arXiv:2602.08122v1 [math.CO] 8 Feb 2026

通过 Schur 多项式高效验证 Hankel 矩阵的 k 符号一致性 *

ChristianGrussler† 和 TobiasDamm ‡

2026年2月10日

摘要

我们研究如何证明矩阵具有（严格） k 符号一致性，即判断其所有 k 阶子式是否具有相同的（严格）符号。尽管这一问题通常具有较高的组合复杂度，但我们证明，对于 Hankel 矩阵，该问题可以大大简化：我们的充分条件只需检验一个具有 k 行的重塑Hankel矩阵的 k 阶子式。值得注意的是，将这一充分条件应用于汉克尔算子时，它同时也是必要条件。此前，只有针对（严格） k 正 Hankel 矩阵及算子的情形，才有类似结果；在这类情形中，所有不超过 k 阶的子式都具有相同的（严格）符号。

更具体地说，我们推导出一个公式，将 Hankel 矩阵的 k 阶子式表示为具有连续行指标的 k 阶子式的非负整数线性组合。推导过程中，我们运用舒尔多项式理论证明，任意矩阵的 k 阶子式都可以表示为行连续 k 阶子式的非负整数线性组合；这里的子式由互不相同的列构成，且各列对应的连续行指标不必相同。对于 Hankel 矩阵，这些子式与通常具有连续行指标的 k 阶子式相同，至多相差列交换所导致的符号变化。随后，我们通过证明某些带符号的非负整数系数之和等于相应的 Littlewood–Richardson 系数，得出主要结果。在我们研究的问题中，这些系数的非负性确保带负号的列置换会被带正号的列置换抵消。我们的结果还可自然推广到 Toeplitz 矩阵及其算子，并给出了循环矩阵的一个部分类比结果。

1 引言

线性算子的全正性理论在过去几个世纪中吸引了各个领域研究者的关注。在非负矩阵的语境下，正性指将非负向量锥映射到自身的矩阵所具有的性质。这一概念出现在概率论（马尔可夫链）、经济学和生物学（区室模型）、统计学（随机过程）、图论（邻接矩阵）等领域，其中对矩阵元素非负的限制反映了概率、种群、流量等不可能为负这一自然事实（例如，参见 [1,2, 15, 20]）。

然而，全正性框架也涵盖具有更一般不变性性质的映射，即变差缩减/界定性质，也就是减少或保持符号变化的次数（对于非负向量，该次数为零）。这种对非负矩阵理论的推广，隐含或明确地支撑着许多重要进展，其历史可追溯至笛卡尔符号法则（1637年） [4], 、相关的 Routh–Hurwitz 判据 [14], 、振动机械学 [6], 、样条理论 [7, 15], 、几何建模 [7, 13], ， 以及

*本研究是在第一作者担任简和拉里·谢尔曼研究员期间开展的。此外，本研究还获得以色列科学基金会的资助（项目编号：2406/22）。

†C. Grussler 任职于以色列理工学院斯蒂芬·B·克莱因航空航天工程学院，地址为以色列海法 3200003 cgrussler@technion.ac.il

‡T. Damm 任职于凯泽斯劳滕-兰道RPTU大学数学系，地址为德国凯泽斯劳滕 67663 t.damm@rptu.de

无处不在的凸性和单调性概念 [8, 15]。近年来，这一更广阔的视角在系统行为研究中日益受到关注（例如，[8, 11, 12, 17, 24–26]），在低复杂度建模领域亦是如此 [10, 18]。

“全正性”一词源于通过其子式的符号一致性来刻画这类线性映射 [11, 15]。若矩阵的所有 k 阶子式具有相同的（严格）符号，则称该矩阵为（严格） k-符号一致；若其阶数不超过 k 的所有子式均为（严格）正值，则称该矩阵为（严格） k-正；若对所有 k，该矩阵均为（严格） k-正，则称其为（严格）全正。由于子式的数量会随着矩阵维数呈组合式增长，这一框架在实际应用中的主要障碍是如何高效地进行认证。幸运的是，对于（严格） k-正性，在温和的假设下，只需检查阶数不超过 k 的连续子式是否（严格）为正即可；这些子式由连续的列指标和行指标构成 [11, 12, 15]。这不仅大幅降低了验证该性质的复杂度，将其应用于 Hankel 矩阵和算子时，还能得到精确且易于处理的刻画 [5,12, 20]。

本文证明，类似的简化也适用于（严格） k-符号一致的 Hankel 矩阵和算子。我们的主要贡献是给出一个显式公式，将 Hankel 矩阵的每个 k 阶子式表示为具有 k 行的重塑Hankel矩阵的 k 阶子式的非负整数线性组合。因此，只需验证这些 k 阶子式之间的（严格）符号一致性，即可得出原 Hankel 矩阵具有（严格） k-符号一致性。对于无穷维Hankel算子，重塑Hankel矩阵的所有 k 阶子式也都是该算子的 k 阶子式，因此这给出了一种充要刻画。特别是，我们的结果有助于应用 [19], ：该方法通过相关变换矩阵的全正性，刻画具有 k 行的矩阵的 k-符号一致性。最后，由于 Hankel 矩阵的列序反转会得到 Toeplitz矩阵，我们的结果也自然推广到 Toeplitz 情形，并部分推广到循环矩阵。

在推导过程中，我们使用代数组合学中的工具 [23] ，例如舒尔多项式、科斯特卡数和 Littlewood–Richardson 系数。具体而言，我们首先利用舒尔多项式证明，矩阵的 k 阶子式可以表示为行连续 k 阶子式的非负线性组合；也就是说，这些子式是在每一列中选取 k 个连续行得到的，而各列的行指标不必相同。对于 Hankel 矩阵，其结构使所有这类行连续子式都与从扩展/重塑Hankel矩阵的前 k 行构造的标准 k 阶子式（相差至多一个符号）相同。接着，我们利用 Littlewood–Richardson 系数的定义证明，由列置换产生的所有带符号项都会相互抵消，只留下连续行子式前的非负系数。由此得到所需公式，以及用于验证 k 符号一致性的高效证书。

本文其余部分安排如下：在第 2 节中介绍全正性和枚举组合学的相关预备知识后，我们将在第 3 节推导并阐释主要结果，最后在第 4 节总结全文。

2 预备知识

2.1 集合记号与序列

我们用 $\mathbb{Z}$ 表示整数集，用 $\mathbb{R}$ 表示实数集，其中 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 分别表示非负元素组成的子集；严格不等式对应的记号也用于表示正元素。对于 $k,\ l \in \mathbb{Z}$，若 $k \leq l$，则使用 $(k\colon l) = \{k, k+1, \ldots, l\}$。对于 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们定义以下r元组集合：

1. 所有满足 $(k : l)$ 的 r元组构成的集合记为 $(k\colon l)^r$。
2. 在 $(1\colon n)$ 上递增的 r 元组集合，由

$$\mathcal{I}_{n,r} := \{v \in (1:n)^r :\ v_1 < v_2 < \cdots < v_r\},$$

3. 在 $(0:n-1)$ 上弱递减的 r 元组集合，由

$$\mathcal{D}_{n,r} := \{v \in (0:n-1)^r : v_1 \geq v_2 \geq \cdots \geq v_r\}.$$

4. 与 $\lambda \in \mathcal{D}_{n,r}$ 相关的弱递减 r 元组集合为

$$\mathcal{D}_\lambda := \{v \in \mathcal{D}_{|\lambda|,r} : \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i - v_i) = 0\},$$

其中 $|\lambda| := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$。

全 1 的 r 元组记作 $\mathbf{1}_r$。对于两个 r 元组 λ 和 μ，我们定义它们的加法为 $\lambda + \mu = (\lambda_1 + \mu_1, \ldots, \lambda_r + \mu_r)$，类似地定义差 $\lambda - \mu$。若 λ 中的所有元素均为非负数，则称 $\lambda \geq 0$。此外，我们用 $\lambda^{\downarrow}$ 和 $\lambda^{\uparrow}$ 分别表示将 λ 按非递增顺序和非递减顺序排序后得到的 r 元组，并定义 $\max(\lambda) := (\lambda^{\downarrow})_1$。对于 $\lambda, \mu \in \mathcal{D}_{n,r}$，$\lambda \trianglerighteq \mu$ 表示在支配序中先于 λ 的 μ，即对于所有 $k \in (1:r)$，$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \geq \sum_{i=1}^{k} \mu_i$。

