arXiv:2602.08053v1 [math.RT] 8 Feb 2026

通过张量积实现全局 Jacquet–Langlands 对应

Jun Yang

摘要

我们证明，GL(2) 的全局 Jacquet–Langlands 对应 JL 可通过 Hecke 代数上的张量积实现。设 G 是数域上 GL(2) 的一个非分裂内形式。利用相似 theta 对应，空间 $L^2(D(\mathbb{A})^\times \times \mathbb{A}^\times)$ 获得一个 $G(\mathbb{A})$–$(G(\mathbb{A}\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}))$ 双模的结构，使得

$$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}), \chi) \otimes_{\mathcal{H}(G)} L^2(D(\mathbb{A})^\times \times \mathbb{A}^\times) \cong \bigoplus_{\pi \in \mathrm{Irrep}_{\mathcal{A}}(G, \chi^{-1})} \pi \otimes \mathrm{JL}(\pi).$$

将其分解为 $G(\mathbb{A})^\times \times \mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ 的不可约表示，即可恢复完整的全局 Jacquet–Langlands 对应。

目录

1 引言 1 2 Howe 对偶与θ对应 3 3 相似群的θ对应 6 4 相似 theta 对应的张量积 9 5 全局 Jacquet–Langlands 对应的张量积 11

1 引言

θ对应与Howe 对偶为在局部域上不同约化群之间转移表示提供了最强大的机制之一。给定辛群中的一个对偶对（G, H），魏尔表示实现了 G 与 H的不可约容许表示之间的对应，这称为θ对应。*Howe* 对偶 断言，在适当的假设下，小 theta 提升在 G 与H的容许对偶的适当子集之间建立双射。自创立以来，Howe 对偶一直在表示论与自守形式中发挥核心作用，是Langlands 函子性实例的重要来源。

θ对应的经典理论通常研究等距群。然而，许多算术应用 [12], 尤其是涉及自守表示和整体转移问题的应用，自然需要转向相似群。为此，Roberts [24] 以及后来的Gan–Takeda [7], 、Gan–Tantono [9], 和Baki´c–Gan– Savin [2] 发展了诱导魏尔表示理论，将θ对应推广到相似对偶对。在这一框架下，Howe 对偶依然成立，由此得到的相似 theta 对应展现出很强的局部与整体相容性。

本文的指导思想是，应将 GL(2) 的 *Jacquet–Langlands* 对应[15] 视为特定四元数相似对偶对的 Howe 对偶的一种具体体现。更确切地说，我们证明，全局 Jacquet–Langlands 转移自然源自对偶对 $D^\times$与 $(D^\times \times \mathrm{GL}(2))/F^\times$的 θ对应，其中 D是数域 F上的四元数除代数。在这一框架下，Jacquet–Langlands 对应的表示论内容体现在诱导魏尔表示的结构及其作为适当 Hecke 代数上的模的性质之中。因此，本文的核心技术主题是通过某些代数上的张量积来实现 theta 提升；这一思路受到 Goffeng–Mesland–Sengun 关于局部/整体群 C^*-代数 [11] 的研究，以及 Loke–Przebinda 关于局部 Hecke 代数 [19] 的研究的启发。

令 $G = D^\times$，并通过对有限处极大紧子群的特征函数取限制张量积，定义 G 的全局赫克代数 $\mathcal{H}(G)$，即 $\mathcal{H}(G) = \otimes_v{}'\mathcal{H}(G_v)$。这里，$\mathcal{H}(G_v)$ 是非阿基米德情形下通常的 Hecke 代数，而 $\mathcal{H}(\mathfrak{g}_v, K_v)$ 是阿基米德情形下的卷积代数。

令 $\Omega_{\mathbb{A}}$ 为与上述相似对偶对相关联的整体诱导 Weil 表示。我们证明，对于 $G(\mathbb{A})$ 的不可约容许表示 π，其相似大 theta 提升 π 可以实现为全局赫克代数 $\mathcal{H}(G)$ 上的模的张量积:

$$\Theta(\pi) \cong \pi^\vee \otimes_{\mathcal{H}(G)} \Omega_{\mathbb{A}}.$$

只要 Howe 对偶在每个赋值处成立，这一张量描述在局部和整体情形下均成立。

我们的主要结果将这一形式体系应用于 GL(2) 的全局 Jacquet–Langlands 对应。令 $D^\times(\mathbb{A})$ 的 π 为中心特征 χ 的不可约自守表示，并令 JL(π) 表示其到 GL(2, $\mathbb{A}$) 的 Jacquet–Langlands 转移。利用四元数相似对偶对的局部大 theta 提升的不可约性，以及相似 theta 对应的局部—整体相容性，我们证明存在表示同构

$$\pi^\vee \otimes_{\mathcal{H}(G)} \Omega_{\mathbb{A}} \cong \pi \otimes \mathrm{JL}(\pi)$$

的 $D^\times(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$。等价地，Jacquet–Langlands 对应通过由 Howe 对偶支配的普适张量构造得以实现。因此，该对应自然地出现在自守谱层面:

$$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}), \chi) \otimes_{\mathcal{H}(G)} L^2(D(\mathbb{A}) \times \mathbb{A}^\times) \cong \bigoplus_{\pi \in \mathrm{Irrep}_{\mathcal{A}}(G, \chi^{-1})} \pi \otimes \mathrm{JL}(\pi),$$

其中，$\mathrm{Irrep}_{\mathcal{A}}(G,\ \chi^{-1})$ 表示具有中心特征 χ^{-1} 的 $G(\mathbb{A})$ 的自守表示。这一视角凸显了 Jacquet–Langlands 对应是 θ函子性的一个实例，而非孤立的现象。

除了为 GL(2) 的 Jacquet–Langlands 对应提供新的概念性证明外，本文的结果还强调了 Howe 对偶在整体表示论中的结构性作用。本文提出的张量积实现避免了迹公式，并以统一方式处理阿基米德局部域与非阿基米德局部域。它还提出了一种一般策略，即通过 Hecke模张量积实现源自 θ对应的其他函子性传递。

本文结构。 第 2 节回顾 Howe 对偶与 θ对应的经典理论。在第3节中，我们通过诱导魏尔表示概述相似群的 θ对应。第 4 节建立局部与整体相似θ提升的张量积实现。最后，第 5 节应用这一框架，获得 GL(2) 全局 Jacquet–Langlands 对应的张量积实现。

致谢。 作者感谢 Mehmet Haluk S¸eng¨un 在讨论与合作期间提出的富有洞见的意见。

2 Howe 对偶与 theta 对应

我们首先回顾 Howe 对偶的形式陈述。设 G, H 是局部域 F 上的一对约化群。设 (ρ, S) 是 $G\times H$ 的一个光滑表示。对于 $\pi \in \mathrm{Irrep}(G)$（即 G 的不可约容许表示的等价类集合），我们定义

$$S(\pi) = S/\bigcap_{T\in \mathrm{Hom}_G(S,\pi)} \mathrm{Ker}(T), \tag{1}$$

它是 $G \times H$ 的一个光滑表示。存在一个光滑的 H-表示 $\Theta(\pi)$（ π 的大 *theta* 提升 ），使得

$$S(\pi) \cong \pi \otimes \Theta(\pi), \tag{2}$$

当 (ρ, S) 为魏尔表示时（对于阿基米德 F，参见 $[14, 第\ 2]$ 节；对于非阿基米德 F，参见 $[20,$ 引理 III.3$]$），或为相似群的诱导魏尔表示时（参见 $[2,$ 第 $3]$ 节）。我们定义 G 和 H 的两个不可约表示族:

- $\mathcal{R}(G) = \{\pi \in \mathrm{Irrep}(G) \mid S(\pi) \neq 0\}$ and $\mathcal{R}(H) = \{\tau \in \mathrm{Irrep}(H) \mid S(\tau) \neq 0\}$.

