arXiv:2602.08103v1 [math.MG] 8 Feb 2026

算子多胞体、算子带状体与非交换拟阵

Eliza O'Reilly† 和 Venkat Chandrasekaran‡ *

†约翰斯·霍普金斯大学应用数学与统计系，巴尔的摩，马里兰州 21218

‡ 加州理工学院计算与数学科学系、电气工程系，帕萨迪纳，加利福尼亚州 91125

2026年2月10日

摘要

我们研究一类称为 *operatopes* 的凸体，它们由算子范数球的仿射像取闵可夫斯基和得到。这一概念推广了佐诺多胞体的概念，后者是线段的闵可夫斯基和。令线段的数量趋于无穷，可得到一类称为带状体的凸体，它们也可以视为随机线段的期望。基于这一解释，我们类似地将 *operanoids* 定义为算子范数球的随机仿射像的期望。研究算子范数球的维数增大时算子带状体的性质，我们发现了一种新的凸体极限渐近区间。由此得到更一般的一类称为*noncommutative zonoids*的凸体，并运用自由概率论的框架展示其基本性质与实例。最后，我们探讨算子带状体和非交换拟阵在统计学与随机过程中的应用。

关键词： 凸体逼近、提升 zonotope、闵可夫斯基类、非交换概率、随机矩阵、带状体

数学主题分类： 主要分类 52A21；次要分类 52A23、52A22、46L53

1 引言

zonotope 是若干线段的有限闵可夫斯基和。佐诺多胞体及其极限（称为 *zonoids*）是重要的凸体族，广泛出现于数学的众多领域。在多面体组合学中，佐诺多胞体代表一类多面体，尽管其顶点和面可能多达指数级数量，却仍可用简洁的方式描述 [25, 41]。在统计学中，带状体为高维数据提供了有用的几何概括[26]。在随机几何中，带状体刻画了随机超平面镶嵌的基本性质[18]。更广泛地说，佐诺多胞体也已被证明有助于开发适用于各类工程问题的实用方法和算法 [1, 2, 5, 14]。尽管应用广泛，佐诺多胞体的一个基本局限在于其多面体性，这限制了它们在需要用边界结构更丰富的凸体来建模相关现象的场景中的用途。带状体通常并非多面体，但我们尚无一种良好的、有限参数化的方式来描述任意带状体，而且难以判断一个一般凸体是否为带状体（这就是所谓的带状体问题 [7]）。

1.1 我们的贡献

本文介绍一种有限参数化但非多面体的佐诺多胞体推广，称为算子多胞体。形式上， *m-operatope* 是空间

*电子邮件： eoreilly@jhu.edu,venkatc@caltech.ed u

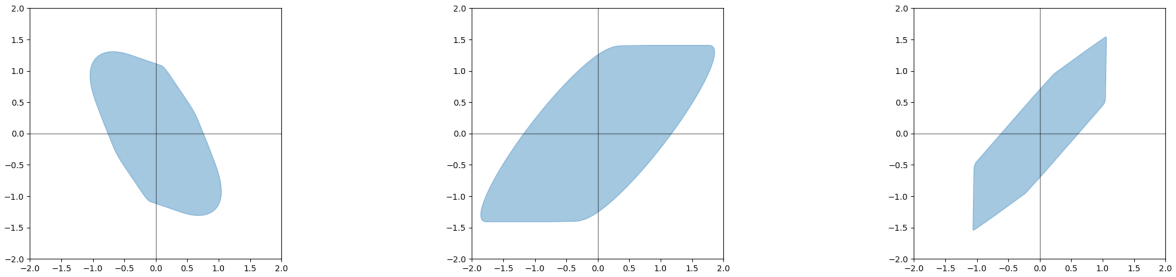


图 1: 3-算子多胞体 在 $\mathbb{R}^2$ 中，算子多胞体仅有一个加项，且参数矩阵取自高斯正交系综 .

$m \times m$ 厄米矩阵 $\mathbb{H}^m$中算子范数球的有限个仿射像的闵可夫斯基和。对于 $m = 1$，相应的算子范数球等于线段 $[-1, 1]$，因此 1-算子多胞体对应于佐诺多胞体。然而，对于较大的 m， m-算子多胞体通常可能是非多面体的。例如， d 维欧几里得球显然不是佐诺多胞体，但它是一个（$d + 1$）-算子多胞体。图 1 给出了其他例子。仿照带状体的定义，如果一个凸体可以在豪斯多夫度量下由 m-算子多胞体逼近，我们就称它为 m-*operanoid*。原则上，也可以考虑由算子范数球的仿射像以外的基本对象构成的闵可夫斯基和（见第 1.2 节），以获得佐诺多胞体的其他非多面体推广。然而，正如下文所述，算子多胞体和算子带状体因若干原因而值得研究。具体而言，算子带状体为带状体提供了一种自然的“随机矩阵”推广，因为它们便于对随机矩阵组进行凸几何概括，这与带状体概括随机向量的方式十分相似。此外，我们对算子多胞体和算子带状体的定义引入了参数 m，由此开启了研究凸体极限的全新渐近区间 $m \to \infty$；这一渐近区间在佐诺多胞体和带状体中并不存在。分析这些极限需要新的视角；与研究尺寸不断增大的随机矩阵的极限一样，非交换概率理论提供了所需的工具。

在第 2 节中，我们正式定义运算多面体和算子带状体，并从概率和泛函分析视角给出算子带状体的几种等价刻画。这些刻画推广了带状体的相应刻画。特别地，Vitale [38] 证明，一个关于原点中心对称的凸体 Z 是 $\mathbb{R}^d$ 中的带状体，当且仅当其支撑函数 h_Z 可以表示如下：

$$h_Z(u) = \mathbb{E}[|\langle u, X\rangle|], \quad u \in \mathbb{S}^{d-1}$$

其中， X 是 $\mathbb{R}^d$中的随机向量。换言之，带状体是以原点为中心的随机线段的期望值。[1] 我们在定理 2 中推广了这一结果，证明了一个关于原点对称的 *operanoid*，等价地可以定义为算子范数球的随机线性像的期望值。定理 3 中的这一刻画又给出了定义算子带状体的另一种方式，它推广了基于 L_1 [6]子空间的带状体描述。本节最后，我们将举例说明由维格纳和威沙特随机矩阵等重要随机矩阵系综导出的算子带状体和运算多面体。

第 3 节基于第 2 节介绍的不同刻画，展示算子带状体的各种性质。具体而言，我们给出 $\mathbb{R}^3$ 中不是带状体的 2- 算子多胞体示例，并进一步讨论算子带状体与一般对称凸体之间的关系。我们还在命题 5 中证明，算子带状体的面本身也必须是算子带状体。最后，我们在定理 8 中给出精确的速率，量化算子带状体可由运算多面体逼近到何种程度；这推广了关于用 zonotope 逼近分圆体 [8] 的一项结果。

正如前文所强调的，我们对算子体的定义引出了研究凸体极限的 $m \to \infty$ 情形。为便于开展这项研究，我们在第4节考虑 C^*-概率空间中的非交换随机变量组，并定义一类称为 *noncommutative zonoids* 的凸体，其支撑函数由迹态作用于非交换变量线性组合后的结果来确定；非交换概率的预备知识见第 4.1 节。当底层的非交换随机变量自由独立时，所得的非交换拟阵称为 *free zonoid*。我们在命题 25 中证明，任意自由 zonotope 都可以在豪斯多夫度量下由一列 m-算子体逼近，其中 $m \to \infty$。

在第5节中，我们通过展示算子带状体在两种情境中的作用，初步探讨其应用。首先，我们推广提升 zonotope 的概念，利用算子带状体和非交换带状体构造高维数据分布的凸几何摘要。其次，我们说明算子带状体可以描述随机超曲面模型的某些几何性质，这与随机超平面镶嵌的带状体刻画类似。

[1]随机凸体的期望值定义为一个确定性凸体，其支撑函数由随机支撑函数的期望值 [3] 给出。

1.2 相关工作

为讨论我们的工作与以往文献之间的关系，回顾凸几何中的一些概念会很有帮助 [29]。 *Minkowski class* 在 $\mathbb{R}^d$ 中的凸体是指由凸体构成的非空集合，且在闵可夫斯基加法和伸缩运算下封闭。对于 $\mathbb{R}^d$上仿射变换的一个子集 G，若 $\mathcal{M}$ 蕴含 $gK \in \mathcal{M}$，则称闵可夫斯基类 $\mathcal{M}$ 是 G不变的，其中 $K \in \mathcal{M}$，且对任意 $g \in G$均成立。由此得到以下定义：对于 $\mathbb{R}^d$ 中的凸体集合 $\mathcal{K}$ 以及 $\mathbb{R}^d$的仿射变换群的子集 G，
G-invariant Minkowksi class generated by $\mathcal{K}$ 是由如下形式的凸体构成的集合

$$t_1 g_1 K_1 + \cdots t_n g_n K_n, \text{ where } n \in \mathbb{N} \text{ and } t_i \geq 0,\ g_i \in G,\ K_i \in \mathcal{K} \text{ for all } i = 1, \ldots, n,$$

及其关于豪斯多夫度量的极限。

先前研究中的若干类凸体可以视为闵可夫斯基类的特例。带状体是最小的非平凡仿射不变闵可夫斯基类，也就是说，它由线段生成。其他仿射不变闵可夫斯基类的例子包括多圆体 [17]，（研究亚历山德罗夫–芬切尔不等式的极值时曾考虑过它们），以及 discotopes [13] （它们是椭球的闵可夫斯基和）。Discotopes 是带状体，但多圆体通常不是带状体。

算子带状体也构成一类特殊的仿射不变凸体闵可夫斯基类。具体而言，令 $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$ 为算子范数球在 $\mathbb{H}^m$ 中的所有仿射像的集合，则 $\mathbb{R}^d$ 中的 m-算子带状体恰好是相对于该 $\mathcal{K}$ 的关联闵可夫斯基类。

1.3 符号与术语

我们令 $\mathbb{V}$ 表示一个配备内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的欧几里得空间，并分别用 $\mathbb{S}(\mathbb{V})$ 和 $B(\mathbb{V})$ 表示 $\mathbb{V}$ 的单位球面和单位球。简记 $\mathbb{S}^{d-1} := \mathbb{S}(\mathbb{R}^d)$ 和 $B^d := B(\mathbb{R}^d)$ 分别表示 $\mathbb{R}^d$ 中的单位球面和单位球。非空紧凸集 $K \subset \mathbb{V}$ 称为凸体。[2] $\mathbb{V}$ 中所有凸体组成的集合记为 $\mathcal{K}(\mathbb{V})$，简记 $\mathcal{K}^d := \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的所有凸体。下文主要关注中心对称凸体，即满足如下性质的 $K \in \mathcal{K}(\mathbb{V})$：存在某个中心 $c \in \mathbb{V}$，使得 $K - c = -(K - c)$。中心对称凸体构成 $\mathcal{K}(\mathbb{V})$ 的一个闭子集。凸体 $K \in \mathcal{K}(\mathbb{V})$ 的*support function* 记为 $h_K : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$，定义如下：

$$h_K(u) := \max_{x \in K} \langle u, x \rangle.$$

凸体的支撑函数是次线性的，即 $h_K(\alpha u) = \alpha h_K(u) \quad \alpha \geq 0 \quad h(u+\omega) \leq h_K(u) + h_K(\omega)$ 对于 和 ，且每个次线性函数也都是某个凸体的支撑函数。特别地，支撑函数可以唯一确定凸体。

凸体集合的许多性质及其上的运算都可以用其支撑函数来描述。凸体 *Hausdorff metric* 与 $K, L \in \mathcal{K}(\mathbb{V})$ 之间的

$$d_H(K, L) := \max_{u \in S(\mathbb{V})} |h_K(u) - h_L(u)|,$$

并且，配备度量 d_H 的 $\mathcal{K}(\mathbb{V})$ 是一个完备度量空间 [29]。两个凸体 $K, L \in \mathcal{K}(\mathbb{V})$ 的 *Minkowski sum* 定义为 $K + L = \{x + y \in \mathbb{V} \mid x \in K, y \in L\}$，而 $K + L$ 的支撑函数是支撑函数之和，即 $h_{K+L}(u) = h_K(u) + h_L(u)$。关于凸体几何的更多背景知识，请参阅标准参考文献 [29]。

下文将采用 *random convex body* in $\mathbb{V}$的概念，它是从概率空间 Ω 到 $\mathcal{K}(\mathbb{V})$的可测映射Z。在欧几里得范数 $\|\cdot\|_2$ on $\mathbb{V}$满足假设 $\mathbb{E}[\max_{z \in Z} \|z\|_2] < \infty$ 的条件下，支撑函数 $\mathbb{E}[h_Z(u)]$ 的期望是一个定义良好的次线性函数，因此也是某个凸体的支撑函数。随后，我们将 *expectation of* Z 定义为支撑函数为

$$h_{\mathbb{E}[Z]}(u) := \mathbb{E}[h_Z(u)].$$

最后，厄米特 $m \times m$ 矩阵构成的欧几里得空间记作 $\mathbb{H}^m$。任意 $A \in \mathbb{H}^m$ 的 *operator norm* $\|A\|_{op}$ 是 A的最大奇异值。 $\mathbb{H}^m$ 上算子范数的单位球表示为

$$B_\infty(\mathbb{H}^m) := \{A \in \mathbb{H}^m : \|A\|_{op} \leq 1\}.$$

任意 $A \in \mathbb{H}^m$ 的 *trace (or nuclear) norm* $\|A\|_1$ 由 A 的奇异值之和给出。算子范数球 B_∞ 的支撑函数为 $h_{B_\infty}(A) = \|A\|_1$，其中 $A \in \mathbb{H}^m$。线性映射 $\mathcal{A}: \mathbb{H}^m \to \mathbb{R}^d$ 由一个 d 元矩阵组 $A_1, \ldots, A_d \in \mathbb{H}^m$ 确定，因此对于 $X \in \mathbb{H}^m$，有 $\mathcal{A}(X) = (\langle A_1, X \rangle, \ldots, \langle A_d, X \rangle)$

