arXiv:2602.08001v1 [math.DG] 8 Feb 2026

等距超曲面上的主分布同构与近厄米几何

肖立新、闫文娇和张文锦*

Abstract. 本文研究球面中 OT–FKM 型等距超曲面上的主分布之间的同构 $\mathcal{D}_k$($k=1,..4$)。我们重新得到 Qian–Tang–Yan[18], 建立的同构 $\mathcal{D}_1\cong\mathcal{D}_3$，并在特定情形下进一步构造了同构 $\mathcal{D}_2\cong\mathcal{D}_4$。更重要的是，我们为所有奇重数 m显式构造了一个全局向量丛同构 $\mathcal{D}_1\oplus\mathcal{D}_2\cong\mathcal{D}_3\oplus\mathcal{D}_4$。作为应用，我们利用这些同构在某些 OT–FKM 超曲面上诱导出近 K¨ahler 结构。最后，我们证明，任何具有能成对互换主分布的几乎厄米结构的 OT–FKM 超曲面，其 $*$-里奇曲率均为零。

1. Introduction

球面中的等距超曲面理论一直是子流形几何与拓扑学的核心课题，其研究始于埃利·嘉当的奠基性工作。若超曲面 $M^n\subset S^{n+1}$(1) 具有常值主曲率，则称其为等距超曲面。在其著名的研究中，[15, 16], M¨unzner 建立了深刻的结构定理，证明不同主曲率的数量 g 只能为 1，2、3、4 或 6。此外，主曲率由 $\lambda_k=\cot(\theta_1+\frac{k-1}{g}\pi)$ 给出，其中 $\theta_1\in(0,\frac{\pi}{g})$ 对应 $1\leqslant k\leqslant g$，且其重数满足 $m_k=m_{k+2}$（指标按模 g 计算）。因此，这类超曲面的几何数据与重数对 (m_1,m_2) 密切相关。

随着 M¨unzner 的结构性基础得以确立，等距超曲面的分类成为该领域的核心挑战。该计划的初期阶段着重通过拓扑约束，限制 (m_1,m_2) 的可取值。Abresch [1], Tang [20],Fang [8, 9] 在拓扑不变量、上同调环和同伦性质方面作出了重要贡献。在这些发展的基础上，Stolz [19], 取得了 $g=4$ 情形的关键突破：他利用这些成果证明，重数对 (m_1,m_2) 必须与齐性例子或由 Ferus、Karcher 和 M¨unzner [10] 构造的非齐性 OT–FKM 型的重数对一致。经过数十年的积累，这一分类工作最终于 2020年 完成：所有等距超曲面不是齐性的，就是 OT–FKM 型（见

2020 *Mathematics Subject Classification.* 53C15, 32Q60, 58A30.*Key words and phrases.* 主分布，丛同构，近复结构，近 K¨ahler 结构，$*$-里奇曲率。

* 通讯作者。本项目部分受国家自然科学基金（项目编号：12271038、12526205）资助。

[2, 3, 4, 6, 14]）。值得注意的是，OT–FKM 型占绝大多数，为具有复杂几何和拓扑性质的流形提供了丰富来源。

与等距超曲面理论相关的一个基本几何对象是主分布 $\mathcal{D}_k$，它定义为对应于主曲率 λ_k 的特征分布。这些分布是可积的，其叶是全测地球面（例如参见 [5]）。尽管超曲面已得到分类，但这些分布作为向量丛的性质仍是一个备受关注的课题。一个自然但颇具挑战性的问题是，将这些分布分类为等距超曲面上的向量丛，并确定它们的同构类。

关于这个问题，对于 $g = 4$ 和 $g = 6$，Abresch [1] 计算了实射影空间中诱导超曲面 M 的上同调（因为 M 在对踵映射下保持不变），以及诱导主分布 $\mathcal{D}_k$的 Stiefel–Whitney 类。他证明，对于 OT–FKM 型超曲面，总 Stiefel–Whitney 类满足 $w(\mathcal{D}_1) = w(\mathcal{D}_3) = 1$ 和 $w(\mathcal{D}_2) = w(\mathcal{D}_4) \neq 1$。此外，在 $g = 4$ 情形下，存在一个对合 $T : M \to M$，它将$[x]$ 映到法向量 $\xi(x)$的等价类。Abresch 证明， T^* 在 $\mathbb{Z}_2$-上同调上作用为恒等映射。Fang [8] 进一步分析了 Pontryagin 类，并证明在 T^* 是整系数上同调上的恒等映射这一假设下，这些类均为平凡类。其他相关方面也可参见 [12, 17, 22] 。

受 Abresch 的拓扑洞见以及焦流形对称性的启发，自然会猜想，对于 OT–FKM 型超曲面，各主分布两两同构，即 $\mathcal{D}_1 \cong \mathcal{D}_3$ and $\mathcal{D}_2 \cong \mathcal{D}_4$。近期，Qian、Tang 和 Yan [18] 证明了当 $\mathcal{D}_1$ and $\mathcal{D}_3$时这一同构成立。此外，在特定情形 $m_1 = 1$下，他们通过定义一种对应关系，将 $\mathcal{D}_1$ 映射到 $\mathcal{D}_3$ ，并将 $\mathcal{D}_2$ 映射到 $\mathcal{D}_4$，成功构造了可积近复结构。然而，对于一般重数，剩余的一对分布是否同构仍是一个悬而未决的问题。他们提出了以下问题：

问题 1.1. ([18]) 对于 $m \geq 2$， $\mathcal{D}_2$ and $\mathcal{D}_4$ 是否作为 M 上的向量丛同构?

除了其内在的拓扑意义之外，对问题 1.1 的肯定回答还自然地将其与微分几何联系起来，尤其是在近厄米几何的框架下。这些主分布之间的同构以自然的方式在 M 上诱导出近复结构；根据构造，这些结构本身就蕴含着超曲面的几何特征。

这一框架使我们能够系统地探究杰出的几何结构，例如近 K¨ahler 条件以及 $*$-里奇曲率的性质。特别是，通过采用 OT–FKM 型超曲面的全等对，我们构造了具体实例来展示这些性质：

命题 1.2。 具有重数$(m_1, m_2) \in \{(1, 2)、(1,6)、(2, 5)、(3、 4)\}$ 的 *OT–FKM* 型等距超曲面具有近 *K¨ahler* 结构。

命题 1.3。 设 M 是球面中的 *OT–FKM* 型等距超曲面。若 M 关于诱导度量存在一个几乎厄米结构，将 $\mathcal{D}_1$ 映射到 $\mathcal{D}_3$ ，并将 $\mathcal{D}_2$映射到 $\mathcal{D}_4$ ，则相应的 $*$-里奇曲率恒为零。

一般而言， $\mathcal{D}_2$ 与 $\mathcal{D}_4$ 之间是否存在同构仍是一个公开问题。问题 1.1 的一个自然弱化版本是询问：

问题1.4。 直和 $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ 与 $\mathcal{D}_3 \oplus \mathcal{D}_4$同构吗?