注意， $\Theta(\pi)$ 有一个极大半单商 $\theta(\pi)$（ π 的小 *theta* 提升 ）。若图*Howe* 对偶 成立，则称

$$\mathcal{R}(G \times H) = \{(\pi, \tau) \in \mathcal{R}(G) \times \mathcal{R}(H) \mid \mathrm{Hom}_{G\times H}(\rho, \pi \otimes \tau) \neq 0\}$$

定义了 $\mathcal{R}(G)$ 与 $\mathcal{R}(H)$ 之间的双射，该双射由 $\pi \mapsto \theta(\pi)$ 给出。

我们将考虑其中将 $(\rho,\ S)$ 视为 Weil 表示的 theta 对应。本综述主要遵循 [22, 4] 。设 F 为一个局部域，W 为其上的一个辛空间，并配备辛形式 $\langle\ ,\ \rangle$。设 $H(W)$ 为 ***Heisenberg*** 群，定义在集合 $W\times F$ 上，其群乘法为

$$(w_1,z_1)\cdot(w_2,z_2)=(w_1+w_2,z_1+z_2+\tfrac{1}{2}\langle w_1,w_2\rangle).$$

令 $W=W_1\oplus W_2$ 为极大各向同性子空间的一个分解。

对于非平凡的酉加法特征 $\psi\colon F\to \mathrm{U}(1)$，存在唯一的（在等价意义下）不可约表示 ρ_ψ，它属于 $H(W)$ 且具有中心特征 ψ，称为***Heisenberg*** 表示，其实现方式如下。令 $\mathcal{S}=\mathcal{S}(W_1)$ 为 W_1上的函数空间，其中包含光滑函数（阿基米德 F）或局部常值紧支撑函数（非阿基米德 F）。表示 ρ_ψ 在 $\mathcal{S}$ 上的作用为

$$\begin{aligned}
&\rho_\psi((x,0,0))\phi(w_1)=\phi(w_1+x);\\
&\rho_\psi((0,y,0))\phi(w_1)=\psi(\langle w_1,y\rangle)\phi(w_1);\\
&\rho_\psi((0,0,a))\phi(w_1)=\psi(a)\phi(w_1).
\end{aligned}$$

这称为 Heisenberg 表示的薛¨定谔模型 。辛群

$$\mathrm{Sp}(W)=\{g\in \mathrm{GL}(W)\mid \langle gw_1,gw_2\rangle=\langle w_1,w_2\rangle \text{ for all } w_1,w_2\in W\}$$

通过 $g\cdot(w,t)=(gw,t)$作用于 $H(W)$。因此，存在一个作用于 $\mathcal{S}$ 上的算子 $\omega_\psi(g)$（在相差一个标量的意义下良定义），使得

$$\rho_\psi(gw,t)\cdot\omega_\psi(g)=\omega_\psi(g)\cdot\rho_\psi(w,t) \tag{3}$$

对于（w,t）$\in H(W)$。元辛群 定义为

$$\widetilde{\mathrm{Sp}}_\psi(W)=\{(g,\omega_\psi(g))\mid \rho_\psi(gw,t)\,\omega_\psi(g)=\omega_\psi(g)\,\rho_\psi(w,t),\ \forall(w,t)\in H(W)\},$$

$\widetilde{\ }$它嵌入正合列 $1\to\mathbb{C}^\times\to \mathrm{Sp}\psi(W)\to \mathrm{Sp}(W)\to 1$。该表示

$$\omega_\psi\colon (g,\omega_\psi(g))\mapsto\omega_\psi(g)\in\mathrm{GL}(\mathcal{S})$$

称为***Weil*** 表示（或称振子表示）。

给定一对约化子群（$G,\ G'$），它们属于 Sp(W。假设 G 和 G' 互为 Sp(W中的中心化子；我们称它们为对偶对。对于$\pi,\ V_\pi$的不可约表示，其中 G （分别为 G'），表示ω_ψ 具有极大 π-同型分量商 $\mathcal{S}$（π）。如（2）所示，已知

$$\mathcal{S}(\pi)\cong\pi\otimes\Theta_\psi(\pi) \tag{4}$$

对某个光滑表示 $\Theta_\psi(\pi)$ 而言，它是 G'的表示。因此，我们得到π 的 大 theta 提升 $\Theta_\psi(\pi)$, 以及其极大半单商 $\theta_\psi(\pi)$（即 π的小 theta 提升）。

定理 2.1。 ***Weil*** 表示$(\rho,\mathcal{S})$满足 ***Howe*** 对偶。

这一结果在阿基米德情形由 Howe [13] 证明。非阿基米德情形在 F 的剩余特征不为 2 时由 Waldspurger [25] 证明，后来 Gan 和 Takeda [8] 以及 Gan 和 Sun [6] 在一般情形下完成了证明。

现在令 F 为一个数域，并考虑全局 theta 提升。令 $\mathcal{O}$ 为 F的整数环。令 W 为 F 上的一个辛空间，并具有极大各向同性分解$W = W_1 \oplus W_2$。对于 F的每个赋值 v，令 F_v 为其完备化， F_v的整数环为 $\mathcal{O}_v$（对于非阿基米德 v）。固定W的一组标准辛基 $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$，并令

$$L = \langle e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n \rangle_{\mathcal{O}}$$

为由该辛基生成的 $\mathcal{O}$-格。

令 $W_v = W \otimes_F F_v$ 和 $L_v = L \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_v$。定义 $H^o(W_v) = L_v \oplus \mathcal{O}_v$，这是 $H(W_v)$的一个紧开子群。阿代尔 Heisenberg 群是受限直积$H(W_{\mathbb{A}}) = \prod'(H(W_v)\ H^o(W_v))$. 令 J_v 为 Sp(W_v)中 $H^o(W_v)$的稳定子群。阿代尔辛群 Sp($W_{\mathbb{A}}$)是受限直积 $\prod'(\mathrm{Sp}(W_v); J_v)$。固定一个全局加性特征 ψ: $\mathbb{A}/F \to$ U(1)，并定义阿代尔元辛群 Spψ($W_{\mathbb{A}}$)，方式与 (3) 类似，它满足

$$1 \to \mathrm{U}(1) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi}(W_{\mathbb{A}}) \to \mathrm{Sp}(W_{\mathbb{A}}) \to 1.$$