所有指标属于 $\mathbb{Z}$、取值属于 $\mathbb{C}$ 的序列集合定义为 $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$，类似地，我们定义 $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$、$\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{>0}}$ 和 $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{<0}}$。$x \in$ 如果对于所有 $t \in \mathbb{Z}$ 都有 $x_t = x_{t+T}$，则称 $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ 为 T-周期序列，而所有 T-周期序列的集合记作 $\ell_\infty(T)$。

2.2 矩阵

对于矩阵 $X = (x_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$，行 $\mathcal{I} \subset (1:m)$、列 $\mathcal{J} \subset (1:n)$ 所对应的子矩阵记作 $X_{(\mathcal{I},\mathcal{J})}$，此外我们也使用记号 $X_{(:,\mathcal{J})} := X_{((1:m),\mathcal{J})}$、$X_{(\mathcal{I},:)} := X_{(\mathcal{I},(1:n))}$。对于子向量，我们直接记作 $x_{\mathcal{I}}$。$X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的行列式记作 $|X|$。$X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 的（连续）j-子式是由 X 的（连续）j 列和 j 行构成的子式，即 $|X_{p,q}|$，其中 $p \in \mathcal{I}_{m,r}$、$q \in \mathcal{I}_{n,r}$（其中 $p = (p_1 : p_r)$ 且 $q = (q_1 : q_r)$）。列/行指标为 $(1:r)$ 的 j-连续子式称为 j-列/行初始子式。此外，对于 $p \in (1 : n-r)^r$ 和 $q \in \mathcal{I}_{n,r}$，我们称

$$\begin{vmatrix} x_{p_1+1,q_1} & \cdots & x_{p_r+1,q_r} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{p_1+r,q_1} & \cdots & x_{p_r+r,q_r} \end{vmatrix}$$

是一个行连续 r-子式，对应于 X。

2.2.1 结构化矩阵

转置的 Vandermonde 矩阵 $V_M(x) \in \mathbb{C}^{M \times n}$，长度为 M，变量为 $x \in \mathbb{C}^n$，定义如下

$$V_M(x) := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{M-1} & x_2^{M-1} & \ldots & x_n^{M-1} \end{bmatrix}.$$

对于 $g \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ 和 $t \in \mathbb{Z}$ 以及 $m,\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们定义Hankel 矩阵

$$H^g(t,m,n) := \begin{bmatrix} g_t & g_{t+1} & \cdots & g_{t+n-1} \\ g_{t+1} & g_{t+2} & \cdots & g_{t+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{t+m-1} & g_{t+j} & \cdots & g_{t+m+n-2} \end{bmatrix} \tag{1}$$

以及汉克尔算子 $\mathcal{H}^g:\ \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{<0}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 乘以

$$\mathcal{H}^g u := \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & \cdots \\ g_2 & g_3 & g_4 & \cdots \\ g_3 & g_4 & g_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_{-1} \\ u_{-2} \\ \vdots \end{bmatrix}. \tag{2}$$

类似地，对于 $t \in \mathbb{Z}$ 和 $m,\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们定义 Toeplitz 矩阵

$$T^g(t,m,n) := \begin{bmatrix} g_t & g_{t-1} & \cdots & g_{t-n+1} \\ g_{t+1} & g_t & \cdots & g_{t-n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{t+m-1} & g_{t+m-2} & \cdots & g_{t+m-n} \end{bmatrix} \tag{3}$$

以及*Toeplitz*算子 $\mathcal{T}^g:\ \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 通过

$$\mathcal{T}^g u := \begin{bmatrix} g_0 & g_{-1} & g_{-2} & \cdots \\ g_1 & g_0 & g_{-1} & \cdots \\ g_2 & g_1 & g_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \end{bmatrix}. \tag{4}$$

最后，对于 $g \in \ell_\infty(T)$，我们定义循环矩阵

$$C^g = \begin{bmatrix} g_0 & g_{T-1} & \cdots & g_1 \\ g_1 & g_0 & \cdots & g_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{T-1} & g_{T-2} & \cdots & g_0 \end{bmatrix} = T^g(0,T,T). \tag{5}$$

2.2.2 全正性

全正性框架刻画了具有所谓变差缩减和界定性质的线性映射，这些性质已应用于插值理论 [15, 21], 系统理论 [6, 10–12, 17, 25], 计算机视觉 [16], 稀疏优化 [18], 等领域。该框架的核心是以下矩阵概念。

定义 1. 设 $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$，且 $k \in (1:\min\{m,n\})$。那么， X 称为

- （严格） k-符号一致，如果 X 的所有 k-子式都具有相同的（严格）符号。
- （严格） k-正，如果对于所有 $j \in$ （1： k）， X 的所有 j-子式均为非负（正）。在 $k=\min\{m,n\}$ 的情况下， X 也称为（严格）全正。

尽管检验（严格）全正性通常具有组合复杂度，但在某些严格性假设下，只需检验多项式数量的 j-子式即可完成验证（例如，参见 [11, 命题 22 和 23]）。

命题 1。 设 $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$。则有如下结论：

1. 当且仅当 X 的所有行初始子式和列初始子式均为正时， X 才是严格全正的。

2. 若 X 使得 X 的所有 j 行与 j 列初始子式对所有 $j \in (1:\min\{n-1,m-1\})$均为正，且对 $j = \min\{n,m\}$均为非负，则 X 是全正的，且所有阶小于$\min\{n,m\}$ 的子式均为正。

采用重复的多德格森凝聚，如 [3], 中可以证明命题 1的总复杂度合计为 $\mathcal{O}(m^2n)$，若 $m \leq n$。类似于 [5, 定理 2 的证明。3], 命题 1 与 [12, 命题 8] 相结合，可得到如下（严格） k-正性证书。

命题2。设 $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $k \leq \min\{m,n\}$，使得

1. X 的所有 j 行、 j 列初始子式在 $j \in (1:k-1)$时均为正
2. X 的所有连续 k 子式均为非负（正）。

那么， X 是（严格） k-正的。在严格情形下，这些条件也是必要条件。

对于 Hankel 矩阵的特殊情形，可以利用 命题2 得到如下 k-正性证书（例如参见 [5, 定理 3。2] 或 [12, 定理 4]）。

推论 1。对于 $g \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, $1 \leq k \leq \min\{M,N\}$ 和 $t \in \mathbb{Z}$，以下条件等价：

1. $H^g(t,M,N)$ 是（严格） k-正的。
2. $H^g(t,M,N)$的所有连续 j-子式， $j \in (1:k)$，均为非负（正）。

命题 2也可用于通过以下从 n到 [19 的双射来验证符号一致性].