本文针对 OT–FKM 型等距超曲面，对问题1.4给出了部分肯定的回答。主要结果如下：

定理 1.5。 对于 *OT–FKM* 型等距超曲面，若 m为奇数，则存在一个从 $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ 到 $\mathcal{D}_3 \oplus \mathcal{D}_4$的全局向量丛同构。

本文结构安排如下。第2节分析 OT–FKM 型等距超曲面上主分布的结构性质，并给出定理 1.5 的证明。第3节在近厄米几何框架下探讨主分布之间的同构的应用，研究特定的近复结构、近 Kähler 结构的存在性，以及 $*$-里奇曲率的行为。

2. Principal Distributions

我们先简要回顾 [10] 中介绍的 OT–FKM 型等距超曲面的构造。

在 $\mathbb{R}^{2l}$ 上的对称*Clifford*系统定义为满足 $P_iP_j + P_jP_i = 2\delta_{ij}I$ 的一组 $(m+1)$ 元组 $\{P_0, \dots, P_m\}$，其中各矩阵均为对称正交矩阵。维数 $2l$ 受 Clifford代数的表示论约束；具体而言，对于某个正整数 k，有 $l = k\delta(m)$，其中 $\delta(m)$ 表示 Clifford代数 $\mathcal{C}_{m-1}$ 的不可约模的维数。 $\delta(m)$ 的取值满足周期性条件 $\delta(m+8) = 16\delta(m)$，具体如下：

m	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots m+8$
$\delta(m)$	1	2	4	4	8	8	8	8	$\cdots 16\delta(m)$

与对称Clifford系统相关联的是 Cartan–M¨unzner 多项式F： $\mathbb{R}^{2l} \to \mathbb{R}$，它是在 [10] 上定义的四次齐次多项式：

$$F(x) = |x|^4 - 2\sum_{i=0}^{m} \langle P_i x, x\rangle^2. \tag{2.1}$$

F 到单位球面 S^{2l-1} 的限制给出一个函数$f = F|_{S^{2l-1}}$，其像为 Im(f) $= [-1, 1]$。等距超曲面 M^{2l-2}作为 f的正则水平集得到，具体为常数 $\theta \in$(0, $\frac{\pi}{4}$)所对应的 $M = f^{-1}$(cos 4θ)。超曲面 M 具有四个互异的主曲率，由 λ_k =cot($\theta + \frac{k-1}{4}\pi$)给出，其中 $k \equiv 1, \dots, 4$。相应的重数为 (m_1, m_2, m_1, m_2)，其中 $m_1 = m$ 与 $m_2 = l - m - 1$。

函数 f 有两个奇异水平集，即 $M_\pm = f^{-1}(\pm 1)$，称为焦子流形。它们是单位球面中的极小子流形。等距超曲面族的几何由纤维化 $M \to M_\pm$刻画，其中纤维分别为 S^{m_1} 和 S^{m_2}。至关重要的是，M_+ 在 S^{2l-1} 中的法丛是平凡的，并且在任意 $x \in M_+$处都具有全局正交标架 $\{P_0x, \dots, P_mx\}$。

2.1. 主分布的同构。设 $M = f^{-1}(\cos 4\theta)$ 为等距超曲面，并令 $\xi(x) = \frac{\nabla^S f}{|\nabla^S f|}$ 表示 $x \in M$ 处的单位法向量，其中 ∇^S 为球面梯度。明确地，

$$\xi(x) = \frac{1}{\cos 2\theta}\left(x \sin 2\theta - \frac{1}{\sin 2\theta}\sum_{i=0}^{m}\langle P_i x, x\rangle P_i x\right). \tag{2.2}$$

令 $\{e_1, \ldots, e_{2l-2}\}$ 为由主方向构成的局部标准正交标架，以下称为局部主标架。于是有

$$\mathrm{d}x = \omega_i e_i, \quad \mathrm{d}\xi = -\lambda_i \omega_i e_i,$$

其中，ω_i 是与 e_i 对偶的 1-形式，而 λ_i 是相应的主曲率。

对于 $k \in \{1, 2, 3, 4\}$，令 $t_k = \theta + \frac{k-1}{4}\pi$。我们考虑沿法向方向 $\xi(x)$、距离为 t_k 的平行移动映射 $\varphi_k : M \to S^{2l-1}$，以及相应的单位法向量场 $\xi_k : M \to S^{2l-1}$，其定义为

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &:= x\cos t_k + \xi(x)\sin t_k, \\ \xi_k(x) &:= -x\sin t_k + \xi(x)\cos t_k. \end{aligned} \tag{2.3}$$

众所周知，$\varphi_1(M) = \varphi_3(M) = M_+$ 且 $\varphi_2(M) = \varphi_4(M) = M_-$。

我们引入算子 $P : \mathbb{R}^{2l} \to \mathbb{R}^{2l}$，其定义为

$$P = \frac{1}{\sin 2\theta}\sum_{i=0}^{m}\langle P_i x, x\rangle P_i. \tag{2.4}$$

注意，$P^2 = I$和 P位于线性空间 $\mathrm{Span}\{P_0, \ldots, P_m\}$的单位球面上。我们将此球面称为*Clifford* 球面，记作 $\Sigma = \Sigma(P_0, \ldots, P_m)$。直接计算可得以下恒等式：

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{1}{\cos 2\theta}(x\cos\theta - Px\sin\theta), \\ \xi_1(x) &= \frac{1}{\cos 2\theta}(x\sin\theta - Px\cos\theta) = -P\varphi_1(x), \\ \varphi_2(x) &= \frac{I-P}{\sqrt{2}}\varphi_1(x), \quad \xi_2(x) = -\frac{I+P}{\sqrt{2}}\varphi_1(x), \\ \varphi_3(x) &= -P\varphi_1(x), \qquad \xi_3(x) = -\varphi_1(x), \\ \varphi_4(x) &= -\frac{I+P}{\sqrt{2}}\varphi_1(x), \quad \xi_4(x) = -\frac{I-P}{\sqrt{2}}\varphi_1(x). \end{aligned} \tag{2.5}$$

引理 2.1。四个主分布关于焦子流形法空间满足以下分解关系：

$$\begin{aligned} N_{\varphi_1(x)}M_+ &= \mathcal{D}_1|_x \oplus \mathrm{Span}\{\xi_1(x)\}, \\ N_{\varphi_2(x)}M_- &= \mathcal{D}_2|_x \oplus \mathrm{Span}\{\xi_2(x)\}, \\ N_{\varphi_3(x)}M_+ &= \mathcal{D}_3|_x \oplus \mathrm{Span}\{\xi_3(x)\}, \\ N_{\varphi_4(x)}M_- &= \mathcal{D}_4|_x \oplus \mathrm{Span}\{\xi_4(x)\}, \end{aligned}$$

其中，$N_p M_\pm$ 表示 S^{2l-1} 中 $M_\pm$ 在 p处的法空间。

证明。对 φ_1 求导得到

$$\mathrm{d}\varphi_1 = (\cos\theta - \lambda_i \sin\theta)\omega_i e_i = \frac{\sin(\theta_i - \theta)}{\sin\theta_i}\omega_i e_i,$$

其中， θ_i 由 $\lambda_i = \cot\theta_i$确定。由于 $M = f^{-1}(\cos 4\theta)$的主曲率由 $\lambda_k = \cot(\theta + \frac{k-1}{4}\pi)$给出，系数 $\sin(\theta_i - \theta)$恰好在 $\mathcal{D}_1$中的向量上为零。因此， $M_+ = \varphi_1(M)$在$\varphi_1(x)$处的切空间由其余的分布张成：

$$T_{\varphi_1(x)}M_+ = (\mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}_3 \oplus \mathcal{D}_4)|_x.$$

