2}, & on\ \partial\mathbb{S}^n_+\times[0,T),\end{cases}$$

$$\|u_{2k}\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}=1, \tag{4.21}$$

$$\sup_{0<t<T}\|u_{2k}(\cdot,t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\overline{\mathbb{S}^n_+})}>k\sup_{0<t<T}\|\cos\theta\sqrt{u^2_{2k}(x,t)+|\nabla_\tau u_{2k}(x,t)|^2}\|_{C^{s+\alpha}(\partial\mathbb{S}^n_+)}.$$

由（4.21）和 Ascoli-Arzelà 定理，由于 $u_{2k}\neq 0$，我们得到一个子序列 $\{u_{2k_h}\}$ in$C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)$，使得

$$u_{2k_h}\to u_{2k_0}\ in\ C^0(\overline{\mathbb{S}^n_+})$$
$$\nabla u_{2k_h}\to u_{2k_1}\ in\ C^0(\overline{\mathbb{S}^n_+}),$$

这意味着

$$\begin{cases}\partial_t u_{2k_0}(x,t)=\Delta^{\frac{1+s}{2}}u_{2k_0}(x,t)=0, & in\ \mathbb{S}^n_+\times(0,T],\\ u_{2k_0}(x,0)=0.\\ \frac{\partial u_{2k_0}(x,t)}{\partial\eta}=\cos\theta\sqrt{u^2_{2k_0}(x,t)+|u_{2k_1}(x,t)|^2}=0, & on\ \partial\mathbb{S}^n_+\times[0,T),\end{cases}$$

当 $k\to\infty$ 时，这意味着 $u_{2k_0}=0$。与（4.21）比较，我们得到矛盾，因为

$$1=\lim_{k\to\infty}\|u_{2k}\|_{C^{1+s+\alpha}(\overline{\mathbb{S}^n_+})}=\|u_{2k_0}\|_{C^{1+s+\alpha}(\overline{\mathbb{S}^n_+})}=0.$$

因此，所需估计成立。结合 (4.18)、(4.19) 和 (4.20)，我们得到第一个不等式。

□

5 定理(1.1)的证明

根据命题 3.2，我们需要证明方程 (3.5) 有唯一解$\rho \in C(\mathbb{S}^n_+ \times [0,T]) \bigcap C^\infty(\mathbb{S}^n_+ \times (0,\ T])$，其中 $\rho(x,\ 0) = \rho_0$ 适用于 $x \in \mathbb{S}^n_+$。

Step 1。（基本估计）在 $\mathbb{S}^n_+ \times [0,T)$ 上，公式 (3.4) 可写为

$$\partial_t \rho(x,t) = \Delta^{\frac{1+s}{2}} \rho(x,t) + P(x,\rho(\cdot,t),\nabla\rho(\cdot,t)) - H^s_{\mathbb{S}^n_+},$$

其中，余项对一般函数 $\rho \in C^\infty$ 定义为

$$\begin{aligned} P(x,\rho(\cdot,t),\nabla\rho(\cdot,t)) =& (A(x,\rho,\nabla_\tau\rho)-1)(\Delta^{\frac{1+s}{2}}\rho(x,t) - H^s_{\mathbb{S}^n_+}) \\ &+ (A(x,\rho,\nabla_\tau\rho))[R_{1,\rho}(x) + R_{2,\rho}(x)(\rho(x,t)-1)], \end{aligned} \tag{5.1}$$

其中 $A(x,\rho,\nabla_\tau\rho) := \frac{\sqrt{\rho^2(x)+|\nabla_\tau\rho\ x\ |^2()()}}{\rho\ x}$，且 $R_{1,\rho}$和 $R_{2,\rho}$分别在 (3.3) 中定义。 (3.4)

假设

$$\|\rho\|_{C^{1+s+\alpha}(\overline{\mathbb{S}^n_+})} \le C_1,\ and\ \|\rho\|_{C^0(\overline{\mathbb{S}^n_+})} \le C_2$$

并证明这意味着

$$\|P(x,\rho(\cdot,t),\nabla\rho(\cdot,t))\|_{C^\alpha(\overline{\mathbb{S}^n_+})} \le C_{12}, \tag{5.2}$$