[2]在一些文献中，凸体还被要求具有非空内部，并且原点属于内部。此处我们不作这些假设。

对于 $u \in \mathbb{R}^d$，其伴随算子由 $\mathcal{A}^\star u = \sum_{i=1}^d u_i A_i$ 给出。因此， $\mathcal{A}(B_\infty)$ 的支撑函数为

$$h_{\mathcal{A}(B_\infty)}(u) := h_{B_\infty}(\mathcal{A}^\star u) = \left\| \sum_{i=1}^d u_i A_i \right\|_1 .$$

2 算子多胞体与算子带状体

本节将正式介绍并研究算子多胞体与算子带状体的性质。第2.1节给出这些对象的定义。我们还将在第2.1节推导算子带状体的若干等价刻画，与带状体已有的相关刻画相对应。第 2.2 节将介绍由各种随机矩阵系综导出的算子带状体示例，并在第4节重新讨论这些示例。

2.1 定义

正如我们在第1节中所述，算子多胞体类似于佐诺多胞体，而算子带状体则通过对算子多胞体取极限得到。下面给出形式化定义。

定义 1 *A centrally symmetric convex body Z in $\mathbb{R}^d$ that is the finite Minkowski sum of affine images of the operator norm ball in $\mathbb{H}^m$ is called an m-operatope. Equivalently an m-operatope Z in $\mathbb{R}^d$ is a convex body with support function of the following form:*

$$h_Z(u) = \langle v, u \rangle + \sum_{j=1}^N \left\| \sum_{i=1}^d u_i A_i^{(j)} \right\|_1 , \quad u \in \mathbb{S}^{d-1},$$

for some $N \geq 1$ and $A_1^{(j)}$、.....、$A_d^{(j)} \in \mathbb{H}^m$ for $j = 1$、.....、N and $v \in \mathbb{R}^d$. If Z is centered at the origin、$v = 0$. A centrally symmetric convex body Z in $\mathbb{R}^d$ is an m-operatope if it is the limit in the Hausdorff sense of m-operatopes. then 算子带状体 ,,

我们注意到，1-算子多胞体是带状体，类似地，1-算子带状体也是带状体。接下来，我们描述由 2×2 实对称矩阵定义的 $\mathbb{R}^d$ 中 2-算子多胞体的结构；也就是说，上述定义中的矩阵 $A_1^{(j)}, \ldots, A_d^{(j)}$ 都是 2×2 实对称矩阵。在这种情况下，我们可以直接计算相关特征值，从而得到支撑函数的一般形式。具体而言，这类 2-算子多胞体是凸体的闵可夫斯基和，其支撑函数对某些向量 $a, b, c \in \mathbb{R}^d$ 具有以下形式：

$$h(u) = \left\| \sum_{i=1}^d u_i A_i \right\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^d u_i a_i & \sum_{i=1}^d u_i b_i \\ \sum_{i=1}^d u_i b_i & \sum_{i=1}^d u_i c_i \end{bmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} \langle u, a \rangle & \langle u, b \rangle \\ \langle u, b \rangle & \langle u, c \rangle \end{bmatrix} \right\|_1 .$$

上述矩阵的特征值为

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\langle u, a+c \rangle}{2} \pm \sqrt{\frac{\langle u, a-c \rangle^2}{4} + \langle u, b \rangle^2},$$

因此，矩阵 2×2 空间中算子范数球的这个线性像，其支撑函数必定具有以下形式

$$\begin{aligned} h(u) = |\lambda_1| + |\lambda_2| &= \left| \frac{\langle u, a+c \rangle}{2} + \sqrt{\frac{\langle u, a-c \rangle^2}{4} + \langle u, b \rangle^2} \right| + \left| \frac{\langle u, a+c \rangle}{2} - \sqrt{\frac{\langle u, a-c \rangle^2}{4} + \langle u, b \rangle^2} \right| \\ &= \max \left\{ |\langle u, a+c \rangle| , \sqrt{\langle u, a-c \rangle^2 + \langle u, 2b \rangle^2} \right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

总而言之，由实对称矩阵指定的 2-算子多胞体，是线段与二维圆盘的凸包的闵可夫斯基和。正如我们将在第3.2节中看到的， $\mathbb{R}^3$ 中存在不是带状体的 2-算子多胞体（见图 4）。

即使对于可能是带状体的算子多胞体，算子多胞体表示法也有一些优势。例如，椭球是带状体，但由于它不是多胞体，因此无法在这一类中将其有限参数化为佐诺多胞体。另一方面， $\mathbb{R}^d$ 中的椭球是 $(d+1)$-运算多面体，因此可以通过算子范数球的线性像进行有限参数化。更具体地，设 $C \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ，并考虑 $\mathbb{R}^d$ 中的凸体，其支撑函数具有如下形式： $h_K(u) = \|Cu\|_2$；这是一个以原点为中心的 $\mathbb{R}^d$ 中的椭球。定义 A_1， ... ， $A_d \in \mathbb{H}^{d+1}$ 使得

$$\sum_{i=1}^d u_i A_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & & & (Cu)_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & (Cu)_d \\ (Cu)_1 & \cdots & (Cu)_d & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

令 $\mathcal{A}\colon \mathbb{H}^{d+1} \to \mathbb{R}^d$ 表示满足 $\mathcal{A}(X) = (\langle A_1, X\rangle, \cdots, \langle A_d, X\rangle)$ 的线性像，

$$h_{\mathcal{A}(B_\infty)}(u) = \left\|\sum_{i=1}^d u_i A_i\right\|_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\begin{bmatrix} (Cu)_1^2 & & (Cu)_1(Cu)_d & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ (Cu)_d(Cu)_1 & & (Cu)_d^2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{i=1}^d (Cu)_i^2 \end{bmatrix}} = \|Cu\|_2. \tag{3}$$

因此，椭球是算子范数球的线性像的例子。更一般地，椭球的有限闵可夫斯基和（称为 *discotopes* [13]）也是算子多胞体。

正如我们在引言中所提到的，根据 Vitale [38] 的一个结果，带状体可以描述为随机线段的期望。这里我们将这一结果加以推广，以表明算子带状体同样可以描述为一个算子范数球的随机线性像的期望，而我们的证明紧密遵循 [38] 中关于带状体的定理 3.1 的证明。

定理 2. *A centrally symmetric convex body Z in $\mathbb{R}^d$ centered at the origin is an m-operanoid if and only if the support function of Z is of the form:*

$$h_Z(u) = \mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^d u_i A_i\right\|_1\right],$$

for some d-tuple of random matrices $A_1, \ldots,$ A_d in $\mathbb{H}^m$ with $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^d \|A_i\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty$.

Proof. 对于正向蕴含，首先考虑 m-算子体 Z 实际上是一个 m-运算多面体的情形。此时，存在分别对应于 $j = 1, \ldots, N$ 的 d 元组 $m \times m$ 厄米矩阵 $(A_1^{(j)}, \ldots, A_d^{(j)})$，以及某个 $N \in \mathbb{N}$，使得 Z 的支撑函数满足

$$h_Z(u) = \sum_{j=1}^N \left\|\sum_{i=1}^d u_i A_i^{(j)}\right\|_1, \quad u \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

然后，我们可以令 $(A_1, \ldots, A_d)$ 为一个 d 元组的随机矩阵，使得 $(A_1, \ldots, A_d) = N \cdot (A_1^{(j)}, \ldots A_d^{(j)})$ 的概率为 $\frac{1}{N}$，并注意到 Z 是由 $(A_1, \ldots, A_d)$ 定义的 B_∞ 的 *random* 线性像 $\mathcal{A}$ 的期望。

现在假设 Z 是一个一般的中心对称 m-算子体，因此存在一列中心对称的 m-运算多面体 $\{Z_N\}_{N\in\mathbb{N}}$，使得 Z_N 关于豪斯多夫度量收敛于 Z。对于每个 $N \in \mathbb{N}$，我们可以写成

$$Z_N = \mathcal{A}_N^{(1)}(B_\infty) + \cdots + \mathcal{A}_N^{(k_n)}(B_\infty),$$

对于某个 $k_N \in \mathbb{N}$ 以及线性像 $\mathcal{A}_N^{(j)}\colon \mathbb{H}^m \to \mathbb{R}^d$。定义范数 $\|\cdot\|$，对 $\mathcal{A}\colon \mathbb{H}^m \to \mathbb{R}^d$，其定义为 $\|\mathcal{A}\|^2 := \sum_{i=1}^d \|A_i\|_2^2$。接着，令 $\tilde{\mathcal{A}}_n$ 为一个随机线性像，使得 $\tilde{\mathcal{A}}_n = \mathcal{A}_N^{(j)}$ 的概率为 $p_j^{(N)} = \frac{\|\mathcal{A}^{(j)}_N\|}{\sum_{j=1}^{k_N}\|\mathcal{A}^{(j)}_N\|}$，并注意到

$$Z_N := \mathbb{E}[\tilde{\mathcal{A}}_N(B_\infty)].$$

由于 Z_N 在豪斯多夫距离下收敛到一个 m-算子体 Z，定义 $\tilde{\mathcal{A}}_N$ 的随机矩阵 d 元组序列 $(\tilde{A}_{N,1}, \ldots, \tilde{A}_{N,d})$ 必须对所有 N 一致有界。根据普罗霍罗夫定理，存在一个子序列 $(\tilde{A}_{N_\ell,1}, \ldots, \tilde{A}_{N_\ell,d})$，它在分布意义下收敛到一个 d 元组 $(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_d)$，当 $\ell \to \infty$ 时。因此，对所有 $u \in \mathbb{S}^{d-1}$，

$$h_Z(u) = \lim_{\ell\to\infty} h_{\tilde{Z}_{n_\ell}}(u) = \lim_{\ell\to\infty} \mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^d u_i \tilde{A}_{N_\ell,i}\right\|_1\right] = \mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^d u_i \tilde{A}_i\right\|_1\right].$$

对于反向蕴含，设 Z 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个凸体，其支撑函数为

$$h_Z(u) = \mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^d u_i A_i\right\|_1\right]$$

其中，d 元组由随机 $m\times m$ 厄米矩阵 $(A_1, \ldots, A_d)$ 构成。考虑由 $(A_1, \ldots, A_d)$ 的独立同分布副本组成的集合 $\{(A_1^{(N)}, \ldots A_d^{(N)})\}_{N\in\mathbb{N}}$，并将 Z_N 定义为支撑函数为下式的随机凸体

$$h_{Z_N}(u) := \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \left\|\sum_{i=1}^d u_i A_i^{(k)}\right\|_1.$$

注意，对于所有的 N，Z_N 几乎必然是一个 m-运算多面体。根据凸体的强大数定律，[3]，$Z_N \to Z$ 几乎必然成立。因此，存在一个 m-运算多面体序列，在豪斯多夫度量下收敛于 Z，从而 Z 是一个 m-算子体。

□

继续沿用 (1) 中的示例，该结果告诉我们，任何由 2×2 个实对称矩阵指定的 2-算子体，其支撑函数必定具有以下形式：

$$h(u) = \mathbb{E}\left[\max\left\{|\langle u, a+c\rangle|, \sqrt{\langle u, a-c\rangle^2 + \langle u, 2b\rangle^2}\right\}\right]$$

对于某些 *random vectors* a、b 和 c，它们属于 $\mathbb{R}^d$。

作为算子带状体的最后一种等价刻画，我们回顾一下，带状体具有一种与 $L^1([0,1],\mathbb{R})$的子空间相关的泛函分析刻画；参见 [6]中的定理 6.1。以下结果将这一观点推广到 m-算子带状体。令 $L^1([0,1],\mathbb{H}^m)$表示紧算子 A 的线性空间，其中 $[0,1] \to \mathbb{H}^m$满足由下式定义的 L^1 范数

$$\|A\|_{L^1} := \int_{[0,1]} \mathrm{tr}(A(\omega)^* A(\omega))^{1/2} \mathrm{d}\omega = \int_{[0,1]} \|A(\omega)\|_1 \mathrm{d}\omega$$

是有限的。

定理 3 *A centrally symmetric convex body $Z \subset \mathbb{R}^d$ centered at the origin is an m-* *if and only*。算子体（,0)（,) *if the normed space $\mathbb{R}^d$ $h_Z \cdot$ is isometric to a subspace of L^1 $[0,1]$ $\mathbb{H}^m$.*

Proof. 我们基本沿用 [6]中定理 6.1 的证明。设 Z 是由定义在概率空间（Ω $\mathcal{F}, P$）上的 d元随机矩阵 $A_1, \ldots, A_d$所对应的 m-算子带状体。考虑映射 T: $\mathbb{R}^d \to L^1(\Omega\ \mathbb{H}^m)$，其中对于$x \in \mathbb{R}^d$、$Tx$: $\omega \to \mathbb{H}^m$是函数 $\sum_{i=1}^d x_i A_i(\cdot)$。于是由定理 2$\psi$ $\hbar_Z($ $\|Tx\|_{L^1}$ T $\mathbb{R}^d$ $h_Z \cdot$ L^1 $\mathbb{H}^m$ 6 1 [6], $) = \int_\Omega \sum_{i=1}^d x_i A_i(\,)$ d$P(\,)$，因此它是从（,( ))到（Ω ）的等距映射。正如定理 . 中所论证的，该结果可由以下事实推出：$L^1(\Omega\ \mathbb{H}^m)$（对任意概率空间 Ω）的每个可分子空间都等距于 $L^1([0,1],\mathbb{H}^m)$的一个子空间，而我们有一个显然可分的有限维子空间。

现在假设存在一个等距映射 T: $(\mathbb{R}^d,\ \|\cdot\|) \to L^1([0,1],\ \mathbb{H}^m)$，对应于 $\mathbb{R}^d$ 上的一个范数 $\|\cdot\|$。设 $\mathbb{R}^d$ 中的标准基为 e_1，. . ., e_d，并对每个 i 令 $A_i = Te_i$。那么，对每个 $x \in \mathbb{R}^d$，

$$\|x\| = \|Tx\|_{L^1} = \left\|\sum_{i=1}^d x_i T e_i\right\|_{L^1} = \int_{[0,1]} \left\|\sum_{i=1}^d x_i A_i(\omega)\right\|_1 \mathrm{d}\omega.$$