引理 1. 设 $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m > n$ 满足 $|X_{((1:n),(1:n))}| \neq 0$ 且

$$C := X_{((m-n+1:m),(1:n))} \left(X_{((1:n),(1:n))}\right)^{-1} K_n,$$

其中 $K_n = (k_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 定义为

$$k_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j-1} & i+j = n+1 \\ 0 & otherwise \end{cases}.$$

当且仅当 C 是（严格） n-正的， X 才是（严格） n-符号一致的。

这些结果可推广到相应的无限维线性算子（参见例如 [9, 12,15]）；对于汉克尔算子，这引出了以下概念。

定义 2。设 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$，则 $\mathcal{H}^g$ 称为

- （严格） k-符号一致的，如果 $H^g(1, N, N)$ 对于所有 $N \geq k$ 都是 k-符号一致的.
- （严格） k-正的，如果对于所有 $N \geq k$， $H^g(1, N, N)$ 都是（严格） k-正的。

对于 $\mathcal{T}^g$，采用类似的定义，只需将 $H^g(1, N, N)$ 替换为 $T^g(0, N, N)$。

根据推论 1，我们可以刻画 k-正性 $\mathcal{H}^g$。

推论2. 设 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$，且 $g \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$。那么，以下命题等价：

1. $\mathcal{H}^g$ 是（严格） k-正的。2. 对所有 $N \geq j$ 以及所有 $j \in (1:k)$， $H^g(1,j,N)$ 均为（严格） j-正的。3. 对所有 $j \in (1:k)$ 以及所有 $N \geq j$， $H^g(t,j,N)$ 的所有连续 j-子式均非负（正）。

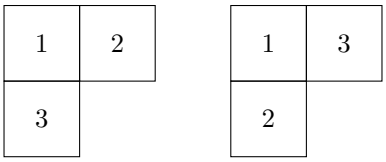

图 1：科斯特卡数 $K_{\lambda,\mu}$ 对应的半标准杨表，其中 $\lambda = (2,1,0)$ 且 $\mu = (1,1,1)$。每个杨表有三行方格，第一行包含 $\lambda_1 = 2$ 个方格，第二行包含 $\lambda_2 = 1$ 个方格，第三行包含 $\lambda_3 = 0$ 个方格，由此构成形状为 λ 的杨图。填入 μ_1 个整数 1、μ_2 个整数 2 和 μ_3 个整数 3，且杨表中的元素沿行不递减、沿列严格递增，恰有两种填法。

2.3 枚举组合学

对于一个 r 元组 $v = (v_i) \in (1\colon n)^r$，我们用 $\mathrm{Perm}(v)$ 表示所有互不相同的置换所组成的集合。如果 v 具有互不相同的元素，则置换 $p \in \mathrm{Perm}(v)$ 的奇偶性定义为 $\mathrm{sign}_v(p) = (-1)^m$，其中$m$ 是从 v 变换到 p 所需的对换次数。此外，若 $\sigma \in \mathrm{Perm}(\{1,\dots,r\})$，则$v_\sigma := (v_{\sigma_1},\dots,v_{\sigma_r})$ 表示 v 在 σ 下的置换。

所谓的 形状为 $\lambda \in \mathcal{D}_{n\text{ 的杨图}r}$ 是由一组左对齐方格构成的，其中第 j 行包含 λ_j 个方格（见 图 1）。相对于 科斯特卡数 $K_{\lambda,\mu}$，对于 $\lambda \in \mathcal{D}_{n,r}$ 和 $\mu \in \mathcal{D}_\lambda$，是形状为半标准杨表 λ 且权为 μ 的数量（见 图 1），也就是说，它统计了用介于 $(0\colon n-1)$ 之间的整数填充对应于 λ 的杨图的方式数，使得

I. 整数 i 恰好可以使用 μ_i 次。

II. 方格中的元素沿行（从左到右）不递减，沿列（从上到下）严格递增。

我们将使用 [23, 7.10.5 命题]中的以下简单事实。

引理2。 设$\lambda \in \mathcal{D}_{n,r}$ 和 $\mu \in \mathcal{D}_\lambda$，则

i. $K_{\lambda,\mu} > 0$ *if and only if* $\lambda \trianglerighteq \mu$.

ii. $K_{\lambda,\mu} = K_{\lambda-\lambda_r\mathbf{1}_r,\mu-\lambda_r\mathbf{1}_r}$.

类似地，对于满足 $\lambda \le \gamma$的$\lambda \in \mathcal{D}_{n,r}$ 和$\gamma \in \mathcal{D}_{m,r}$，形状为 γ/λ 的斜杨图定义为形状为 γ 的杨图与形状为 λ的杨图之差，即属于 γ但不属于 λ的方格集合。关于$\lambda \in \mathcal{D}_{n,r}$, $\mu \in \mathcal{D}_{l,r}$ 和 $\gamma \in \mathcal{D}_{\lambda+\mu}$ 的 Littlewood–Richardson 系数$c_{\lambda,\mu}^{\gamma}$，可定义为形状为 γ/λ、权为 μ的斜半标准杨表的数量（见图2），其中权按以下方式填入：

I. 整数 i 恰好可以使用 μ_i 次。II. 方框中的元素沿行（从左到右）不递减，沿列（从上到下）严格递增。III. 按从右到左、从上到下的顺序读取该杨表，得到的 r元组$(w_1,\dots,w_{\sum_{i=1}^r \mu_i})$是一个晶格词，即对于所有 $i \in (1 : \max(\mu) - 1)$，任意$(w_1,\dots,w_j)$，$j \in (1\colon \sum_{i=1}^r \mu_i)$中整数 i 出现的次数至少与整数 $i+1$ 一样多。

科斯特卡数和 Littlewood-Richardson 系数源于对所谓舒尔多项式的研究，其中舒尔多项式 $\lambda \in \mathcal{D}_{n,\ r}$ 关于变量 $x \in \mathbf{C}^r$，定义为如下比值

$$s_\lambda(x_1,\dots,x_r) := \frac{a_{(\lambda_1+r-1,\lambda_2+r-2,\dots,\lambda_r+0)}(x_1,\dots,x_r)}{a_{(r-1,r-2,\dots,0)}(x_1,\dots,x_r)} \tag{6}$$

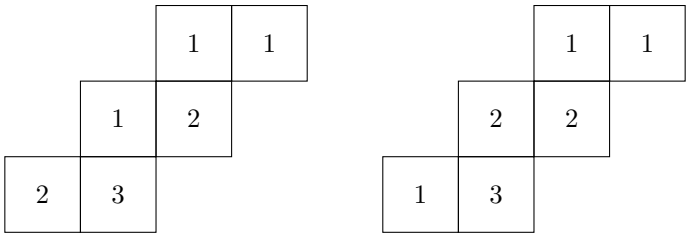

图 2：Littlewood-Richardson 系数 $c_{\lambda,\mu}^{\gamma}$ 对应的斜半标准杨表，其中 $\lambda = (2, 1, 0)$、$\mu = (3, 2, 1)$ 和 $\gamma = (4, 3, 2)$。形状为 λ 的杨图如图 1 所示，将其从形状为 γ 的杨图中删去，便得到形状为 γ/λ 的斜杨图。随后，恰有两种填法：填入 μ_1 个整数 1、μ_2 个整数 2 和 μ_3 个整数 3，使得表中的数沿行不减、沿列严格递增，并且从右到左、从上到下读取表中的数时，得到一个晶格词。左侧表中的晶格词性质意味着，(1)、(1, 1)、(1, 1, 2)、(1, 1, 2, 1)、(1, 1, 2, 1, 3) 和 (1, 1, 2, 1, 3, 2) 中，1 的个数不少于 2，且 2 的个数不少于 3；右侧表也同样如此。

其中，变量 a_μ 的交错多项式 $x \in \mathbb{C}^r$ 关于 $\mu \in (1\colon m)^r$ 定义如下：

$$a_\mu(x_1, \ldots, x_r) := \begin{vmatrix} x_1^{\mu_r} & \cdots & x_r^{\mu_r} \\ x_1^{\mu_{r-1}} & \cdots & x_r^{\mu_{r-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{\mu_1} & \cdots & x_r^{\mu_1} \end{vmatrix}.$$

采用记号 $x^p := \prod_{i=1}^r x_i^{p_i}$ 表示 $x \in \mathbb{C}^r$ 和 $p \in (1\colon m)^r$，由行列式的莱布尼茨公式可得

$$a_\mu(x) = \begin{cases} \sum_{p \in \mathrm{Perm}(\mu)} \mathrm{sign}_\mu(p) x^p & \text{if } \mu \text{ has distinct values,} \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \tag{7}$$

由 [23, 定理 A1.5.3 和式 (7.35)], ，可得对于 $\lambda \in \mathcal{D}_{n,\ r}$, $\mu \in \mathcal{D}_{l,\ r}$，有

$$s_\lambda(x) s_\mu(x) = \sum_{\gamma \in \mathcal{D}_{\lambda+\mu}} c_{\lambda,\mu}^{\gamma} s_\gamma(x) \tag{8}$$

and

$$s_\lambda(x) = \sum_{\mu \in \mathcal{D}_\lambda} K_{\lambda,\mu} m_\mu(x), \tag{9}$$