其中 C_{12} 依赖于$\|\rho\|_{C^{1+s+\alpha}\ (\mathbb{S}^n_+)}$ 和$\|\rho\|_{C^0\ (\mathbb{S}^n_+)}$。根据引理 4.3，我们已经知道

$$\|R_{1,\rho}(x)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \le C\|\rho\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}\ \ and\ \ \|R_{2,\rho}(x)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \le C_{\xi,\rho}.$$

$\|\Delta^{\frac{1+s}{2}}\rho\ (x,\ t)\|_{C^\alpha\ (\mathbb{S}^n_+)}$ 由 (4.5) 取 $h\ (y) =\ \ \rho\ (y)$ 可得，继而有$\|\Delta^{\frac{1+s}{2}}\rho\ (x,\ t)\|_{C^\alpha\ (\mathbb{S}^n_+)} \le \|\rho\ (x,\ t)\|_{C^{1+s+\alpha}\ (\mathbb{S}^n_+)}$。事实上，$\|H^s_{\mathbb{S}^n_+}\|_{C^\alpha\ (\mathbb{S}^n_+)}$ 一致有界，且

$$\|A(x,\rho,\nabla_\tau\rho)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \le \|\rho(x,t)\|_{C^{1+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}.$$

根据 $\mathbb{S}^n_+$ 上引理 2.1 中的插值不等式，我们估计

$$\|A(x,\rho,\nabla_\tau\rho)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \le C'\|\rho(x,t)\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)}\|\rho(x,t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}.$$

因此我们得到 (5.2)。

接下来，我们需要将 $P\ (x,\ \rho\ (\cdot,\ t)\ \ \nabla\rho\ (\cdot,\ t)$ 线性化，这一步将在证明强解的存在性时发挥作用。事实上，我们需要证明，若 $v_1,\ v_2 \in C^{1+s+\alpha}\ (\mathbb{S}^n_+)$，则

$$\begin{aligned} &\|P(x,v_2(\cdot,t),\nabla v_2(\cdot,t)) - P(x,v_1(\cdot,t),\nabla v_1(\cdot,t))\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \\ \le& C_{\xi,\eta,v_1}\|v_2-v_1\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)} + C_\xi\|v_2-v_1\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

与方程 (3.1) 类似，令 $w = v_2 - v_1$，则

$$P(x,v_2(\cdot,t),\nabla v_2(\cdot,t)) - P(x,v_1(\cdot,t),\nabla v_1(\cdot,t)) = \int_0^1 \frac{d}{d\xi}P(x,v_1+\xi w,\nabla(v_1+\xi w))d\xi.$$

为简化记号，我们记作 $v_\xi = v_1 + \xi w$。回顾 (5.1) 中 P 的定义，通过求导可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\xi}P(x, v_1 + \xi w, \nabla(v_1 + \xi w)) \\
=&\frac{d}{d\xi}A(x, v_\xi, \nabla_\tau v_\xi)\{\Delta^{\frac{1+s}{2}} v_\xi(x,t) - H^s_{\mathbb{S}^n_+} + R_{1,v_\xi}(x) + R_{2,v_\xi}(x)(v_\xi(x,t) - 1)\} \\
&+ (A(x, v_\xi, \nabla_\tau v_\xi) - 1)\{\Delta^{\frac{1+s}{2}} w(x,t)\} \\
&+ A(x, v_\xi, \nabla_\tau v_\xi)[\frac{d}{d\xi}R_{1,v_\xi}(x) + \frac{d}{d\xi}R_{2,v_\xi}(x)(v_\xi(x,t) - 1) + R_{2,v_\xi}(x)(w(x,t) - 1)].
\end{aligned}$$

根据引理 4.3,

$$\|R_{1,v_\xi}(x)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \le C\|v_\xi\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)} < C \quad and \quad \|R_{2,v_\xi}(x)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \le C_{\xi,\rho},\ \xi \in [0,1].$$

根据推论 4.4,

$$\begin{aligned}
\|\frac{d}{d\xi}R_{1,v_\xi}(x)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} &\le C_{\xi,\eta,v_1}\|w(x)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}, \\
\|\frac{d}{d\xi}R_{2,v_\xi}(x)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} &\le C_{w,\rho}.
\end{aligned}$$