因此，对于与随机矩阵 A_1，. . .，A_d 相关联的算子体 Z，有 $\|\cdot\| = h(Z,\ \cdot)$。 □

这一泛函分析视角给出了带状体和算子带状体的若干实例与反例。Lindenstrauss 的一项结果 [21, Corollary 2] 指出，所有二维巴拿赫空间都可以等距嵌入 $L^1([0,1],\ \mathbb{R})$，这意味着一个众所周知的事实：$\mathbb{R}^2$ 中所有中心对称凸体都是带状体，进而对所有 m 都是 m-算子体。更广泛地说，我们将在第 3 节看到，前述结果有助于构造 $\mathbb{R}^2$ 中并非带状体的 2-算子体（事实上，是 2-算子多胞体）实例。

2.2 更多例子

在本节中，我们描述算子带状体的例子，它们对应于著名的 d元组随机矩阵系综。

2.2.1 Wigner随机矩阵

Wigner随机矩阵 $A \in \mathbb{H}^m$ 是一个随机厄米矩阵，其对角元 $\{a_{ii}\}_{i=1}^m$ 为独立同分布的零均值实值随机变量，而非对角元 $\{a_{ij}\}_{1 \le i < j \le m}$ 构成另一族独立同分布的零均值复值随机变量，具有有限二阶矩，并且与对角元独立。设 $A_1, \ldots, A_d$ 是元素为$(A_i)_{jk}$的Wigner随机矩阵，其中 $i = 1, \ldots, d$ 以及 $j, k \in [m]$。对所有 $j, k \in [m]$，定义随机向量 $a^{(jk)} = ((A_1)_{jk}, \ldots, (A_d)_{jk}) \in \mathbb{C}^d$。于是，线性组合 $\sum_{i=1}^d u_i A_i$ 是一个Wigner系综，其第 jk个元素为 $\langle u, a^{(jk)}\rangle$。

现在，考虑如下情形：上文定义的向量 $a^{(jk)}$ $\mathcal{N}\ 0\ \Sigma$ $j < k$ $a^{(jj)} \sim \mathcal{N}\ 0\ 2\Sigma$ $a^{(jk)} \sim$ 对所有 和 都是实值高斯向量，和，。那么，

$$\langle u, a^{(jk)}\rangle \sim \mathcal{N}(0, u^T \Sigma u),\ j < k, \qquad \langle u, a^{(jj)}\rangle \sim \mathcal{N}(0, 2u^T \Sigma u),$$

且 $\sum_{i=1}^d u_i A_i$ 的分布是乘以常数 $u^T \Sigma u$ 的高斯正交系综（GOE）O。与 A_1，.....，A_d 相关联的 m-算子体 Z 的支撑函数为

$$h_Z(u) = \mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^d u_i A_i\right\|_1\right] = (u^T \Sigma u)^{1/2} \mathbb{E}\left[\|O\|_1\right],$$

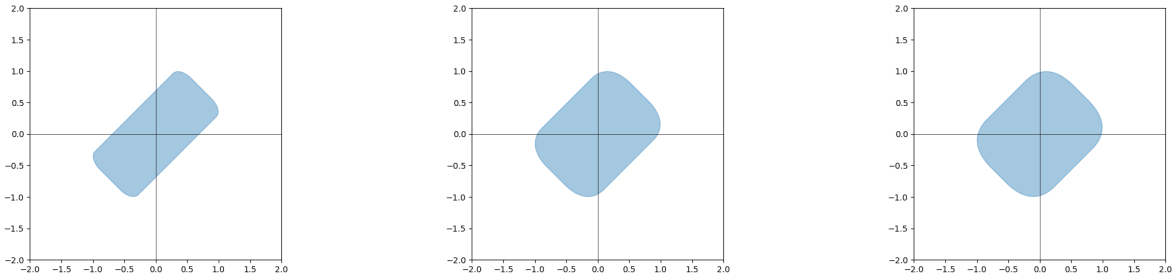
因此，Z 是一个椭球。特别是，对于所有 $m \ge 1$，m-算子带状体都包含椭球。这一点早已为人所知，因为带状体（$m = 1$）包含椭球。

2.2.2 均匀置换矩阵

置换矩阵是方阵，每行和每列恰有一个“1”，其余位置均为“0”。 $m \times m$ 置换矩阵的集合枚举了 m维向量坐标的所有 $m!$种排列。均匀置换矩阵是从该集合中均匀随机选取的矩阵。置换矩阵一般并非对称矩阵，但利用 Jordan-Weilandt 矩阵构造 [34], , 一个 $m \times m$置换矩阵 A 可以提升为一个 $2m \times 2m$ 对称矩阵

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^\star & 0 \end{bmatrix}$$

使得 $\|A\|_1 = \frac{1}{2}\|\tilde{A}\|_1$。因此，我们关注由 $m \times m$ 个均匀置换矩阵通过此构造提升为对称矩阵所指定的 $2m$-算子带状体。我们没有这些算子带状体支撑函数的闭式表达式，但可以通过对大量加项 N 的样本所指定的随机 $2m$-算子多胞体进行采样，数值近似其支撑函数。图 2 绘制了 $N = 150$ 和 $m = 3$，6 和 10 的一个此类样本。

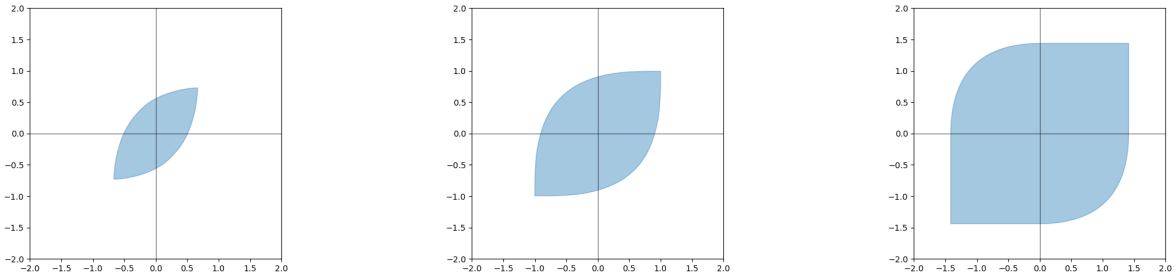


(a) $m = 3$ (b) $m = 6$ (c) $m = 10$

图 2：采样 6，12 和 20 个运算多面体，由独立同分布的均匀随机置换矩阵指定，其有$N = 150$ 个加项

2.2.3 Wishart 随机矩阵

Wishart 分布是定义在半正定矩阵上的概率分布，描述如下。对于 $\kappa > 0$和 $m \in \mathbb{N}$，令 X表示一个随机 $\kappa m \times m$ 矩阵，其元素独立同分布，均值为零，有限方差为 σ^2。那么， $\kappa m \times \kappa m$矩阵 $Y = \frac{1}{m\sqrt{\kappa}} XX^\star$是一个 Wishart 随机矩阵。这个系综也称为样本协方差矩阵。与均匀置换矩阵的情形一样，对于与由 d个独立 Wishart 随机矩阵组成的元组相关联的 κm算子带状体，我们通常无法得到支撑函数的闭式表达式；不过，我们可以通过对相关的 κm运算多胞体进行大量加项 N的采样来获得近似，参见图 3。



(a) $m = 6,\ \kappa = 1/2$ (b) $m = 6,\ \kappa = 1$ (c) $m = 6,\ \kappa = 2$

图 3：与具有高斯条目的独立同分布威沙特矩阵相关的 κm-算子多胞体（含 $N = 150$ 个加项）样本，其中 $m = 6$ 和 $\kappa = 1/2$，1， 2 从左到右排列。

3 运算类的性质

本节将探讨算子带状体的各种几何与分析性质。第3.1节讨论运算多面体和算子带状体的面结构，第3.2节则将其与其他

类凸体进行比较。最后，第 3.3 节推广了 [8] 关于以佐诺多胞体逼近带状体的一个结果，从而证明运算多面体逼近算子带状体的精度。

3.1 面结构

在本小节中，我们研究算子带状体的面结构。凸集 K 的 *exposed face* 是一个子集 $F \subseteq K$，满足 F 等于 K 与一个支撑 K 的超平面的交集；等价地，F 等于凸集 K 上某个线性泛函的最大值点集合。这里回顾一条关于凸集 K 的暴露面的关键观察：若凸集 K 在映射 $\mathcal{L}$ 下的线性像为凸集 K，则暴露面 F 在 $\mathcal{L}$ 下的原像是 $\tilde{K}$ 的暴露面；也就是说，F 的 $\mathcal{L}^{-1}(\cap \tilde{K})$ 是 $\tilde{K}$ 的暴露面。

我们首先回顾文献中关于带状体的一些结果。首先注意到，佐诺多胞体是一个 ∞-范数球的线性像，而 ∞-范数球的面本身也是（平移后的） ∞-范数球，因此佐诺多胞体的所有面也都是佐诺多胞体。更广泛地说，带状体的所有暴露面也都是带状体 [6, 定理 3.2]。为了推进对算子带状体面结构的研究，我们陈述下面关于算子范数球面的问题结果 [33, 定理 4]。

引理 4 *A subset $F \subseteq B_\infty(\mathbb{H}^m)$ of an operator norm ball is a closed proper (non-empty) exposed face of $B_\infty(\mathbb{H}^m)$ if and only if there exists $r \in \{1, \ldots, m-1\}$ and unitary matrices U and V such that*

$$F = \left\{ U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} V : A \in B_\infty(\mathbb{H}^{m-r}) \right\}.$$

.

换言之，算子范数球的暴露面是平移后的算子范数球，这与 ∞-范数球的情形非常相似。基于这一刻画，我们接下来证明一个关于算子带状体的面的结果。

命题 5 *each exposed face of an 。*
m-operatope is an m-operatope.
Each exposed face of an m-operanoid is an m-operanoid. Further,

Proof. 我们首先观察算子范数球的线性像的暴露面的原像。设 $F \subseteq \mathcal{L}(B_\infty(\mathbb{H}^m)) \subseteq \mathbb{R}^d$ 是算子范数球在某个线性映射 $\mathcal{L}$下的像的一个面。根据上文的讨论， F的原像 $\mathcal{L}^{-1}(F)$ 必定是 $B_\infty(\mathbb{H}^m)$ 的一个暴露面。由引理 4，存在 $r \in \{1, \ldots, m\}$ 以及酉矩阵 U和 V，使得

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = \left\{ U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} V : A \in B_\infty(\mathbb{H}^{m-r}) \right\}.$$

因此，存在矩阵 B_1、.....、 $B_d \in \mathbb{H}^m$ 使得

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \left(\langle B_1, U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} V \rangle, \ldots, \langle B_d, U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} V \rangle \right) : A \in B_\infty(\mathbb{H}^{m-r}) \right\} \\ &= \left\{ \left(\langle U^\star B_1 V^\star, \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \rangle, \ldots, \langle U^\star B_d V^\star, \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \rangle \right) : A \in B_\infty(\mathbb{H}^{m-r}) \right\} \\ &= \left\{ (\mathrm{Tr}([U^\star B_1 V^\star]_r + \langle [U^\star B_1 V^\star]_{m-r}, A \rangle, \ldots, \mathrm{Tr}([U^\star B_d V^\star]_r) + \langle [U^\star B_d V^\star]_{m-r}, A \rangle) : A \in B_\infty(\mathbb{H}^{m-r}) \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

其中，对 $A \in \mathbb{H}^m$， $r \times r$ A是对应于 A的第 $\{1, \ldots, r\}$ 行/列的主子矩阵，而 $[A]_{m-r}$是对应于第 $\{r+1, \ldots, m\}$ 行/列的 $(m-r)$ × $(m-r)$ 主子矩阵。现在，设 K是一个 m-算子体 K的暴露面。根据 [29],中的定理 1.7.2

$$\begin{aligned} h(F_\xi, u) &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\mathbb{E}\left[\left\| \sum_{i=1}^d (\xi_i + \lambda u_i) A_i \right\|_1 \right] - \mathbb{E}\left[\left\| \sum_{i=1}^d \xi_i A_i \right\|_1 \right]}{\lambda} \\ &= \mathbb{E}\left[\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\left\| \sum_{i=1}^d (\xi_i + \lambda u_i) A_i \right\|_1 - \left\| \sum_{i=1}^d \xi_i A_i \right\|_1}{\lambda} \right] = \mathbb{E}[h(F_{\xi,A}, u)], \end{aligned} \quad (5)$$

其中，$F_{\xi,\ A}$ 是 $B_\infty(\mathbb{H}^m)$ 的线性像 $\mathcal{L}_A$ 的面。上文中，我们使用控制收敛定理交换了极限与期望。由定理 4 和 (4)，存在酉矩阵 U 和 V，使得

$$h(F_{\xi,A}, u) = \langle u, (\mathrm{Tr}([U^\star A_1 V^\star]_r), \ldots, \mathrm{Tr}([U^\star A_d V^\star]_r)) \rangle + \left\| \sum_{i=1}^d u_i [U^\star A_i V^\star]_{m-r} \right\|_1.$$

因此， F_ξ 是$F_{\xi、A}$的期望值，并且

$$h(F_\xi, u) = \langle u, (\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}([U^\star A_1 V^\star]_r)\right], \ldots, \mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}([U^\star A_d V^\star]_r)\right])\rangle + \mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^{d} u_i [U^\star A_i V^\star]_{m-r}\right\|_1\right],$$

这表明 F_ξ 是一个平移后的 $(m-r)$-算子体，因此是一个 m-算子体。

最后，在前一段中，如果 K 是一个运算多面体，而不是一般的算子体，那么第 (5) 式第一行中的期望就是有限和。因此，后续所有期望也都可表示为有限和，我们可以得出结论： m-运算多面体的每个暴露面也都是 m-运算多面体。 □