适当地分解环境空间 $\mathbb{R}^{2l}$，我们得到

$$\mathrm{Span}\{\varphi_1(x)\} \oplus N_{\varphi_1(x)}M_+ = \mathcal{D}_1|_x \oplus \mathrm{Span}\{x, \xi(x)\} = \mathcal{D}_1|_x \oplus \mathrm{Span}\{\varphi_1(x), \xi_1(x)\}.$$

这意味着

$$N_{\varphi_1(x)}M_+ = \mathcal{D}_1|_x \oplus \mathrm{Span}\{\xi_1(x)\}.$$

其余三个主分布的分解可类似地推出。

□

作为引理 2.1 的一个自然推论，我们得到以下结果，该结果此前已由 Qian、Tang 和 Yan [18]证明。这里给出的证明提供了一种利用 Clifford 球面几何的替代方法：

推论 2.2. 对于任意 *OT–FKM* 型等距超曲面，分布 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_3$ 同构。

证明. 由引理 2.1 和公式 (2.5)，我们有

$$N_{\varphi_1(x)}M_+ = \mathcal{D}_1|_x \oplus \mathrm{Span}\{\xi_1(x)\} = \mathcal{D}_1|_x \oplus \mathrm{Span}\{P\varphi_1(x)\}.$$

M_+ 在 S^{2l-1} 中的 $\varphi_1(x)$处的法空间由 $\{P_0\varphi_1(x)\ldots, P_m\varphi_1(x)\}$张成。我们为空间 $\mathrm{Span}\{P_0, \ldots, P_m\}$ 选取一组标准正交基 $\{R_0, \ldots, R_m\}$，使得 $R_0 = P$。具体而言，我们可以写成

$$(R_0, \ldots, R_m) = (P_0, \ldots, P_m)A(x) \quad \text{with } R_0 = P \tag{2.6}$$

对于某个 $A(x) \in SO(m+1)$。因此

$$\mathrm{Span}\{R_0\varphi_1(x), \ldots, R_m\varphi_1(x)\} = N_{\varphi_1(x)}M_+ = \mathcal{D}_1|_x \oplus \mathrm{Span}\{R_0\varphi_1(x)\},$$

这意味着

$$\mathcal{D}_1|_x = \mathrm{Span}\{R_1\varphi_1(x), \ldots, R_m\varphi_1(x)\}. \tag{2.7}$$

类似地，可得

$$\mathcal{D}_3|_x = \mathrm{Span}\{R_1\varphi_3(x), \ldots, R_m\varphi_3(x)\}. \tag{2.8}$$

由于在 Clifford 系统中， $\{R_a\}_{a=1}^m$ 与 $R_0 = P$ 正交，因此它们与 P反交换。利用 (2.5)，我们观察到 $R_a\varphi_3 = -R_aR_0\varphi_1 = R_0R_a\varphi_1$。因此，映射$R_0 = P$ 诱导了 $\mathcal{D}_1$ 与 $\mathcal{D}_3$之间的全局向量丛同构。

□

根据 [10], , 重数对为 (m_1, m_2) 的等距族中，恰有四对彼此全等：

$$(1,2) \leftrightarrow (2,1), \quad (1,6) \leftrightarrow (6,1), \quad (2,5) \leftrightarrow (5,2), \quad (3,4) \leftrightarrow (4,3)^{\mathrm{ind}}.$$

这里，$(4,3)^{\mathrm{ind}}$ 表示不定情形，它与定情形 $(4,3)^{\mathrm{def}}$不全等，尽管二者具有相同的重数。对偶性意味着，情形 (m_1, m_2) 中的 M_- 与对偶情形 (m_2, m_1) 中的 M'_+ 全等。因此，如果 M'_+具有平凡法丛，那么 M_-也具有平凡法丛。由此得到以下结果：

推论2.3。 对于情形 $(m_1, m_2) \in \{(1, 2), (1, 6), (2, 5), (3, 4)\}$，主分布 $\mathcal{D}_2$ 与 $\mathcal{D}_4$ 同构。

证明。 我们首先讨论情形 $(m_1, m_2) \in \{(1, 6), (2, 5), (3, 4)\}$，这些情形中的超曲面均位于 S^{15} 中。存在定义在 $\mathbb{R}^{16}$ 上的对称Clifford系统 $\{P_0, \ldots, P_8\}$，满足 $\sum_{i=0}^{8} \langle P_i x, x\rangle^2 = |x|^4$ （参见 [10]）。我们在 S^{15} 上定义两个等参函数:

$$f = 1 - 2\sum_{i=0}^{m} \langle P_i x, x\rangle^2,$$

$$f' = 1 - 2\sum_{i=m+1}^{8} \langle P_i x, x\rangle^2 = -f.$$

对于等距超曲面 $M = f^{-1}(\cos 4\theta)$，存在一个超曲面 $M' = (f')^{-1}(\cos 4(\frac{\pi}{4} - \theta))$，使得 M 和 M' 作为集合相同。主曲率之间的关系为

$$\lambda_k = \cot\left(\theta + \frac{k-1}{4}\pi\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{4} - \theta + \frac{4-k}{4}\pi\right) = -\lambda'_{5-k},$$

这里，负号源于法向量定向相反。因此， M 和 M' 的主分布按照 $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}'_3$ 和 $\mathcal{D}_4 = \mathcal{D}'_1$ 对应。通过与推论 2.2 的证明类似的论证， $\mathcal{D}_2$ 和 $\mathcal{D}_4$ 之间的同构由以下算子诱导:

$$Q = P' = \frac{1}{\cos 2\theta} \sum_{i=m+1}^{8} \langle P_i x, x\rangle P_i.$$

对于剩余情形（m_1， m_2） $=(1, 2)$，证明可由 $\mathbb{R}^8$上存在对称Clifford系统 $\{P_0, \ldots, P_4\}$ 完全类似地得出。

□

2.2. 与 $\mathcal{D}_3 \oplus \mathcal{D}_4$之间的同构。尽管一般情形下 $\mathcal{D}_2$ 与 $\mathcal{D}_4$ 之间是否存在同构仍是一个悬而未决的问题，本小节将给出一个部分结果：当 m 为奇数时，向量丛 $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ 和$\mathcal{D}_3 \oplus \mathcal{D}_4$ 全局同构。

回顾引理 2.1 以及 [10, p. 488]中给出的纤维刻画。纤维 $\mathcal{D}_2|_x$ 可表示为:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_2|_x &= \left\{v \in N_{\varphi_2(x)}M_- \mid v \perp \xi_2(x)\right\} \\ &= \left\{v \in E_+(P) \mid v \perp \frac{I+P}{\sqrt{2}}\Sigma_P\varphi_1(x) \quad \text{and} \quad v \perp \frac{I+P}{\sqrt{2}}\varphi_1(x)\right\},\end{aligned}$$

其中， $\Sigma_P = \{Q \in \Sigma \mid \langle Q, P\rangle = 0\}$ 是Clifford 球面Σ 中与 P正交的大超球面，而 $\Sigma_P\varphi_1(x) = \{Q\varphi_1(x) \mid Q \in \Sigma_P\}$ 张成分布 $\mathcal{D}_1$。

因此， P 的 ± 1 特征子空间具有如下正交分解:

$$E_+(P) = \frac{I+P}{\sqrt{2}}\mathrm{Span}\{\varphi_1\} \oplus \frac{I+P}{\sqrt{2}}\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2,$$

$$E_-(P) = \frac{I-P}{\sqrt{2}}\mathrm{Span}\{\varphi_1\} \oplus \frac{I-P}{\sqrt{2}}\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_4.$$