我们提及， $\widetilde{\ }$Spψ($W_{\mathbb{A}}$) 是受限直积 $\prod'(\widetilde{\ }\mathrm{Sp}_{\psi_v}(W_v);\ J_v)$ 关于一个中心子群的商。令

$$\omega_{\psi} \colon \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi}(W_{\mathbb{A}}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{S}(W_{1,\mathbb{A}}))$$

为全局 *Weil* 表示。

令 ($G(\mathbb{A})$ $H(\mathbb{A})$) 是 Spψ($W_{\mathbb{A}}$) 中的一个对偶对。全局 *theta* 对应可按如下方式构造。对于 $\varphi \in \mathcal{S}(W_{1,\ \mathbb{A}})$，我们定义与 φ 关联的 theta 函数如下：

$$\theta(\varphi)(g) = \sum_{x \in W_1(F)} (\omega_{\psi}(g)\varphi)(x),$$

它在 Sp($W_{\mathbb{A}}$) 上关于左侧 Sp(W)(F) 不变。设 π 是 $G(\mathbb{A})$ 的尖点自守表示，即 (π， V_{π}) 是 $G(\mathbb{A})$ 的一个不可约子表示，且包含于$L^2_{\mathrm{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ 中。对于 $f \in V_{\pi}$ 和 $\varphi \in \mathcal{S}(W_{1,\ \mathbb{A}})$，定义与 f 和 φ关联的全局 *theta* 提升如下：

$$\theta(\varphi, f)(h) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} \theta(\varphi)(hg)\overline{f(g)}\ \mathrm{d}g$$

对于 $h \in H(\mathbb{A})$。定义

$$V(\pi) = \mathrm{span}\{\theta(\varphi, f) \mid f \in V_{\pi},\ \varphi \in \mathcal{S}(W_{1,\mathbb{A}})\},$$

$H(\mathbb{A})$的一个自守表示，称为 π的全局 *theta* 提升。

定理 2.2。 假设对偶对(G, H) 在 F的每个赋值处均满足局部 *Howe* 对偶性。设 $\pi = \otimes'_v \pi_v$ 是 $G(\mathbb{A})$ 的一个尖点自守表示，并记 $\theta(\pi) = \otimes_v \theta(\pi_v)$。若全局 *theta* 提升 $V(\pi)$ 非零，且包含于 $L^2(H(F)\backslash H(\mathbb{A}))$，那么

$$V(\pi) \cong \theta(\pi).$$

这给出了局部与整体 theta 对应之间的相容性。证明见 [4,命题3。1]

3 相似群的 theta 对应

我们遵循 [2] 对相似 theta 对应的一般描述。然后给出两个例子：Roberts [24], 研究的辛-正交对偶对，以及 Gan 和 Tantono [9]研究的四元数对偶对。

设 (G, H) 是单线性代数群 $\mathcal{E}$ 内的一对约化子群，且都定义在局部域 F 上。假设 (G, H) 构成一个对偶对，即它们互为中心化子。固定一个同态 i: $G \times H \to \mathcal{E}$，它不一定是单射。设 $Z \hookrightarrow G$ 和 $Z \hookrightarrow H$ 是某个公共中心子群 Z（在 i 下作了识别）的嵌入，使得

- $\ker(i) = \Delta(Z) := \{(z, z^{-1}) \mid z \in Z\}$,
- $(G \times H)/\Delta(Z) \to \mathcal{E}$ is injective.

于是，相关的相似群可定义如下。

定义 3.1。与 G 及以下数据相关联的相似群 $\widetilde{G}$:

1. 一个嵌入 j: $Z \hookrightarrow T := \mathrm{Res}^{K/F}(\mathbb{G}_m)$，其中 K 是有限秩的 étale F-代数；2. 对某个有限扩张 E/F，一个嵌入 $T/j(Z) \hookrightarrow \mathrm{Res}^{E/F}(\mathbb{G}_m)$,

由.....定义

$$\widetilde{G} := (G \times T)/\Delta(Z).$$

它配有相似同态

$$\lambda_G \colon \widetilde{G} \twoheadrightarrow T/j(Z) \hookrightarrow \mathrm{Res}_{E/F}(\mathbb{G}_m).$$

The 相似群 $\widetilde{H}$ 和相似同态 λ_H 的定义类似 .

考虑对角映射 Δ: $T \to \widetilde{G} \times \widetilde{H}$。我们使用以下记号:

- $\omega = \mathcal{E}(F)$ 的一个极小表示（见 [5]）；
- $R_0 := \{(g, h) \in G \times H \mid \lambda_G(g) \cdot \lambda_H(h) = 1\}$;
- $R_1 := R_0/\Delta(T)$，它满足 $R_1 \cong (G \times H)/\Delta(Z)$;
- $\widetilde{G}(F)^+ :=$ 投影 $R_0 \to G(F)$ 的像;
- $\widetilde{H}(F)^+ :=$ 投影 $R_0 \to H(F)$ 的像。

已知，$\widetilde{G}(F)^+ = G(F)$ 当且仅当 $\lambda_G(G(F)) \subset \lambda_H(H(F))$，而当其为满射时，这一条件成立。我们称这对 $(G(F)^+, H(F)^+)$ 为一个相似对偶对。

考虑同态的复合

$$R_0 \twoheadrightarrow R_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(F). \tag{5}$$

对于 $\mathcal{E}(F)$-表示 ω，其沿(5)的拉回给出 R_0的一个表示。我们将这个 R_0-表示记为 ω，它扮演扩张Weil表示的角色，见于 [2$\overline{4}$, 第 3]节和 [9, 第 3]节。然后我们定义诱导表示

$$\Omega = \mathrm{Ind}_{R_0}^{\widetilde{G}(F)^+ \times \widetilde{H}(F)^+} \overline{\omega}. \tag{6}$$

~对于 $\pi \in \mathrm{Irrep}(G(F)^+)$，我们定义

$$\Omega(\pi) = \Omega \Big/ \bigcap_{T \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{G}(F)^+}(\Omega, \pi)} \mathrm{Ker}(T).$$

~ ~如式 (1) 所示。于是，$\Omega(\pi)$ 是 $G(F)^+ \times H(F)^+$ 的光滑表示。存在一个光滑的 $\sim H(F)^+$-表示 $\Theta(\pi)$，使得 $\Omega(\pi) \cong \pi \otimes \Theta(\pi)$；我们称 $\Theta(\pi)$ 为 π 的相似大 theta 提升。我们将其极大半单商记为 $\theta(\pi)$，并称之为 π 的相似小theta提升。已知 $\Theta(\pi) \cong \mathrm{Hom}^{G(F)}(\omega, \pi)$ 是 $H(F)^+$ 的一个光滑表示~。

以下结果最初由 Roberts 在辛–正交对偶对的情形下证明（见 [24, 定理 4.4]），当时假设限制到等距群后的表示无重数；随后 Gan 和 Tantono 证明了四元数情形（见 [9, 命题 3.3(iv)]）；最后 Baki´c、Gan 和 Savin 在一般情形下证明了该结果（见 [2, 命题 5.1]）。

