齐性空间上解析挠率的完整渐近展开

Kai K¨ohler*

2026年2月10日

arXiv:2602.08132v1 [math.DG] 8 Feb 2026

摘要

本文以显式形式给出了对称空间上线丛高次幂的等变复 Ray-Singer 挠率的完整渐近展开。对于孤立不动点的情形，本文给出了适用于一般复齐性空间的这一展开。此外，本文还给出了射影曲线纤维化所关联的复解析挠率形式的完整渐近展开。本文将这些展开与 Bismut–Vasserot、Finski 和 Puchol 的结果进行了比较，并将所得结果应用于 Chevalley 群的格表示。

2020年数学主题分类：58J52，11M35，14M17，20G05

目录

1 引言 2 2 Lerch ζ 函数导数的渐近展开 4 3 多项式乘对数的求和的渐近展开 8 4 解析挠率与某些特征类的定义 12 5 挠率的渐近展开 14 6 与其他结果的比较 19 7 Jantzen 求和公式的应用 24 8 孤立不动点的情形 25 9 射影平面上的李代数等变挠率 28 10 挠率形式的渐近展开 30

*数学研究所/ Universit¨atsstr. 1/ Geb¨aude 25.22/ D-40225 D¨usseldorf/ koehler@math.uni- duesseldorf.de

1 引言

Ray-Singer复解析挠率 $T(M,\ E) \in \mathbb{R}$ 是与厄米全纯向量丛 E 在紧厄米流形 M上相关联的一种不变量。它通过拉普拉斯算子的正则化行列式来定义。其主要应用是在 Arakelov 几何的框架下构造厄米向量丛直像的行列式。类似于 Kodaira消失定理在代数几何中的作用，描述正线丛 L^ℓ 张量幂不断增大时解析挠率的渐近行为 $L \to M$，可推出 Arakelov 几何中的算术Hilbert-Samuel定理。最早的此类结果 [BV1，定理 8] 由 Bismut 和 Vasserot 证明，他们用曲率和特征类计算了挠率渐近展开的前两个主导项。Gillet 和 Soul´e 将这一结果与他们的算术Riemann–Roch定理 [GS2，定理 7] 结合起来，得到了第一个版本的算术 Hilbert-Samuel定理[GS2，定理 8]。此后，算术Hilbert-Samuel定理在 Arakelov理论中发挥了根本且至关重要的作用，这凸显了渐近展开作为研究这类定理的一种自然方法的重要性。

Bismut 和 Vasserot 将他们的结果推广到了高秩正向量丛的对称幂（[BV2]）。Finski 证明，$T(M, L^\ell)$ 的完整渐近展开仅由形如 ℓ^k 和 $\ell^k \log \ell$ 的项组成，并给出了渐近展开中第 3 项和第 4 项的公式（[Fi]）。他又将这一结果推广到了轨形。Berman（[Ber]）、Su（[Su]）和 Larra´ın-Hubach（[La]）给出了其他推广及其在物理学中的应用。Ray-Singer 的解析挠率有一个推广到纤维化的形式值版本，即复解析挠率形式（[BK]），可用于在 Arakelov 几何中定义 Hermitian 向量丛的完整直像。在 [P] Puchol 将 Bismut–Vasserot 的结果推广到了挠率形式以及比 [BV2]，中所考虑的对称幂更一般的丛，并将其作为另一种直像给出。Teßmer（[T],预印本）将 Puchol 的主要结果推广到了高次幂线丛的等变挠率形式。

关于实解析挠率，Bergeron和Venkatesh研究了局部对称空间上的情形（[BV1]），Bismut、Ma和Zhang则研究了实解析挠率形式（[BMZ]）。此后，Liu（[Liu1], [Liu2]）进一步研究了局部对称空间上的情形，Q. Ma（[Mq]）也进行了进一步研究。

作者在 $T_t(M,\ E)$ 中定义了复解析挠率的一个等变版本 [K1]。考虑一个紧李群 G 和一个复齐性空间 G/K。令$L := L_{\rho_K+\lambda} \to G/K$ 为与权 λ相关联的等变线丛，其中 ρ是韦尔向量，并选取 $t \in G$。本文的一个目标是，在 $T_t(G/K,\ L^\ell$作用具有孤立不动点时，用根和魏尔室给出其渐近展开中所有项的显式公式。 $t$actswith isolated fixed points.

定义 1.1. 令 Φ 表示 *Lerch* ζ 函数，并考虑一个具有如下形式的函数 $P\colon\ \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

$$P(k) = \sum_{j=0}^{r} c_j k^{n_j} e^{ik\varphi_j}$$

其中 $r \in \mathbb{N}_0$, $n_j \in \mathbb{N}_0$, $c_j \in \mathbb{C}$, $\varphi_j \in \mathbb{R}$ 对所有 j均成立。于是，对于 $p \in \mathbb{R}$，我们采用以下记号

$$\zeta P\ := \textstyle\sum_{j=0}^{r} c_j e^{i\varphi_j} \Phi(e^{i\varphi_j}, -n, 1), \qquad \zeta' P\ := \displaystyle\sum_{j=0}^{r} c_j e^{i\varphi_j} \frac{\partial}{\partial s} \Phi(e^{i\varphi_j}, -n, 1)$$

以及 $\zeta_{m,\ a} \sum_{j=0}^{r} c_j e^{ik\varphi_j} :\ = \sum_{j=0}^{m} c_j e^{i\varphi_j} \Phi(e^{i\varphi_j}, -m, a+1)$。

以下结果在第 8 节中得到证明，所用的是特征标 $\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)$，它们属于 G-表示；对于一般的 $t \in G$，这些特征标是形如 $e^{i(\varphi'\ell+\varphi k)}$ 且满足 $\varphi,\ \varphi' \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ 的项的线性组合。尽管上述关于复解析挠率的一般结果没有给出误差估计，但在此处考虑的情形中，误差项在定理 8.1 中具有非常明确的形式，而引理8.2则给出了不同精度和简洁程度的误差界。

定理1.2。 设 $M = G/K$ 是一个紧复齐性空间，并设 $L := L_{\rho_K+\lambda}$是 M上的一个 G-不变全纯 *Hermitian* 线丛。假设 L 是正的，正性含义为 $\forall \alpha \in \Psi\colon \langle \alpha^\vee, \lambda\rangle > 0$。固定一个 M 上的 *K¨ahler* 度量 g_{X_0}。设 $t \in G$ 作用于 M且具有孤立不动点。那么，高次幂 L的等变解析挠率的渐近行为由下式给出

$$
\begin{aligned}
T_t((M, g_{X_0}), L^\ell_{\rho_K+\lambda}) &= -\log \ell \cdot \zeta \sum_{\alpha\in\Psi} \chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t) + \zeta' \sum_{\alpha\in\Psi} \chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t) \\
&- \sum_{\alpha\in\Psi} \log \frac{\langle \alpha^\vee, \lambda\rangle}{\alpha^\vee(X_0)} \cdot \zeta \chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t) + \tilde{C} \cdot \chi_{\rho+\ell\lambda}(t) \\
&+ \sum_{\alpha\in\Psi} \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\zeta_{m,\langle\alpha^\vee,\rho\rangle} \chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)}{(-\langle \alpha^\vee, \ell\lambda\rangle)^m m} + R_1
\end{aligned}
$$