其中 单项式对称函数 $m_\mu(x)\colon = \sum_{p \in \text{置换集}(\mu)} x^p$。

3 主要结果

在 推论 1中，我们注意到，只需考察 k-正定性 Hankel 矩阵 $H^g(1,\ M,\ N)$ 中 $H^g(1,\ k,\ M+N-k)$ 内的（连续）子式，即可高效验证其性质。本文的主要目标是将这一结果推广到 k-符号一致的 Hankel 矩阵和算子。

3.1 行连续子式分解

我们的分析以如下分解为核心：将任意子式表示为行连续子式的非负整数线性组合。

定理 1. 令 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{M\times n}$, $M\geq n$, $s\in\mathcal{I}_{M,n}$ 和 $\lambda\in\mathcal{D}_{s_n,n}$ 由 $\lambda_i:=s_{n-i+1}-(n-i+1)$定义。于是，

$$|A_{(s,:)}|=\sum_{\mu\in\mathcal{D}_\lambda}K_{\lambda,\mu}D_\mu \tag{10}$$

其中

$$D_\mu:=\sum_{p\in\mathrm{Perm}(\mu)}\begin{vmatrix}a_{p_1+1,1}&\cdots&a_{p_n+1,n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{p_1+n,1}&\cdots&a_{p_n+n,n}\end{vmatrix} \tag{11}$$

且$K_{\lambda,\ \mu}$ 是与 λ 和 μ相关的科斯特卡数。

注 1。 只需考虑以下情形： $s_1=1$ 在定理1中；其余情形均可通过将 A 替换为$A_{((s_1:\ M),\ :)}$得到。这与等式$K_{\lambda,\ \mu}=K_{\lambda-\lambda_n\mathbf{1}_n,\ \mu-\lambda_n\mathbf{1}_n}$一致，该等式见引理2。对于特殊情形$n=2$，形状为$(s_2-2、0)$ 的杨图仅由一行组成，这意味着$K_{\lambda,\ \mu}=1$。因此，

$$\begin{vmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}\\ a_{s_2,1}&a_{s_2,2}\end{vmatrix}=\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{s_2-2}{2}\rfloor}D_{(s_2-2-i,i)}=\sum_{i=0}^{s_2-2}\begin{vmatrix}a_{1+i,1}&a_{s_2-i-1,2}\\ a_{2+i,1}&a_{s_2-i,2}\end{vmatrix}. \tag{12}$$

换言之，对于 $n=2$，定理1 即为望远镜求和展开。

我们通过先证明定理 1 在特化情形 $A=V_M(x$下成立来证明该定理，这只是对(9)的直接改写。

引理 3。 设 $S:=V_M(x)\in\mathbb{C}^{M\times n}$, $M\geq n$，其中某个 $x\in\mathbb{C}^n$, $s\in\mathcal{I}_{M,\ n}$ 以及$\lambda\in\mathcal{D}_{s_n,\ n}$ 由以下式子给出：$\lambda_i:=s_{n-i+1}-(n-i+1)$。那么，

$$|S_{(s,:)}|=\sum_{\mu\in\mathcal{D}_\lambda}K_{\lambda,\mu}d_\mu(x) \tag{13}$$

其中

$$d_\mu(x):=\sum_{p\in\mathrm{Perm}(\mu)}\begin{vmatrix}x_1^{p_1}&\cdots&x_n^{p_n}\\ \vdots&&\vdots\\ x_1^{p_1+n-1}&\cdots&x_n^{p_n+n-1,n}\end{vmatrix}=|S_{(1:n,:)}|m_\mu(x). \tag{14}$$

并且 $K_{\lambda,\ \mu}$ 是关于 λ 和 μ的科斯特卡数。

证明： 由于 (14) 中的等式源于行列式的多重线性性，并且 $\frac{|S_{(s,:)}|}{|S_{((1:n),:)}|}$ 是一个舒尔多项式，因此我们的断言可重述为

$$\frac{|S_{(s,:)}|}{|S_{((1:n),:)}|}=\frac{1}{|S_{((1:n),:)}|}\sum_{\mu\in\mathcal{D}_\lambda}K_{\lambda,\mu}m_\mu(x),$$

这与 (9)完全相同。 □

证明定理1：设 $x\in\mathbb{C}^M$ 满足所有 x_i 彼此互不相同。则，秩$(V_M(x))=M$，并且存在一个 $C\in\mathbb{C}^{M\times n}$ 使得 $A=V_M(x)C$。根据行列式的多重线性性和引理 3，可得

$$\begin{aligned}|A_{(s,:)}|&=\sum_{j_1=1}^{M}\cdots\sum_{j_n=1}^{M}\left[|V_M(x_{\{j_1,\ldots,j_n\}})_{(s,:)}|\prod_{i=1}^{n}c_{j_ii}\right]=\sum_{j_1=1}^{M}\cdots\sum_{j_n=1}^{M}\left[\sum_{\mu\in\mathcal{D}_\lambda}K_{\lambda,\mu}d_\mu(x_{\{j_1,\ldots,j_n\}})\prod_{i=1}^{n}c_{j_ii}\right]\\&=\sum_{\mu\in\mathcal{D}_\lambda}K_{\lambda,\mu}\sum_{j_1=1}^{M}\cdots\sum_{j_n=1}^{M}\left[d_\mu(x_{\{j_1,\ldots,j_n\}})\prod_{i=1}^{n}c_{j_ii}\right],\end{aligned}$$

其中 $d_\mu(x_{\{j_1,\dots,j_n\}})$ 的定义同引理 3。由于构成 $d_\mu(x_{\{j_1,\dots,j_n\}})$ 的所有行列式都由与 $V_M(x_{\{j_1,\dots,j_n\}})_{(s,:)}$相同的列得到，因此我们可以还原最初的展开，从而得到

$$\sum_{j_1=1}^{M}\cdots\sum_{j_n=1}^{M}\left[d_\mu(x_{\{j_1,\dots,j_n\}})\prod_{i=1}^{n}c_{j_i i}\right]=\sum_{p\in\mathrm{Perm}(\mu)}\begin{vmatrix}a_{p_1+1,1}&\cdots&a_{p_n+1,n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{p_1+n,1}&\cdots&a_{p_n+n,n}\end{vmatrix}=D_\mu$$

我们的结论由此得证。 □

尽管定理 1 是一个直接的表示论恒等式，但作者尚未在文献中发现该结果曾被明确提出过。

3.2 k-Hankel 矩阵的符号一致性

结合定理 1 以及 Kostka 数的非负性，可立即得到以下关于 k-符号一致性的证书。

推论 3。设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{M\times n}$ 且 $M\geq n$。如果 A 的所有行连续 k-子式具有相同的（严格）符号，那么 A 是（严格） k-符号一致的。

尽管推论 3 给出了一个充分的证书，但通常效率不高：它需要计算的子式远多于直接计算所有 k-子式，而且往往过于严格。然而，就我们的目的而言，也就是研究 k-符号一致的 Hankel 矩阵，这一判据与我们希望证明的有利检验条件出奇地接近。情形 $k=2$ 已经展现了这一现象。

例 1. 我们将定理1 应用于任意两列

$$A:=H^g(1,M,N)=\begin{bmatrix}g_1&g_{i+1}&\cdots&g_N\\ g_2&g_{i+2}&\cdots&g_{N+1}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ g_M&g_{M+1}&\cdots&g_{M+N-1}\end{bmatrix},\ M,N\geq 2. \tag{15}$$

与注1类似，只需考虑2阶子式 $|H^g(1,s,r)|$，$s\in\mathcal{I}_{M,2}$ 和 $r\in\mathcal{I}_{N,2}$，其中 $s_1=r_1=1$，因为其他所有情况都可通过删除 A 的前 s_1-1 行和 r_1-1 列得到。

因此，根据注1

$$|A_{(s,r)}|=\begin{vmatrix}g_1&g_{r_2}\\ g_{s_2}&g_{s_2+r_2-1}\end{vmatrix}=\sum_{i=0}^{s_2-2}\begin{vmatrix}g_{i+1}&g_{s_2-2-i+r_2}\\ g_{i+2}&g_{s_2-1-i+r_2}\end{vmatrix}, \tag{16}$$