$\|\Delta^{\frac{1+s}{2}} v_\xi(x,t)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)}$由在（4.5）中取$h(y) = \quad v_\xi(y,t)$，然后取$\|\Delta^{\frac{1+s}{2}} v_\xi(x,t)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \le \quad \|v_\xi(x,t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}$即可得到。类似地，我们可以得到$\|\Delta^{\frac{1+s}{2}} w(x,t)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \le \|w(x,t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}$。

—

由 $\mathbb{S}^n_+$上的引理 2.1 中的插值不等式，我们估计得

$$\|A(x, v_\xi, \nabla_\tau v_\xi)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \le C'\|v_\xi(x,t)\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)}\|v_\xi(x,t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)},$$

由于 $A(x, v_\xi, \nabla_\tau v_\xi)$是光滑的，我们可以得到

$$\frac{d}{d\xi}\|A(x, v_\xi, \nabla_\tau v_\xi)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \le C_{v_\xi}\|w\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)}.$$

结合上述所有估计，我们可以得到

$$\begin{aligned}
&\|P(x, v_2(\cdot,t), \nabla v_2(\cdot,t)) - P(x, v_1(\cdot,t), \nabla v_1(\cdot,t))\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \\
\le &\int_0^1 \|\frac{d}{d\xi}P(x, v_1 + \xi w, \nabla(v_1 + \xi w))\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)}d\xi \\
\le &C_{w,\eta,\rho}\|w(x)\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)} + C_{v_\xi}\|w\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)}.
\end{aligned}$$

将上述方程与引理 2.1 中的插值不等式结合，可得 (5.3)。

步骤 2。（强解的存在唯一性）设 X 为函数 $u \in C(\mathbb{S}^n_+ \times [0,T])$ 的空间。在 X 中， u 满足

$$u \in C^{1+s+\alpha}(\overline{\mathbb{S}^n_+}), \quad u \in C^0(\overline{\mathbb{S}^n_+}), \quad \partial_t u \in C^\alpha(\overline{\mathbb{S}^n_+}).$$

接下来，我们按照 [22] 中定理 5.1 的证明，给出偏微分方程 (3.5) 的强解的存在性和唯一性。

我们定义映射 $\mathcal{L}$，其中 $\mathcal{L}$ 满足： $\mathcal{L}(\rho) = u(\rho \in X)$ 是下列方程的解

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + (-\Delta)^{\frac{1+s}{2}} u(x,t) = P(x,\rho(x,t),\nabla\rho(x,t)) - H^s_{\mathbb{S}^n_+}, & in\ \mathbb{S}^n_+ \times [0,T), \\ u(x,0) = \rho_0(x), & \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial \eta} = \cos\theta \sqrt{\rho^2(x,t) + |\nabla_\tau \rho(x,t)|^2}, & on\ \partial\mathbb{S}^n_+ \times [0,T). \end{cases} \tag{5.4}$$

换言之， $\mathcal{L}: X \to X$ 的不动点是 (3.5) 的一个强解。这里， $\rho : \mathbb{S}^n_+ \times [0,T) \to \mathbb{R}$ 关于时间是利普希茨连续的，关于空间是 $C^{1+s+\alpha}$-正则的，几乎对每个 $t \in [0,T)$ 都满足方程 (3.5)，并且是一个强解。根据不动点定理的条件，我们首先需要说明 $\mathcal{L}$ 定义良好，即上述方程 (5.4) 中的 u 属于 X。

根据定理 4.6，我们已经知道

$$\begin{aligned} \sup_{0<t<T} \|u\|_{C^0(\overline{\mathbb{S}^n_+})} \leq & \|\rho_0\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)} + C(1+T)\{\|P(x,\rho(x,t),\nabla\rho(x,t))\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)} \\ & + \|H^s_{\mathbb{S}^n_+}\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)} + \sup_{0<t<T} \|\cos\theta\sqrt{\rho^2(x,t) + |\nabla_\tau\rho(x,t)|^2}\|_{C^0(\partial\mathbb{S}^n_+)}\}, \end{aligned}$$