其中 $|R_1| < \frac{(N-1)!\,(2\pi\ell c_2)^N}{} c_1$， $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ 有明确给出的表达式，且与 N和 ℓ无关。若 G 不含 G_2、 F_4 或 E_8类型的因子，则常数 $\tilde{C}$ 为零。

这是以下意义上的渐近展开：首先，对于给定齐性空间上的每个正不变线丛，都存在 $r \in \mathbb{N}$, $\varphi_j, a_{j,m} \in \mathbb{R}$，对于每个 $j = 1,\ldots, r, m \in \mathbb{Z}$，使得定理 1.2 给出了关于一个渐近尺度的展开

$$
(a_{1,\ m} e^{i\ell\varphi_{\ 1}} + \cdots + a_{r,m} e^{i\ell\varphi_r})\ell^m \log \ell,\ (a_{1,m} e^{i\ell\varphi_1} + \cdots + a_{r,m} e^{i\ell\varphi_r})\ell^m \qquad (m \in \mathbb{Z}, m \le m_0).
$$

其次，对于含有 $m > 0$ 定理 1.2 的各项，也可以视为关于渐近尺度 $\ell^m \log \ell$，ℓ^m 的广义渐近展开，其中系数关于 ℓ 并非常数，但有界。不过，对于含有 $m \le 0$ 的项，这种概念没有意义。第三，对于其在 Arakelov 几何中的应用，关键的诠释源于这样一个事实：在此情形下，有限多个角 φ_j 属于 $\mathbb{Q}\cdot\pi$。因此，存在一个 $q \in \mathbb{Z}^+$，使得它们具有 $2\pi\frac{p_j}{q}$ 的形式。作用 $e^{2\pi i\ell p/q}$ 的等型分量 $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 因而关于渐近尺度 $\ell^m \log \ell$，ℓ^m 具有渐近展开。

当 G/K 是厄米对称空间时，第5节对任意 $t \in G$ 给出了一个渐近展开，此时特征标是形如 $k^m \ell^{m'} e^{i(\varphi'\ell+\varphi k)}$的项的线性组合，其中 $\varphi,\ \varphi' \in \mathbb{R}$, $m,\ m' \in \mathbb{N}_0$。下文将 $\log^\ddagger(x+1) := -\sum_{k=1}^\infty \frac{(-x)_k}{k}$ 视为形式幂级数。

定理 1.3. 考虑与定理 *1.2* 中相同的情形，并额外假设 *G/K* 是对称空间。那么，关于任意 L 作用 $t \in G$ 的高次幂的等变解析挠率的渐近行为为

$$
\begin{aligned}
T_t(G/K, L^\ell_{\rho_K+\ell\lambda}) &= -\sum_{\alpha\in\Psi} \log \frac{\langle \alpha^\vee, \ell\lambda\rangle}{\alpha^\vee(X_0)} \cdot \zeta \chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t) + \sum_{\alpha\in\Psi} \zeta' \chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t) \\
&- \sum_{\alpha\in\Psi} \zeta\left(\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t) \cdot \log^\ddagger\left(\frac{\langle \alpha^\vee, \rho\rangle + k}{\langle \alpha^\vee, \ell\lambda\rangle} + 1\right)\right)^{[\deg_\ell > -N]} + R_2
\end{aligned}
$$

其中 $|R_2| < \frac{(\dim(G/K)^t + N - 1)!}{} (2\pi\ell c_2)^N$ c_1 取为显式给定的 c_1、 $c_2 \in \mathbb{R}^+$，它们与 N 和 ℓ 无关。

正如 [KaK第 7 条推论中所详述的，3] Kaiser 和作者指出，挠率公式中的一项对应于 Jantzen 求和公式（[J，第 311]页）的一侧，该公式对 Chevalley 概形的格表示进行分类。利用这一关系，定理 1.2 和1.3 直接给出 Jantzen 求和公式所定义的算术特征标的渐近公式（定理7.1）。第四项结果涉及相对于 Bismut 和 Goette 引入的向量场作用的李代数等变挠率（[BG]）。定理 9.1 给出了该挠率在 $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$上的完整渐近展开。

第五个主要定理 10.3给出了与有理曲线纤维化相关联的挠率形式的完整渐近展开。

定理6.5 表明，在非等变情形下，四个首项等于 Bismut–Vasserot 与 Finski 所给出的值。引理 10.6验证了在有理曲线纤维化的情形下，挠形式展开中的最高次项等于 Puchol 所给出的公式。

有趣的是，与 $7\ 24$ 的某个倍数进行比较（见 Finski 的结果），需要命题 6.1-6.4中关于李代数的若干不寻常结果，例如 G 与K的 Killing 形式之商由 $^{3}\dim\ \ K-\ \ G\dim(\dim)$给出，其中对称空间为 G/K。同样令人惊讶的是，推导挠形式的渐近展开需要和式 $\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\ {}^{a^r}_{j+m-r}$的一个此前未曾发表的闭公式（命题 10.1）。渐近展开的计算依赖于作者用李代数和 Lerch ζ 函数给出的解析挠率公式，见 [K2] 与 [K4]。这使得证明的大部分归结为关于这些对象的结果。若干中间引理是对 [KaK，第 8], 节中结果向等变情形的推广，这些结果当时被用于计算算术高度。

2 Lerch ζ 函数导数的渐近展开

Lerch ζ函数定义为

$$\Phi(z,s,v)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+v)^s}$$

当 $z\in\mathbb{C},\ |z|<1,\ v\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-$（[Erd1, 1.11(1)]）且 $s\in\mathbb{C}$，实部$s>1$时。如 [Ap, p. 161], 所示，我们考虑此函数在 $|z|\le 1$ 上的延拓；对于固定的 z，其解析延拓至$s\in\mathbb{C}$（当 $z\neq 1$ 时）及 $s\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$（当 $z=1$ 时）。注意，对于固定的实部 $s<0$ 及任意固定的 v，Φ 在 $z=1$处不连续，因为 $\lim_{\substack{z\to 1\\ z\neq 1}}|\Phi(z,s,v)|=\infty$。根据定义，当实部 $v>0$ 时，可得

$$z\Phi(z,-s,v+1)=\Phi(z,-s,v)-v^s. \tag{1}$$

（见 [Ap，式（3.3）]）。因此可得

$$\Phi(z,s,v+\ell)\ \ =\ \ z^{-\ell}\left(\Phi(z,s,v)-\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{z^k}{(v+k)^s}\right). \tag{2}$$

令 $\zeta(s)$ 表示黎曼 ζ 函数，令 $\zeta(s,\ \ a)\ =\sum_{m=0}^{\infty}(m+a)^{-s}$ (for Re $s>>0$) 表示赫尔维茨ζ函数。我们定义调和数为 $\mathcal{H}_m:=\sum_{j=1}^{m}\ {}^{1}_{m}$，伯努利多项式为 $\frac{te^{xt}}{e^t-1}=:\sum_{m=0}^{\infty}\ {}^{t^m}_{m}\ !\ B_m(x)$，伯努利数为 $B_m:=B_m(0)$。