我们举例说明这一结果的一个推论。众所周知，如果一个多胞体是带状体，那么它必定是一个佐诺多胞体 [6]。基于上述命题，我们将这一观察推广到算子带状体。具体而言，如果一个多胞体对于任意 m都是 m-算子带状体，那么它的所有面也必定是 m-算子带状体，因而是中心对称的。因此，这个多胞体必定是佐诺多胞体，因为根据 [29, 定理 3.5.1] ，具有中心对称二维面的多胞体必定是佐诺多胞体。

3.2 算子带状体与其他凸体族之间的关系

在本小节中，我们研究算子多胞体/算子带状体与其他凸体族之间的关系。首先需要指出的是，前面各小节中的例子（例如椭球及其闵可夫斯基和）表明，显然存在不是带状体的算子多胞体。一个自然的后续问题是：是否所有带状体都是某个 m的 m-算子多胞体。在 $\mathbb{R}^2$中考虑这一问题很有启发性，因为 $\mathbb{R}^2$ 中的所有中心对称凸体都是带状体 [6, 定理5.4]。然而， m-算子多胞体必须是半代数的，因为它们可表示为半代数凸体的线性像。由于 $\mathbb{R}^2$ 中显然存在不是半代数的中心对称凸体，例如当 p 为无理数时的 ℓ_p 球，因此存在对任何 m都不是m-算子多胞体的带状体。除这一基本观察之外，困难的一个来源在于：判断某个特定凸体是否为带状体这一问题颇具挑战性，它被称为 *zonoid problem* [7]。这一困难同样为算子带状体所继承。尽管如此，我们利用前面各小节中的刻画，给出关于算子带状体与带状体之间关系、以及算子带状体与一般凸体族之间关系的三组观察。

算子带状体 $\mathbb{R}^2$ 由于 $\mathbb{R}^2$ 中所有的 m-算子带状体都是带状体，因此自然会问，如何将 m-算子带状体在 $\mathbb{R}^2$ 中的支撑函数表示为某个带状体的支撑函数。对于一个以原点为中心、仅有一个加项的 m-运算多面体 Z，我们有

$$h_Z(u) = \|u_1 A_1 + u_2 A_2\|_1 .$$

由于 Z 也是一个带状体，因此必有 $h_Z(u) = \int_{\mathbb{R}^2} |\langle u,\ x\rangle| \mathrm{d}\mu(x)$，其中测度 μ 取决于 A_1，A_2。这种 μ 的显式表达式由 *tracial joint spectral measure* 根据 A_1 和 A_2 给出，定义见 [15]。同一项工作还刻画了联合谱测度的奇异部分和连续部分。为了获得类似的、以带状体表示的 m-算子带状体 Z，现在将其定义为一对随机矩阵 A_1，A_2，相应的测度 μ 是与 A_1，A_2 相关联的某个 *random* 迹联合谱测度的均值测度 Λ ：

$$h_Z(u) = \mathbb{E}\left[\|u_1 A_1 + u_2 A_2\|_1\right] = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^2} |\langle u, x\rangle| \mathrm{d}\mu(x)\right] = \int_{\mathbb{R}^2} |\langle u, x\rangle| \mathrm{d}\Lambda(x).$$

高维中的算子带状体与带状体对于维数为 $d \geq 3$ 的情形，带状体构成凸体的真子类，我们要探讨的问题是，在 $\mathbb{R}^3$ 中是否存在不是带状体的 m-算子体。我们借助近期的研究 [16] 对此作出肯定回答，该研究证明了以下结果。

定理 6 (定理 1.0.3，见 [16])。 *The space of real symmetric 2×2 matrices endowed with the trace norm is not linearly isometric to any subspace of $L^1([0,1], \mathbb{R})$.*

[16] 中的结果实际上对所有满足 $p \in [1, \infty)$ 的 L^p 都作了更一般的表述， $p \neq 2$，但就我们的论证而言，前面关于 $p = 1$ 的表述已经足够。根据定理 3，该定理意味着在 $\mathbb{R}^3$ 中存在一个不是带状体的 2-算子体 *not*。特别地，我们可以从 [16] 得出如下结论：支撑函数为

$$h(u) = \left\| \begin{bmatrix} u_3 + u_1 & u_2 \\ u_2 & u_3 - u_1 \end{bmatrix} \right\|_1 ,$$

不是带状体（见图 4）。根据式 (1) 的计算，这是二维圆盘与一条垂直线段的凸包的支撑函数。

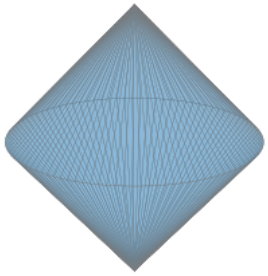


图 4：一个非带状体的三维 2-运算多面体。

非算子带状体的凸体 对于维数为 $d \geq 3$ 的情形，带状体构成凸体的一个真子类，这促使我们研究这类凸体。接下来我们证明，对于 $d \geq 3$，在 $\mathbb{R}^d$ 中存在不是 m-算子体的中心对称凸体。结合上述观察——对于任意 $m \geq 2$，在 $\mathbb{R}^3$ 中存在不是带状体的 m-算子体——我们的结果为将算子体作为一类结构化凸体加以研究提供了依据。要举出不是算子体的凸体的具体例子，可以考虑 $d \geq 3$ 时 $\mathbb{R}^d$ 中一个不是佐诺多胞体的多胞体，例如 ℓ_1 单位球。根据 [29], 中的定理 3.5.2, ℓ_1 单位球不是带状体，因为它的二维面并非中心对称。根据命题 5，同样的推理表明，对于任意 m， ℓ_1 单位球都不是 m-算子体。基于这一观察，我们注意到，对于任意 $n \geq 3$，$n \times n$ 矩阵的核范数球对于任意 m 都不是 m-算子体，因为 $\mathbb{R}^n$ 中的 ℓ_1 球可以表示为 $n \times n$ 核范数球在对角元上的投影所得到的线性像（反证：如果核范数球是 m-算子体，那么它的任意线性像也会是 m-算子体）。

最后， m-算子带状体这一类必定包含于单纯多胞体集合的补集中，因为 m-算子多胞体的面是中心对称的，而不能表示为 m-算子多胞体的 m-算子带状体必定是可分解的（因此不是不可分解的单纯多胞体，见 [29] 中的推论 3.2.13）。因此，由于单纯多胞体在 $\mathcal{K}^d$ 中构成稠密子集， m-算子带状体集合必定是无处稠密的。我们在下述命题中陈述这一结论。

命题

7 *For $d \geq 3$ the class of m-operanoids in $\mathbb{R}^d$ are nowhere dense in the class of centrally* 。, *symmetric convex bodies in $\mathbb{R}^d$.*

3.3 用运算多面体逼近算子带状体

作为本节的最后一个结果，我们考虑用 m-算子多胞体逼近 m-算子带状体的问题。具体而言，在一个 m-运算多面体的闵可夫斯基和表示中，需要多少个加项 N，才能以所需精度逼近给定的 m-算子带状体? 对于 $m = 1$ 带状体的佐诺多胞体逼近这一情形，该问题已在 [8], 中得到解答，随后又有研究将上界收紧至与之匹配的下界 [24, 32]。在此，我们将此前部分研究成果推广，以获得适用于任意 m 的结果。

定理 8。 *Let Z be an m-operanoid centered at the origin and defined by a d-tuple of random matrices* ($A_1 \ \ldots \ A_d$ *in $\mathbb{H}^m$ with entries bounded by L. There exists a sequence of m-operatopes $\{Z_N\}_{N\geq 1}$ – each Z_N*,), *with N summands – such that for all $\varepsilon > 0$ and an absolute constant $c > 0$ we have that*

$$N \geq cm^2L^2d^2\varepsilon^{-2} \quad \Rightarrow \quad d_H(Z, Z_N) \leq \varepsilon.$$

Proof. 我们将使用概率方法证明这一结果。具体而言，我们将构造具有 N 个加项的随机m-算子多胞体，并证明它们以高概率呈现出所需的逼近质量。由此即可得到这类运算多面体逼近的存在性。在整个证明过程中，上界中出现的绝对常数将记为 c_i for $i \in \mathbb{N}$。

对于 $N \geq 1$ 和 $j = 1, \ldots, N$, 令 $(A_1^{(j)}, \ldots, A_d^{(j)})$ 为随机矩阵 d-元组 $(A_1, \ldots, A_d)$ 的独立同分布副本。于是对于所有 $N \geq 1$, 定义随机 m-运算多面体 Z_N，其支撑函数为

$$h_{Z_N}(u) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left\|\sum_{i=1}^{d} u_i A_i^{(j)}\right\|_1 .$$

我们注意到，对于 $u,\ v \in \mathbb{S}^{d-1}$ 和 $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(|h_Z(u) - h_{Z_N}(u) - h_Z(v) + h_{Z_N}(v)| \geq t\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|h_Z(u) - h_Z(v) - (h_{Z_N}(u) - h_{Z_N}(v))| \geq t\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left|\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^d u_i A_i\right\|_1 - \left\|\sum_{i=1}^d v_i A_i\right\|_1\right] - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \left(\left\|\sum_{i=1}^d u_i A_i^{(j)}\right\|_1 - \left\|\sum_{i=1}^d v_i A_i^{(j)}\right\|_1\right)\right| \geq t\right).
\end{aligned}$$

现在，对每个 $j \in \{1, \ldots, N\}$，定义 $X_j := \left\|\sum_{i=1}^d u_i A_i^{(j)}\right\|_1 - \left\|\sum_{i=1}^d v_i A_i^{(j)}\right\|_1$。注意，随机变量$X_j$ 满足以下界:

$$-\|u-v\|_2 mL\sqrt{d} \leq -\|u-v\|_2 \left(\sum_{i=1}^d \left\|A_i^{(j)}\right\|_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq X_j \leq \|u-v\|_2 \left(\sum_{i=1}^d \left\|A_i^{(j)}\right\|_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|u-v\|_2 mL\sqrt{d}.$$

Hoeffding不等式 [37, 定理 2.2.6] 于是推出

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N (X_j - \mathbb{E}[X_j]) \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2 N}{2m^2 L^2 d\|u-v\|_2^2}\right).$$

因此，集合 $\{h_Z(u) - h_{Z_N}(u)\}_{u\in\mathbb{S}^{d-1}}$ 具有常数为 $\frac{mL\sqrt{d}}{\sqrt{N}}$ 的次高斯增量。

接下来，令 $u_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ 为任意固定的单位向量。根据 Dudley积分不等式的尾界形式 [37, 定理 8.1.6], ，对于所有 $s \geq 0$ ，我们有:

$$\sup_{u\in\mathbb{S}^{d-1}} \left(|h_Z(u) - h_{Z_N}(u)| - |h_Z(u_0) - h_{Z_N}(u_0)|\right) \leq \frac{c_1 mL\sqrt{d}}{\sqrt{N}} \left[\int_0^2 \sqrt{\log \mathcal{N}(\mathbb{S}^{d-1}, \|\cdot\|_2, \delta)}\, \mathrm{d}\delta + 2s\right]$$

其概率至少为 $1 - 2e^{-s^2}$。这里， $\mathcal{N}(\mathbb{S}^{d-1}, \|\cdot\|_2, \delta)$ 是关于 ℓ_2 距离的 δ-覆盖数。回顾 [37] 中的推论4.2.13和（4.10），可得

$$\mathcal{N}(\mathbb{S}^{d-1}, \|\cdot\|_2, \delta) \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^d,$$

由此得到上界

$$\int_0^2 \sqrt{\log \mathcal{N}(\mathbb{S}^{d-1}, \|\cdot\|_2, \delta)}\, \mathrm{d}\delta \leq \int_0^2 \sqrt{d \log\left(\frac{3}{\delta}\right)}\, \mathrm{d}\delta \leq c_2\sqrt{d}$$

因此，对所有 $s \geq 0$,

$$\sup_{u\in\mathbb{S}^{d-1}} \left(|h_Z(u) - h_{Z_N}(u)| - |h_Z(u_0) - h_{Z_N}(u_0)|\right) \leq \frac{c_3 mL\sqrt{d}}{\sqrt{N}} \left(\sqrt{d} + s\right). \tag{6}$$

再次应用 Hoeffding不等式，可得对于 $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(|h_Z(u_0) - h_{Z_N}(u_0)| \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{2t^2 N}{m^2 L^2 d}\right),$$

令 $t = \frac{mLd}{\sqrt{N}}$，可得

$$\mathbb{P}\left(|h_Z(u_0) - h_{Z_N}(u_0)| \geq \frac{mLd}{\sqrt{N}}\right) \leq \exp\left(-2d\right).$$

最后，在（6）中令 $s = \sqrt{d}$ 并应用并合界，可得

$$\begin{aligned}
d_H(Z, Z_N) &= \sup_{u\in\mathbb{S}^{d-1}} |h_Z(u) - h_{Z_N}(u)| \\
&\leq |h_Z(u_0) - h_{Z_N}(u_0)| + \sup_{u\in\mathbb{S}^{d-1}} \left(|h_Z(u) - h_{Z_N}(u)| - |h_Z(u_0) - h_{Z_N}(u_0)|\right) \\
&\leq \frac{c_4 mLd}{\sqrt{N}},
\end{aligned}$$

以至少为 $1 - 2e^{-d} - e^{-2d}$ 的概率。因此，存在一个 m-算子多胞体序列 $\{Z_N\}_{N\geq 1}$，使得对于所有 $\varepsilon > 0$，若 $N \geq c_5 m^2 L^2 d^2 \varepsilon^{-2}$，则 $d_H(Z,\ Z_N) \leq \varepsilon$。 □

这一结果揭示了一些计算后果，尤其是在优化领域。假设我们希望在算子带状体 Z 上最大化一个线性泛函，即计算 Z 在给定方向 u 上的支撑函数。根据定理 8，若我们能够从构成 Z 的 $\tilde{}$ 描述所依据的测度中抽样得到矩阵，就可以得到一个运算多面体近似 Z，使得 $|h_{\tilde{Z}}(u) - h_Z(u)| \leq \varepsilon$，其中 ε 可按需选取。这样一来， $h_{\tilde{Z}}(u)$ 就能通过谱计算得到。