这表明， A 的所有2阶子式都可以表示为以下形式的2阶子式的线性组合

$$b^g_{i_1,i_2}:=\begin{vmatrix}g_{i_1}&g_{i_2}\\ g_{i_1+1}&g_{i_2+1}\end{vmatrix},\ i\in\mathcal{I}_{M+N-2,2},$$

当 $i+1>s_2-2-i+r_2$ 时带负号，即 $2i>s_2+r_2-3$。如果 $s_2\leq r_2+1$，那么我们展开式中的每一项都是 $H^g(1、2、M+N-2)$ 的常规2阶子式。此外，如果 $s_2\geq r_2+1$，那么

$$\begin{aligned}|A_{(s,r)}|&=\sum_{i=0}^{s_2-2}\begin{vmatrix}g_{i+1}&g_{s_2-2-i+r_2}\\ g_{i+2}&g_{s_2-1-i+r_2}\end{vmatrix}=\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{s_2+r_2-3}{2}\rfloor}\begin{vmatrix}g_{i+1}&g_{s_2-2-i+r_2}\\ g_{i+2}&g_{s_2-1-i+r_2}\end{vmatrix}-\sum_{i=\lfloor\frac{s_2+r_2-3}{2}\rfloor+1}^{s_2-2}\begin{vmatrix}g_{s_2-2-i+r_2}&g_{i+1}\\ g_{s_2-1-i+r_2}&g_{i+2}\end{vmatrix}\\ &=\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{s_2+r_2-3}{2}\rfloor}\begin{vmatrix}g_{i+1}&g_{s_2-2-i+r_2}\\ g_{i+2}&g_{s_2-1-i+r_2}\end{vmatrix}-\sum_{i=r_2-1}^{\lceil\frac{s_2+r_2-3}{2}\rceil-1}\begin{vmatrix}g_{i+1}&g_{s_2-2-i+r_2}\\ g_{i+2}&g_{s_2-1-i+r_2}\end{vmatrix}=\sum_{i=0}^{r_2-2}\begin{vmatrix}g_{i+1}&g_{s_2-2-i+r_2}\\ g_{i+2}&g_{s_2-1-i+r_2}\end{vmatrix},\end{aligned}$$

其中，最后一个等式在 $s_2 + r_2 - 3$ 为偶数时，去掉了第一个和中的一个零2阶子式。因此， A 的所有2阶子式都是2阶子式 $b^g_{i_1,\ i_2}$, $i \in \mathcal{I}_{M+N-2,\ 2}$ 的线性整数非负组合；等价地，它们也是 $H^g(1、2、\ M+N-2)$ 的2阶子式的线性整数非负组合。

这表明，如果重塑*Hankel*矩阵 $H^g(1, 2, M+N-2)$ 是（严格）2-符号相容的，那么 $H^g(1, M, N)$ 也是（严格）2-符号相容的。对于 $\mathcal{H}^g$，这也是一个必要条件，因为 $H^g(1, 2, 2N-2)$ 的所有2-子式都是 $H^g(1, 2N-2, 2N-2)$的2-子式。

下面，我们将例 1 的结论推广到 $k > 2$的情形。令 $A = H^g(1, M, N)$,$s \in \mathcal{I}_{M,k}$和$r \in \mathcal{I}_{N,k}$。则(10) 可特化为

$$|A_{(s,r)}| = \sum_{\mu \in \mathcal{D}_\lambda} K_{\lambda,\mu} D_{\mu,r} \tag{17}$$

其中 $\lambda_i = s_{k-i+1} - (k-i+1)$ 且

$$D_{\mu,r} := \sum_{p \in \mathrm{Perm}(\mu)} b^g_{(p_1+r_1,\ldots,p_k+r_k)} \tag{18}$$

with

$$b^g_{(i_1,\ldots,i_k)} := \begin{vmatrix} g_{i_1} & \cdots & g_{i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{i_1+k-1} & \cdots & g_{i_k+k-1} \end{vmatrix},\ i \in (1 : M+N-k)^k.$$

与例 1中一样，这表明 k-子式 A 都是重塑Hankel矩阵 $H^g(1, k, M+N-k)$的 k-子式的线性组合。因此，接下来只需证明，在可能发生抵消后，每个这样的k-子式在(17)中都以非负系数出现。

为此，我们确定哪些 $\mu \in \mathcal{D}_\lambda$ （至多相差列置换）会对应于同一个子式$b^g_{(i_1,\ldots,i_k)}$。对于固定的 $\mu^* \in \mathcal{D}_\lambda$ 和 $p^* \in \mathrm{Perm}(\mu^*)$， k-子式 $b^g_{(p_1^*+r_1,\ldots,p_k^*+r_k)}$ 会在(17) 中针对其他 $\mu \in \mathcal{D}_\lambda$ 和 $p \in \mathrm{Perm}(\mu)$的取值（至多相差列置换）出现，当且仅当

$$r + p \in \mathrm{Perm}(v^*),$$

其中 $v^* := (r + p^*)$。定义 $\mathcal{Q}(v^*) := \{q \in \mathrm{Perm}(v^*) :\ q - r \geq 0\}$，则所有此类 μ 构成的集合为

$$\{(q-r)^{\downarrow} : q \in \mathcal{Q}(v^*)\} \tag{19}$$

对应的 k b^g_q $D_{(q-r)^\downarrow r}$ 18 19 $v^{*\uparrow} \in$ -子式 $\mathcal{Q}$ v^* v^* $b^g_{v^*} = 0$ 出现在. 在()中。由于 ( ) 非空当且仅当 ( )，且我们只需考虑含有互不相同的元素的（否则 ），因此可以使用恒等式

$$\forall q \in \mathcal{Q}(v^*) : b^g_q = \mathrm{sign}_{v^{*\uparrow}}(q) b^g_{v^{*\uparrow}}.$$

因此，

$$|A_{(s,r)}| = \sum_{v^* \in V^*} \sum_{q \in \mathcal{Q}(v^*)} \mathrm{sign}_{v^*}(q) K_{\lambda,(q-r)^\downarrow} b^g_{v^*}, \tag{20}$$

其中

$$V^* := \{(p+r)^{\uparrow} : p \in \mathrm{Perm}(\mu),\ \mu \in \mathcal{D}_\lambda, p+r \text{ has distinct entries}\}.$$

由于每个 $b^g_{v^*}$ 都是 $H^g(1,\ k,\ M+N-k)$ 的 k 子式，因此只要满足以下条件，所需的非负整数线性组合便存在：

$$\forall v^* \in V^* : \sum_{q \in \mathcal{Q}(v^*)} \mathrm{sign}_{v^*}(q) K_{\lambda,(q-r)^\downarrow} \geq 0.$$

该不等式由下面的引理得出。

引理 4. 设 $\lambda \in \mathcal{D}_{M,k}$, $r \in \mathcal{I}_{N,k}$, 且

$$v^* \in \{\,(p+r)^{\uparrow} : p \in \mathrm{Perm}(\mu),\ \mu \in \mathcal{D}_\lambda,\ (p+r)^{\uparrow}_i > (p+r)^{\uparrow}_{i-1} \text{ for all } i \in (2:k)\}.$$

Then

$$\sum_{q \in \mathcal{Q}(v^*)} \mathrm{sign}_{v^*}(q)\, K_{\lambda,(q-r)^{\downarrow}} = \sum_{p \in \mathcal{P}(v^*)} \mathrm{sign}_r(p)\, K_{\lambda,(v^*-p)^{\downarrow}} = c^{\gamma^*}_{\lambda,\varepsilon}, \tag{21}$$

其中

$$\mathcal{Q}(v^*) := \{\, q \in \mathrm{Perm}(v^*) : q - r \geq 0\,\}, \qquad \mathcal{P}(v^*) := \{\, p \in \mathrm{Perm}(r) : v^* - p \geq 0\,\},$$

and

$$\gamma^*_i := v^*_{k-i+1} - k + i, \qquad \varepsilon_i := r_{k-i+1} - k + i, \qquad i \in (1:k).$$