我们将用到以下关于 Lerch ζ 函数导数的渐近展开的定理，因为它给出了如下形式的和的渐近展开

$$\sum_{k=1}^{v} k^m e^{ik\varphi} \log k = e^{i(v+1)\varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial s}(e^{i\varphi}, -m, v+1) - e^{i\varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial s}(e^{i\varphi}, -m, 1) \tag{3}$$

它们出现在对称空间上挠率的公式中。Katsurada 给出了这样的渐近展开（[Kat，定理 16]）。与他的结果不同，我们专门研究 $s \in \mathbb{Z}_0^-$，以获得更明确的系数和误差项表达式。对于 $e^{i\varphi} = 1$，Elizalde 已得到这样的结果（[Eli]），我们并在证明中导出了一个明确的误差界 R。

定理 2.1. 设 $\varphi \in \mathbb{R}$、$N \in \mathbb{Z}^+$ 和 $a \in \mathbb{N}_0$。若 $e^{i\varphi} \neq 1$、$s = -n \in \mathbb{Z}_0^-$、$\frac{\partial \Phi}{\partial s}$ 具有关于 $v \to \infty$ 的渐近展开

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial s}(e^{i\varphi}, -n, v+a) &= \sum_{m=0}^{n} v^m \binom{n}{m} \Phi(e^{i\varphi}, m-n, a) \cdot (-\log v + \mathcal{H}_m - \mathcal{H}_n) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\Phi(e^{i\varphi}, -m-n, a)}{(-v)^m m \binom{m+n}{n}} + \frac{R(e^{i\varphi}, -N-n, a, n, v)}{(-v)^N N \binom{N+n}{n}}. \end{aligned}$$

在 $e^{i\varphi} = 1$ 的情况下，可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial s}(1, -n, v+a) &= v^{n+1} \left(\frac{\log v}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{n} v^m \binom{n}{m} \Phi(1, m-n, a) \cdot (-\log v + \mathcal{H}_m - \mathcal{H}_n) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\Phi(1, -m-n, a)}{(-v)^m m \binom{m+n}{n}} + \frac{R(1, -N-n, a, n, v)}{(-v)^N N \binom{N+n}{n}}. \end{aligned}$$

在这两种情况下，右侧 $\log v$ 的系数等于 $-\Phi(e^{i\varphi}, -n, v+a) \log v$。存在一个明确的界

$$\begin{aligned} |R(e^{i\varphi}, -N, a, n, v)| &< \frac{N!}{(2\pi)^{N+1}} \left(\zeta(N+1, \frac{\varphi}{2\pi}) + \zeta(N+1, 1-\frac{\varphi}{2\pi}) \right) + \zeta(-N) - \zeta(-N, a) \\ &=: C(e^{i\varphi}, -N, a). \end{aligned}$$

请注意，虽然该展开中含有 $v^n \log v$ 项，但没有 v^n 项。情形 $e^{i\varphi} = 1, a \in \{0, 1\}$ 可简化为 $\Phi(1, -m, 0) = \Phi(1, -m, 1) = \zeta(-m)$ 在 m 为偶数时消失。在特殊情形 $\frac{\partial \Phi}{\partial s}(1, 0, v) = \log \Gamma(v) - \log \sqrt{2\pi}$（[Erd1，式 1.10(10)]）定理 2.1 对应于斯特灵近似；一般而言，我们采用与 [Erd1，式 1.18(9)] 类似的方法。

项 $\zeta(-N) - \zeta(-N, a)$ 是一个 Faulhaber 多项式 $\frac{B_{N+1}(a) - B_{N+1}}{N+1} = \sum_{m=1}^{a-1} m^N$），当 $a \geq 1$ 时成立，并在 $a \in \{0, 1\}$ 时消失。对于 $\varphi \in]0, 2\pi[$，可得

$$\left| \zeta(N+1, \frac{\varphi}{2\pi}) - (\frac{\varphi}{2\pi})^{-N-1} - (1+\frac{\varphi}{2\pi})^{-N-1} \right| < \int_1^\infty \frac{dk}{(k+\frac{\varphi}{2\pi})^{N+1}} = \frac{1}{N}(1+\frac{\varphi}{2\pi})^{-N}$$

用积分替换求和。在 N 为奇数的情况下，Lerch 变换公式表明，界中的第一项等于 $i^{N+1} e^{i\varphi} \Phi(e^{i\varphi}, -N, 1)$。对于 $e^{i\varphi} \neq 1$，这一项等于 $-\frac{1}{2} \frac{\partial^N}{\partial \varphi^N} \cot \frac{\varphi}{2}$（[Erd1，公式 1.16(4)、1.16(9)]）。在 $N = 4\tilde{N} + 1$ 且 $e^{i\varphi} = 1$的情况下，这会使界中的第一项与第二项相消 $\zeta(-N)$）。在 $N = 4\tilde{N} + 3$ 且 $e^{i\varphi} = 1$的情况下，这些项相等。

根据 [Erd1，等式 1.11(15)]，$\Phi(e^{i\varphi}, -m, 0) = \frac{m!}{(-i\varphi)^{m+1}} + O(1)$，对于 $\varphi \to 0^+$。

证明。 首先注意到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}_{|s=-n}\binom{-s}{q} &= \frac{-1}{q!}\sum_{j=0}^{q-1}\prod_{\substack{r=0\\ r\neq j}}^{q-1}(n-r)\\ &= \begin{cases}\frac{n!(q-1-n)!(-1)^{q-n}}{q!}=\frac{(-1)^{q-n}}{(q-n)\binom{q}{n}} & \text{if } n\in\{0,\dots,q-1\},\\ \binom{n}{q}\sum_{j=0}^{q-1}\frac{1}{j-n} & \text{else.}\end{cases}\end{aligned} \tag{4}$$

对于 $z\neq 1$ 和 任意 $a\in\mathbb{N}_0$，值 $\Phi(z,\ -m,\ a)$ 是关于 z 的有理函数，递归地定义为 b y

$$\Phi(z,0,a)=\frac{1}{1-z},\quad \Phi(z,-m-1,a)=z^{1-a}\frac{\partial}{\partial z}(z^a\Phi(z,-m,a)). \tag{5}$$

特别地，对于 $m\in\mathbb{Z}^+$，可得

$$\frac{\partial^m}{\partial u^m}\frac{e^{-au}}{1-ze^{-u}}=z^{-a}\frac{\partial^m}{\partial u^m}e^{-au}z^a\Phi(ze^{-u},0,a)=(-1)^m e^{-au}\Phi(ze^{-u},-m,a). \tag{6}$$

对于 $N\in\mathbb{Z}^+$、$|z|=1$、$z=e^{i\varphi}\neq 1$、$u\in[0,\infty]$，由带拉格朗日余项形式的泰勒定理可知，存在 $\xi\in[0,u]$ 使得

$$\begin{aligned}&\frac{e^{-au}}{1-ze^{-u}}-\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(-u)^m\Phi(z,-m,a)}{m!}\\ &= \frac{u^N}{N!}\frac{\partial^N}{\partial u^N}_{|u=\xi}\frac{e^{-au}}{1-ze^{-u}}=\frac{u^N}{N!}(-1)^N e^{-a\xi}\Phi(ze^{-\xi},-N,a).\end{aligned} \tag{7}$$