定理 3.1。 如果对局部域 F,~ ~上的对偶对 $(G(F)\ H(F))$ 成立 *Howe* 对偶，那么对相应的相似对 $(G(F)^+, H(F)^+)$也成立 *Howe* 对偶。

这里给出两个例子，其中极小表示 ω 取为 Weil 表示。

例 3.2 （辛-正交对偶对）。 这是 Roberts 在 [24]中研究的例子。固定一个非阿基米德局部域 F。设 X 是 F 上的有限维非退化辛空间，其辛形式为 $(\ ,\ )_X$；设 Y 是 F 上的有限维非退化对称空间，其内积为 $(\ ,\ )_Y$。为简单起见，我们假设 $\dim_F X$ 为偶数，而奇数维情形也曾得到研究。

空间 $W = X \otimes Y$是带有辛形式 $\langle x_1 \otimes y_1,\ x_2 \otimes y_2 \rangle = (x_1,\ x_2)_X \cdot (y_1,\ y_2)_Y$的辛空间。等距群 $(\mathrm{U}(X),\ \mathrm{U}(Y)) = (\mathrm{Sp}(X),\ \mathrm{O}(Y))$ 在 $\mathrm{Sp}(W)$ 中构成一个对偶对。在此情形下，$\ker(i) = \Delta(\mu_2)$，其中 μ_2 是二次单位根群。假设$X = X_1 \oplus X_2$ 是极大各向同性子空间的分解。于是 $W = W_1 \oplus W_2$，其中 $W_i = X_i \otimes Y$给出一个极大各向同性分解。相似群为

$$\widetilde{G}(F)^+ = \mathrm{GSp}(X) \text{ and } \widetilde{H}(F)^+ = \mathrm{GO}(Y).$$

扩张/诱导魏尔表示的构造依赖于将映射i: $\mathrm{Sp}(X) \times \mathrm{O}(Y) \to \mathrm{Sp}(X \otimes Y)$提升到元辛覆盖 $\mathrm{Mp}(X \otimes Y)$。随后可将此提升~ ~扩展为 $R_0 = \{(g,\ h) \in G \times H \mid \lambda_G(g) \cdot \lambda_H(h) = 1\}$，从而构成 R_0的扩张魏尔表示ω，并由此得到诱导魏尔表示 Ω。此外，若~ ~将 Ω 的底层空间记为 $\mathcal{T}$，则存在一个 $G(F)^+ \times H(F)^+$-等变~同构，将 $\mathcal{T}$映到 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(W_1 \times F^\times)$，即$W_1 \times F^\times$上的施瓦茨–布吕阿函数空间。

例 3.3 （四元数对偶对）。这里给出一族四元数空间及其相关的等距群和相似群，由 Gan 和 Tantono 在 [9,第 2]节中构造。固定一个定义在非阿基米德域 F上的四元数除代数 D 。

1. 对于 $k \geq 1$，设 $V_k = D^k$ 为维数为 $_D V_k = k$ 的唯一四元数厄米空间。更确切地说，$V_1 = D$ 和 $V_2 = De_1 \oplus De_2$ 配备由 $\langle e_1,\ e_2\rangle = 1$ 及 $\langle e_i,\ e_i\rangle = 0$ 给出的内积。那么这些四元数厄米空间的 Witt 塔为

$$V_{2n} = V_2^{\oplus n} \quad \text{and} \quad V_{2n+1} = V_1 \oplus V_2^{\oplus n}.$$

因此，等距群为

$$\mathrm{U}(V_k) = \begin{cases} \mathrm{U}(V_{2n}) = \mathrm{Sp}_{n,n}, & \text{if } k = 2n; \\ \mathrm{U}(V_{2n+1}) = \mathrm{Sp}_{n+1,n}, & \text{if } k = 2n+1, \end{cases}$$

它们是 Sp_{2k} 的内形式。相似群为

$$\mathrm{GU}(V_k) = \begin{cases} \mathrm{GU}(V_{2n}) = \mathrm{GSp}_{n,n}, & \text{if } k = 2n; \\ \mathrm{GU}(V_{2n+1}) = \mathrm{GSp}_{n+1,n}, & \text{if } k = 2n+1. \end{cases}$$

2. 对于 $k \geq 2$ 以及可分二次 F-代数 K （与 $F^\times/F^{\times 2}$ 中的一个元素相对应），设 W_k^K 为维数为 k 且判别式为 K 的唯一四元数斜厄米空间。空间 $W_2 = Df_1 \oplus Df_2$ 配备了 $(f_1,\ f_2) = 1$ 和 $(f_i,\ f_i) = 0$。

对于 $i = 1,\ 2,\ 3$，令 $a_i \in F^\times/F^{\times 2}$ 满足 $a_1a_2a_3 = 1$ 属于 $F^\times/F^{\times 2}$。令 $W_3 \cong Df_1 \oplus Df_2 \oplus Df_3$，使得 $(f_i,\ f_i) = a_i$。对于 $m \geq 1$，定义斜厄米空间

$$W_{2m} = W_2^{\oplus m} \quad \text{and} \quad W_{2m+3} = W_3 \oplus W_2^{\oplus m}.$$

因此，等距群为

$$\mathrm{U}(W_l) = \begin{cases} \mathrm{U}(W_{2m}) = \mathrm{O}^{m,m}, & \text{if } l = 2m; \\ \mathrm{U}(W_{2m+3}) = \mathrm{O}^{m+3,m}, & \text{if } l = 2m+3, \end{cases}$$

它们是 Sp_{2k} 的内形式。相似群为

$$\mathrm{GU}(W_l) = \begin{cases} \mathrm{GU}(W_{2m}) = \mathrm{GO}^{m,m}, & \text{if } l = 2m; \\ \mathrm{GU}(W_{2m+3}) = \mathrm{GO}_{m+3,m}, & \text{if } l = 2m+3. \end{cases}$$

注意，V_k 是厄米的，而 W_l 是斜厄米的。它们的张量积 $V_k \otimes_D W_l$是带有辛形式的辛空间

$$\langle v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2\rangle = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}_{D/F}(\langle v_1, v_2\rangle \cdot \overline{(w_1, w_2)}),$$

其中 $v_1, v_2 \in V_k$, $w_1, w_2 \in W_l$，且 $\mathrm{Tr}^{D/F}(x) = x + x$ 是 D 上的典范迹。我们得到一个自然映射

$$\mathrm{U}(V_k) \times \mathrm{U}(W_l) \to \mathrm{Sp}(V_k \otimes_D W_l),$$

它使 (U(V_k),U(W_l)) 成为一个对偶对。这也诱导出一个自然映射

$$\mathrm{GU}(V_k) \times \mathrm{GU}(W_l) \to \mathrm{GSp}(V_k \otimes_D W_l).$$