其中我们假设 ρ_0 和 $\rho \in X$ 光滑。由 (5.2)，若 $\sup_{0<t<T} \|\rho\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)} \leq C_1$, and $\sup_{0<t<T} \|\rho\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)} \leq C_2$,

$$\|P(x,\rho(\cdot,t),\nabla\rho(\cdot,t))\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \leq C_{12},$$

对于 $t \in [0,T]$，其中 C_{12} 取决于 $\|\rho\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}$ 和 $\|\rho\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)}$。此时，如果 $\|\rho_0\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)} < C_3$，则有

$$\sup_{0<t<T} \|u\|_{C^0(\overline{\mathbb{S}^n_+})} \leq C_3 + C(1+T)(C_{12}+C) < C,$$

当 $T < \infty$ 有界时。这意味着 $u \in C^0(\mathbb{S}^n_+)$。

根据定理 4.6，

$$\begin{aligned} \sup_{0<t<T} \|u(\cdot,t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\overline{\mathbb{S}^n_+})} \leq & C\|\rho_0\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} + C(1+T)\{\|P(x,\rho(\cdot,t),\nabla\rho(\cdot,t))\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \\ & + \|H^s_{\mathbb{S}^n_+}\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}\} \\ & + \sup_{0<t<T} \|\cos\theta\sqrt{\rho^2(x,t) + |\nabla_\tau\rho(x,t)|^2}\|_{C^{s+\alpha}(\partial\mathbb{S}^n_+)}. \end{aligned}$$

此时，若 $\rho_0 \in C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)$，则有

$$\sup_{0<t<T} \|u(\cdot,t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\overline{\mathbb{S}^n_+})} < C + C(1+T)(C_{12}+C) < C$$

当 $T < \infty$ 有界时。这意味着 $u \in C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)$。由 (5.2)、(5.4) 和 (4.5)，取 $h(y) = u(y)$，可得 $\sup_{0<t<T} \|\partial_t u(\cdot,t)\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)}$ 的上界。

$$\begin{aligned}
&\sup_{0<t<T} \|\partial_t u(\cdot,t)\|_{C^\alpha(\overline{\mathbb{S}^n_+})} \\
\le& C \sup_{0<t<T} \{\|u(\cdot,t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\overline{\mathbb{S}^n_+})} + \|P(x,\rho(\cdot,t),\nabla\rho(\cdot,t))\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)}\} < C.
\end{aligned}$$

因此，$\mathcal{L}\colon\ X \to X$ 定义良好。

接下来, 我们要证明 $\mathcal{L}\colon\ X \to X$ 在如下范数下是一个压缩映射

$$\|u(\cdot,t)\|_X := G \sup_{0<t<T} \{\|u(\cdot,t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\overline{\mathbb{S}^n_+})} + \|u(\cdot,t)\|_{C^0(\overline{\mathbb{S}^n_+})}\}$$

这里，G 表示一个待确定的较大常数。这主要是为了更好地控制范数。固定 ρ_1, $\rho_2 \in X$，记 $u_1 = \mathcal{L}[\rho_1]$, $u_2 = \mathcal{L}[\rho_2]$，则函数 $v = u_2 - u_1$ 是以下方程的一个解

$$\begin{cases}
\partial_t v(x,t) + (-\Delta)^{\frac{1+s}{2}} v(x,t) = P(x,\rho_2(\cdot,t),\nabla\rho_2(\cdot,t)) \\
\qquad -P(x,\rho_1(\cdot,t),\nabla\rho_1(\cdot,t)), & in\ \mathbb{S}^n_+ \times [0,T), \\
v(x,0) = 0, & \\
\frac{\partial v(x,t)}{\partial \eta} = \cos\theta\{\sqrt{\rho_2^2(x,t) + |\nabla_\tau \rho_2(x,t)|^2} \\
\qquad -\sqrt{\rho_1^2(x,t) + |\nabla_\tau \rho_1(x,t)|^2}\}, & on\ \partial\mathbb{S}^n_+ \times [0,T).
\end{cases} \tag{5.5}$$