这是 u ([Ap，公式 (3.1) 及前面的公式]) 中 Apostol 的泰勒展开。其收敛半径由 min $\{|u|\,|1-ze^{-u}=0\}=\min|\varphi+2\pi\mathbb{Z}|$给出。Lerch 变换公式在 [Ob，公式 (9)]

$$\Phi(e^{i\varphi-\xi},-\tilde{m},\tilde{a})=\Gamma(1+\tilde{m})e^{\tilde{a}(\xi-i\varphi)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{e^{2\pi ik\tilde{a}}}{(2\pi ik+\xi-i\varphi)^{\tilde{m}+1}} \tag{8}$$

($\tilde{a}\in]0,\ 1]$，$\varphi\in[0,2\pi[$, 实部 $\tilde{m}>0$) 表明，对于 $z=e^{i\varphi}\neq 1$、$\xi>0$、$N\in\mathbb{Z}^+$，

$$\begin{aligned}\left|(-1)^N e^{-a\xi}\Phi(ze^{-\xi},-N,a)\right| &\overset{(2)}{=} \left|e^{i\varphi-\xi}\Phi(ze^{-\xi},-N,1)-\sum_{m=0}^{a-1}e^{m(i\varphi-\xi)}m^N\right|\\ &\leq \frac{N!}{(2\pi)^{N+1}}\left|e^{-ia\varphi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(k+\frac{\xi-i\varphi}{2\pi i})^{-N-1}\right|+\sum_{m=0}^{a-1}m^N\\ &\leq \frac{N!}{(2\pi)^{N+1}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|k-\frac{\varphi}{2\pi}|^{-N-1}+\zeta(-N)-\zeta(-N,a)\\ &= \frac{N!}{(2\pi)^{N+1}}\left(\zeta(N+1,\frac{\varphi}{2\pi})+\zeta(N+1,1-\frac{\varphi}{2\pi})\right)+\zeta(-N)-\zeta(-N,a)\\ &= C(z,-N,a).\end{aligned} \tag{9}$$

因此

$$\left|\frac{e^{-au}}{1-ze^{-u}}-\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(-u)^m\Phi(z,-m,a)}{m!}\right|u^{-N}<\frac{C(z,-N,a)}{N!}. \tag{10}$$

Lerch ζ函数在实部 $v>0$ 且满足以下任一条件时 $|z|\le 1,\quad z\ne 1$，实部 $s>0$ 或 $z=1$，实部 $s>1$ 满足关系式 $\Phi(z,\ s,\ v)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{1-ze^{-u}}\frac{du}{e^{vu}}$（[Erd1, 等式 11.1(3)]）。当 $z\ne 1$，实部 $s>0$，实部 $v>0$

$$\begin{aligned}\Phi(z,s,v+a) &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\left(\frac{e^{-au}}{1-ze^{-u}}-\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(-u)^m\Phi(z,-m,a)}{m!}\right)u^{s-1}\frac{du}{e^{vu}}\\ &\quad+\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(-1)^m\Phi(z,-m,a)}{m!}\frac{v^{-m-s}\Gamma(m+s)}{\Gamma(s)}\\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\left(\frac{e^{-au}}{1-ze^{-u}}-\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(-u)^m\Phi(z,-m,a)}{m!}\right)u^{s-1}\frac{du}{e^{vu}}\\ &\quad+\sum_{m=0}^{N-1}\Phi(z,-m,a)v^{-m-s}\binom{-s}{m}. \end{aligned}\tag{11}$$

根据不等式（10），方程（11）中的积分关于 s 在 $\mathrm{Re}\,s>-N, v>0$ 时是全纯的。由于方程（11）中的最后一项关于 $s\in\mathbb{C}$ 是全纯的，根据解析延拓，方程（11）在 $\mathrm{Re}\,s>-N, v>0$ 时成立。在方程（11）中令 $s=-n$，即可证明定理中关于 $\log v$ 的系数的陈述，因为因子 $\frac{1}{\Gamma(s)}$ 使积分项消失。

利用 $\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\right)'_{|s=-n}=(-1)^n n!$，在 $s=-n>-N$ 处的导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\Phi(z,-n,v+a) &= (-1)^n n!\int_0^\infty\left(\frac{e^{-au}}{1-ze^{-u}}-\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(-u)^m\Phi(z,-m,a)}{m!}\right)\frac{du}{u^{n+1}e^{vu}}\\ &\quad+\sum_{m=0}^{N-1}\Phi(z,-m,a)\frac{\partial}{\partial s}_{|s=-n}\left(v^{-m-s}\binom{-s}{m}\right).\end{aligned}\tag{12}$$

设 $(-v)^{n-N}R(z,-N,a,n,v)-(N-n)\binom{N}{n}$ 表示右侧的第一项。利用不等式 (10) 对 u 积分，可得 $|R(z,-N,a,n,v)|<C(z,-N,a)$。对于 $s=-n$，将方程 (4) 代入方程 (12) 的第三项，即可证明定理中的第一个公式。在 $z=1$ 的情况下，利用经典的泰勒展开即可得到该结果

$$\frac{e^{-au}}{1-e^{-u}}=\frac{1}{u}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-u)^m\Phi(1,-m,a)}{m!}.\tag{13}$$

此处 $\Phi(1,-m,a)=\zeta(-m,a)=-\frac{B_{m+1}(a)}{m+1}$ 成立。按照式 (7) 展开 $\frac{e^{-au}}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}$，可得拉格朗日余项估计

$$\begin{aligned}&\left|e^{-a\xi}\Phi(e^{-\xi},-N,a)-\frac{N!}{\xi^{N+1}}\right|\\ &\overset{(2)}{=}\left|e^{-\xi}\Phi(e^{-\xi},-N,1)-\frac{N!}{\xi^{N+1}}-\sum_{m=1}^{a-1}e^{-m\xi}m^N\right|\\ &=\left|\frac{N!}{(2\pi)^{N+1}}\left(\zeta(N+1,1+\frac{\xi}{2\pi i})+\zeta(N+1,1-\frac{\xi}{2\pi i})\right)-\sum_{m=1}^{a-1}e^{-m\xi}m^N\right| \qquad (14)\\ &\le\frac{2N!\zeta(N+1)}{(2\pi)^{N+1}}+\zeta(-N)-\zeta(-N,a) \qquad (15)\end{aligned}$$

因此有如下界： $C(1,\ -N,\ a) = \frac{N!2\zeta(N+1)}{(2\pi)^{N+1}} + \zeta(-N) - \zeta(-N,\ a)$。项 $\frac{1}{u}$给出的第一个加数等于

$$\frac{\partial}{\partial s}_{|s=-n} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{1}{u} u^{s-1} \frac{du}{e^{vu}} = v^{n+1} \left(\frac{\log v}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right).$$

在这种情况下， $z = 1$ 误差项 R 由下式给出

$$\begin{aligned} & R(1, -N, a, n, v) \\ =& \frac{(-1)^N v^{N-n} N!}{(N-n-1)!} \int_0^\infty \left(\frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} - \frac{1}{u} - \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(-u)^m \Phi(1, -m, a)}{m!} \right) \frac{du}{u^{n+1} e^{vu}}. \end{aligned}$$