定理 1.5。 对于 *OT–FKM* 型等距超曲面，若 m为奇数，则存在从 $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ 到 $\mathcal{D}_3 \oplus \mathcal{D}_4$的全局向量丛同构。

证明。由推论 2.2，我们有 $\mathcal{D}_1 \cong \mathcal{D}_3$。因此，只需构造 $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ 与 $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_4$之间的同构。

设 x 是 M中的一点。我们选取一个如 (2.6) 中所示的局部截面 R_1，使得 $R_1 \in \Sigma_P$（即 R_1 与 $P = R_0$反交换）。算子 R_1 将特征子空间 $E_+(P)$ 等距映射到 $E_-(P)$ 上。我们将映射 $\rho_\pm$ 定义为把几何分布与代数特征子空间对应起来的特定线性等距映射：

$$\rho_\pm := \left(\frac{I \pm P}{\sqrt{2}}\right) \oplus \left(\frac{I \pm P}{\sqrt{2}}\right) \oplus \mathrm{Id}_{\mathcal{D}_2 \,(\text{or } \mathcal{D}_4)}\,.$$

考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Span}\{\varphi_1\} \oplus \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 & \xrightarrow{\quad\rho_+\quad} & E_+(P) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \Big\downarrow{\scriptstyle R_1} \\ \mathrm{Span}\{\varphi_1\} \oplus \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_4 & \xrightarrow[\quad\rho_-\quad]{} & E_-(P) \end{array} \tag{2.9}$$

复合映射 $\sigma = \rho_-^{-1} \circ R_1 \circ \rho_+$ 诱导出向量丛之间的线性等距映射。直接计算可得 σ 在前两个直和项上的作用：

$$\sigma(\varphi_1) = R_1\varphi_1 \quad \text{and} \quad \sigma(R_1\varphi_1) = \varphi_1.$$

为分离出所需分布上的同构，我们将 $\mathcal{D}_1$分解。设 $\mathcal{D}_1^0$为 $\mathcal{D}_1$中 $\mathrm{Span}\{R_1\varphi_1\}$ 的正交补。σ 的限制给出一个同构：

$$\sigma|_{\mathcal{D}_1^0 \oplus \mathcal{D}_2} : \mathcal{D}_1^0 \oplus \mathcal{D}_2 \longrightarrow \mathcal{D}_1^0 \oplus \mathcal{D}_4. \tag{2.10}$$

现在我们通过如下方式定义一个修正映射 $\tilde{\sigma}$： $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \to \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_4$

$$\tilde{\sigma}(v) = \begin{cases} \sigma(v) & \text{if } v \in \mathcal{D}_1^0 \oplus \mathcal{D}_2, \\ R_1\varphi_1 & \text{if } v = R_1\varphi_1. \end{cases}$$

该 $\tilde{\sigma}$ 给出了 $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$ 与 $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_4$之间的局部同构。

为了将这一构造 $\tilde{\sigma}$ 推广到全局，我们假设 m 为奇数；此时，Clifford 球面 $\Sigma(P_0, \ldots, P_m) \cong S^m$ 存在处处非零切向量场 V。

对于任意 $x \in M$，令 $P(x)$为 Clifford 球面Σ上的对应点。我们定义一个全局算子场 $R_1(x) := V(P(x))$。由于 V与球面相切，$\langle R_1(x)\ P(x)\rangle = 0$，从而保证对所有 x，$R_1(x) \in \Sigma_{P(x)}$。利用这个全局截面 R_1，前述构造给出一个全局定义的同构$\widetilde{\sigma}$： $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_4$。

□

注记2.4。 在情形 $m = 1$ 中，子空间 $\mathcal{D}_1^0$ 消失。因此，在 (2.10) 中构造的映射σ直接限制为一个同构 $\mathcal{D}_2 \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_4$。具体而言，若我们将 Clifford 圆参数化为 $P = (\cos\,\alpha)P_0 + (\sin\alpha)P_1$，则可选取切向量场 $R_1 = (\sin\,\alpha)P_0 - (\cos\,\alpha)P_1$。由于 $\mathcal{D}_2 \subset E_+(P)$，该限制由 $\sigma|_{\mathcal{D}_2} = R_1|_{\mathcal{D}_2} = P_0P_1$ 给出，其中我们利用了 Clifford 矩阵的反交换性。

3. Applications to Almost Complex Geometry

设 M^{2n}为一个偶维光滑流形。满足 $J^2 = -\mathrm{Id}$ 的自同态 $J\colon TM \to TM$称为近复结构。若 M 容许与 J相容的复坐标图册，则称该结构为可积。著名的 Newlander–Nirenberg定理指出，近复结构J 可积当且仅当其 Nijenhuis 张量 N 恒为零，其中对光滑向量场 $X, Y \in \Gamma(TM)$， N由

$$N(X,Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y].$$

Tang 和 Yan [21] 率先研究了 OT–FKM 型等距超曲面上的这类结构，并在特定情形下给出了可积近复结构的显式构造。随后，Qian、Tang 和 Yan[18] 证明，每个具有 $g = 4$ 的等距超曲面都 admits 一个近复结构。构造此类结构的一种自然方法，是通过成对主分布之间的丛同构来实现。对于 $m = 1$的情形，他们证明，将 $\mathcal{D}_1$ 映射到 $\mathcal{D}_3$ 并将 $\mathcal{D}_2$ 映射到 $\mathcal{D}_4$ 的特定同构，在经过带常系数的适当修改后，可得到一个可积结构。一个引人注目的开放问题是，这种构造是否能够推广到 $m > 1$的情形。

我们保留第2节中的记号。设$\{e_1, \dots, e_{2(m_1+m_2)}\}$是一个适配于这些分布的局部主标架。我们采用如下指标约定$e_{\bar{i}} := e_{(m_1+m_2)+i}$ 并假设该标架按如下方式排列:

$$\mathrm{Span}\{e_a\}_{a=1}^{m_1} = \mathcal{D}_1,\ \mathrm{Span}\{e_\alpha\}_{\alpha=m_1+1}^{m_1+m_2} = \mathcal{D}_2,\ \mathrm{Span}\{e_{\bar{a}}\}_{a=1}^{m_1} = \mathcal{D}_3,\ \mathrm{Span}\{e_{\bar{\alpha}}\}_{\alpha=m_1+1}^{m_1+m_2} = \mathcal{D}_4.$$

根据推论 2.2，我们进一步要求满足关系 $e_{\bar{a}} = -R_0 e_a$ ，其中 $1 \leqslant a \leqslant m_1$。

在 [18] 中构造的可积结构依赖于映射$e_1 \mapsto \mu e_{\bar{1}}$ ，其中 $m = 1$ ，且 μ是任意非零常数。下面的命题表明，将此映射直接推广到 $m = 3$ 会导致其不可积。

命题3.1。 设 $m = 3$。考虑一个近复结构 J ，它将$\mathcal{D}_1$ 映射到 $\mathcal{D}_3$ ，并将 $\mathcal{D}_2$ 映射到 $\mathcal{D}_4$。若 J 满足 $Je_a = \mu e_{\bar{a}}$ ，其中 $a = 1$、2、3 对应的常数为$\mu \neq 0$，则 J 不可积。