设 (V, W) 具有上述 (V_k, W_l) 的形式，并设 (U(V), U(W)) 是这种类型的对偶对。那么 (GU(V), GU(W)) 构成相应的相似对偶对。

诱导表示 Ω 也可以描述为一个诱导表示，它仅依赖于 $G(F)$ 及其相应的相似群。

命题 3.4。我们有 $\Omega \cong \mathrm{Ind}_{G\ F}^{\tilde{G}\ F\ +}()()\,(\omega|_{G(F)})$。

证明。 对于 $\tilde{G}(F)^+$ 的任意不可约表示 $\tilde{\pi}$，已知

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(\omega, \mathrm{Res}^{\tilde{G}(F)^+}_{G(F)}\,\tilde{\pi}) \;\cong\; \mathrm{Hom}_{\tilde{G}(F)^+}(\Omega, \tilde{\pi})$$

由 [2, §3] 可知。根据弗罗贝尼乌斯互反律，我们得到 $\Omega \cong \mathrm{Ind}_{G\ F}^{\tilde{G}\ F\ +}()()\,\omega$。 □

4 相似 θ 对应的张量积

我们通过适当 Hecke 代数上的张量积来实现局部与整体相似θ提升。从本节起，若不会与普通对偶对混淆，我们用 (G, H) 表示相似对偶对。

设 F 是一个非阿基米德局部域， G 是定义在 F上的约化群。令$C_c^\infty(G)$ 为 G上紧支撑光滑函数构成的复向量空间。回顾一下，*Hecke* 代数 $\mathcal{H}(G)$ 定义为空间 $C_c^\infty(G)$，其乘法由卷积给出:

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(x)\, f_2(x^{-1}g)\ \mathrm{d}x$$

对于 $f_1, f_2 \in C_c^\infty(G)$。给定 G的一个表示 (π, V)，定义

$$\pi(f)v = \int_G f(g)\, \pi(g)v\ \mathrm{d}g$$

对于 $f \in \mathcal{H}(G)$。这使得 V 成为一个 $\mathcal{H}(G)$-模。因此， G的光滑表示范畴等价于非退化 $\mathcal{H}(G)$- 模范畴 [1] (参见 [10, 引理 5.3。3])。

现在考虑阿基米德情形，即 $F = \mathbb{R}$ 或 $F = \mathbb{C}$。设 G 是一个实李群，其复化李代数为 $\mathfrak{g}$，极大紧子群为 K。对于 G的容许表示，我们研究其底层的 $(\mathfrak{g}, K)$-模，它们保持不可约性（见 [26, §3.4]）。令 $\mathcal{H}(\mathfrak{g}, K)$ 为 K-有限且支撑于 K上的 G分布所构成的卷积代数。根据 [17, Chapter I.4, Theorem], , 对于 $(\mathfrak{g}, K)$-模 M 和 N，我们有

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(M, N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathfrak{g},K)}(M, N).$$

[1]若对每个 $m \in M$，都存在 $n \geq 1$ 和 $(x_i,\ m_i)_{1\leq i\leq n}$属于 $\mathcal{H}(G) \times M$，使得 $m = \sum_{i=1}^n x_i m_i$，则称 M 为 *nondegenerate* 的 $\mathcal{H}(G)$-模。

因此，只需考虑 $\mathcal{H}(\mathfrak{g}, K)$ 上的模。

下述结果是通常 Weil 表示情形的相似变体（见 [19, 定理 3–4]）。

引理 4.1. 设 (G, H) 为局部域 F 上的相似对偶对，并设 Ω 为 $G \times H$ 的诱导表示。对 G 的不可约表示 π，我们有

$$\Theta(\pi) \cong \pi^\vee \otimes_{\mathcal{H}(G)} \Omega \quad (resp.\ \Theta(\pi) \cong \pi^\vee \otimes_{\mathcal{H}(\mathfrak{g},K)} \Omega)$$

作为 H 的表示，视 F 为非阿基米德（相应地，阿基米德）而定。

证明. 我们将 $\mathcal{H}(G)$（相应地， $\mathcal{H}(\mathfrak{g}, K)$）记为 $\mathcal{H}$。设 $\mathcal{T}$ 为 Ω 的底空间。回忆

$$\mathcal{T}(\pi) = \bigcap_{T \in \mathrm{Hom}_G(\mathcal{T}, V_\pi)} \mathrm{Ker}(T).$$

考虑短正合列

$$0 \to \mathcal{T}(\pi) \to \mathcal{T} \to V_\pi \otimes_{\mathbb{C}} V_{\Theta(\pi)} \to 0.$$

在 $\mathcal{H}$ 上与 $V_\pi^\vee$ 作张量积，得到正合列

$$V_\pi^\vee \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{T}(\pi) \to V_\pi^\vee \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{T} \to V_\pi^\vee \otimes_{\mathcal{H}} V_\pi \otimes_{\mathbb{C}} V_{\Theta(\pi)} \to 0.$$

由于 $V_\pi^\vee \otimes_{\mathcal{H}} V_\pi \cong \mathrm{Hom}_G(V_\pi, V_\pi^\vee) \cong \mathbb{C}$，我们得到

$$V_\pi^\vee \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{T}(\pi) \to V_\pi^\vee \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{T} \to V_{\Theta(\pi)} \to 0.$$

若 $V_\pi^\vee \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{T}(\pi) \neq 0$，则 $V_\pi \subset \mathcal{T}(\pi)$，因为 $V_\pi^\vee \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{T}(\pi) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(V_\pi, \mathcal{T}(\pi))$，这与 $\mathcal{T}(\pi)$ 的定义矛盾。因此 $\Theta(\pi) \cong \pi^\vee \otimes_{\mathcal{H}} \Omega$。 □

对于非阿基米德赋值 v，令 $K_v = G(\mathcal{O}_v)$ 表示 $G(F_v)$ 的极大紧子群。令 χ_v 为 K_v 的特征函数（对哈尔测度作适当归一化）。因此，对于一个 F-群 G，我们将有限阿代尔上的 Hecke 代数定义为限制张量积

$$\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})) := \bigotimes_{v \in V_{\mathrm{fin}}}{}' (\mathcal{H}(G(F_v)), \chi_v),$$

其中，限制张量积取遍 F 的有限处集合 V_{fin}。按照[16, 第 7], 节，我们将阿代尔群 $G(\mathbb{A})$ 的全局赫克代数定义为

$$\mathcal{H}(G) := \mathcal{H}(G(\mathbb{A})) = \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})) \otimes \left(\otimes_{v \in V_\infty} \mathcal{H}(\mathfrak{g}_{\mathfrak{v}}, K_v)\right), \tag{7}$$

其中 V_∞ 表示 F 的无限赋值集合。已知 a$G(\mathbb{A})$-模的光滑向量构成 $\mathcal{H}(G)$ 的一个表示。

接下来，我们构造阿代尔诱导韦伊表示的底层空间。对于非阿基米德赋值 v，诱导魏尔表示可以实现在 $\mathcal{S}(W_{1,\ F_v} \times F_v^\times)$ 上，正如 [24, 第 3] 节所展示的辛-正交情形那样。固定一个 F_v-基 $\{e_1, \cdots, e_l\}$