□

Cor推论 2.2. 对于 $e^{i\varphi} \neq 1,\ N > 0$,—$\frac{\partial \Phi}{\partial s}$ 关于 $v \to \infty$有如下渐近展开

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}(e^{i\varphi}, 0, v+a) = \frac{-\log v}{1-e^{i\varphi}} + \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\Phi(e^{i\varphi}, -m, a)}{(-v)^m m} + \frac{R(e^{i\varphi}, -N, a, n, v)}{(-v)^N N}.$$

对于 $e^{i\varphi} = 1$，可得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}(1, 0, v+a) = v \log v - v + (a - \frac{1}{2}) \log v + \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\Phi(1, -m, a)}{(-v)^m m} + \frac{R(1, -N, a, n, v)!}{(-v)^N N}.$$

3 多项式乘对数之和的渐近展开

本节利用定理 2.1，推导形如 $\sum_{k=1}^{v} P(k) \log k$ 的和的渐近展开公式，其中 $P\colon\ \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ 是如下形式的函数

$$P(k) = \sum_{j=0}^{r} c_j k^{n_j} e^{ik\varphi_j} \tag{16}$$

其中 $r \in \mathbb{N}_0,\ n_j \in \mathbb{N}_0,\ c_j \in \mathbb{C},\ \varphi_j \in \mathbb{R}$ 对所有 j均成立。我们将使用线性算子 ζ、ζ'、P^* 等，与[K2，第 102]页中的用法相同：对于 $p \in \mathbb{R}$，我们将采用记号 $P\mathrm{odd}(k) := (P(k) - P(-k))/2$，此外还有$\zeta$、$\zeta'$，如定义 1.1 中所引入的，以及

$$P^*(p) := - \sum_{\substack{j=0 \\ \varphi_j \equiv 0 \bmod 2\pi}}^{r} c_j \frac{p^{n_j+1}}{4(n_j+1)} \sum_{\ell=1}^{n_j} \frac{1}{\ell}, \qquad \tilde{P}^*(p) := \sum_{\substack{j=0 \\ \varphi_j \equiv 0 \bmod 2\pi}}^{r} c_j \frac{p^{n_j+1}}{2(n_j+1)^2},$$

$$\operatorname{Res} P(p) := \sum_{\substack{j=0 \\ \varphi_j \equiv 0 \bmod 2\pi}}^{r} c_j \frac{p^{n_j+1}}{2(n_j+1)}.$$

变量 这些算子所作用的变量在本文中始终记为 k .

注3.1. 非正式地说， ζ和 ζ'可以分别解释为“$\zeta P = \sum_{k=1}^{\infty} P(k)$”和“$\zeta' P = -\sum_{k=1}^{\infty} P(k) \log k$”，但右侧的表达式并未良好定义。

注意，

$$\zeta(P(k)+P(-k))=-P(0) \tag{17}$$

由 [Erd1，1.11(17)] 或 [K2，方程 (61)、(63)] (或由方程 (5) 推导得出)。类似地，对 Jonqui`ere 关系式 [Erd1，1.11(16)] 求导 s 可得，对于 $\varphi\in[0,2\pi]$，$n\in\mathbb{Z}^+$ 有

$$\begin{aligned}\zeta'(k^n e^{ik\varphi}+(-k)^n e^{-ik\varphi}) &= e^{i\varphi}\frac{\partial}{\partial s}\Phi(e^{i\varphi},-n,1)+(-1)^n e^{-i\varphi}\frac{\partial}{\partial s}\Phi(e^{-i\varphi},-n,1)\\ &= \pi i e^{i\varphi}\Phi(e^{i\varphi},-n,1)+\frac{n!}{(-2\pi i)^n}\Phi(1,n+1,\frac{\varphi}{2\pi}).\end{aligned} \tag{18}$$

定义 $R^{\mathrm{rot}}(\varphi)$：$=\mathrm{Im}\left(e^{i\varphi}\frac{\partial}{\partial s}\Phi(e^{i\varphi},\ 0,\ 1)\right)$ 如 [K1，第 559], 页所述，其中对这个特殊函数作了进一步研究。利用 Digamma 函数 ψ，[K3，引理 13] 可知，对于 $0<\varphi<2\pi$

$$\zeta' e^{ik\varphi}=e^{i\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial s}(e^{i\varphi},0,1)=\frac{-\log 2\pi+\Gamma'(1)}{2}-\frac{\psi(\frac{\varphi}{2\pi})+\psi(1-\frac{\varphi}{2\pi})}{4}+iR^{\mathrm{rot}}(\varphi). \tag{19}$$

定义 3.2。对于 $a\in\mathbb{N}_0$，定义线性算子 $\zeta^R_{a,\,v,\,N}$，作用于以下形式的函数

$$(k,v)\mapsto\sum_{j=0}^{r}c_j v^{r_j}k^{n_j}e^{ik\varphi_j+iv\psi_j} \tag{20}$$

on$(\mathbb{R}^+)^2$ *wi* 其中 m、$n_j\in\mathbb{N}_0$、$r_j\in\mathbb{Z}$、$n_j+r_j+N\geq 0$、$c_j\in\mathbb{C}$、φ_j、$\psi_j\in\mathbb{R}$ 对所有 j 均成立，使得

$$\zeta^R_{a,v,N}(v^r k^n e^{ik\varphi+iv\psi}):=v^{-N}e^{-i(a+v+1)\varphi+iv\psi}\frac{(-1)^{n+r+N}}{\binom{n+r+N}{n}(N+r)}R(e^{-i\varphi},-(n+r+N),a+1,n,v).$$

另以 $f\mapsto f^{[\deg v>-N]}$, $f\mapsto f^{[\text{度数 }v=-N]}$ 表示将形如 $e^{i(v+b)\varphi}\sum_{k=-\infty}^{c}a_k v^k$ 的形式幂级数映射到 $e^{i(v+b)\varphi}\sum_{k=1-N}^{c}a_k v^k$, $e^{i(v+b)\varphi}a_{-N}v^{-N}$ 的线性映射，分别如此。令 对数$^{\ddagger}(x+1)$：$=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k}$ 为一个形式幂级数。

最后这一项只会出现在仅使用 log‡ 的有限部分和的公式中。

命题 3.3。考虑 $\varphi\in]-\pi,\pi]$, $N\in\mathbb{Z}^+$ 和 $a\in\mathbb{N}_0$。令 φ_0：$=\begin{cases}2\pi\\ \varphi\end{cases}$ 如果 $\varphi=0$，否则可得

$$\frac{C(z,-N,a)}{N!}\leq\frac{2\zeta(2)}{|\varphi_0|^{N+1}}+\frac{a^{N+1}}{(N+1)!}$$

因此

$$|\zeta^R_{a,v,N}(v^r k^n e^{ik\varphi+iv\psi})|\ \leq\ v^{-N}n!(r+N-1)!\left(\frac{2\zeta(2)}{|\varphi_0|^{n+r+N+1}}+\frac{a^{n+r+N+1}}{(n+r+N)!}\right).$$