记 $w = \rho_2 - \rho_1$，并在 (5.3) 中令 $v_1 = \rho_1, v_2 = \rho_2$，得到

$$\begin{aligned}
&\|P(x,\rho_2(\cdot,t),\nabla\rho_2(\cdot,t)) - P(x,\rho_1(\cdot,t),\nabla\rho_1(\cdot,t))\|_{C^\alpha(\mathbb{S}^n_+)} \\
\le& C\|w\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)} + C\|w\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)}.
\end{aligned}$$

结合（5.5）和定理 4.6,

$$\begin{aligned}
\sup_{0<t<T} \|v\|_{C^0(\overline{\mathbb{S}^n_+})} \le& C(1+T)(C\|w\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)} + C\|w\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)} \\
&+ \sup_{0<t<T} \|\cos\theta\{\sqrt{\rho_2^2(x,t) + |\nabla_\tau \rho_2(x,t)|^2} \\
&- \sqrt{\rho_1^2(x,t) + |\nabla_\tau \rho_1(x,t)|^2}\}\|_{C^0(\partial\mathbb{S}^n_+)}) \\
\le& CT(C\|w\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)} + C\|w\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)})
\end{aligned}$$

and

$$\sup_{0<t<T} \|v(\cdot,t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\overline{\mathbb{S}^n_+})} \le (C\|w\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)} + C\|w\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)})$$

$$
\begin{aligned}
&+\sup_{0<t<T}\|\cos\theta\{\sqrt{\rho_2^2(x,t)+|\nabla_\tau\rho_2(x,t)|^2}\\
&-\sqrt{\rho_1^2(x,t)+|\nabla_\tau\rho_1(x,t)|^2}\}\|_{C^{s+\alpha}(\partial\mathbb{S}^n_+)}\\
\leq& T(C\|w\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}+C\|w\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)}).
\end{aligned}
$$

通过选择 $G>\frac{C}{\epsilon}$ 和 $T<\frac{1}{G}$,–我们得到以下两个不等式 s

$$
G\sup_{0<t<T}\{\|v(\cdot,t)\|_{C^{1+s+\alpha}(\overline{\mathbb{S}^n_+})}+\|v(\cdot,t)\|_{C^0(\overline{\mathbb{S}^n_+})}\}\leq\epsilon G(\|w\|_{C^{1+s+\alpha}(\mathbb{S}^n_+)}+\|w\|_{C^0(\mathbb{S}^n_+)})
$$

and

$$
\|u_2-u_1\|_X\leq\epsilon\|\rho_2-\rho_1\|_X
$$

其中 ϵ 足够小。这表明 $\mathcal{L}:\ X\to X$ 是一个压缩映射，根据标准不动点理论，可知方程 3.5 有唯一的强解。

步骤 3。（高阶正则性） [22] 表明，只需证明 Schauder 估计，然后结合归纳法即可验证方程（3.5）的 $C^{k+s+\alpha}$ 估计和高阶正则性估计，从而建立分数阶平均曲率流（1.2）的光滑解的短时间存在性。

6 附录

在本文中，我们使用了 [22], 中的一些引理，并将其列于附录中，以方便读者阅读；这里 $\Sigma\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 是一个光滑紧超曲面。

定义 6.1。（ [22]）令 $\kappa>0$ 和 $K:\ \Sigma\times\Sigma\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$。如果以下三个条件成立，则称 $K\in\mathcal{S}_\kappa$：

(i) K 在每个 $y,x\in\Sigma,\ y\neq x$ 处连续，且满足

$$
|K(y,x)|\leq\frac{\kappa}{|y-x|^{n+1+s}}.
$$

(ii) 函数 $x\mapsto K(y,x)$ 在每个 $y,x\in\Sigma,\ y\neq x$ 处可微，且

$$
|\nabla_x K(y,x)|\leq\frac{\kappa}{|y-x|^{n+2+s}}.
$$

(iii) 函数

$$
\psi(x):=\int_\Sigma(y-x)K(y,x)d\mathcal{H}^n_y
$$

is Hölder 连续，且 $\|\psi\|_{C^\alpha(\Sigma)}\leq\kappa$.