$W_{1,\ F_v}$ 的。令 η_v 为 $\langle e_1,\ \cdots,\ e_l\rangle_{\mathcal{O}_v} \times \mathcal{O}_v^\times$ 的特征函数。于是，我们相对于这些向量定义限制张量积:

$$\Omega_{\mathbb{A}} = \bigotimes_{v\in V_{\text{fin}}}{}' (\Omega_v, \eta_v), \tag{8}$$

其中，Ω_v 是 v处的诱导魏尔表示。可以证明 $\Omega_{\mathbb{A}} \cong \mathcal{S}(W_{1,\ \mathbb{A}} \times \mathbb{A}^\times)$。对于普通全局魏尔表示，这样的构造是显式的（见 [11, §6]和[22, §8]）。

推论 4.2。设 $\pi = \otimes_v \pi_v$ 是 G的自守表示。假设每个赋值处的局部大θ提升都是不可约的，即 $\Theta(\pi_v) = \theta(\pi_v)$ 对所有 v均成立。在定理 2.2的假设下，我们有

$$V(\pi) \cong \pi^\vee \otimes_{\mathcal{H}(G)} \Omega_{\mathbb{A}}$$

作为 $H(\mathbb{A})$的表示。

证明。 由引理4.1 和定理2.2可得。 □

5 全局 Jacquet–Langlands 对应中的张量积

本节中，我们固定一个数域 F上的四元数除代数 D。令 nrd 为由 $\text{nrd}(x) = x \cdot \bar{x}$ 定义的约化范数，并令 $\text{tr}^{D/F}$为由 $\text{tr}(x) = x + \bar{x}$给出的迹。

固定一个非阿基米德赋值 v 属于 F，并考虑四元数情形，其中 $V = V_1$且 $W = W_2$，如例3.3所述。我们有 $V_1 \cong D$ 以及 $W_2 = Df_1 \oplus Df_2$，其中（$f_1,\ f_2$）$= 1$且（$f_i,\ f_i$）$= 0$。因此，$\text{U}(V_1) \times \text{U}(W_2)$ 的 Weil 表示可以实现在 $\mathcal{S}(D$ 上的施瓦茨–布吕阿函数空间 D 中，如下所示。

1. $\underline{\text{U}(V_1)}$。等距群和相似群为

$$\text{U}(V_1) \cong D^1 \text{ and } \text{GU}(V_1) \cong D^\times.$$

对于 $g \in \text{U}(V_1)$ 和 $\phi \in \mathcal{S}(D)$，我们有

$$(\omega_\psi(g)\phi)(x) = \phi(g^{-1}x).$$

2. $\underline{\text{U}(W_2)}$. 回顾一下，$\text{U}(W_2)$由 $\text{End}_D(W_2)$ 中保持内积 $(,)$ 的元素构成。相对于基 f_1, f_2，我们可以将 $h \in \text{U}(W_2)$ 表示为$\begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,}h_{2\,1} \\ h_{2\ 1} & h_{2\ ,,2} \end{pmatrix}$，其中 $h_{i,j} \in D$。我们还可以进一步证明，$\text{U}(W_2)$ 在 W_2 上的作用可以表示为如下形式的元素 $(d, \begin{pmatrix} a_{1,\ \ 1} & a_{1\,2\ ,,,2} \\ a_{2\,1} & a_2 \end{pmatrix})$ $\in D^\times \times \text{GL}(2, F_v)$，其作用方式为

$$(d, \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}) f_1 = d(a_{1,1} f_1 + a_{1,2} f_2),$$
$$(d, \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}) f_2 = d(a_{2,1} f_1 + a_{2,2} f_2).$$

我们得到

$$\mathrm{U}(W_2) \cong \{(d, a) \in D^\times \times \mathrm{GL}(2, F_v) \mid \mathrm{nrd}(d) \det(a) = 1\} / \{(z, z^{-1}) \mid z \in F_v^\times\},$$

and

$$\mathrm{GU}(W_2) = \mathrm{GO}_{1,1}^* \cong (D^\times \times \mathrm{GL}(2, F_v)) / \{(t, t^{-1}) \mid t \in F_v^\times\}.$$

由于布鲁哈特分解表明，形如 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$（$a \in D^\times$ 和 $n \in D$）的元素生成 $\mathrm{U}(W_2)$，因此只需定义它们的作用。

(a) $(\omega_\psi(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a}^{-1} \end{pmatrix})\phi)(x) = \mathrm{nrd}(aa^*)^{1/2} \phi(xa)$;

(b) $(\omega_\psi(\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\phi)(x) = \psi(\frac{\mathrm{tr}_{D/F}(\mathrm{nrd}(x)n)}{2})\phi(x)$;

(c) $(\omega_\psi(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})\phi)(x) = \lambda_\psi \int_D \phi(y)\psi(\mathrm{tr}_{D/F}(x\overline{y}))\,\mathrm{d}y$, where λ_ψ is a constant depending on ψ and the Haar measure on D.

现在我们利用施瓦茨–布鲁哈特空间，明确描述与相似对偶对相关的诱导魏尔表示 Ω 的底层空间（见（6））。我们固定相似对偶对的如下记号：

$$G = \mathrm{GU}(V_1) = \mathrm{GSp}_{1,0} \cong D^\times,$$
$$H = \mathrm{GU}(W_2) = \mathrm{GO}_{1,1}^* \cong (D^\times \times \mathrm{GL}(2, F))/\{(t, t^{-1}) \mid t \in F^\times\}.$$

根据命题3.4，Ω 作用在空间

$$V_\Omega = \{f \colon G \to \mathcal{S}(D) \mid f(g_1 g) = \omega(g_1) f(g) \text{ for all } g_1 \in G_1,\ g \in G\}.$$

定义线性映射

$$\Phi \colon V_\Omega \to \mathcal{S}(D \times F^\times)$$

by

$$\phi_f(x, y) = f(d(y)^{-1} x),$$

对于 $f \in V_\Omega$ 和 $(x, y) \in D \times F^\times$。

对于 $t \in F_v^\times$，令 $d(t)$ 为属于 G 或 H 的相似因子，使得 $\lambda(d(t)) = t$。$G \times H$ 作用可描述如下。

1. 对于 $g \in G_1 = D^1$，我们令

$$\Omega(g, 1)\phi(x, y) = |\lambda_G(g)|^{1/2} \phi(g^{-1}x, \lambda_G(g) y),$$

其中 $g^{-1}x$ 表示在 $x \in D$ 上由 g^{-1} 给出的左平移。

2. 对于 $h \in \mathrm{U}(W_2)$，我们记

$$\Omega(1,h)\phi(x,y) = (\omega_\psi(1,h^t)\phi_t)(x),$$

其中，h^t 表示 h 关于相似因子 $d(t)$ 的共轭元，而 $\phi_t \in \mathcal{S}(D)$ 由 $\phi_t(x) = \phi(x,\ t)$ 给出。