证明。在 $0<\varphi\leq\pi$ $\zeta\ N+1\ \frac{\varphi}{2\pi}+\zeta\ N+1\ 1-\frac{\varphi}{2\pi}-\ \frac{\varphi}{2\pi}\ ^{-N-1}=\zeta\ N+1\ 1+$的情况下，项 $\frac{\varphi}{2\pi}+\zeta\ N+1\ 1-\frac{\varphi}{2\pi}$ 在 $\varphi=\pi$ 处取得全局最大值，其值为 $\zeta\ N+1\ \frac{3}{2}\pm\zeta\ N+1\ \frac{1}{2}=2(2^{N+1}-1)\zeta(N+1)-2^{N+1}<2^{N+1}\cdot(2\zeta(2)-1)$。此外，$\zeta(-N)-\zeta(-N,\ a)=\sum_{m=1}^{a-1}m^N\lhd|a-1|\cdot|a-1|^N=|a-1|^{N+1}$。因此

$$\frac{C(z,-N,a)}{N!}<\varphi^{-N-1}\cdot\left(1+(\frac{\varphi}{\pi})^{N+1}(2\zeta(2)-1)\right)+\frac{|a-1|^{N+1}}{N!}\leq\frac{2\zeta(2)}{\varphi^{N+1}}+\frac{|a-1|^{N+1}}{N!}.$$

对于 $e^{i\varphi}=1$，可得

$$\frac{C(z,-N,a)}{N!}\leq\frac{2\zeta(2)}{(2\pi)^{N+1}}+\frac{|a-1|^{N+1}}{N!}.$$

□

在情形 $\varphi \not\equiv 2\pi$, $\zeta_a^{R}{}_{,v,N}(v^r k^n e^{ik\varphi+iv\psi})$ 中，等于

$$v^r e^{iv\psi-i(a+v+1)\varphi} n! \int_0^\infty \left(\frac{e^{-au}}{e^u - e^{-i\varphi}} - \sum_{j=0}^{n+r+N-1} \frac{(-u)^j \Phi(e^{-i\varphi}, -j, a+1)}{j!} \right) \frac{du}{u^{n+1} e^{vu}}.$$

命题 3.4. 假设函数 P 满足对称性 $P(k) = -P(v+a-k)$.˜那么，留数 $P(v+a) = 0$ 以及 $P^*(v+a) = P^*(v+a)$ 成立。

证明. 对于满足上述对称性的任意多项式 $P(k)$，可得

$$\operatorname{Res} P(v+a) = \frac{1}{2} \int_0^{v+a} P(k)\, dk = 0$$

(参见 [K2，公式 (60)])。对于 $P(k) = k^n$ 可得

$$\tilde{P}^*(p) - \operatorname{Res} P(p) \cdot \log p = \frac{p^{n+1}}{2} \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{\log p}{n+1} \right) = -\frac{1}{2} \int_0^p k^n \log k\, dk.$$

此外， [GrRy，4.253.1] 表明，对于 $P(k) := k^n - \frac{(v+a-k)^n}{2}$ 有

$$\begin{aligned} \tilde{P}^*(v+a) - \operatorname{Res} P(v+a) &= -\frac{1}{2} \int_0^{v+a} \frac{k^n - (v+a-k)^n}{2} \log k\, dk \\ &= -(v+a)^{n+1} \frac{\mathcal{H}_n}{4(n+1)} = (k^n)^*(v+a). \end{aligned}$$

˜因此，如果所假设的对称性成立，则 $P^*(v+a) = P^*(v+a)$。 □

命题 3.5. 考虑 $N \in \mathbb{Z}^+$, $a \in \mathbb{N}_0$。设 $P\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$是形如$k \mapsto \sum_{j=0}^m c_j k^{m_j} v^{n_j} e^{ik\varphi_j}$的函数。那么， $v \to \infty$存在渐近展开式

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{v+a} P(k) \log k = &- 2\tilde{P}^*(v+a) + 2\operatorname{Res} P(v+a) \cdot \log v \\ &- \log v \cdot \zeta\left(P(k+a+v)\right) - \zeta'\left(P(k)\right) \\ &+ \left(2\operatorname{Res} P(v+a) \cdot \log^{\ddagger}\left(\frac{a}{v}+1\right) \right)^{[\deg_v > -N]} \\ &- \zeta\left(P(k+a+v) \log^{\ddagger}\left(\frac{k+a}{v}+1\right) \right)^{[\deg_v > -N]} \\ &+ \zeta^R_{a,v,N}(P(-k)) \end{aligned}$$

其中误差项为 $O(v^{-N})$。

由于 v^{n_j} 因子的影响，误差项很难描述为作用于 $P(v+a) \cdot \log^{\ddagger}\left(\frac{a}{v}+1\right)$ 的算子。若这样做，就必须将次数 n_j 或 m_j 纳入该算子。

证明。 由于线性，只需考虑 $P(k) := k^n v^r e^{ik\varphi}$。除 ζ^R 外，所有算子关于因子 v^r都是线性的。在 $e^{i\varphi} \neq 1$的情形下，定理2.1 中 $\log v$ 的倍数的两个表达式表明

$$\zeta\left((k+a)^n e^{i(k+a)\varphi}\right) = e^{ia\varphi} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} e^{i\varphi} \Phi(e^{i\varphi}, -j, 1) \overset{\text{Th. } 2.1}{=} e^{i(a+1)\varphi} \Phi(e^{i\varphi}, -n, a+1). \quad (21)$$

非正式地按照注释 3.1 的含义，这可以看作方程

$$''\boldsymbol{\zeta}\left((k+a)^n e^{i(k+a)\varphi}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+a)^n e^{i(k+a)\varphi} = e^{i(a+1)\varphi}\Phi(e^{i\varphi},-n,a+1)''$$

其中中间项 $\binom{a+k}{v}$ 并未定义良好。在 $|\binom{a+k}{v}|<1$ 的情形下，推导泰勒展开

$$(a+k+v)^{-s} = v^{-s}\left(\frac{a+k}{v}+1\right)^{-s} = \sum_{m=0}^{\infty} v^{-m-s}\binom{-s}{m}\cdot(k+a)^m$$

可得

$$\begin{aligned}
-(a+k+v)^n\cdot\left[\left(\log v+\log\left(\frac{a+k}{v}+1\right)\right)\right] &= \frac{\partial}{\partial s}_{|s=-n} v^{-s}\left(\frac{a+k}{v}+1\right)^{-s}\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}(k+a)^m\frac{\partial}{\partial s}_{|s=-n} v^{-m-s}\binom{-s}{m} \qquad (22)\\
&\overset{(4)}{=} \sum_{m=0}^{n} v^m\binom{n}{m}(-\log v+\mathcal{H}_m-\mathcal{H}_n)\cdot(k+a)^{n-m}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-v)^{-m}\cdot(k+a)^{m+n}}{m\binom{m+n}{n}}\\
&= -(a+k+v)^n\log v+\sum_{m=0}^{n} v^m\binom{n}{m}(\mathcal{H}_m-\mathcal{H}_n)\cdot(k+a)^{n-m}\\
&\quad+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-v)^{-m}\cdot(k+a)^{n+m}}{m\binom{m+n}{n}}.
\end{aligned}$$