引理 6.1. *([22])* 假设 $K:\ \Sigma\times\Sigma\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ 满足定义 (6.1) 中的条件 *(i)* 和 *(ii)*，常数为 $\kappa>0$。假设 $F\in C(\Sigma\times\Sigma)$ 满足

如下：
(i) 对所有 y、$x \in \Sigma$，均有

$$|F(y,x)| \leq \kappa_0 |y-x|^{1+s+\alpha}.$$

(ii) 对所有满足 $|y-x| \geq 2|z-x|$ 的 y、$x \in \Sigma$，均有

$$|F(y,z) - |F(y,x)| \leq \kappa_0 |z-x|^{s+\alpha} |y-x|.$$

则函数

$$\psi(x) = \int_\Sigma F(y,x) K(y,x) d\mathcal{H}^n_y$$

是 *Hölder* 连续的，且 $\|\psi\|_{C^\alpha(\Sigma)} \leq \kappa\kappa_0$.

引理 6.2。*([22])* 设 $K \in \mathcal{S}_\kappa$，并假设 $v_1 \in C^{1+s+\alpha}(\Sigma)$ $v_2 \in C^{s+\alpha}(\Sigma)$ 且$v_3 \in C^\alpha(\Sigma)$。则函数

$$\psi(x) = \int_\Sigma (v_1(y) - v_1(x)) v_2(y) v_3(x) K(y,x) d\mathcal{H}^n_y$$

是 *Hölder* 连续的，且

$$\|\psi\|_{C^\alpha(\Sigma)} \leq C\kappa \|v_1\|_{C^{1+s+\alpha}(\Sigma)} \|v_2\|_{C^{s+\alpha}(\Sigma)} \|v_3\|_{C^\alpha(\Sigma)}.$$

数据可用性声明不适用。
利益冲突无利益冲突。

参考文献

[1] U. Abresch, J. Langer, 归一化曲线缩短流与自相似解，《微分几何杂志》23 (1986), 第2期, 175–196.

[2] S. J. Altschuler, L. F. Wu, 具有指定接触角的非参数平均曲率流的平移曲面，《变分法与偏微分方程》2 (1994), 第1期, 101–111.

[3] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara, 有界变差函数与自由不连续问题。牛津数学专著。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2000年。

[4] J. Bosch, M. Stoll，基于向量值 Cahn-Hilliard 方程的分数阶图像修复模型，《SI AM J. Imaging Sci.》8（2015），第 4 期，2352–2382。

[5] L. Caffarelli、J.-M. Roquejoffre 和 O. Savin，《非局部极小曲面》，《纯粹与应用数学通讯》63（2010年），第9期，1111–1144。

[6] L. Caffarelli、P. Souganidis，非局部阈值动力学逼近前沿传播的收敛性，《数学分析档案》，2010年，195：1–23。[7] A. Cesaroni、L. De Luca、M. Novaga、M. Ponsiglione，非局部几何演化的稳定性结果及分数阶平均曲率流的极限情形，《偏微分方程通讯》46（2021年），第7期，1344–1371。[8] A. Cesaroni、M. Novaga，保体积分数阶平均曲率流下球的稳定性，《变分法进展》17（2024年），第2期，503–520。[9] A. Chambolle、M. Novaga、B. Ruffini，关于各向异性分数阶平均曲率流的一些结果，《界面与自由边界》19（2017年），第3期，393–415。[10] W. X. Chen、P. Y. Wang、Y. H. Niu、Y. Y. Hu，分数阶抛物方程的移动平面法渐近方法，《数学进展》377（2021年），论文编号107463，共47页。[11] E, Cinti、J, Serra、E. Valdinoci，稳定非局部极小曲面的定量平坦性结果与有界变差估计，《微分几何杂志》112（2019年），第3期，447–504。[12] J. S. Cui、P. B. Zhao，平均曲率型流与尖锐的 Micheal-Simon 不等式，《泛函分析杂志》286（2024年），第7期，论文编号110334，共35页。[13] D. De Gennaro、A. Kubin、A. Kubin，通过非局部定量Alexandrov定理研究离散保体积分数阶平均曲率流的渐近行为，《非线性分析》228（2023年），第23期，113200。[14] L. C. Evans、J. Spruck，水平集的平均曲率运动。II，《美国数学会汇刊》330（1992年），第1期，321–332。[15] E. Giusti，《极小曲面与有界变差函数》，《数学专著》，80，Birkh$\ddot{a}$user Verlag，巴塞尔，1984年。xii+240页。[16] B. Guan，满足接触角条件的非参数超曲面的平均曲率运动，载于《几何中的椭圆与抛物方法》，AK Peters，韦尔斯利（马萨诸塞州）（1996年），第47–56页。[17] Y. X. Hu、Y. Wei、B. Yang、T. L. Zhou，球内凸毛细超曲面的平均曲率型流，《变分法与偏微分方程》62（2023年），第7期，论文编号209，共23页。[18] G. Huisken，凸曲面在平均曲率流下演化为球面，《微分几何杂志》20（1984年），第1期，237–266。[19] G. Huisken，体积保持平均曲率流，《纯粹与应用数学杂志》382（1987年），35–48。[20] C. Imbert，分数阶平均曲率流的水平集方法，《界面与自由边界》11（2009年），第1期，153–176。