证明。 令 $\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ijk}\omega_k$ 表示联络 1-形式，令 $h_i = \lambda_i \omega_i$ 表示第二基本形式。Codazzi 方程 $\mathrm{d}h_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge h_j$ 蕴含以下对称条件:

$$\sum_j (\lambda_i - \lambda_j)\omega_j \wedge \omega_{ij} = 0, \quad \text{or} \quad (\lambda_i - \lambda_j)\omega_{ijk} = (\lambda_i - \lambda_k)\omega_{ikj}.$$

因此，对于互不相同的主曲率 $\lambda_i \neq \lambda_k$，我们有

$$\omega_{ikj} = \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_k}\omega_{ijk}. \tag{3.1}$$

特别地，若 $\lambda_i = \lambda_k \neq \lambda_j$，则可得 $\omega_{ijk} = 0$ （参见 [2]）。

回忆 (2.6)，我们可以将 Clifford 系统的标架写为 $(R_0, \dots, R_m) = (P_0, \dots, P_m)A(x)$，其中在某个开集 $U \subseteq M$ 上存在光滑的 $A\colon U \to SO(m+1)$。该标架的微分由 $\mathrm{d}R_j = \sum_i R_i \tau_{ij}$ 给出，其中 $(\tau_{ij}) = A^{-1}\mathrm{d}A$ 是

Maurer–Cartan 形式。对于任意 $1 \leqslant a \leqslant m$，利用 (2.4) 中定义的 $R_0 = P$ 的显式形式，我们计算得：

$$\tau_{a0} = \sum_i A_{ia} \mathrm{d}A_{i0} = \frac{1}{\sin 2\theta} \sum_i A_{ia}\, \mathrm{d}\,\langle P_i x, x\rangle = \frac{2}{\sin 2\theta} \sum_i A_{ia}\,\langle P_i x, \mathrm{d}x\rangle = \frac{2}{\sin 2\theta}\,\langle R_a x, \mathrm{d}x\rangle\,.$$

将 τ_{a0} 通过表达式 $x = \varphi_1 \cos\theta - \xi_1 \sin\theta$（其中 $\xi_1 = -R_0\varphi_1$）展开可得：

$$\tau_{a0} = \frac{2}{\sin 2\theta}\langle R_a(\varphi_1\cos\theta + R_0\varphi_1 \sin\theta), \mathrm{d}x\rangle = \frac{1}{\sin\theta}\omega^a + \frac{1}{\cos\theta}\omega^{\bar a}. \tag{3.2}$$

现在，我们计算 Nijenhuis 张量中指标为a、b、$c \in \{1,\dots,m_1\}$的分量 $\langle N(e_a, e_b)\, e_c\rangle$。由于 $Je_a = \mu e_{\bar a}$和 $e_c \in \mathcal{D}_1$，N的定义得以简化。利用（3.1）进行冗长但直接的计算可得：

$$\begin{aligned}\langle N(e_a,e_b),e_c\rangle &= \mu^2\langle [e_{\bar a}, e_{\bar b}], e_c\rangle - \mu\langle J[e_{\bar a}, e_b], e_c\rangle - \mu\langle J[e_a, e_{\bar b}], e_c\rangle - \langle [e_a,e_b], e_c\rangle \\ &= (\omega_{b\bar c\bar a} - \omega_{\bar a\bar c b}) - (\omega_{a\bar c\bar b} - \omega_{\bar b\bar c a}) - (\omega_{bca} - \omega_{acb}) \\ &= (\omega_{\bar b\bar c a} - \omega_{bca}) - (\omega_{\bar a\bar c b} - \omega_{acb}).\end{aligned}$$

利用关系式 $\mathrm{d}e_{\bar a} = -\mathrm{d}(R_0 e_a) = -\sum_c \tau_{c0} R_c e_a - R_0\,\mathrm{d}e_a$，我们将带有上划线指标的联络形式表示为：

$$\omega_{\bar a\bar b} = \langle \mathrm{d}e_{\bar a}, e_{\bar b}\rangle = \tau_{c0}\langle R_c R_a\varphi_1, R_0 R_b\varphi_1\rangle + \omega_{ab}. \tag{3.3}$$

将指标指定为 1、2、3，可得：

$$\begin{aligned}\langle N(e_1,e_2),e_3\rangle &= (\omega_{\bar 2\bar 3 1} - \omega_{231}) - (\omega_{\bar 1\bar 3 2} - \omega_{132}) \\ &= \tau_{10}(e_1)\langle R_1R_2\varphi_1, R_0R_3\varphi_1\rangle - \tau_{20}(e_2)\langle R_2R_1\varphi_1, R_0R_3\varphi_1\rangle \\ &= \frac{1}{\sin\theta}\left(\langle R_1R_2\varphi_1, R_0R_3\varphi_1\rangle + \langle R_2R_1\varphi_1, R_0R_3\varphi_1\rangle\right) \\ &= -\frac{2}{\sin\theta}\langle R_0R_1R_2R_3\varphi_1, \varphi_1\rangle \\ &= -\frac{2}{\sin\theta\,\cos 2\theta}\langle P_0P_1P_2P_3x, x\rangle.\end{aligned}$$

函数 $x \mapsto \langle P_0P_1P_2P_3x, x\rangle$ 并非恒等于零；其像为 $[-\cos 2\theta, \cos 2\theta]$。因此，Nijenhuis 张量不为零，并且 J 不可积。

□

此例说明，对于 $m > 1$，主分布之间的直接同构并不会自动诱导出可积的近复结构，这凸显了 $m > 1$ 情形相较于 $m = 1$的复杂性。尽管如此，这类结构仍具有某些重要的几何性质。

3.1. 近 K¨ahler 结构。对于具有重数对 $(m_1, m_2) = (1, 2), (1, 6), (2, 5)$ 或 $(3, 4)$ 的 OT–FKM 型等距超曲面，推论 2.2 和 2.3 中建立的同构给出了自然的近复结构。

我们以 $(m_1, m_2) = (3, 4)$ 为例，具体说明这一构造。设 Clifford 系统由 $\{P_0, \dots, P_7\}$ 生成。我们通过以下线性组合定义作用于 TM 上的两个算子 R_0 和 Q_0：

$$R_0 = \frac{1}{\sin 2\theta}\sum_{i=0}^{3}\langle P_i x, x\rangle P_i, \quad \text{and} \quad Q_0 = \frac{1}{\cos 2\theta}\sum_{j=4}^{7}\langle P_j x, x\rangle P_j.$$

这些算子诱导出一个近复结构 J，其定义如下：

$$Jv = \begin{cases} -R_0 v \in \mathcal{D}_3, & \text{if } v \in \mathcal{D}_1, \\ -Q_0 v \in \mathcal{D}_4, & \text{if } v \in \mathcal{D}_2, \\ R_0 v \in \mathcal{D}_1, & \text{if } v \in \mathcal{D}_3, \\ Q_0 v \in \mathcal{D}_2, & \text{if } v \in \mathcal{D}_4. \end{cases} \tag{3.4}$$

可直接验证，J 与诱导度量 g相容，因此 (M, J, g) 是一个近厄米流形。令 $\Phi(X, Y) = g(JX, Y)$ 表示基本二形式（或 K¨ahler 形式）。若 $\mathrm{d}\Phi = 0$，则称该流形为近 ***K¨ahler*** 流形；若协变导数 $\nabla\Phi$是全斜对称的，则称其为近 ***K¨ahler*** 流形（参见 [13]）。