证明：我们首先证明(21)中的第一个等式。注意到

$$\{(q-r)^{\downarrow} : q \in \mathcal{Q}(v^*)\} = \{(v^*-p)^{\downarrow} : p \in \mathcal{P}(v^*)\},$$

因为排序消除了对各项顺序的任何依赖。根据对 v^*的假设，每个集合

$$\{q - r : q \in \mathcal{Q}(v^*)\} \quad \text{and} \quad \{v^* - p : p \in \mathcal{P}(v^*)\}$$

由不同元素组成，即对每一个 $p \in \mathcal{P}(v^*)$，存在唯一的 $q \in \mathcal{Q}(v^*)$与 $\sigma \in$ 置换集$((1:k))$，使得

$$(v^*-p)_\sigma = v^*_\sigma - p_\sigma = q - r.$$

由于该等式由 $p_\sigma = r$ 与 $q = v^*_\sigma$满足，我们得出$\mathrm{sign}_{v^*}(q) = \mathrm{sign}_r(p)$。这证明了(21)中的第一个等式。接下来，定义多项式

$$F(x) := s_\lambda(x) \sum_{p \in \mathrm{Perm}(r)} \mathrm{sign}_r(p) x^p = \sum_{p \in \mathrm{Perm}(r)} \sum_{\mu \in \mathcal{D}_\lambda} \sum_{q \in \mathrm{Perm}(\mu)} \mathrm{sign}_r(p) K_{\lambda,\mu} x^{q+p}, \tag{22}$$

其中等式由(9)得到。由于 $\{(v^*-p)^{\downarrow} :\ p \in \mathcal{P}(v^*)\} \subset \mathcal{D}_\lambda$ 且 $v^* - p \in$ 置换集$((v^*-p)^{\downarrow})$，可见 $x^{q+p} = x^{v^*}$ 对某个 $q \in$ 置换集(μ)成立，当且仅当 $p \in \mathcal{P}(v^*)$且 $\mu = (v^*-p)^{\downarrow}$。因此，$\sum_{p \in \mathcal{P}(v^*)} \mathrm{sign}_r(p) K_{\lambda,(v^*-p)^{\downarrow}}$ 恰好是 x^{v^*} 在 $F(x)$中的系数。由(6)和(7)可知

$$\sum_{p \in \mathrm{Perm}(r)} \mathrm{sign}_r(p) x^p = a_r(x) = s_\varepsilon(x) a_{(0,1,\ldots,k-1)}$$

因此，使用 (7) 和(8)，

$$F(x) = s_\lambda(x) s_\varepsilon(x) a_{(0,1,\ldots,k-1)}(x) = \sum_{\gamma \in \mathcal{D}_{\lambda+\varepsilon}} c^\gamma_{\lambda,\varepsilon} s_\gamma(x) a_{(0,1,\ldots,k-1)}(x)$$
$$= \sum_{\gamma \in \mathcal{D}_{\lambda+\varepsilon}} c^\gamma_{\lambda,\varepsilon} a_{(\gamma_k, \gamma_{k-1}+1, \ldots, \gamma_1+k-1)}.$$

由于 v^* 的各项严格递增，当且仅当 x^{v^*} 出现在 $F(x)$ 中时，

$$a_{(\gamma_k,\gamma_{k-1}+1,\ldots,\gamma_1+k-1)} = a_{v^*}$$

对于某个 $\gamma \in \mathcal{D}_{\lambda+\varepsilon}$，其中 $c^\gamma_{\lambda,\,\varepsilon} \neq 0$。因此，$x^{v^*}$ 在 $F(x)$ 中的系数恰好为 $c^{\gamma^*}_{\lambda\,\varepsilon}$，从而证明

$$\sum_{p \in \mathcal{P}(v^*)} \mathrm{sign}_r(p)\, K_{\lambda,(v^*-p)^{\downarrow}} = c^{\gamma^*}_{\lambda,\varepsilon}.$$

□

我们通过两个数值例子说明引理 4 。

例 2. 设 $\lambda=(4,1,0)$， $r=(1,2,4)$，从而 $\varepsilon=r^{\downarrow}-(2,1,0)=(2,1,0)$。我们考虑以下两种情形：

1. 情形 ***1*** $v^*=(1,4,7)$：此处 $\gamma^*=(5,3,1)$，因此由引理 4 可知有可能(21) 为正。 $Q(v^*)$由以下各项组成

$$(0,2,3)=v^*-r \qquad and \qquad (0,5,0)=(1,7,4)-r,$$

其中$K_{\lambda,(5,0,0)}=0$ 由引理 2 以及 $K_{\lambda,(3,2,0)}=1$ 与相应的符号$v^*(v^*)=1$。因此，$\sum_{q\in\mathcal{Q}(v^*)}$ 符号$v^*(q)K_{\lambda,(q-r)^{\downarrow}}=1$，这与 *Littlewood–Richardson* 系数 $c_{\lambda}^{\gamma^*},_{\varepsilon}=$1一致。

2. 情形 ***2*** $v^*=(2,4,6)$： 在此情形下， $\gamma^*=(4,3,2)$，因此引理 4 同样允许取正值的可能性。然而，可以证明 $c_{\lambda}^{\gamma^*},_{\varepsilon}=0$。注意到 $Q(v^*)$ 由以下部分构成，也可以验证这一点

$$(5,0,0)=(6,2,4)-r, \qquad (3,0,2)=(4,2,6)-r \qquad and \qquad (1,2,2)=v^*-r,$$

及其对应项

$$\mathrm{sign}_{v^*}(6,2,4)K_{\lambda,(3,2,0)}=1, \quad \mathrm{sign}_{v^*}(4,2,6)K_{\lambda,(4,1,0)}=-1, \quad and \quad \mathrm{sign}_{v^*}(v^*)K_{\lambda,(2,2,1)}=2.$$

因此，$\sum_{q\in\mathcal{Q}(v^*)}$符号$v^*(q)K_{\lambda,(q-r)^{\downarrow}}=0$。

注 2. 方程 (21) 也以另一种形式出现在 *[22,*推论 *1],* ，即

$$c_{\lambda,\varepsilon}^{\gamma}=\sum_{\substack{\eta\in\mathrm{Perm}((1,\dots,k))\\ \psi\trianglelefteq\varepsilon}}\mathrm{sign}_{(1,\dots,k)}(\eta)\,K_{\varepsilon,\psi}, \tag{23}$$

其中只允许非负的 $\psi=$*((*$\gamma+(k-1,\dots,1,0)$*)*$_{\eta}+\lambda-(k-1,\dots,1,0)$*)*$^{\downarrow}$。为说明其与 *(21)* 等价，首先注意到 c_{λ}^{γ} ,$_{\varepsilon}=c_{\varepsilon}^{\gamma}$,$_{\lambda}$ 由 *(8)* 得出，因此可以互换 λ 和 ε 的角色，从而用依赖于 λ的科斯特卡数来表示该和，如 *(21)* 所示。对于引理 *4* 中 v^* 和 r 的取值（以及相应的 γ 和 ε），我们有

$$\gamma+(k-1,\dots,1,0)=v^{*\downarrow} \quad and \quad \varepsilon+(k-1,\dots,1,0)=r^{\downarrow}$$

从而 $\psi=((v^{*\downarrow})_{\eta}-r^{\downarrow})^{\downarrow}$。此外，由于 $v^{*\downarrow}-r^{\downarrow}\in\mathcal{D}_{\lambda}$，条件 $\psi\trianglelefteq\lambda$ 可根据 引理 2省略。因此，(23) 变为

$$\begin{aligned}c_{\lambda,\varepsilon}^{\gamma}=c_{\varepsilon,\lambda}^{\gamma}&=\sum_{\substack{\eta\in\mathrm{Perm}((1,\dots,k)),\\ (v^{*\downarrow})_{\eta}-r^{\downarrow}\geq 0}}\mathrm{sign}_{(1,\dots,k)}(\eta)\,K_{\lambda,((v^{*\downarrow})_{\eta}-r^{\downarrow})^{\downarrow}}=\sum_{q\in\mathcal{Q}(v^{*\downarrow})}\mathrm{sign}_{v^{*\downarrow}}(q)K_{\lambda,(q-r)^{\downarrow}}\\ &=\sum_{q\in\mathcal{Q}(v^*)}\mathrm{sign}_{v^*}(q)K_{\lambda,(q-r)^{\downarrow}},\end{aligned}$$