3. 对于满足 $s \in F_v^\times$ 的相似因子 $d(s) \in H$，我们记

$$(\Omega(1,d(s))\phi)(x,t) = \phi(x,s^{-1}t).$$

4. 对于一般的 $h \in H$，我们可以将其写成 $h = d(s)h_1$，其中 $h_1 \in \mathrm{U}(W_2)$，且 $d(s)$ 表示满足 $s = \lambda_H(h)$ 的相似因子。我们记

$$\Omega(1,h) = \Omega(1,d(s))\Omega(1,h_1).$$

因此，我们在 [24,第 3] 节的辛正交情形中，为 Ω 得到了一个具体模型。

引理 5.1。映射 $\Phi\colon\ V_\Omega \to \mathcal{S}(D \times F^\times)$ 是一个 $G \times H$-等变同构。

接下来，我们记录局部群 $G(F_v)$ 的不可约表示的相似大 theta 提升的不可约性。

命题 5.2. 对于上述相似对偶对 (G,H)，对每个赋值 v 以及每个 $\pi_v \in \mathrm{Irrep}(G(F_v))$，有

$$\Theta(\pi_v) \cong \theta(\pi_v),$$

因此 $\Theta(\pi_v)$ 不可约。

证明。首先，考虑等距群的对偶对 (G_1,H_1)。对于 $G(F_v)$ 的不可约表示 π_v，我们可写为

$$\pi_v|_{G_1(F_v)} \cong \bigoplus_{i\in I} \sigma_i$$

这是 $G_1(F_v)$ 的不可约表示的分解，其中 I 是有限集。注意，(G,H) 构成稳定范围内的对偶对（就等距子群而言），且 G 是较小的一方。根据 [18, 定理 A] 和 [3, 推论 7.3],，大 theta 提升是不可约的：$\Theta_\psi(\sigma_i) = \theta_\psi(\sigma_i)$，对 $\sigma_i \in \mathrm{Irrep}(G_1(F_v))$ 均成立，在阿基米德情形和非阿基米德情形下皆如此。由 [7, 引理 2.2(iii)],，我们得出 $\Theta(\pi_v) = \theta(\pi_v)$。 □

我们简要回顾 Jacquet 和 Langlands 于 [15] 开创的 Jacquet–Langlands 对应。我们采用 Badulescu 最近提出的方法（见 [1]）。

令 Z 为 G的中心，因此 $Z \cong \mathbb{G}_m$。对于一个在 $Z(F)$ 上平凡的酉特征 $\chi\colon\ Z(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$，定义 $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})\ \chi)$ 为满足以下条件的函数空间 $f\colon\ G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$

$$f(\gamma z g) = \chi(z)f(g) \quad \text{for } z \in Z(\mathbb{A}),\ \gamma \in G(F),\ g \in G(\mathbb{A}),$$

and

$$\int_{G(F)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} |f(g)|^2 \, \mathrm{d}g < \infty.$$

令 R_χ 表示 $G(\mathbb{A})$ 在 $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}), \chi)$ 上的准正则表示。当 D 为非分裂时，商空间 $G(F)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$ 是紧的，因此 R_χ 离散分解为 $G(\mathbb{A})$ 的不可约表示。令 $\mathrm{Irrep}_{\mathcal{A}}(G, \chi)$ 表示 $G(\mathbb{A})$ 的自守表示等价类集合，即 R_χ 的不可约子表示。

对于群 GL(2)，相应的准正则表示分解为离散谱和连续谱。令 $\mathrm{Irrep}_{\mathcal{A},\,\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}(2), \chi)$ 表示中心特征为 χ且包含在离散谱中的 $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ 不可约表示的等价类集合。根据 [1, 定理 5.1]，存在两个单射：

- 对每个赋值 v，都有 局部 ***Jacquet–Langlands*** 对应 $\mathrm{JL}_v : \mathrm{Irrep}(G(F_v)) \to \mathrm{Irrep}(\mathrm{GL}(2, F_v))$；
- 全局 ***Jacquet–Langlands*** 对应 $\mathrm{JL}: \mathrm{Irrep}_{\mathcal{A}}(G, \chi) \to \mathrm{Irrep}_{\mathcal{A},\,\mathrm{dis}}$，满足：若 $\pi \in L^2_{\mathrm{c}}(\mathrm{GL}(2), \chi)$ $\mathrm{JL}(\otimes_v \pi_v) = \otimes_v \pi'_v$，则对每个赋值 v，$\mathrm{JL}_v(\pi_v) = \pi'_v$。

已知 $G(F_v)$ 与 $\mathrm{GL}(2, F_v)$ 在除有限多个赋值外的所有赋值上同构，且 JL_v 在这些赋值处为恒等映射。

全局 Jacquet–Langlands 对应通常针对酉表示来表述。因此，对于可酉化光滑表示 π，我们也用 π 表示其酉完备化；在酉范畴中工作时，我们将对偶表示 $\pi^\vee$ 替换为希尔伯特空间对偶 π^*。对于在（8）中定义的整体诱导 Weil 表示 $\Omega_{\mathbb{A}}$，已知

$$\Omega_{\mathbb{A}} \cong \mathcal{S}(D(\mathbb{A}) \times \mathbb{A}^\times)$$

由引理 5.1。因此，对于其完备化 $\Omega_{\mathbb{A}}$，有

$$\overline{\Omega_{\mathbb{A}}} \cong L^2(D(\mathbb{A}) \times \mathbb{A}^\times).$$

回忆一下，$\mathcal{H}(G)$ 表示在（7）中定义的全局赫克代数。

定理 5.3。设 $G = D^\times$，令 $\mathcal{H}(G)$ 为上面定义的 G 的全局 ***Hecke*** 代数。设 π 是 $G(\mathbb{A})$ 的不可约自守表示，其中心特征为 χ。则

$$\pi^\vee \otimes_{\mathcal{H}(G)} \mathcal{S}(D(\mathbb{A}) \times \mathbb{A}^\times) \cong \pi \otimes \mathrm{JL}(\pi) \tag{9}$$

作为 $D^\times(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$上的光滑表示。特别地，

$$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}), \chi) \otimes_{\mathcal{H}(G)} L^2(D(\mathbb{A}) \times \mathbb{A}^\times) \cong \bigoplus_{\pi \in \mathrm{Irrep}_{\mathcal{A}}(G, \chi^{-1})} \pi \otimes \mathrm{JL}(\pi). \tag{10}$$

证明。取 $\pi \in \mathrm{Irrep}_{\mathcal{A}}(G, \chi)$，并考察其到 H 的大 theta 提升 $V(\pi)$。由于对偶对 (G, H)（或者等价地，等距群对 $(\mathrm{U}(V_1), \mathrm{U}(W_2))$）处于稳定范围，且 G 是较小的一员，$V(\pi)$ 非零，并根据 [4, 命题 3.2] 是尖点（另见 [23, 定理 I.1.1]）。