现在我们证明，对于某些近厄米等距超曲面，K¨ahler 形式满足近 K¨ahler 条件。

命题 1.2。重数$(m_1, m_2) \in \{(1,2)、(1,6)、(2,5)、(3,4)\}$ 的 ***OT–FKM*** 型等距超曲面具有近 ***K¨ahler*** 结构。

证明。我们给出 $(m_1, m_2) = (3,4)$ 且 J由 (3.4) 给出的情形的证明；其余情形的论证类似。为验证近 K¨ähler 条件，我们证明 $\nabla\Phi$的反对称性。

设 $\{e_1, \ldots, e_{14}\}$ 为一个适配于这些分布的局部主标架，使得对于 $1 \leqslant a \leqslant 3$有 $e_a \in \mathcal{D}_1$，对于 $4 \leqslant \alpha \leqslant 7$有 $e_\alpha \in \mathcal{D}_2$。我们采用记号 $e_{\bar{k}} := Je_k$表示 $1 \leqslant k \leqslant 14$。具体而言，$e_{\bar{a}} = Je_a = -R_0 e_a \in \mathcal{D}_3$ 且 $e_{\bar{\alpha}} = -Q_0 e_\alpha \in \mathcal{D}_4$。将基本形式的协变导数用联络系数 ω_{ijk}表示，可得：

$$\begin{aligned} G_{ijk} &:= (\nabla_{e_i}\Phi)(e_j, e_k) \\ &= -\langle J\nabla_{e_i} e_j, e_k\rangle - \langle Je_j, \nabla_{e_i} e_k\rangle \\ &= \omega_{j\bar{k}i} - \omega_{k\bar{j}i}. \end{aligned}$$

$\nabla\Phi$ 完全反对称的条件等价于对于所有 X，Y，$(\nabla_X\Phi)(X, Y) = 0$。因此，只需证明对于所有指标 i，j，$G_{iij} = \omega_{i\bar{j}i} - \omega_{j\bar{i}i} = 0$。我们通过区分指标 i 和 j 相对于主分布的相对位置，来分析这一项何时为零。回顾一下，如 (3.1) 所示，Codazzi 方程蕴含 $(\lambda_A - \lambda_B)\omega_{ABC} = (\lambda_A - \lambda_C)\omega_{ACB}$。特别地，若 $\lambda_A = \lambda_B \neq \lambda_C$，则 $\omega_{ABC} = 0$。

情形 1： e_i **和** e_j **属于同一个分布**。这里 $\lambda_i = \lambda_j$。在这种情况下，根据 (3.1)，G_{iij} 恒等于零。

情形 2： e_j **和** $e_{\bar{i}}$ **属于同一个分布**。我们计算

$$\begin{aligned} G_{aa\bar{b}} &= -\omega_{aba} - \omega_{\bar{b}\bar{a}a} = (\omega_{\bar{a}\bar{b}} - \omega_{ab})(e_a), \\ G_{\bar{a}\bar{a}b} &= \omega_{\bar{a}\bar{b}\bar{a}} + \omega_{ba\bar{a}} = (\omega_{\bar{a}\bar{b}} - \omega_{ab})(e_{\bar{a}}), \\ G_{\alpha\alpha\bar{\beta}} &= -\omega_{\alpha\beta\alpha} - \omega_{\bar{\beta}\bar{\alpha}a} = (\omega_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} - \omega_{\alpha\beta})(e_\alpha), \\ G_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}\beta} &= \omega_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\alpha}} + \omega_{\beta\alpha\bar{\alpha}} = (\omega_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} - \omega_{\alpha\beta})(e_{\bar{\alpha}}). \end{aligned}$$

由于 $e_{\bar{a}} = -R_0 e_a$，由 (3.3) 可得，

$$G_{aa\bar{b}} = -\tau_{c0}(e_a)\,\langle R_c e_a, e_{\bar{b}}\rangle = -\frac{1}{\sin\theta}\,\langle R_a R_a \varphi_1, e_{\bar{b}}\rangle = 0,$$

因为 $R_a^2 = I$ 和 φ_1 垂直于 M。类似地，$G_{\bar{a}\bar{a}b} = 0$。其余子情形的计算可依此类推。

情形 3： e_i，$e_{\bar{i}}$，e_j，$e_{\bar{j}}$ **属于不同的主分布**。我们用$x \sim y$ 表示量 x 和 y 相差一个非零标量因子。由（3.1）可得

$$G_{iij} = -\omega_{j\bar{i}i} \sim \omega_{i\bar{i}j}.$$

更具体地说，

$$G_{aaj} \sim \omega_{a\bar{a}j} \sim G_{\bar{a}\bar{a}j},$$
$$G_{\alpha\alpha j} \sim \omega_{\alpha\bar{\alpha}j} \sim G_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}j}.$$

由 (2.7) 和 (2.8) 可知，我们进一步假设

$$e_a = R_a\varphi_1 \quad \text{and} \quad e_{\bar{a}} = -R_0R_a\varphi_1 \quad \text{for} \quad 1 \leqslant a \leqslant 3.$$

回顾一下，$\mathrm{d}e_a = \mathrm{d}(R_a\varphi_1) = \sum_c \tau_{ca}e_c + R_a\mathrm{d}\varphi_1$。由此可得，联络 1-形式满足

$$\omega_{a\bar{b}} = \langle \mathrm{d}e_a, e_{\bar{b}} \rangle = \langle \mathrm{d}\varphi_1, R_aR_bR_0\varphi_1 \rangle .$$

因此，$\omega_{a\bar{a}}$ 消失，因为 $R_0\varphi_1$ 是 M_+ 在 φ_1处的法向量。同理，我们有 $\omega_{\alpha\bar{\alpha}} = 0$。

综上，对于 e_i 和 e_j的所有可能取值，我们都有 $G_{iij} = 0$，这验证了 $(m_1, m_2) = (3, 4)$ 的结论。由于类似的论证也适用于其余情形 $(m_1, m_2) \in \{(1, 2), (1, 6), (2, 5)\}$，证明至此完成。

□

注 3.2。拓扑约束使这些超曲面不可能是 K¨ahler，因为紧致 K¨ahler 流形的奇数阶贝蒂数必须为偶数。此外，根据 Gray 和 Hervella 的分类，[13], 这里构造的结构既非近 K¨ahler，也不可积。

3.2. **∗-里奇曲率**。在近厄米几何中，研究能够体现黎曼度量与近复结构之间相互作用的曲率不变量是很自然的。正如 [7], the

∗-里奇曲率的定义如下，本质上是将近复结构纳入里奇曲率张量的一种独特方式。

定义 3.3（见 [23]）。设 (M^{2n}, J, g) 为一个近厄米流形。对于任意 $p \in M$ 及切向量 $X, Y \in T_pM$，∗-里奇曲率定义为

$$*\mathrm{Ric}(X, Y) := \mathrm{Tr}\left(Z \mapsto -\frac{1}{2}J \circ R(X, JY)Z\right). \tag{3.5}$$

与标准里奇曲率不同，∗-里奇张量通常既非对称也非反对称。设 $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ 是 T_pM 的一个标准正交基，满足 $Je_i = e_{i+n}$ 且 $Je_{i+n} = -e_i$，其中 $1 \leqslant i \leqslant n$。∗-里奇张量的分量可表示为：

$$\begin{aligned} *\mathrm{Ric}(X, Y) &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left(\langle JR(X, JY)e_i, e_i\rangle + \langle JR(X, JY)e_{i+n}, e_{i+n}\rangle\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} R(X, JY, e_i, e_{i+n}). \end{aligned}$$