那么，对于 $e^{i\varphi}\neq 1$，$n\in\mathbb{N}_0$ 定理 2.1 表明

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{v+a} v^r k^n e^{ik\varphi}\log k =& v^r e^{i(v+a+1)\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial s}(e^{i\varphi},-n,v+a+1)-v^r e^{i\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial s}(e^{i\varphi},-n,1)\\
\overset{\text{Th. 2.1}}{=}& e^{i(v+a+1)\varphi}\sum_{m=0}^{N+n+r-1}\Phi(e^{i\varphi},-m,a+1)\frac{\partial}{\partial s}_{|s=-n} v^{r-m-s}\binom{-s}{m}\\
&+e^{i(v+a+1)\varphi}R(e^{i\varphi},-N-n-r,a+1,n,v)\\
&\cdot\frac{\partial}{\partial s}_{|s=-n} v^{-N-n-s}\binom{-s}{N+n+r}-e^{i\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial s}(e^{i\varphi},-n,1)v^r\\
\overset{(21)}{=}&\sum_{m=0}^{N+n+r-1}\boldsymbol{\zeta}(e^{i(v+a+k)\varphi}(k+a)^m)\frac{\partial}{\partial s}_{|s=-n} v^{r-m-s}\binom{-s}{m}\\
&+e^{i(v+a+1)\varphi}\Phi(e^{i\varphi},-n,v+a+1)v^r\log v\\
&+\boldsymbol{\zeta}^R_{a,v,N}(v^r(-k)^n e^{-ik\varphi})\\
&-e^{i(v+a+1)\varphi}\Phi(e^{i\varphi},-n,v+a+1)v^r\log v-e^{i\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial s}(e^{i\varphi},-n,1)v^r \qquad (23)\\
\overset{(22)}{=}&\boldsymbol{\zeta}\left(-e^{i(a+k+v)\varphi}v^r(k+a+v)^n\log^{\ddagger}\left(\frac{k+a}{v}+1\right)\right)^{[\deg_v>-N]}\\
&+\boldsymbol{\zeta}^R_{a,v,N}(v^r(-k)^n e^{-ik\varphi})\\
&-\log v\cdot\boldsymbol{\zeta}\left(e^{i(a+k+v)\varphi}v^r(k+a+v)^n\right)-\boldsymbol{\zeta}'\left(v^r k^n e^{ik\varphi}\right). \qquad (24)
\end{aligned}$$

在 $e^{i\varphi}=1$ 的情形下，式（21）的对应形式为

$$-\frac{a^{m+1}}{m+1}+\zeta\left((k+a)^m e^{i(k+a)\varphi}\right)\overset{\text{Th. 2.1}}{=}e^{i(a+1)\varphi}\Phi(e^{i\varphi},-m,a+1). \tag{25}$$

因此，在这种情况下，方程（23）右边还多出一项

$$\begin{aligned}&-\sum_{m=0}^{N+n+r-1}\frac{a^{m+1}}{m+1}\frac{\partial}{\partial s}_{|s=-n}v^{r-m-s}\binom{-s}{m}\overset{(22)}{=}\left(\frac{\partial}{\partial s}_{|s=-n}v^{r-s}\int_0^a\left(\frac{\tilde{a}}{v}+1\right)^{-s}d\tilde{a}\right)^{[\deg_v>-N]}\\&=\left(v^r(v+a)^{n+1}-v^{r+n+1}\right)\left(\frac{\log v}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)+\left(\frac{v^r(v+a)^{n+1}\log(\frac{a}{v}+1)}{n+1}\right)^{[\deg_v>-N]}\end{aligned} \tag{26}$$

此外，定理 2.1 中的渐近展开还包含阶为 v^{r+n+1} 和 $v^{r+n+1}\log v$的额外项，这些项与 a无关，并与方程（ v^{r+n+1} 中的26）的倍数相消。第二项是 $-\log v\cdot\zeta\left(e^{i(a+k+v)\varphi}v^r(k+a+v)^n\right)$ 的最高阶项，其形式为 $-v^r\log v\cdot 2\mathrm{Res}(k^n)(v)$。因此，对任意 $\varphi\in\mathbb{R}$，都可得到与方程（24）相同的公式，但多出一些额外项；当 $e^{i\varphi}\neq 1$ 时，这些项消失：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{v+a}v^r k^n e^{ik\varphi}\log k=&-2\tilde{P}^*(v+a)+2\mathrm{Res}P(v+a)\cdot\log v\\&+\left(2\mathrm{Res}P(v+a)\cdot\log^{\ddagger}\left(\frac{a}{v}+1\right)\right)^{[\deg_v>-N]}\\&+\zeta\left(-e^{i(a+k+v)\varphi}v^r(k+a+v)^n\log^{\ddagger}\left(\frac{k+a}{v}+1\right)\right)^{[\deg_v>-N]}\\&+\zeta^R_{a,v,N}(v^r(-k)^n e^{-ik\varphi})\\&-\log v\cdot\zeta\left(e^{i(a+k+v)\varphi}v^r(k+a+v)^n\right)-\zeta'\left(v^r k^n e^{ik\varphi}\right).\end{aligned}$$

□

4 解析挠率与某些特征类的定义

设 $(M,\ g)$ 是一个复维数为 n 的紧致 Hermitian 流形，其上作用着一个全纯等距变换 t。记 ω^{TM} 为 K¨ahler 形式。对应于分解$TM\otimes\mathbb{C}=TM^{1,\ 0}\oplus TM^{0,\ 1}$，定义 $U=:U^{1,\ 0}+U^{0,\ 1}$，其中 $U\in TM\otimes\mathbb{C}$。考虑一个 t-等变全纯向量丛 $E\to M$。在 E 上赋予一个厄米度量。于是，形式空间$\mathfrak{A}^{p,\ q}(M,\ E)$ 中全纯次数为 p、反全纯次数为 q 且系数取自E 的形式，应赋予 L^2-度量

$$(\eta,\eta'):=\int_M\langle\eta_x,\eta'_x\rangle\frac{(\omega^{TM})^{\wedge n}}{(2\pi)^n n!}.$$

给定一个微分形式 β，我们将其 q 次部分记为 $\beta^{[q]}$。令 $\bar{\partial}:\ \mathfrak{A}^{p,q}(M,E)\ \to\mathfrak{A}^{p,q+1}(M,E)$ 表示其伴随算子为 $\bar{\partial}^*$ 的 Dolbeault 算子，并令 $\Box_q:=(\bar{\partial}+\bar{\partial}^*)^2:\ \mathfrak{A}^{0,q}(M,E)\ \to\mathfrak{A}^{0,q}(M,E)$ 表示 Kodaira-Laplace 算子。等距变换 t 在 $\mathfrak{A}^{p,q}(M,E)$ 上诱导出作用 t^*。对于实部 $s>>0$，ζ函数

$$Z(s):=\sum_{q=0}^{n}(-1)^{q+1}q\mathrm{Tr}\left(t^*\circ(\Box_{q|(\ker\Box_q)^\perp})^{-s}\right)$$