4 非交换拟阵

对于固定的 m，随着加项数量 N 增加， m-运算多面体的极限也可以看作由单个加项构成的 mN-运算多面体在 N 增大时的极限，其中参数化矩阵被限制为 $m \times m$ 块对角。放宽这一限制，便会产生一个渐近区间，研究矩阵规模 m 增大时 m-算子带状体的行为。这是带状体中尚未定义过的新情形，研究相关极限对象需要采用不同的视角。在涉及的矩阵满足某些条件时，非交换概率理论为理解这类极限提供了工具。具体而言，非交换概率的一般框架使我们能够定义一类由非交换随机变量刻画的新型凸体，称为非交换拟阵。我们证明，这些对象将 m-算子带状体作为特殊情形包含在内；此外，它们还刻画了 m 增大时 m-算子带状体的某些极限。第 4.1 节介绍非交换随机变量的一些背景知识。第 4.2 节正式阐述非交换拟阵这一类对象。其中，第 4.3 节聚焦于一个称为自由 zonotope 的子类，它是由自由随机变量导出的凸体。

4.1 非交换随机变量

这里简要回顾非交换概率空间的定义及其他相关概念。更完整的论述请参阅 [40]。

一个 $\star$-代数 $\mathcal{A}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的代数，并配有一个对合 $\star$，使得对于所有 $a,\ b \in \mathcal{A}$，都有 $(ab)^\star = b^\star a^\star$。一个 $C^\star$-代数是配备范数 $\|\cdot\|\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ 的 $\star$-代数，使得 $(\mathcal{A},\ \|\cdot\|)$ 是完备赋范向量空间， $\|a^\star\| = \|a\|$，并且对于所有 $a,\ b \in \mathcal{A}$，都有 $\|ab\| \le \|a\|\|b\|$。由此得到非交换概率空间的如下定义。

定义 9. *A* 非交换（NC）概率空间 $(\mathcal{A},\ \tau)$ *consists of a* $\star$*-algebra* $\mathcal{A}$ *containing an identity element* $\mathbf{1}$ *together with a linear functional* $\tau\ \ \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ *such that* $\tau\ \mathbf{1}\ = \mathbf{1}$ *and* $\tau\ aa^\star\ \ge 0$ *for all,* $:()(),\ (,\ )$ $a \in \mathcal{A}$ *i.e.* τ *maps positive elements of* $\mathcal{A}$ *to positive real numbers. An NC probability space* $\mathcal{A}\ \tau$ *is a* $C^\star$ *if* $\mathcal{A}$ *is a* $C^\star$*-algebra.* -概率空间

定义非交换概率空间的另一种常见代数选择是冯·诺伊曼代数。不过，下文仍将重点讨论 $C^\star$-概率空间，因为这些空间允许进行连续函数演算，而这对于本节所研究的对象具有良好定义至关重要。对于一个 $C^\star$-概率空间 $(\mathcal{A},\ \tau)$，我们将元素 $a \in \mathcal{A}$ 称为非交换随机变量。

4.1.1 非交换随机变量的分布

接下来，我们将说明如何理解非交换随机变量的分布。设 $(\mathcal{A},\ \tau)$ 是一个 $C^\star$-概率空间，且 $a \in \mathcal{A}$。定义 $\mu_a\colon \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$ 为多项式（关于不定元 x）上的线性泛函，其定义为

$$\mu_a(P) := \tau(P(a)).$$

我们将 μ_a 称为 a的 *distribution*。更一般地，一组非交换随机变量 $(a_1,\ \ldots\ldots,\ a_d)$ 的 *joint distribution* $\mu_{(a_1,\ldots,a_d)}$ 是定义在多项式集合（关于不定元 $(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_d)$）上的复值线性映射，其定义为

$$\mu_{(a_1,\ldots,a_d)}(P) = \tau(P(a_1,\ldots,a_d)).$$

因此，分布 $\mu_{(a_1,\ldots,a_d)}$ 完全由非交换矩决定

$$\tau(a_{i_1}\cdots a_{i_k}),\ \text{for all } k \in \mathbb{N} \text{ and } i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots d\}.$$

*Gelfand-Naimark-Segal Theorem*指出，任何 $C^\star$-概率空间 $(\mathcal{A},\tau)$ 都可以与希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上有界算子集合中的一个范数闭 $\star$-子代数 $\mathcal{A} \subseteq B(\mathcal{H})$ 等同，其中对于 $a \in \mathcal{A}$, $\tau(a) = \langle a\xi,\xi\rangle$，且 $\xi \in \mathcal{H}$ 是满足 $\|\xi\| = 1$ 的单位向量。对于自伴元 $a = a^* \in (\mathcal{A},\tau)$，这种等同使得分布 μ_a 可以用 $\mathbb{R}$ 上的概率测度来描述。特别地，令 $\sigma(a)$ 表示 a （视为自伴有界算子）的谱，并使用连续函数演算，谱定理给出如下结果：存在一个紧支撑概率测度 ν，称为 $\mathbb{R}$ 上的 *spectral distribution of* a，使得对于任意连续函数 $f\colon \sigma(a) \to \mathbb{R}$,

$$\tau(f(a)) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}\nu(t). \tag{7}$$

我们在此再次指出，要求概率空间具有 a $C^\star$-代数，是为了能够使用连续函数演算，从而确保对于所有连续函数 f，式 (7) 都有定义，而不仅仅适用于多项式。具体来说，在下文中我们希望研究非交换随机变量的绝对值。

刻画非交换随机变量分布的另一种方式是通过函数变换。在我们的设定中，最相关的是 *R-transform*。要定义它，我们首先回顾一下，非交换随机变量 a 的 *Steiltjes* 或*Cauchy transform* G 为

$$G(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(a^n)}{z^{n+1}},$$

并且，如果 a 是自伴的，其谱分布为 ν,

$$G(z) = \tau\left(\frac{1}{z-a}\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t}\,\mathrm{d}\nu(t), \qquad z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}.$$

定义10。 *The R-*变换 *of an NC random variable a is defined as*

$$R_a(z) := K_a(z) - z^{-1},$$

where K_a is the inverse of the Cauchy transform G of a that satisfies $G(K_a(z)) = z$.

4.1.2 自由随机变量与自由卷积

一个重要的非 念是“自由性”，它在许多方面类似于
o 独立性的 标准交换随机变量。该性质在如下定义中加以描述 n.

定义 **11** *Let $\mathcal{A}$ τ be an NC probability space and let $\mathcal{A}_i$ $_{i=1}^{m}$ be subalgebras of $\mathcal{A}$ with an identity.* *element that is the same as the identity element of $\mathcal{A}$ i.e. unital subalgebras. The $\mathcal{A}_i$ are* (,) ( ), 自由独立 *if for any $a_1, \ldots, a_d \in \mathcal{A}$ that satisfy*

(i) $\tau(a_i) = 0$ for $i \in [d]$,
(ii) $a_i \in \mathcal{A}_{j_i}$ for $j_i \in [m]$, and
(iii) $j_i \neq j_{i+1}$ for $i = 1, \ldots, d-1$,

it holds that τ $a_d \in \mathcal{A}$ is if the unital subalgebras they $(a_1 \cdots a_d) = 0$. A family of random variables a_1, generate are freely independent.
. . . , 自由

两个经典独立交换随机变量之和的分布，是这两个分布的卷积。对于自由随机变量，也有一个类似的概念，定义如下。

定义 **12** *Let $\mathcal{A}$ τ be a C^*-probability space with two free self-adjoint variables a $b \in \mathcal{A}$ with distribu-*。 (,) , , 自 *tions μ and ν respectively. The of μ and ν denoted by $\mu \boxplus \nu$*
由卷积， , *is defined to be the distribution of $a + b$ associated to τ.*

自由卷积与 R-变换有良好的相互作用；对于自由随机变量的加法，该变换具有可加性。也就是说，如果 a 和 b 是自由随机变量，那么 $R_{a+b} = R_a + R_b$。

4.1.3 依分布收敛

接下来，我们讨论非交换随机变量的几种收敛概念。

定义 13. *A collection $(a_1^{(m)}, \ldots\ldots, a_k^{(m)})$ of random variables in $(\mathcal{A}_m, \tau_m)$ converges* 依矩的意义 *to the collection $(a_1, \ldots\ldots, a_k)$ in $(\mathcal{A}, \tau)$ if for all $1 \leq i_1, \ldots\ldots, i_j \leq k$,*

$$\lim_{m\to\infty} \tau_m(a_{i_1}^{(m)} \cdots a_{i_j}^{(m)}) = \tau(a_{i_1} \cdots a_{i_j}).$$

对于一列由单个自伴且一致有界的非交换随机变量构成的序列 $a^{(m)}$，矩意义下的收敛等价于关于 $\mathbb{R}$ 上谱分布的通常依分布收敛概念。换言之，谱半径一致有界的序列 $a^{(m)} \in \mathcal{A}_m$ [3] 在矩意义下收敛到有界自伴随机变量 $a \in \mathcal{A}$，当且仅当 $a^{(m)}$ 的谱分布序列 ν_m 在弱拓扑下收敛到 a 的谱分布 ν（例如，参见 [35] 中的练习 2.5.11）。

现在我们重点介绍第 2.2 节中讨论的随机矩阵系综极限分布的一些已有结果。所有示例在极限下都具有自由随机变量。

[3]对于自伴非交换随机变量 $a \in (\mathcal{A}, \tau)$，其 *spectral radius* 定义为 $\rho(a) := \lim_{p\to\infty} |\tau(a^{2p})|^{1/(2p)}$。

例 14。 *Let $A_1^{(m)},\ldots,A_d^{(m)}$ be $m\times m$ Wigner random matrices as defined in Section 2.2.1. Then, as $m\to\infty$ converges to a d-tuple of free self-adjoint random variables $a_1\ \ldots\ a_d$ each, $(A_1^{(m)},\ldots,A_d^{(m)})$ 在分布意义下 $(,\ldots,)$ with a semicircle distribution (Theorem 2.5 in [4]). The semicircle spectral distribution ν with variance σ^2 has density given by $d\nu\ t\ =\ \frac{\sigma^2}{2\pi}\sqrt{4\sigma^2-t^2}\ +\ $ which has support on the interval $[-2\sigma,2\sigma]$. The R-transform of $a()()$,$()$ semicircle random variable with variance σ^2 is given by $R\ s\ =\sigma^2 s$.*

例 15. *Let $(V_{(m)1},\ldots,V_{(m)d})$ be a d-tuple of uniformly distributed random permutation matrices as defined in Section 2.2.2. By a result of Nica [27],$($ $V_1\ \ V_d$ converges in distribution to a d-tuple of$_{(m)},\ldots,_{(m)})$ $(,)$, free random variables $u_1\ \ldots\ u_d$ as $m\to\infty$ where the u_i's are Haar unitaries. An NC random variable$(,)$ Haar酉元 $()$ $u\in\ \mathcal{A}\ \tau$ is a if and only if $uu^*=\mathbf{1}$ and $\tau\ u^k\ =0$ for all $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$.*

例 16 *Let $W_1{}^m\ \ldots W_d^{(m)}$ be a collection of independent Wishart random matrices as defined in Section$._{()}$,$(,)$ 2.2.3. It was shown by Marchenko and Pastur [23] that for fixed $\kappa\in\ 0\ \infty$as $m\to\infty$ a single Wishart random matrix converges in distribution to the so-called . The spectral distribution of a*Marchenko-Pastur定律

Marchenko-Pastur random variable satisfies, for $A\subset\mathbb{R}$,

$$\nu(A)=\begin{cases}(1-1/\kappa)\mathbf{1}_{\{0\in A\}}+\mu(A), & \text{if } \kappa>1,\\ \mu(A), & \text{if } 0\le\kappa\le 1,\end{cases}$$

where

$$\mathrm{d}\mu(x)=\frac{\sqrt{(\sigma^2(1+\sqrt{\kappa})^2-x)\,(x-\sigma^2(1-\sqrt{\kappa})^2)}}{2\pi\sigma^2}\mathbf{1}\{x\in[\sigma^2(1-\sqrt{\kappa})^2,\sigma^2(1+\sqrt{\kappa})^2]\}.$$

For the case of general d it was proved in [10] that $W_1^{(m)}\ \ldots W_d{}^m$ converges in the sense of moments to $a,(,_{()})$ d-tuple of free random variables with the Marchenko-Pastur distribution.

4.2 非交换拟阵

掌握了前述概念后，我们接下来定义本节关注的主要对象。首先，回顾一下，随机矩阵是非交换随机变量的特例。将定义 m-算子带状体时所用的随机矩阵替换为一般 $C^\star$-概率空间中的元素，我们便扩展了 m-算子带状体的定义。

定义17。 *Fix a $C^\star$-probability space$(\mathcal{A},\ \tau)$. A convex body Z in $\mathbb{R}^d$ is a*非交换（NC）带状体 *if it has support function of the form:*

$$h_Z(u):=\langle v,u\rangle+\tau\left(\left|\sum_{i=1}^d u_i a_i\right|\right),\quad u\in\mathbb{S}^{d-1},$$

for some $v\in\mathbb{R}^d$ and some d-tuple $a_1\ \ldots\ a_d$ of self-adjoint random variables in $\mathcal{A}\ \tau$. If Z is centered at the$,(,),:()$ origin then $v=0$. Here the absolute value $|a|$ for $a\in\mathcal{A}$ is defined as $|a|\ =\ a^\star a^{\ 1/2}$.