当 M 等距浸入黎曼流形 N时，∗-里奇曲率满足如下结构方程。

引理 3.4. 设 M^{2n} 为黎曼流形 N^{2n+k}的子流形，并设$\{\xi_1,\ldots,\xi_k\}$ 为法丛 $T^{\perp}M$的局部标准正交标架。则

$$*\mathrm{Ric}(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\overline{R}(X,JY,e_i,e_{i+n})-\sum_{\alpha=1}^{k}\left\langle JA_{\xi_\alpha}JA_{\xi_\alpha}(X),Y\right\rangle, \tag{3.6}$$

其中，$\overline{R}$ 表示环境空间 N的黎曼曲率张量， A_{ξ_α}是与 ξ_α相关联的形算子。特别地，若 M^{2n} 是标准球面 S^{2n+1} 中的超曲面，且 ξ为其单位法向量，则

$$*\mathrm{Ric}(X,Y)=\langle X,Y\rangle-\left\langle JA_{\xi}JA_{\xi}(X),Y\right\rangle. \tag{3.7}$$

证明。 令 B 表示 M的第二基本形式。我们利用高斯方程计算外蕴几何的贡献:

$$\begin{aligned}\langle B(X,e_i),B(JY,e_{i+n})\rangle&=\sum_{\alpha}\langle B(X,e_i),\xi_\alpha\rangle\langle B(JY,e_{i+n}),\xi_\alpha\rangle\\&=\sum_{\alpha}\langle A_{\xi_\alpha}(X),e_i\rangle\langle A_{\xi_\alpha}(JY),e_{i+n}\rangle\\&=-\sum_{\alpha}\langle A_{\xi_\alpha}(X),e_i\rangle\langle JA_{\xi_\alpha}(JY),e_i\rangle.\end{aligned}$$

同理,

$$\langle B(X,e_{i+n}),B(JY,e_i)\rangle=\sum_{\alpha}\langle A_{\xi_\alpha}(X),e_{i+n}\rangle\langle JA_{\xi_\alpha}(JY),e_{i+n}\rangle.$$

将这些表达式代入高斯方程可得:

$$\begin{aligned}*\mathrm{Ric}(X,Y)&=\sum_{i=1}^{n}R(X,JY,e_i,e_{i+n})\\&=\sum_{i=1}^{n}\overline{R}(X,JY,e_i,e_{i+n})+\sum_{i=1}^{n}\left(\langle B(X,e_i),B(JY,e_{i+n})\rangle-\langle B(X,e_{i+n}),B(JY,e_i)\rangle\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\overline{R}(X,JY,e_i,e_{i+n})-\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{l=1}^{2n}\langle A_{\xi_\alpha}(X),e_l\rangle\langle JA_{\xi_\alpha}(JY),e_l\rangle\\&=\sum_{i=1}^{n}\overline{R}(X,JY,e_i,e_{i+n})-\sum_{\alpha=1}^{k}\langle A_{\xi_\alpha}(X),JA_{\xi_\alpha}(JY)\rangle.\end{aligned}$$

最后，利用 J 的反对称性和 A_{ξ_α}的对称性，我们观察到

$$\langle A_{\xi_\alpha}(X),JA_{\xi_\alpha}(JY)\rangle=-\left\langle JA_{\xi_\alpha}(X),A_{\xi_\alpha}(JY)\right\rangle=-\left\langle A_{\xi_\alpha}JA_{\xi_\alpha}(X),JY\right\rangle=\left\langle JA_{\xi_\alpha}JA_{\xi_\alpha}(X),Y\right\rangle.$$

公式 (3.7) 的具体形式 S^{2n+1} 源于这样一个事实：当 N 具有常截面曲率 1 时，$\sum_{i=1}^{n}R(X,JY,e_i,e_{i+n})=\langle X,Y\rangle$。

□

对于 OT–FKM 型等距超曲面，其不同的主曲率满足关系 $\lambda_1\lambda_3=\lambda_2\lambda_4=-1$。这一性质导致 $*$-里奇曲率为零。

命题 1.3. 设 M 是球面中的一个 *OT–FKM* 型等距超曲面。若 M 相对于诱导度量具有一个几乎厄米结构，将 $\mathcal{D}_1$ 映射到 $\mathcal{D}_3$，并将 $\mathcal{D}_2$映射到 $\mathcal{D}_4$，则相应的 $*$-里奇曲率恒为零。

证明。任意切向量 v 都可以分解为 $v=\sum_{k=1}^{4} v_k$，其中 $v_k \in \mathcal{D}_k$。考虑满足 $J(\mathcal{D}_k) \subseteq \mathcal{D}_{k+2}$（指标模 4）的近复结构 J。因此，

$$JA_\xi JA_\xi(v)=\sum_{k=1}^{4} JA_\xi J(\lambda_k v_k)=\sum_{k=1}^{4} \lambda_{k+2}\lambda_k J^2(v_k).$$

由于 $\lambda_k\lambda_{k+2}=-1$ 和 $J^2=-\mathrm{Id}$，我们得出

$$JA_\xi JA_\xi(v)=\sum_{k=1}^{4}(-1)(-v_k)=v.$$

将其代入 (3.7)，得到 $*\mathrm{Ric}(X,\ Y)=\langle X,\ Y\rangle-\langle X,\ Y\rangle=0$。 □

注 3.5。 $*$-标量曲率定义为 $*$Ric 的迹。作为经典亚马贝问题的一种推广，del Rio 和 Simanca [7]已证明存在具有常数 $*$-标量曲率的共形度量。由于标量曲率和 $*$-标量曲率不一定同时为常数，Ge 和 Zhou [11]进一步研究了这两种曲率之间的差异，并导出了亚马贝型定理。命题 1.3 给出了超曲面的明确实例，其中相对于诱导度量，两种曲率均为常数（具体而言，$*$-标量曲率为零）。

若存在某个光滑函数 ρ，使得 $*\mathrm{Ric}=\rho g$，则称近厄米流形 $(M,\ J,\ g)$ 为弱 $*$-爱因斯坦 流形；若 ρ 为常数，则称其为 $*$-爱因斯坦 流形。显然，满足命题 1.3 的超曲面均为 $*$-爱因斯坦超曲面，其中包括第 3.1 小节中构造的具体例子。

最后，我们给出几乎厄米超曲面为 $*$-爱因斯坦超曲面的必要条件。设 $(M^{2n},\ J)$ 是 S^{2n+1} 中的一个超曲面，其单位法向量场为 ξ。在任意一点 $p\in M$ 处，设 $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_k$ 为互不相同的主曲率，且 $E_{\lambda_1},\ \ldots,\ E_{\lambda_k}$ 表示相应的特征子空间。

命题 3.6。设 $M^{2n}\subset S^{2n+1}$ 为一个赋有几乎厄米结构 $(J,\ g)$ 的超曲面，其中 g 表示诱导度量。

(1) 张量 $*\mathrm{Ric}$ 对称，当且仅当 $JA_\xi J(E_\lambda)\subseteq E_\lambda$ 对每个主曲率 λ都成立。