根据定理 2.2，有 $V(\pi) \cong \otimes_v \theta(\pi_v)$。注意，对除有限多个赋值 v 之外的所有赋值，F 都是分裂的。对于这样的赋值 v，有

$$H(F_v) \cong (\mathrm{GL}(2, F_v) \times \mathrm{GL}(2, F_v))/\{(t, t^{-1}) \mid t \in F_v^\times\}.$$

因此，局部 theta 提升在分裂处给出 $\theta(\pi_v) \cong \pi_v \otimes \pi_v$。

假设尖点表示 π', π'' 的 $D^\times(\mathbb{A})$ 和 $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ 分别满足 $\theta(\pi) = \pi' \otimes \pi''$。那么，$\pi'_v \cong \pi_v$，且在分裂处 $\pi''_v \cong \pi_v$。根据强重数一定理[21] 和全局 Jacquet–Langlands 对应 [1, 定理 5.1], ，我们得到

$$\pi'_v \cong \pi_v \quad \text{and} \quad \pi''_v \cong \mathrm{JL}_v(\pi_v) \quad \text{for all } v.$$

等价地，$\theta(\pi) \cong \pi \otimes \mathrm{JL}(\pi)$。

根据命题 5.2，我们有 $\Theta(\pi_v) = \theta(\pi_v)$ 对每个 v。那么推论 4.2 给出 $\pi^\vee \otimes_{\mathcal{H}(G)} \Omega_{\mathbb{A}} \cong \pi \otimes \mathrm{JL}(\pi)$。最终的分解由 $(\mathbb{A})$ 的重数一定理得出（见 [1,定理 5.1]）。 □

注记 5.4。注意到，空间 $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ 按中心特征分解为

$$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) = \int^{\oplus}_{\widehat{Z(F)\backslash Z}(\mathbb{A})} L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}), \chi)\, \mathrm{d}\chi.$$

于是定理 5.3表明

$$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) \otimes_{\mathcal{H}(G)} L^2(D(\mathbb{A}) \times \mathbb{A}^\times) = \int^{\oplus}_{\widehat{Z(F)\backslash Z}(\mathbb{A})} \left(\bigoplus_{\pi \in \mathrm{Irrep}_{\mathcal{A}}(G,\chi)} \pi \otimes \mathrm{JL}(\pi) \right) \mathrm{d}\chi.$$

参考文献

[1] A. I. Badulescu. 整体 Jacquet-Langlands 对应、重数一与自守表示的分类. *Invent. Math.*, 172(2):383–438, 2008. 附 Neven Grbac 所撰附录.[2] P. Baki´c, W. T. Gan 与 G. Savin. 相似特征 theta 对应.*Rad Hrvat. Akad. Znan. Umjet. Mat. Znan.*, 28(558):193–222, 2024年.[3] R. Chen 与 J. L. Zou. 大 theta 在一般情形下等于小 theta. *Acta Math. Sin.(Engl. Ser.)*, 40(3):717–730, 2024年.[4] W. T. Gan. 自守形式与θ对应. 载于 自守形式之外 GL_2, 第279卷, *Math. Surveys Monogr.*, 第59–112页. 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, [2024]©2024年.[5] W. T. Gan 与 G. Savin. 论极小表示的定义与性质.*Represent. Theory*, 9:46–93, 2005.[6] W. T. Gan 与 B. Sun. Howe 对偶猜想: 四元数情形. 载于表示论、数论与不变理论, 第323卷, *Progr. Math.*, 第175–192页. Birkh¨auser/施普林格, Cham, 2017.[7] W. T. Gan 与 S. Takeda. GSp(4) 的局部 Langlands 猜想. *Ann. of Math.(2)*, 173(3):1841–1882, 2011.

[8] W. T. Gan 和 S. Takeda。Howe 对偶猜想的证明。《美国数学会杂志》，29(2):473–493，2016年。[9] W. T. Gan 和 W. Tantono。GSp(4) 的局部 Langlands 猜想，II：内形式的情形。《美国数学杂志》，136(3):761–805，2014年。[10] J. R. Getz 和 H. Hahn。自守表示导论——兼论迹公式，数学研究生教材第300卷。施普林格，Cham，[2024] ©2024年。[11] M. Goffeng、B. Mesland 和 M. H. Sengun。通过群 c*-代数的 θ对应，2024年。[12] M. Harris 和 S. S. Kudla。GSp(2) 的非全纯离散系列的算术自守形式。《杜克数学杂志》，66(1):59–121，1992年。[13] R. Howe。 θ-级数与不变理论。载于《自守形式、表示与L函数》（纯数学专题讨论会论文集，俄勒冈州立大学，科瓦利斯，俄勒冈州，1977年），第1部分，纯数学专题讨论会论文集第XXXIII卷，第275–285页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1979年。[14] R. Howe。超越经典不变量理论。美国数学会杂志，2(3):535–552，1989。[15] H. Jacquet 和 R. P. Langlands。GL(2) 上的自守形式。数学讲义，第114卷。施普林格出版社，柏林-纽约，1970年。[16] A. W. Knapp。Langlands 纲领导论。载于《表示论与自守形式》（爱丁堡，1996年），纯数学专题讨论会论文集第61卷，第245–302页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1997年。[17] A. W. Knapp 和 D. A. Vogan, Jr. 上同调诱导与酉表示，普林斯顿数学丛书第45卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1995年。[18] H. Y. Loke 和 J. Ma。局部 θ 提升的不变量与 K谱。《组合数学》，151(1):179–206，2015年。[19] H. Y. Loke 和 T. Przebinda。大 theta，2024年。[20] C. Mœ glin、M.-F. Vign´eras 和 J.-L. Waldspurger。非 p阿基米德域上的 Howe 对应，数学讲义第1291卷。施普林格出版社，柏林，1987年。[21] I. I. Piatetski-Shapiro。重数一定理。载于《自守形式、表示与 L函数》（纯数学专题讨论会论文集，俄勒冈州立大学，科瓦利斯，俄勒冈州，1977年），第1部分，纯数学专题讨论会论文集第XXXIII卷，第209–212页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1979年。[22] D. Prasad。Weil 表示、Howe 对偶与θ对应。载于《theta 函数：从经典到现代》，CRM 会议录讲义第1卷，第105–127页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1993年。[23] S. Rallis。关于 Howe 对偶猜想。《组合数学》，51(3):333–399，1984年。[24] B. Roberts。相似变换的θ对应。《以色列数学杂志》，94:285–317，1996年。[25] J.-L. Waldspurger。D´emonstration d’une conjecture de dualit´e de Howe dans le cas

p-阿代克，$p \neq 2$。见《*I. I. Piatetski-Shapiro* 六十寿辰纪念文集》第一部分（拉马特阿维夫，*1989*），第 2 卷，以色列数学会议论文集，第 267–324 页。魏茨曼，耶路撒冷，1990 年。[26] N.R.Wallach。《实约化群》第一卷，第 132 卷，纯数学与应用数学。学术出版社，马萨诸塞州波士顿，1988 年。

电子邮件地址: junyang@fas.harvard.edu地址: 哈佛大学,
美国马萨诸塞州剑桥，邮编 02138