在以下示例中，我们说明，通过对底层 $C^\star$-概率空间作特定选择，可以将算子带状体还原为非交换带状体的示例。

示例 18。 *Let$(\mathcal{A},\ \tau)$ be the space of random Hermitian matrices with bounded entries $\mathbb{H}^m\otimes L^\infty(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ equipped with the functional $\tau\ A\ =\mathbb{E}[\ _m\ A\ ]$. This is a $C^\star$-probability space with involution given by the$()$ tr$()(())()$ transpose of the random matrix $A\cdot\ ^\star=A^\star\cdot$. For a self-adjoint $m\times m$ random matrix A with bounded entries the spectral distribution ν of A as characterized in 7 $_A$ where,$()$ $\lambda_1\ A\ \le\cdots\le\lambda_m\ A$ is given by $\nu=\mathbb{E}\left[m^{-1}\sum_{j=1}^m\delta_{\lambda_j()}\right]$,$()()$ are the eigenvalues of A (see Example 1.6.2 in [40]). NC zonoids with respect to this $C^\star$-probability space are m-operanoids.*

正如我们先前所述，定义非交换带状体的一个主要动机在于，非交换概率的框架使我们能够理解 m-算子带状体随 m 增长时的收敛概念。特别地，这一问题与 $m\times m$ 随机矩阵的 d元组在 m 增长时的极限分布密切相关。如下一个结果所示，在某些条件下，极限对象将是一个非交换 zonotope。

命题 19. *Consider a sequence of $C^\star$-probability spaces $(\mathcal{A}_m,\tau_m)$ for $m\in\mathbb{N}$. For each m, let$a_1^{(m)},\ldots,$ $a_d^{(m)}$ be self-adjoint NC random variables in$(\mathcal{A}_m,\tau_m)$ and assume the collection $\{a_i^{(m)}\}_{i\in[d],m\in\mathbb{N}}$ is uniformly bounded. Suppose that$(a_1^{(m)},\ldots,a_d^{(m)})$ converges in the sense of moments to a d-tuple of NC random variables $a_1\ \ldots\ a_d$ each lying in a $C^\star$-probability space $\mathcal{A}\ \tau$ as $m\to\infty$. Let Z_m be the NC$(,)(,)$ zonoid associated to$(a_1^{(m)},\ldots,a_d^{(m)})$ and Z the NC zonoid associated to$(a_1,\ldots,a_d)$. Then,*

$$\lim_{m\to\infty}d_H(Z_m,Z)=0.$$

Proof. 当 $m \to \infty$ 时，$(a_1^{(m)}, \ldots, a_d^{(m)})$ 到 $(a_1, \ldots, a_d)$ 的矩意义下的收敛意味着，对于所有 $u \in \mathbb{S}^{d-1}$，$\sum_{i=1}^d u_i a_i^{(m)}$ 都依矩意义下收敛到 $\sum_{i=1}^d u_i a_i$，当 $m \to \infty$ 时。在这些假设下，这等价于相对于谱分布的依分布收敛（参见定义 13 之后的讨论）。因此，对于每个 $u \in \mathbb{S}^{d-1}$，我们有：

$$\lim_{m\to\infty} h_{Z_m}(u) = \lim_{m\to\infty} \tau_m\left(\left|\sum_{i=1}^d u_i a_i^{(m)}\right|\right) = \tau\left(\left|\sum_{i=1}^d u_i a_i\right|\right) = h_Z(u).$$

因此，结论可由 [29] 中的定理 1.8.15 得出。 □

上述命题表明，在适当的假设下，一组非交换随机变量依分布收敛，意味着与之相关的非交换带状体在豪斯多夫度量下收敛。命题 19 给出了 m-算子带状体序列收敛到一个非交换带状体的充分条件，但一般而言，我们不应认为该结果的逆命题成立。也就是说，即使一列非交换带状体在豪斯多夫距离下收敛，与之相关的非交换随机变量元组序列也未必依分布收敛。这是因为非交换带状体无法唯一确定其底层非交换随机变量元组的分布；事实上，即使是带状体，也与其底层标量随机变量元组的分布不存在一一对应关系。

接下来，我们用一些例子说明如何利用命题 19，将 m-算子带状体的极限表示为非交换带状体。首先，我们证明，由 d-元自由半圆随机变量组成的元组所得到的非交换带状体，是主轴沿标准基方向的椭球。回顾一下，R-变换对于自由随机变量的加法具有可加性。此外，注意到，对于 $t \in \mathbb{R}$, $R_{ta}(s) = tR_a(ts)$。因此，对于自由非交换随机变量 $(a_1, \ldots, a_d)$ 和单位向量 $u \in \mathbb{S}^{d-1}$，线性组合 $\sum_{i=1}^d u_i a_i$ 的 R-变换为

$$R_{\sum_{i=1}^d u_i a_i}(s) := \sum_{i=1}^d u_i R_{a_i}(u_i s). \tag{8}$$

例 20 *Recall from Example 14 that a d-tuple of independent Wigner random matrices converges in distribution to a d-tuple of free semicircle random variables. To see what the associated limiting NC zonoid is let* $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ *and* $a_1 \ldots a_d$ *be a d-tuple of free random variables such that* a_i *has a semicircle distribution with variance* σ_i *as defined in Example 14. We first observe that* $\sum_{i=1}^d u_i a_i$ *has a semicircle distribution with variance* $\sqrt{\sum_{i=1}^d u_i^2 \sigma_i^2}$. *Indeed, for a semicircle random variable a and for* $u \in \mathbb{R}$, *ua has a semicircle distribution with variance* u^2. *Using* (8) *the R-transform of* $\sum_{i=1}^d u_i a_i$ *is then given by*

$$R_{\sum_{i=1}^d u_i a_i}(s) = \sum_{i=1}^d u_i^2 \sigma_i^2 s.$$

Letting $\sigma(u) := \left(\sum_{i=1}^d u_i^2 \sigma_i^2\right)^{1/2}$, *we obtain that*

$$\tau\left(\left|\sum_{i=1}^d u_i a_i\right|\right) = (2\pi\sigma(u)^2)^{-1} \int_{-2\sigma(u)}^{2\sigma(u)} |t|\sqrt{4\sigma(u)^2 - t^2}\mathrm{d}t = 8\sigma(u)\pi^{-1} \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r = c\sigma(u),$$

where $c > 0$ *is a constant. Thus, by Proposition 19 m-operatopes associated to d-tuples of Wigner random matrices converge in the Hausdorff metric to NC zonoids that are axis-aligned ellipsoids as* $m \to \infty$.

例 21 *Recall from Example 15 that a d-tuple of independent uniformly distributed random permutation matrices converge in distribution to a d-tuple of free Haar unitaries. While we do not have a closed form expression for the support function of the NC zonoid corresponding to a d-tuple of free Haar unitaries, we plot in Figure 4 an m-operatope approximation associated to a d-tuple of independent uniform permutation matrices for large m.*

例

22 *Recall from Example 14 that a d-tuple of independent Wishart random matrices converge in distribution to a d-tuple of free random variables with a Marchenko-Pastur distribution. Again we do not have a closed form expression for the support function of the corresponding NC zonoid and we plot in Figure 5 an m-operatope approximation associated to a d-tuple of Wishart random matrices for large m.*

研究一般维数 d下的非交换带状体是有意义的，它是 d元组自伴非交换随机变量的*joint* 分布的一个凸体参数。单个自伴非交换随机变量的分布可由其谱分布定义，而该谱分布由 $\mathbb{R}$上的一个测度给出。对于 $d = 2$，我们尚不知道一对非交换随机变量的 *joint spectral measure* 这一概念，尽管这一概念

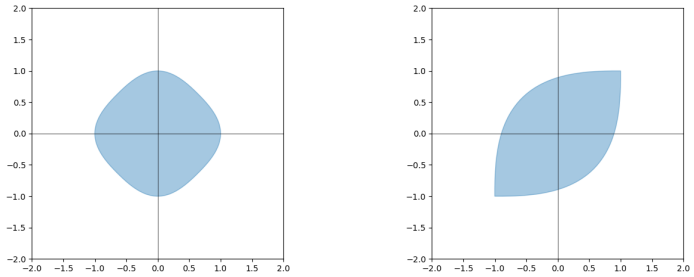


图 5： $\mathbb{R}^2$ 中极限非交换带状体的近似，左图对应自由 Haar 酉元，右图对应自由 Marchenko-Pastur 随机变量。每个图都是一个 m-运算多面体的随机样本，具有 $N = 1$加项，并分别对应独立均匀置换矩阵和独立 Wishart 随机矩阵的 $m = 500$ 。

在.....中是可用的 矩阵对 [15]的情形。基于所有非交换带状体都是带状体这一观察，
nℝ^2，存在一度测$_{1,\ a_2}$ 于 $\mathbb{R}^2$ 上，使得对所有 $(u_1,\ u_2) \in \mathbb{S}^1$，

$$\tau(|u_1a_1 + u_2a_2|) = \int_{\mathbb{R}^2} |u_1x_1 + u_2x_2| \mathrm{d}\nu_{a_1,a_2}(x).$$

要将这样的测度 $\nu_{a_1,\ a_2}$ 视为与 $(a_1,\ a_2)$ 相关联的联合谱测度，必须满足：

$$\tau(f(a_1, a_2)) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \mathrm{d}\nu_{a_1,a_2}(x),$$

对于比绝对值 $|\cdot|$更一般的一类函数 f。定义并研究非交换随机变量对的这类联合谱测度将很有意义。

4.3 自由 zonotope

例 20–22 给出了由自由随机变量元组确定的非交换带状体。受此观察启发，我们将自由性的假设纳入非交换带状体的定义，从而得到以下称为 *free zonoids* 的非交换带状体子类。由于自由性带来了额外的结构，在少数情况下，我们能够明确刻画这些凸体的支撑函数，例如上文的例 20 以及后文的例 24。

定义 23 *Let $a_1 \quad a_d$ be a d-tuple of free random variables in a C^*-probability space $\mathcal{A}$ τ and fix。$(,\ldots,)$ (,) some $v \in \mathbb{R}^d$. The associated NC zonoid with support function*

$$h_Z(u) := \langle v, u\rangle + \tau\left(\left|\sum_{i=1}^{d} u_i a_i\right|\right), \quad u \in \mathbb{S}^{d-1},$$

is called a 自由带状体。

自由带状体与非交换带状体（以及运算多面体和运算子多胞体）的一个重要区别在于，自由带状体这一类在仿射变换下并不封闭。原因是，一个由自由随机变量组成的 d 元组在一个线性映射作用下不会继续保持自由。

作为例 20–22 之外的补充示例，接下来我们考虑一个自由带状体，它由若干自由但非同分布的随机变量进行线性组合得到。

例 24. *Let $u \in \mathbb{S}^1$ and $\beta \in \mathbb{R}$. Consider the random matrix*

$$B = u_1B_1 + u_2\beta B_2,$$

where B_1 is a shifted $\kappa m \times \kappa m$ Wishart matrix satisfying

$$B_1 = \frac{1}{m\sqrt{\kappa}} W^T W - I,$$

for an i.i.d. Gaussian matrix $W \in \mathbb{R}^{m\times\kappa m}$ and $\kappa m \times \kappa m$ identity matrix I, and B_2 is an $\kappa m \times \kappa m$ GOE matrix. Asymptotically as $m \to \infty$ B converges to the free additive convolution of a (shifted) Marchenko-Pastur law, and a semicircle law.

The support function of the associated free zonoid is given by $h_Z(u) = \int_{\mathbb{R}} |x| \rho(x,u)\,dx$ *where the explicit form of the density* $\rho(x,u)$ *may be obtained by appealing to [11, (A.2)] through the connection observed in [22].*

Specifically, in terms of the reparametrization $\gamma = \frac{1}{\kappa^{1/2}}a = \frac{u_1}{\kappa^{1/2}}$, *and* $\nu = \frac{1}{\kappa}\left(u_1^2 + (1-u_1^2)\beta^2\right)$,

$$\rho(x;u) = \begin{cases} 0, & D \le 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}}\left((\sqrt{D}+R)^{1/3} + (\sqrt{D}-R)^{1/3}\right), & D > 0, \end{cases}$$

where

$$D = Q^3 + R^2, \qquad R = (9\alpha_2\alpha_1 - 27\alpha_0 - 2\alpha_2^3)/54, \qquad Q = (3\alpha_1 - \alpha_2^2)/9,$$

and

$$\alpha_2 = \frac{(\nu + ax)\gamma}{a(\nu - a^2)}, \qquad \alpha_1 = \frac{(a+\gamma x)\gamma}{a(\nu-a^2)}, \qquad \alpha_0 = \frac{\gamma^2}{a(\nu-a^2)}.$$

Figure 6 gives illustrations of these free zonoids for several choices of κ *and* β.

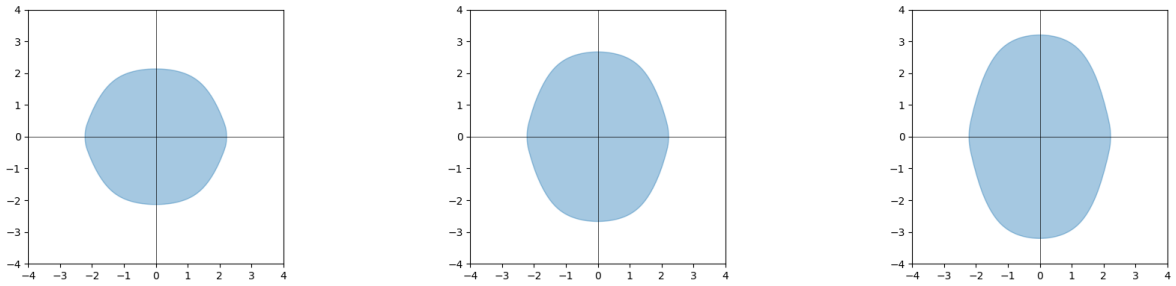


图 6: 例 24 中参数为 $\kappa = 5$、$\beta = .75$、1 和 1.25 的 $\mathbb{R}^2$ 非交换 zonotope，从左至右 t.