其中，最后一个等式利用了 v^* 具有互不相同的元素这一事实。尽管所得恒等式相同，但我们的推导与 *[22]* 的推导有显著不同。我们的方法受到 *Hankel* 矩阵应用的启发，并且所需的先决知识显著更少。

总之，由于 Littlewood–Richardson 系数按定义为非负数，(20) 表明，每个子式 $|A_{(s,r)}|$ 都是子式 $b^{g}{}_{(i_1,\dots,i_k)}$ $i\in\mathcal{I}_{M+N-k,k}$的非负线性组合。因此，如果所有$b^{g}{}_{(i_1,\dots,i_k)}$ 具有相同的符号，那么所有 $|A_{(s,r)}|$也具有相同的符号。严格情形的证明类似，因为根据

$$c_{\lambda,\varepsilon}^{\gamma(\lambda^{\uparrow}+r)}=c_{\lambda,\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon}\geq 1 \tag{24}$$

至少有一个严格为正的系数出现在(20)中。以下主结果对此作了总结。

定理 2. 设 $g \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, $A := H^g(1, M, N) \in \mathbb{C}^{M\times N}$且 $k \le \min\{M, N\}$。对于 $s \in \mathcal{I}_{M,k}$和 $r \in \mathcal{I}_{N,k}$，定义

$$b^g_{(i_1,\dots,i_k)} := \begin{vmatrix} g_{i_1} & \cdots & g_{i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{i_1+k-1} & \cdots & g_{i_k+k-1} \end{vmatrix}, \qquad (i_1, \dots, i_k) \in (1 : M + N - k)^k$$

Then

$$|A_{(s,r)}| = \sum_{v^* \in V^*} c^{\gamma(v^*)}_{\lambda,\varepsilon}\, b^g_{v^*}, \tag{25}$$

其中

$$\lambda_i := s_{k-i+1} - (k - i + 1), \qquad \varepsilon_i := r_{k-i+1} - k + i, \qquad \gamma_i(v^*) := v^*_{k-i+1} - k + i, \qquad i \in (1 : k)$$

and

$$V^* := \big\{(p + r)^\uparrow : p \in \mathrm{Perm}(\mu),\ \mu \in \mathcal{D}_\lambda,\ (p + r)^\uparrow_i > (p + r)^\uparrow_{i-1} \text{ for all } i \in (2 : k)\big\}.$$

特别地，若重塑*Hankel*矩阵 $H^g(1, k, M+N-k)$ 具有（严格） k-符号一致性，即所有子式$b^g{}_{(i_1,\dots,i_k)}$、$i \in \mathcal{I}_{M+N-k,k}$都具有相同的（严格）符号，则 A 具有（严格） k-符号一致性。

注意，定理 2 仅给出了一个充分条件，因为它要求重塑Hankel矩阵具有（严格） k-符号一致性。在有限维情形中，这个条件可能比必要条件更强（见下文的循环矩阵情形）。然而，在无限维算子的情形下，情况发生了根本变化：该条件不仅充分，而且必要。因此，我们得到以下与推论2类似的结论。

推论 4。 设 $g \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$。那么，下列条件等价：

1. $\mathcal{H}^g$ 具有（严格） k-符号一致性。*2.* 对所有 $N \ge k$： $H^g(1, k, N)$ 具有（严格） k-符号一致性。

证明：根据定义， $\mathcal{H}^g$是（严格） k-符号一致的，当且仅当 $H^g(1, N, N)$ 是（严格） k-符号一致的，对每一个 $N \ge k$。然而，根据定理 2，只要 $H^g(1, k, 2N-k)$ 是（严格） k-符号一致的，对所有 $N \ge k$均成立，则该要求即已满足。因此这两个条件是等价的。 □

至此值得注意的是， k-符号一致的 Hankel 矩阵（及算子）类严格大于 k-正 Hankel 矩阵（及算子）类。事实上， k-符号一致性并不要求 1-符号一致性。下面的例子说明了这一点。

例 3. 设 $g_t = \alpha_1^{t-1} + k\,\alpha_2^{t-1}$（对 $t \ge 1$），其中 k、 α_1、 $\alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$。则对所有 t、 $j \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$b^g_{(t,t+j)} = p\,\alpha_1^{t-1}\alpha_2^{t-1}\big(\alpha_1^j - \alpha_2^j\big)(\alpha_1 - \alpha_2). \tag{26}$$

因此， $H^g(1, M, N)$ 对任意 M、 $N \ge 2$ 是严格 2-符号一致的，当且仅当 α_1、 $\alpha_2 > 0$。然而，严格1-符号一致性在一般情况下并不成立。例如，取 $\alpha_1 = 1$、 $\alpha_2 = 0.5$ 和 $p = -3$ 可得

$$(g_1, g_2, g_3) = (-2, -0.5, 0.25),$$

其符号会发生变化。因此， $H^g(1, M, N)$ 是2符号一致的，但不是1符号一致的 $nt.$

遗憾的是，与推论2不同，一般而言，并不存在进一步的简化方法，使我们只需检查例如连续的 k阶子式即可，其中 $H^g(1, k, M + N - k)$。事实上，在例 3中，如果仅要求连续二阶子式满足严格符号一致性（即在 (26) 中取 $j = 1$ (26)），那么选取$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_{<0}$ 也满足这一受限条件，尽管它不满足完整的 2-符号一致性。

然而，需要指出的是，定理 2 使得我们可以运用引理 1。具体而言，若 $H^g(1,k,k)$可逆，则可通过检验 k的 $H^g(1,M,N)$、 $M,N \geq k$的（严格）全正性，来验证其（严格）符号一致性。

$$K_k^{\mathsf{T}}\, H^g(1,k,k)^{-1}\, H^g(k+1,k,M+N-k),$$

其中 K_k 定义见 引理 1。该验证可以高效地使用例如 命题 1来完成。然后，按照 [3], 中的方式采用多德格森凝聚，整体计算复杂度降低为$\mathcal{O}\big(k^2(M+N)\big)$ 当 $k \leq N+M-k$时。

3.2.1 Toeplitz 矩阵

由于颠倒 Toeplitz 矩阵的列顺序可生成一个汉克尔矩阵，且不会影响其（严格的）k-符号一致性，定理 2 和推论 4 在托普利茨情形下的直接类似结论同样成立。

推论 5。 令 $g \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$，并令 $A := T^g(t,M,N) \in \mathbb{C}^{M\times N}$，其中 $k \leq$最小值为$\{M,N\}$。如果重塑后的 ***Toeplitz*** 矩阵 $T^g(t+M-k,k,M+N-k)$ 是（严格） k-符号一致的，那么 A 也是（严格） k-符号一致的。特别地，当且仅当对于所有 $N \geq k$， T^g 对应的 ***Toeplitz***算子是（严格） k-符号一致的，当且仅当 $T^g(N-k,k,2N-k)$ 是（严格） k-符号一致的。

遗憾的是，对于循环矩阵 $C^g = T^g(0,T,T)$ 且 $g \in \ell_\infty(T)$, 推论 5 往往过于保守。事实上，重塑后的 Toeplitz $B := T^g(T-k,k,2T-k)$ 必须是（严格） k-符号一致的。由于 T-周期性， g，这意味着，例如，

$$|B_{(:,(1:k))}| \qquad \text{and} \qquad |B_{(:,(2:k)\cup\{T+1\})}| = -|B_{(:,(1:k))}|$$

必须具有相同的 （严格）符号，当 $k < T$ 时。因此，在严格情形下，推论 5 无法应用 .