[21] K. Ishii, 《各向异性非局部平均曲率流的一种近似格式》, 《非线性微分方程及其应用》21（2014）, 第2期, 219-252页。[22] V. Julin, D. A. La Manna, 《分数阶平均曲率流经典解的短时间存在性》, 《庞加莱研究所年刊: 非线性分析》37（2020）, 第4期, 983-1016页。[23] V. Julin, D. A. La Manna, 《凸集的保体积分数阶平均曲率流的收敛性》, arXiv: 2307.03912v1, 2023。[24] Z. Z. Li, Q. D. Zhang, 《分数阶拉普拉斯算子的下解与逐点霍普夫引理》, 《纯粹与应用分析通讯》20（2021）, 第2期, 835-865页。[25] F. Maggi, E. Valdinoci, 《具有非局部表面张力能的毛细问题》, 《偏微分方程通讯》42（2017）, 第9期, 1403-1446页。[26] C. Mantegazza, 《平均曲率流讲义》, 数学进展丛书, 第290卷, Birkhäuser/Springer, 巴塞尔, 2011。[27] J. M. Mazón, J. D. Rossi, J. J. Toledo, 《可测集的非局部周长、曲率与极小曲面》, 数学前沿, Birkhäuser/Springer, Cham, 2019。xviii+123 页。[28] X. Q. Mei, L. J. Weng, 《空间形式中毛细边界超曲面的受约束平均曲率型流》, 《几何分析杂志》33（2023）, 第6期, 论文编号195, 共28页。[29] R. Mikulevicius, H. Pragarauskas, 《积分微分 Zakai 方程的 Hölder 解》, 《随机过程及其应用》119（2009）, 第10期, 3319-3355页。[30] G. Nardi, 《具有诺伊曼边界条件的泊松方程解的 Schauder 估计》, 《数学教学》60（2014）, 第3-4期, 421-435页。[31] M. Sáez, E. Valdinoci, 《关于分数阶平均曲率演化》, 《通讯: 分析与几何》27（2019）, 第1期, 211-249页。[32] F. Schulze, 《凸超曲面按平均曲率的幂演化》, 《数学杂志》251（2005）, 第4期, 721-733页。[33] A. Stahl, 《具有诺伊曼边界条件的平均曲率流解的正则性估计》, 《变分法与偏微分方程》4（1996）, 第4期, 385-407页。[34] J. Wang, W. Wei, J. J. Xu, 《具有毛细型边值问题的非参数平均曲率流平移解》, 《纯粹与应用分析通讯》18（2019）, 第6期, 3243-3265页。

[35] G. F. Wang，L. J. Weng，《单位球中具有毛细边界的平均曲率型流》，《变分法与偏微分方程》59（2020），第5期，论文编号149，共26页。[36] G. F. Wang，L. J. Weng，C. Xia，《半空间中具有毛细边界的凸超曲面的 Alexandrov-Fenchel不等式》，《数学年刊》388（2024），第2期，2121-2154页。[37] G. F. Wang，C. Xia，《球中自由边界超曲面的 Guan-Li型平均曲率流》，《通讯：分析与几何》30（2022），第9期，2157-2174页。[38] T. Young，《论流体内聚力》，《伦敦皇家学会哲学汇刊》95（1805年），65-87页。