在前面的例子以及例 20–22 中，自由 zonotope 都是通过一列 m算子带状体的极限得到的。下面的结果表明，这种构造实际上适用于任意自由 zonotope，因为所有此类带状体都可以通过一列随着 m 增大的 m算子带状体的极限得到。

命题 25. *Let* Z *be a free zonoid. There exists a sequence of* m*-operanoids* $\{Z_m\}_{m=1}^{\infty}$ *such that*

$$\lim_{m\to\infty} d_H(Z_m, Z) = 0.$$

在给出证明之前，我们回顾一下 Haar 酉元（定义见例 15）具有如下*liberation*性质：设 $(\mathcal{A}, \tau)$ 是一个 $C^\star$ 概率空间，且 a，b，$u \in \mathcal{A}$ 满足：u 是一个 Haar 酉元，而 a，b 是与 u自由的自伴随机变量。那么，$ubu^\star$ 与 b 具有相同的分布，且与 a 自由。现在我们可以证明命题 25。

Proof. 设 Z 是由一组自由随机变量的 d 元组 $(a_1, \ldots, a_d)$ 参数化的自由 zonotope，其中 a_i 的谱分布记为 ν_i。对于每个 m，令 $D_1^{(m)}, \ldots, D_d^{(m)}$ 为一组独立随机对角矩阵的 d 元组，其中 $D_i^{(m)}$ 的对角元是分布为 ν_i 的独立同分布随机变量，定义在由 $\frac{1}{m}$ 归一化的 $\mathbb{R}$ 上。我们可以应用渐近解放技术，得到一个具有相同边缘分布的自由随机矩阵 d 元组：

$$\left(U_1^{(m)} D_1^{(m)} (U_1^{(m)})^\star, \ldots, U_d^{(m)} D_d^{(m)} (U_d^{(m)})^\star\right),$$

其中 $U_i^{(m)}$ 是彼此之间以及与对角矩阵 $D_i^{(m)}$ 相自由的 Haar 酉随机矩阵。因此，当 $m \to \infty$ 时，这个 d 元组依分布收敛到 $(a_1, \ldots, a_d)$，它是 $(\mathcal{A}, \tau)$ 中的一组自由随机变量，并且 a_i 的谱分布为 μ_i。对于每个 m，令 Z_m 为由上述 d 元组参数化的自由 zonotope。最后的结论由应用命题 19 得出。 □

注记 26 *The question of which NC zonoids can be approximated by operanoids is related to the Connes embedding conjecture which was recently proved to be false [19]. In particular a result of Voiculescu [39] says that if the Connes embedding conjecture is false, then there exists a d-tuple of NC random variables* $(a_1, \ldots, a_d) \in (\mathcal{A}, \tau)$ *that cannot be approximated in distribution by d-tuples of* $m \times m$ *matrices as* $m \to \infty$. *This does not necessarily imply the existance of NC zonoids that cannot be approximated by limits of m-operanoids since the convergence of NC zonoids in Hausdorff distance does not imply convergence in distribution of the underlying random variables so this remains an interesting open problem.*

5 面向应用

本节将讨论先前使用带状体的方法在算子体和非交换 zonotope 上的推广，作为探讨应用的初步步骤。具体而言，在第 5.1 节中，我们将介绍一种类似提升 zonotope 的表示方法，用于表示高维数据分布；在第 5.2 节中，我们将描述算子带状体在随机几何中的应用。在此过程中，我们还将讨论一些有待进一步研究的开放问题。

5.1 非交换概率分布的表示

根据定义，算子体或非交换 zonotope 可以视为底层 d元随机矩阵或非交换随机变量的分布参数。显然，多个分布可能对应同一个算子体或非交换 zonotope。然而，对于带状体而言，可以为 $\mathbb{R}^d$ 中的给定随机向量定义一种 $unique$ 带状体，并将其用作该随机向量概率分布的表示。在本节中，我们首先介绍这种表示，称为提升 zonotope；它在 $\mathbb{R}^d$上的概率测度空间中带有相应的度量和随机序。随后，我们将通过提升 zonotope 的算子体和非交换 zonotope 推广，定义一种由 d元随机矩阵（更一般地说，非交换随机变量）的联合分布所确定的新解析对象。

5.1.1 提升 zonotope

给定 $\mathbb{R}^d$上的一个概率测度，该测度有许多表示方式，例如累积分布函数（CDF）或特征函数；这些表示各自具有吸引人的性质，可用于不同的场景。例如，CDF 可用于定义 $\mathbb{R}^d$上概率分布之间的柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫度量，以及基于这些函数泛函序关系的随机序。在此，我们回顾一种基于带状体的概率测度凸几何表示，它展现出许多吸引人的性质。具体而言，对于 $\mathbb{R}^d$上的概率测度 μ， $lift\ zonoid$ 是通过对线段 $\mathbb{E}([0,(1,\ X)])$ 取期望而得到的 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的凸体，其中 $X\sim\mu$ [20]。也就是说，提升 zonotope Z_μ 的支撑函数为

$$h_{Z_\mu}(u):=\int_{\mathbb{R}^d}\max\{0,\langle u,(1,x)\rangle\}\mathrm{d}\mu(x).$$

注意，这个带状体并非以原点为中心，而是以$_{1\ 2}(1,\int_{\mathbb{R}^d}x\mathrm{d}\mu(x))$为对称中心。多元概率分布与其提升 zonotope 之间存在一一对应关系，因此，这个凸体是底层概率测度的一种表示。

提升 zonotope 可用于定义概率测度之间的度量以及一种随机序。具体而言，概率测度之间的度量由对应的两个提升 zonotope 之间的豪斯多夫距离定义，即

$$d(\mu,\nu)=d_H(Z_\mu,Z_\nu):=\sup_{u\in\mathbb{S}^d}|h_{Z_\mu}(u)-h_{Z_{\nu(u)}}|.$$

随机序　　通过提升 zonotope 的包含关系来定义，即 $\mu\le\nu$ 当且仅当 $Z_\mu\subseteq Z_\nu$。这

提升 zonotope 表示

我引出了一种中心区域和数据深度的概念 [26]。

与累积分布函数相比，提升带状体表示的一个优点是，它在概率测度的某些变换下具有良好的性质。例如，提升带状体在概率测度的线性变换下具有等变性（参见 [26]中的命题 2.24）。关于提升带状体的更多性质及其在统计学中的应用，请参阅专著 [26]。

5.1.2 提升算子带状体和提升 NC zonotope

对于 $\mathbb{H}^m$中 d元自伴矩阵空间上的概率测度，提升带状体有一种自然的推广。首先，我们注意到，可以将一个算子体（其中心不一定在原点）定义为一个凸体 Z，其支撑函数为

$$h_Z(u)=\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left(\left(\sum_{i=1}^d u_iA_i\right)_+\right)\right],\quad u\in\mathbb{S}^{d-1},\tag{9}$$

其中 $(A)_+$ 是矩阵 A的正部。如果 Z 具有对称中心 x_0，我们可以通过定义 $Z_0:=Z-x_0$，将 Z 置于原点处。正如 [6], 中的推论 2.4所示，我们得到 Z_0 的支撑函数为：

$$\begin{aligned}h_{Z_0}(u)&=\frac{1}{2}\left(h_{Z_0}(u)+h_{Z_0}(-u)\right)=\frac{1}{2}\left(h_Z(u)-\langle x_0,u\rangle+h_Z(-u)+\langle x_0,u\rangle\right)\\&=\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left(\left(\sum_{i=1}^d u_iA_i\right)_+\right)\right]+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left(\left(\sum_{i=1}^d -u_iA_i\right)_+\right)\right]=\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^d u_iA_i\right\|_1\right],\end{aligned}$$

这与我们最初对以原点为中心的算子带状体的定义相符。上文定义的凸体 Z 确实关于某个 x_0中心对称，证明见以下命题。

命题 27。 *The operanoid Z with support function (9) is centrally symmetric around $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\mathbb{E}[\mathbf{a}^{(j)}]$, where $\mathbf{a}^{(j)}=(A_1^{(jj)},\ .....,\ A_d^{(jj)})\in\mathbb{R}^d$ is the vector of the jth diagonal entries of the parametrizing matrices.*

Proof. 对于 $t\in\mathbb{R}$，我们有 $\max\{t,0\}-\frac{1}{2}|t|=\frac{1}{2}t$，这意味着：

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\left(\sum_{i=1}^{d}u_iA_i\right)_+\right)&=\sum_{j=1}^{m}\max\left\{\lambda_j\left(\sum_{i=1}^{d}u_iA_i\right),0\right\}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2}\lambda_j\left(\sum_{i=1}^{d}u_iA_i\right)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left|\lambda_j\left(\sum_{i=1}^{d}u_iA_i\right)\right|\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sum_{i=1}^{d}u_iA_i\right)+\frac{1}{2}\left\|\sum_{i=1}^{d}u_iA_i\right\|_1=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\langle u,\mathbf{a}^{(j)}\rangle+\frac{1}{2}\left\|\sum_{i=1}^{d}u_iA_i\right\|_1.\end{aligned}$$

对两边取期望可得 $Z=Z_0+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\mathbb{E}[\mathbf{a}^{(j)}]$ 对于 Z_0 关于原点中心对称的凸体，这证明了该结论。

□

现在定义 与一组自伴随机矩阵相关联的凸体，这些矩阵推广了 提升 zonotope。 以下概念：

定义 28。 *Let $A_1,\ .....,\ A_d$ be a d-tuple of random matrices in $\mathbb{H}^m$. The associated*提升运算体 *is the convex body in $\mathbb{R}^{d+1}$ with support function*

$$h_Z(u):=\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left(u_1I+\sum_{i=2}^{d+1}u_iA_i\right)_+\right]$$

where I is the $m\times m$ identity matrix.

更一般地，对于由 d 个非交换随机变量组成的元组，我们定义提升带状体表示的以下推广。

定义 29。 *Let $a_1,\ .....,\ a_d$ be a d-tuple of NC random variables in a $C^\star$ probability space$(\mathcal{A},\ \tau)$. The associated* 提升非交换带状体 *is the convex body in $\mathbb{R}^{d+1}$ with support function*

$$h_Z(u):=\frac{1}{2}\tau\left(\left|u_1\mathbf{1}+\sum_{i=2}^{d+1}u_ia_i\right|\right)+\frac{1}{2}\tau\left(u_1\mathbf{1}+\sum_{i=2}^{d+1}u_ia_i\right),$$

where $\mathbf{1}$ is the identity element of $\mathcal{A}$.

如前所述，提升带状体表示的用途源于这样一个事实：这个凸体能够唯一确定底层 d 元随机变量的分布。此外，还可以利用这一表示在 $\mathbb{R}^d$ 上的概率空间中定义一种度量，并具有多种应用。因此，我们首先希望回答以下基本问题。

问题 1。 *Does the lift NC zonoid uniquely characterize the joint distribution of the underlying NC randomvariables?*

一般而言，这个问题仍未解决，但有几种情况可以给出肯定答案，因为提升 NC zonotope 对应于提升 zonotope。首先，考虑 $d=1$ 和一个确定性的自伴非交换随机变量 $a\in$（$\mathcal{A}$，τ）的情形。它所对应的提升 NC zonotope Z 在 $\mathbb{R}^2$ 中的支撑函数为

$$\begin{aligned}h_Z(u)&=\frac{1}{2}\tau\left(|u_1\mathbf{1}+u_2a|\right)+\tau(u_1\mathbf{1}+u_2a)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|u_1+u_2x|\mathrm{d}\nu(x)+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(u_1+u_2x)\mathrm{d}\nu(x)\\&=\int_{\mathbb{R}}\max\{0,u_1+u_2x\}\mathrm{d}\nu(x),\end{aligned}$$

其中，ν 是 a 的谱分布，定义见第 4.1 节。因此，Z 是与 ν 相关联的提升 NC zonotope。根据 [26]中的定理 2.21，Z 唯一确定分布 ν。

现在考虑 $d=2$ 以及 $\mathbb{H}^m$ 中的两个矩阵 A 和 B 的情形。与之对应的提升 NC zonotope Z 在 $\mathbb{R}^2$ 中的支撑函数为

$$h_Z(u)=\frac{1}{m}\mathrm{Tr}\left(u_1I+u_2A+u_3B\right)_+=\int_{\mathbb{R}^2}\max\{0,u_1+u_2x+u_3y\}\mathrm{d}\mu_{A,B}(x,y),$$

其中 $\mu_{A,\ B}$ 是定理 1.4（见 [15]）中与 A 和 B 相关联的迹联合谱测度。这表明，Z 是 $\mathbb{R}^3$ 中的测度 $\mu_{A,\ B}$ 在 $\mathbb{R}^2$上的提升 zonotope。因此，A 和 B 的迹联合谱分布由提升 NC zonotope 唯一确定。

问题 2. *What is the relationship between convergence in the Hausdorff metric of the lift NC zonoid to convergence in the sense of moments for a collection of NC random variables?*

在第4.2节中，我们讨论了矩意义下的收敛如何蕴含一组非交换随机变量所对应的非交换带状体在豪斯多夫度量下收敛，但显然反向推论并不成立。不过，如果提升 NC zonotope 表示一个由 d 个自伴非交换随机变量组成的元组的分布，我们便可以利用它们所对应的提升 NC zonotope 之间的豪斯多夫距离，研究度量非交换随机变量间距离的度量。特别是，若能推广关于提升 zonotope 的一个众所周知的结果，将会很有意义：该结果指出，在温和条件下，所对应的提升 zonotope 收敛蕴含所对应的随机向量依分布收敛 [26, 定理 2.30]。

5.2 平稳泊松超曲面

本节探讨算子带状体在随机几何中的潜在应用；在随机几何中，带状体在参数化随机几何模型方面发挥着重要作用。我们首先回顾带状体在随机超平面模型中的具体应用，然后介绍一种随机超曲面新模型，该模型与算子带状体存在类似的关联。

5.2.1 泊松超平面过程

Poisson hyperplane process 是超平面空间 $\mathcal{H}^d$ 中的一个泊松点过程，其中这些超平面位于 $\mathbb{R}^d$内。我们用法向量 $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ 和距离 $t \in \mathbb{R}$ 来参数化超平面 $H \in \mathcal{H}^d$，并定义 $H := H($ u $=$ $\{x \in \mathbb{R}^d \ \ \langle x\ u\rangle = t\}$ $\Phi = \{t_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ ， $t)$: ， 。