例 4. 如 所示， *[8],* 给出了一个 $g \in \ell_\infty(T)$ 且严格3-符号一致的 C^g 的例子，即

$$g_t = \frac{1}{1-0.9^T}0.9^{t-1} - \frac{2}{1-0.8^T}0.8^{t-1} + \frac{1}{1-0.7^T}0.7^{t-1},\ t \in (1:T).$$

特别地，若 $T=4$，则

$$B = T^g(1,3,5) = \begin{bmatrix} g_1 & g_0 & g_3 & g_2 & g_1 \\ g_2 & g_1 & g_4 & g_3 & g_2 \\ g_3 & g_2 & g_0 & g_4 & g_3 \end{bmatrix}$$

与 $0 < |B_{(:,(1:3))}| = -|B_{(:,(2:3)\cup\{5\})}|$，即 B 不是 3-符号一致的。因此，推论 5 无法用于证明 3-的严格符号一致性。

然而，在非严格情形下，仍然可以进行部分扩展。为说明这一点，请注意，除平凡情形外，对于偶数 k，循环矩阵不可能是 k-符号一致的。下面的例子说明了这一障碍。

例 5。 循环矩阵

$$C^g = \begin{bmatrix} g_0 & g_2 & g_1 \\ g_1 & g_0 & g_2 \\ g_2 & g_1 & g_0 \end{bmatrix}$$

包含 2-子式

$$|C^g_{((1:2),(2:3))}| = g_2^2 - g_0g_1 = -|C^g_{(\{1,3\},(1:2))}| \qquad and \qquad |C^g_{((2:3),(1:2))}| = g_1^2 - g_0g_2 = -|C^g_{(\{1,3\},(2:3))}|.$$

C^g 因此不可能是严格的2-符号一致的。此外，假设所有 $g_i \neq 0$， C^g的2-符号一致性等价于 $\frac{g_1}{g_2} = \frac{g_2}{g_0} = \frac{g_0}{g_1}$，即对于某个 $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$的所有 $g_i = \alpha$。

如果 k 为奇数且满足 $2T-k \leq T+k-1$，则可知，除了额外产生的零 k阶子式外， k阶子式 $T^g(T-k,\ k,\ 2T-k)$ 与 $T^g(T-k,\ k,\ T)$ 的子式相同；等价地，它们与$C^g{}_{((1:k),\ :)}$ 的子式相同。因此，应用推论 5，可得以下等价关系。

推论 6。设 $g \in \ell_\infty(T)$ 和 $k \in (1:T)$ 为奇数且满足 $2k \geq T+1$。那么，以下命题等价：

1. C^g 是 k-符号一致的。
2. $C^{g_{((1:k),:)}}$ 是 k-符号一致的。

注意，在 C^g 严格 1-符号一致的情况下，已有文献 [8] 证明推论 6 对 $k = 3$成立，且与 T无关。

4 结论

我们建立了一个框架，用于高效验证 Hankel 矩阵和 Toeplitz 矩阵的（严格） k-符号一致性——即它们所有 k阶子式都具有相同的（严格）符号。尽管我们的结果在有限维矩阵情形下仅提供充分条件，但对于相应的无限维算子，这些条件同时也是必要条件和充分条件。这推广了 Hankel 矩阵和 Toeplitz 矩阵的经典 k-全正性证书（即所有阶数不超过 k的子式均非负） [5, 12, 15]。此外，它还支持直接使用诸如 [19], 之类的工具，将具有 k 行或列的矩阵的 k-符号一致性验证归结为一个全正性问题。

我们的推导依赖于代数组合学——具体而言是 Schur 多项式、Kostka 数以及 Littlewood–Richardson 系数 [23] ——从而将矩阵的每一个 k 阶子式表示为中间行连续 k 阶子式的非负整数线性组合。这些子式来自其各列由 k 个连续行指标构成的子矩阵，且这些行指标在各列之间不必相同。对于 Hankel 矩阵，一个结构恒等式将相关系数（Kostka 数）的带符号和与 Littlewood–Richardson 系数联系起来，从而使我们能够将这些行连续子式替换为具有 k 行的重塑Hankel矩阵的标准 k 阶子式。

除其直接意义之外，本文所揭示的代数组合学与全正性之间的联系为进一步研究开辟了若干有前景的方向。其中包括将类似分解推广到其他结构化矩阵类，以及探讨其在系统理论[10, 12, 17, 25]与稀疏优化 [18] 中的影响。

参考文献

[1] A. Berman 和 R. Plemmons。《数学科学中的非负矩阵》。SIAM，1994。[2] A. Berman、M. Neumann 和 R. J. Stern。《动态系统中的非负矩阵》。第 3 卷。Wiley & Sons，1989。[3] D. Carter 和 C. Johnson。《检验部分全正性的复杂度》。2021。arXiv：2103。08742 [cs.CC]。[4] R. Descartes。《几何学》。Hermann，1886。[5] S. Fallat、C. R. Johnson 和 A. D. Sokal。“和、Hadamard 乘积与 Hadamard 幂的全正性：结果与反例”。载于：《线性代数及其应用》520（2017），第 242–259 页。[6] F. Gantmacher 和 M. Krein。“振荡矩阵、振荡核与机械系统的小振动，Akademie-Verlag，柏林，1960”。载于：俄文原版，莫斯科—列宁格勒（1950）。[7] M. Gasca 和 C. A. Micchelli。《全正性及其应用》。第 359 卷。Springer，2013。[8] C. Grussler。《离散时间周期单调性保持系统》。2025。arXiv：2503. 23520[math.OC]。[9] C. Grussler、T. Burghi 和 S. Sojoudi。“内部 Hankel k-正系统”。载于：SIAM《控制与优化杂志》60.4（2022），第 2373–2392 页。

[10] C. Grussler、T. Damm 和 R. Sepulchre。“ k-正系统的平衡截断”。载于：IEEE《自动控制汇刊》67.1（2021），第 526–531 页。[11] C. Grussler、C. Roth 和 K. Tong。《具有变差有界性质的系统算子》。2024。arXiv：2409。20275 [math.OC]。[12] C. Grussler 和 R. Sepulchre。“变差消减线性时不变系统”。载于：Automatica 136（2022），第 109985 页。[13] H. Hagen 和 G. Schulze。“曲线与曲面设计中的变分原理”。载于：《几何建模：方法与应用》。Springer，1991，第 161–184 页。[14] O. Holtz。“Hermite–Biehler、Routh–Hurwitz 与全正性”。载于：《线性代数及其应用》372（2003），第 105–110 页。[15] S. Karlin。《全正性》。第 1 卷。斯坦福大学出版社，1968。[16] T. Lindeberg。“离散信号的尺度空间”。载于：IEEE《模式分析与机器智能汇刊》12.3（1990），第 234–254 页。[17] M. Margaliot 和 E. D. Sontag。“重新探讨全正微分系统：教程与新结果”。载于：Automatica 101（2019），第 1–14 页。[18] M. V. Marmary 和 C. Grussler。《结构化稀疏优化中基追踪的可处理性崩塌》。2025。arXiv：2503。19126 [math.OC]。[19] J. M. Peña。“具有给定阶数符号一致性的矩阵”。载于：SIAM《矩阵分析与应用杂志》16.4（1995），第 1100–1106 页。[20] A. Pinkus。《全正矩阵》。剑桥数学论丛。剑桥大学出版社，2009。[21] I. J. Schoenberg。“关于波利亚频率函数”。载于：Journal d’Analyse Mathématique 1.1（1951），第 331–374 页。[22] S. Shrivastava。《Littlewood-Richardson 系数作为科斯特卡数的带符号和》。2023。arXiv：2211。10669 [math.CO]。[23] R. P. Stanley 和 S. Fomin。《枚举组合学》。第 2 卷。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，2023。[24] K. Tong、C. Grussler 和 M. S. Chong。“离散时间继电反馈系统中的自持振荡”。载于：2025年 IEEE 第64届决策与控制会议（CDC）。2025，第 4125–4130 页。[25] E. Weiss 和 M. Margaliot。“线性正系统的推广及其在非线性系统中的应用：不变集与庞加莱–本迪克松性质”。载于：Automatica 123（2021），第 109358 页。[26] S. R. Weller 和 J. H. Martin。“具有药代动力学应用的强单峰三阶 SISO 线性系统”。载于：第21届 IFAC 世界大会论文集。第 53 卷，第 2 期。2020，第 4654–4661 页。