(2) 若 M 是弱 $*$-爱因斯坦的，则在每一点 p处，要么 0 是一个主曲率，要么存在某个仅依赖于 p的标量 $c\neq 0$，使得 $J(E_{\lambda_i})=E_{-c/\lambda_i}$ 成立。*(3)* 若 M 是弱 $*$-爱因斯坦的，则 M 是 $*$-爱因斯坦的，当且仅当它具有常值高斯–克罗内克曲率。

证明。(1) 利用（3.7），$*$-里奇张量的反对称部分为

$$\begin{aligned}*\mathrm{Ric}(X,Y)-*\mathrm{Ric}(Y,X)&=\langle JA_\xi JA_\xi(Y),X\rangle-\langle JA_\xi JA_\xi(X),Y\rangle\\&=\langle A_\xi JA_\xi J(X),Y\rangle-\langle JA_\xi JA_\xi(X),Y\rangle.\end{aligned}$$

因此， $*$Ric 是对称的，当且仅当 $A_\xi JA_\xi J = JA_\xi JA_\xi$。将此算子作用于主向量 $v \in E_\lambda$，我们要求

$$A_\xi(JA_\xi Jv) = JA_\xi J(A_\xi v) = \lambda(JA_\xi Jv).$$

当且仅当 $JA_\xi Jv$ 是 A_ξ 的特征值为 λ的特征向量时，此结论成立，即$JA_\xi J(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$。

(2) 若 M是弱 $*$-Einstein，则存在函数 ρ，使得 $*$Ric$(X, Y) = \rho\langle X, Y\rangle$。由 (3.7) 可知，这意味着

$$\langle JA_\xi JA_\xi(X), Y\rangle = (1-\rho)\langle X, Y\rangle.$$

令 $c = 1-\rho$，我们得到算子恒等式 $JA_\xi JA_\xi = c$Id，或者等价地$A_\xi JA_\xi = -cJ$。对于任意 $v \in E_\lambda$,

$$-cJv = A_\xi JA_\xi(v) = \lambda A_\xi(Jv).$$

若 0 是一个主曲率，取一个非零特征向量 $v \in E_0$，可得 $cJv = 0$，这迫使 $c = 0$。相反，若所有主曲率均非零，则可推出 $A_\xi(Jv) = -\frac{c}{\lambda}Jv$。这意味着 $J(E_\lambda) \subseteq E_{-c/\lambda}$，其中非零主曲率 $-\frac{c}{\lambda}$ 保证了 $c \neq 0$。此外，由于类似地成立 $J(E_{-c/\lambda}) \subseteq E_\lambda$，我们得出 $J(E_\lambda) = E_{-c/\lambda}$。

(3) 由第 (2) 部分可知，主曲率的性质取决于函数 $c = 1-\rho$。若在点 p 处 $c \neq 0$，则 A_ξ 的特征值成对出现（λ, $-c/\lambda$）（可能带有 $\lambda^2 = -c$），且其重数均为 dim E_λ = dim $E_{-c/\lambda}$，这是由于同构 $J: E_\lambda \to E_{-c/\lambda}$。在此情形下，高斯–克罗内克曲率$K$ =det(A_ξ) 可通过将这些配对分组来计算:

$$K = \prod_\lambda \lambda^{\dim E_\lambda} = \prod_{\text{pairs } \{\lambda, -c/\lambda\}} \left(\lambda \cdot \left(-\frac{c}{\lambda}\right)\right)^{\dim E_\lambda} = \prod (-c)^{\dim E_\lambda} = (-c)^n = (\rho-1)^n.$$

反之，若在 p 处 $c = 0$，第 (2) 部分断言 0 是一个主曲率，这意味着 $K = 0 = (-c)^n$。因此， K 为常数，当且仅当 c （因而 ρ）为常数；这正是 $*$-爱因斯坦的定义。

□

References

1. Abresch U., 具有四个或六个互异主曲率的等距超曲面：关于重数的必要条件, 《数学年刊》, **264**（1983）, 283–302。2. Cecil T. E., Chi Q. S., Jensen G. R., 具有四个主曲率的等距超曲面, 《数学年刊》, **166**（2007）, 1–76。3. Chi Q. S., 具有四个主曲率的等距超曲面 *II*, 《名古屋数学杂志》, **204**（2011）, 1–18。4. Chi Q. S., 具有四个主曲率的等距超曲面 *III*, 《微分几何杂志》, **94**（2013）, 487–522。´5. Chi Q. S., 等主故事：埃利·嘉当的遗产, 《2018年国际华人数学家联盟会议论文集》, 197–260。6. Chi Q. S., 具有四个主曲率的等距超曲面 *IV*, 《微分几何杂志》, **115** （2020）, 225–301。7. del Rio H., Simanca S. R., 近似厄米流形上的山边问题, 《几何分析杂志》, **13** （2003）, 185–203。

8. Fang, F.，等距超曲面主曲率的重数，马克斯·普朗克学会丛书 *1996*（*80*）。*9. Fang, F.*，具有四个互异主曲率的等距超曲面的拓扑，《美国数学会会刊》*127*（*1999*），*259–264*。*10. Ferus D., Karcher H., M¨unzner H. F.*，*Clifford*代数与新的等距超曲面，《数学杂志》*177*（*1981*），*479–502*。*11. Ge J., Zhou Y.*，近似厄米流形上的全纯 *d*-标量曲率，《中国科学：数学》*66*（*2023*），*2293–2308*。*12. Ge J., Tang Z., Yan W.* 等距超曲面焦子流形上的法标量曲率不等式，《国际数学研究通知》*2*（*2020*），*422–465*。*13. Gray A., Hervella L. M.*，近似厄米流形的十六类及其线性不变量，《纯粹与应用数学年刊》*123*（*1980*），*35–58*。*14. Immervoll S.*，球面中具有四个互异主曲率的等距超曲面的分类，《数学年刊》*168*（*2008*），*1011–1024*。*15. M¨unzner H. F.*，球面中的等距超曲面，《数学年刊》*251*（*1980*），*57–71*。*16. M¨unzner H. F.*，球面中的等距超曲面 *II*，《数学年刊》*256*（*1981*），*215–232*。*17. Qian C., Tang Z., Yan W.*，球面中等距族的拓扑与曲率，《数学与统计通讯》*11*（*2023*），*439–475*。*18. Qian C., Tang Z., Yan W.*，等距叶状结构与复结构，*arXiv:2502.09041*，*2025*。*19. Stolz S.*，*Dupin*超曲面的重数，《数学发明》*138*（*1999*），*253–279*。*20. Tang Z. Z.*，具有四个互异主曲率的等距超曲面，《中国科学通报》*36*（*1991*），*1237–1240*。*21. Tang Z., Yan W.*，等距超曲面与复结构，《数学科学学报》*42*（*2022*），*2223–2229*。*22. Wang Q. M.*，*Clifford*等参数超曲面的拓扑，《微分几何杂志》*27*（*1988*），*55–66*。*23. Yano K.*，复空间与近复空间上的微分几何，*Macmillan*，（*1965*），第*326*页。

School of Mathematical Sciences, Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Beijing Normal University Beijing 100875 ,
, P.R. CHINA.*Email address:* lixinxiao@mail.bnu.edu.cnSchool of Mathematical Sciences, Laboratory of Mathematics and Complex Systems,Beijing Normal University, Beijing 100875, P.R. CHINA.*Email address:* wjyan@bnu.edu.cn
School of Mathematical Sciences, Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Beijing Normal University, Beijing 100875, P.R. CHINA.*Email address:* wjinzhang@mail.bnu.edu.cn