随机超平面过程可以按如下方式构造。设 $\mathbb{R}$ 中有一个参数为 $\gamma > 0$ 的齐次泊松过程，并令 $\{u_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$为一组与 Φ 独立同分布的单位向量，其分布为 ϕ，这是单位球面上的一个偶概率测度。超平面集合 $X = \{H(u_j,\ t_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 定义了一个强度为 γ、方向分布为 ϕ的 *stationary Poisson hyperplane process*。有关这些模型的更多背景知识，请参阅专著 [18] 。

平稳泊松超平面过程 X 的 *associated zonoid* 是带状体 Π，其支撑函数为

$$h_\Pi(v) := \frac{\gamma}{2}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\langle u, v\rangle| \mathrm{d}\phi(u).$$

X 的分布完全由 Π决定，而该过程的某些统计特征则由这个确定性凸体的几何性质描述。例如，与一维线段 $[-v, v]$ 有非空交集的 X的超平面数量服从泊松分布，其参数由 Π 在 v处的支撑函数给出:

$$\mathbb{E}[\#\{X \cap [-v, v]\}] = h_\Pi(v). \tag{10}$$

相应的带状体也与 X的 *zero cell* 的分布密切相关。它是诱导的随机镶嵌中包含原点的胞腔，定义为

$$Z_0 := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} H^-(u_i, t_i),$$

其中， $H^-(u,\ t)$是由超平面 $H(u,\ t)$定义且包含原点的闭半空间。举例来说，已知零胞腔的期望体积等于相应带状体的极性对偶体 [30,(10.49)]的体积乘以一个常数。

5.2.2 泊松超曲面模型

现在，我们将定义一个随机超曲面族模型，它推广了平稳泊松超平面过程的构造，并证明可以定义一个满足类似于性质 (10) 的相关算子体。

首先，令 $\Phi = \{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 为定义在 $[0, \infty$上、强度为 γ 的泊松点过程。对于每个 $j \in \mathbb{N}$，令 $\{U_i^{(j)}\}_{i=1}^d$为 $\mathbb{H}^m$ 中一个由 d 个随机矩阵组成的独立集合，使得 $\sum_{i=1}^d (U_i^{(j)})^\star U_i^{(j)} = \sum_{i=1}^d U_i^{(j)} (U_i^{(j)})^\star = I$，且该集合与 Φ 独立。定义随机超曲面

$$X_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \prod_{j\in\mathbb{N}} \det\left(m t_j I - \sum_{i=1}^d x_i U_i^{(j)} \right) = 0 \right\}. \tag{11}$$

于是我们得到以下命题。

命题 30。 *For the random hypersurface X_m as defined above, there exists an m-operanoid Π such thatfor all $v \in \mathbb{R}^d$,*

$$\mathbb{E}[\#(X_m \cap [-v, v])] = h_\Pi(v).$$

Proof. 我们首先注意到， $\left|\lambda_k\left(\sum_{i=1}^d v_i U_i\right)\right| \geq mt_j$ 对于某个 $j \in \mathbb{N}$， $k \in [m]$ 当且仅当存在一个$s \in [-1, 1]$ 使得

$$mt_j - \lambda_k\left(\sum_{i=1}^d s v_i U_i\right) = 0,$$

由此可得 $sv \in X_m$。因此，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\#(X_m \cap [-v, v])] &= \mathbb{E}\left[\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^m \mathbf{1}\left\{\left|\lambda_k\left(\sum_{i=1}^d v_i U_i^{(j)}\right)\right| \geq mt_j\right\}\right] \\ &= \gamma\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}}\sum_{k=1}^m \mathbf{1}\left\{m^{-1}\left|\lambda_k\left(\sum_{i=1}^d v_i U_i^{(j)}\right)\right| \geq s\right\}\mathrm{d}s\right] = \frac{\gamma}{m}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^m\left|\lambda_k\left(\sum_{i=1}^d v_i U_i^{(j)}\right)\right|\right],\end{aligned}$$

这是一个 m-算子体的支撑函数，该算子体对应于由随机矩阵组成的 d 元组 (γU_1，.....， γU_d)。这里我们应用 Campbell 定理 [30, 定理 3.1.2] 得到了第三个等式。 □

关于这一模型，还有许多尚未解决的问题。下面列出其中几个，首先提出一个基本问题，它涉及如何将上述命题中定义的 m-算子体与随机超曲面的分布联系起来。

问题 3. *Is there a one-to-one correspondence between m-operanoids and the distribution of a Poisson hypersurface as defined in* (11)*?*

另一个问题是，我们能否将相关带状体与泊松超平面过程的零胞腔之间的联系扩展到这些随机超曲面。事实上，我们可以类似地将泊松超曲面模型的 *zerochamber* 定义为集合

$$S_0 := \bigcap_{j\in\mathbb{N}}\left\{x \in \mathbb{R}^d : mt_j I - \sum_{i=1}^d x_i U_i^{(j)} \succcurlyeq 0\right\}.$$

由高斯随机矩阵定义的随机谱面体此前已在 [28]中得到研究。其中探讨的问题启发了对 S_0 的类似研究，具体总结如下列开放性问题。

问题 4。 *How does the distribution of the volume and boundary structure of the zero chamber of a Poisson hypersurface depend on the properties of the associated m-operanoid?*

6 讨论与未来工作

我们引入了一类称为算子多胞体的凸体，它们通过对算子范数球的仿射像取闵可夫斯基和而得到。算子多胞体在豪斯多夫度量下的极限称为算子带状体。这些定义推广了佐诺多胞体和带状体的定义；后两者是具有广泛应用的结构化凸体。算子带状体可以被视为对随机矩阵组提供凸几何摘要；基于这一观点，我们描述了非交换带状体，它们为一组非交换随机变量提供凸几何摘要。我们建立了所有这些凸体的基本性质，并初步探索了它们在统计学和随机过程中的潜在应用，推广了以往涉及带状体的方法。最后，我们列出一些与算子带状体和非交换带状体的凸几何、组合及计算方面有关的开放性问题:

显式构造哪些自由 zonotope 族的相关支撑函数具有闭式表达? 是否存在不是自由 zonotope、但可以表示为算子带状体极限的非交换带状体? 或者，是否存在无法表示为算子带状体极限的非交换带状体?

面结构问题 是否存在一种算子多胞体的面刻画，类似于将佐诺多胞体刻画为具有中心对称面的多胞体 [12, 31]? 关于非交换带状体和自由 zonotope 的面结构，我们能说些什么?

优化问题 从优化的角度来看，算子多胞体是一类易于处理的凸体，因为可以通过特征值计算来完成算子多胞体上的线性优化。我们能否借助定理 8，通过谱计算近似求解算子带状体上的优化问题？更广泛地说，哪些凸体族能够被算子带状体良好近似？因为这类凸体也适用于通过定理 8 高效地进行近似优化。

几何问题 佐诺多胞体与超平面排列 [31]互为对偶；运算多面体对应的类比对偶性是什么？是否存在适用于算子带状体的布伦-明可夫斯基不等式特例，类似于带状体的相关特例 [36]？是否存在一种类似投影体 [9] 、且适用于算子带状体的概念?

致谢

作者感谢 Jorge Garza-Vargas 和 Oscar Leong 的宝贵讨论。EO 的研究部分由美国国家科学基金会 DMS-2402234 号拨款资助。VC 的研究部分由美国国家科学基金会 DMS-2502377 号拨款和美国空军科学研究办公室 FA9550-23-1-0204 号拨款资助。

参考文献

[1] T. Alamo、J. M. Bravo 和 E. F. Camacho。利用佐诺多胞体进行保证状态估计。 *Automatica*，41 6 1035 1043，2005（）：– June 。[2] Matthias Althoff 和 Bruce H. Krogh。用于高效计算可达集的 zonotope 束。在*IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*，第 6814–6821 页，Orlando，FL，美国，2011 年 12 月。IEEE。[3] Zvi Artstein 和 Richard A. Vitale。随机紧集的强大数定律。*The Annals of Probability* 3 5 879 882, 1975 ，

（）：–。[4] Z. Bai 和 J.W. Silverstein。 *Spectral Analysis of Large Dimensional Random Matrices*。《施普林格统计学丛书》。施普林格，纽约，NY，2010。[5] Marshall Bern 和 David Eppstein。在 zonotope 上进行优化及训练支持向量机。在 Frank Dehne、J¨org-R¨udiger Sack 和 Roberto Tamassia（编），*Algorithms and Data Structures*，第 111–121 页，柏林、海德堡，2001 年。施普林格柏林海德堡。[6] Ethan D. Bolker。一类凸体。

Transactions of the American Mathematical Society 145 23, , ： 。1969

[7] Ethan D. Bolker。带状体问题。 *The American Mathematical Monthly*，78(5):529–531，1971。[8] J. Bourgain、J. Lindenstrauss 和 V. Milman。用 zonotope 逼近分圆体。 *Acta Mathematica*，162 0 73 141，1989（）：–。[9] Jean Bourgain 和 Joram Lindenstrauss。投影体。在 *Geometric Aspects of Functional Analysis: Israel Seminar (GAFA) 1986–87* 250 270 2006 ，第– 页。施普林格，。[10] Mireille Capitaine 和 Muriel Casalis。通过广义矩研究高斯矩阵和 Wishart 矩阵的渐近自由性。贝塔随机矩阵的应用。 *Indiana University mathematics journal*，第 397–431 页，2004。[11] Xiuyuan Cheng 和 Amit Singer。随机内积核矩阵的谱。*Random Matrices: Theory and Applications* 2 04 1350010, 2013 ，

（）：。[12] HSM Coxeter。利用射影图对 zonotope 多面体进行分类。

Journal de Math. Pures ，：–。*Appl* 41 137 156, 1962

[13] Fulvio Gesmundo 和 Chiara Meroni。Discotope 的几何。 *Matematiche*，77(1):143–171，2022 年 7 月。[14] Leonidas J. Guibas、An Nguyen 和 Li Zhang。将 zonotope 作为包围体。在 *Proceedings of the Fourteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* 03, 803 812, 2003 ，

SODA ’ 页–，美国，。工业与应用数学学会。[15] Otte Hein¨avaara。迹联合谱测度。*Inventiones mathematicae*，239(2):505–526，2025。[16] Otte Hein¨avaara。Schatten-3 空间中的平面。*Journal of Functional Analysis*，287(2):110469，2024。[17] Daniel Hug 和 Paul A Reichert。在一类新的凸体中亚历山德罗夫–芬切尔不等式的极值元。 *Advances in Geometry*，25(1):13–38，2025。[18] Daniel Hug 和 Rolf Schneider。 *Poisson hyperplane tessellations*。施普林格，瑞士，2024。

[19] Zhengfeng Ji、Anand Natarajan、Thomas Vidick、John Wright 和 Henry Yuen。Mip* = *Communica-* re。 , *tions of the ACM* 64 11 131 138, 2021 () : –。[20] Gleb Koshevoy 和 Karl Mosler。提升 zonotope、随机凸包与随机向量的变异性。*Bernoulli*, 4(3):377–399，1998。[21] Joram Lindenstrauss。关于具有有限维值域的算子的延拓。*Illinois Journal of Mathematics* 8 3 488 499, 1964 , () : –。

[22] Yue M. Lu 和 Horng-Tzer Yau。具有多项式缩放的随机内积核矩阵谱的等价原理。 *The Annals of Applied Probability*，35(4):2411 – 2470，2025。[23] Vladimir A Marˇcenko 和 Leonid Andreevich Pastur。一些随机矩阵集合的特征值分布。 *Mathematics of the USSR-Sbornik*，1(4):457，1967。[24] Jiˇrı Matouˇsek。zonotope 逼近的改进上界。 *Acta Mathematica*，177(1):55 – 73，1996。[25] Peter McMullen。关于 zonotope。 *Transactions of the American Mathematical Society*，159:91–109，1971。[26] Karl Mosler。 *Multivariate Dispersion Central Regions and Depth* 165 *Lecture Notes in Statis-* , , , 第 *tics* 2002 卷。施普林格，纽约，NY，。[27] Alexandru Nica。对称群中随机酉矩阵的渐近自由族。 *Pacific Journal of Mathematics* 157 2 1993 , () , 。

[28] Khazhgali Kozhasov、Paul Breiding 和 Antonio Lerario。随机谱面体。 *SIAM Journal on Optimization* 29 4 2608 2624, 2019 , () : –。

[29] Rolf Schneider。 *Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory*。《数学及其应用百科全书》。剑桥大学出版社，剑桥，第 2 版，2013。[30] Rolf Schneider 和 Wolfgang Weil。 *Stochastic and integral geometry*。施普林格柏林，海德堡，2008。[31] Geoffrey C Shephard。关联 zonotope 的组合性质。 *Canadian Journal of Mathematics* 26 2 302 321, 1974 , () : –。

[32] Jonathan W. Siegel。《Zonoid 的最优逼近与浅层神经网络的一致逼近》。 *Constructive Approximation*, 2025。[33] W. So。Schatten p-范数的面结构。 *Linear and Multilinear Algebra*，27:207–212，1990。[34] Gilbert W. Stewart 和 Ji-guang Sun。 *Matrix Perturbation Theory*。Academic，波士顿，1990。[35] Terence Tao。 *Topics in random matrix theory*，第 132 卷。美国数学会，普罗维登斯，RI，2023。[36] Ramon van Handel。带状体的局部对数布伦-明可夫斯基不等式。在 *Geometric Aspects of Functional Analysis: Israel Seminar (GAFA) 2020-2022* 355 379 2023 ，第–页。施普林格，。[37] Roman Vershynin。 *High-Dimensional Probability: An Introduction with Applications in Data Science*。剑桥大学出版社，剑桥，2020。[38] Richard A. Vitale。随机行列式绝对值的期望与带状体。 *The Annals of Applied Probability* 1 2 293 300, 1991 , () : –。

[39] D. Voiculescu。自由概率论中熵与 Fisher 信息测度的类比，II。*Inventiones mathematicae*，118:411–440，1994。[40] D. Voiculescu。 *Lectures on Probability Theory and Statistics*，第 1738 卷，章节《自由概率论讲义》，第 280–349 页。施普林格柏林，海德堡，1998。[41] G¨unter M Ziegler。 *Lectures on polytopes*。施普林格纽约，纽约，1995。