有良好定义，并且可以全纯延拓至 $s=0$。按照 [K1，第 1] 节中，我们定义：

定义 4.1。 t-等变复解析挠率定义为 $T_t(M,E):=Z'(0)$。

考虑全纯向量丛 E。令 ∇^E 为其关联的典范协变导数，其曲率为 $\Omega^E\in\mathfrak{A}^{1,1}(M,\mathrm{End}E)$。令 t 为作用于 Hermitian 流形 M上的全纯等距变换。假设 E 作为全纯 Hermitian 丛在 t作用下保持不变，且 E 配备了等变结构 t^E。Hermitian 向量丛 E 在不动点子流形 M^t 上分解为直和 $\bigoplus_{\zeta\in S^1}E_\zeta$，其中 E 的等变结构t^E 在 E_ζ 上的作用为 ζ。于是， M^t 上的陈特征形式定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}_t(E) &:= \sum_\zeta \zeta\mathrm{ch}(E_\zeta)\\ &= \mathrm{Tr}\,t^E+\sum_\zeta\zeta c_1(E_\zeta)+\sum_\zeta\zeta\left(\frac{1}{2}c_1^2(E_\zeta)-c_2(E_\zeta)\right)+\dots.\end{aligned}$$

等变向量丛的 Todd 形式定义为

$$\mathrm{Td}_t(E):=\frac{c_{\mathrm{rk}\,E_g}(E_g)}{\mathrm{ch}_t(\sum_{j=0}^{\mathrm{rk}\,E}(-1)^j\Lambda^jE^*)}.$$

令 G_t 表示由下式给出的加性特征类

$$G_t(L):=\boldsymbol{\zeta}'\mathrm{ch}_t(L^{\otimes k})=\sum_{m=0}^\infty e^{i\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial s}(e^{i\varphi},-m,1)\frac{c_1(L)^m}{m!}$$

在线丛 L 上，如上所述。按照 [BG，定义 1。5]

$$\mathrm{Td}_t'(E):=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}_{|\varepsilon=0}\mathrm{Td}\Big(\frac{-1}{2\pi i}\Omega^E+\varepsilon\Big)\prod_j\frac{\mathrm{Td}}{c_{\mathrm{top}}}\Big(\frac{-1}{2\pi i}\Omega^E+i\vartheta_j+\varepsilon\Big).$$

因此，$\frac{\mathrm{Td}_t'}{\mathrm{Td}_t}$ 是由下式给出的加性特征类

$$\frac{\mathrm{Td}_t'}{\mathrm{Td}_t}(L)=\begin{cases}\frac{1}{1-e^{c_1(L)}}+\frac{1}{c_1(L)}=1-\frac{1}{1-e^{-c_1(L)}}+\frac{1}{c_1(L)} & \text{if } \varphi=0,\\ \frac{1}{1-e^{c_1(L)+i\varphi}}=1-\frac{1}{1-e^{-c_1(L)-i\varphi}} & \varphi\neq 0\end{cases}$$

对于带有 t-作用 $e^{i\varphi}$ 的线丛，该作用在不动点集的一个分支上给出。由泰勒级数（13）和（7）可知

$$\frac{\mathrm{Td}_t'}{\mathrm{Td}_t}(L)=1+\boldsymbol{\zeta}\mathrm{ch}_t(L^{\otimes k})=1+\sum_{j=0}^\infty\frac{e^{i\varphi}\Phi(e^{i\varphi},-j,1)}{j!}c_1(L)^j\overset{(2)}{=}\sum_{j=0}^\infty\frac{\Phi(e^{i\varphi},-j,0)}{j!}c_1(L)^j.\qquad(27)$$

特别是在孤立不动点的情形下，可以得到

$$\mathrm{Td}_g'(TM)=\prod_j\frac{1}{1-e^{-i\vartheta_j}}\cdot\sum_j\frac{1}{1-e^{i\vartheta_j}}.$$

令 $\mathrm{Td}_g^*(TM):=\prod_{\vartheta_j\notin 2\pi\mathbb{Z}}\frac{1}{1-e^{-i\vartheta_j}}\cdot\sum_j\begin{cases}1/2 & \text{对于 } \vartheta_j\in 2\pi\mathbb{Z},\\ \frac{1}{1-e^{-i\vartheta_j}} & \text{否则。}\end{cases}$

5 挠率的渐近展开

对于对称空间和齐性空间，我们采用与 [KaK]中相同的约定。设 G为单位元为 e_G的紧李群。固定一个极大环面 $T \subset G$ 以及一个序 $\Sigma_G = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$。记相应的 Weyl 群为 W_G，李代数为 $\mathfrak{g}$，根为 Σ_G，韦尔向量为 $\rho_G := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\alpha$。最高权为 λ 的 G-表示记为 $V^G_{\rho_G+\lambda}$，其特征标记为 $\chi^G_{\rho+\lambda}$。借助 W_G 在 $\rho+\lambda$上的作用，这些记号可扩展到表示环中对应于任意权 λ 的虚表示。固定正韦尔室闭包中的 $X_0 \in \mathfrak{t}$，并记其关于 Ad_G作用的稳定子为 K。令 $\Psi := \Sigma_G \setminus \Sigma_K$。记诱导的 K¨ahler 度量为 g_{X_0}，记相应的 Ad_G-不变标量积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，并令 $\alpha^\vee := \frac{2\alpha}{\|\alpha\|^2}$及 $\Psi^+ := \{\alpha \in \Psi | \langle\alpha^\vee, \rho+\lambda\rangle \geq 0\}$, $\Psi^- := \{\alpha \in \Psi | \langle\alpha^\vee, \rho+\lambda\rangle < 0\}$。每个复$K$-表示 $V^K_{\rho_K+\mu}$都会在 G/K上诱导一个 G-不变的全纯向量丛 $E_{\rho+\mu}$。若 $\dim V^K_{\rho_K+\mu} = 1$，我们常将该向量丛记为 $L_{\rho+\mu}$。

为简洁起见，对于与特别记作 G 的李群相关的对象，我们常常省略指标 G，而仅使用记号 ρ，$V_{\rho+\lambda}$，$\chi_{\rho+\lambda}$。

在定理 5.4 的证明中，我们需要以下两个关于紧李群的李代数的阿贝尔直和项 $V^K_{\rho_K+\lambda}$ 的表示 K 的结果。

命题 5.1。 设 K 是一个紧李群。我们选取一个固定的极大环面 $T \subset K$ 和一组正根 Σ^+_K。若 λ 是一个权，满足 $\forall\alpha \in \Sigma^+_K$： $\langle\alpha^\vee, \lambda\rangle = 0$，则对于任意权 μ 和 $\ell \in \mathbb{Z}$，有

$$V^K_{\rho_K+\ell\lambda+\mu} = (V^K_{\rho_K+\lambda})^{\otimes\ell} \otimes V^K_{\rho_K+\mu}.$$

权 λ 和 μ 不必是支配的。

证明。 群 W_K 由根中的反射 $s_\alpha(\beta) = \beta - \langle\alpha^\vee, \beta\rangle\cdot\alpha$ 生成。因此，λ 在 W_K 的作用下保持不变。Weyl 特征公式表明，在 K 的一般元素上，得到特征标的恒等式

$$\chi^K_{\rho_K+\ell\lambda+\mu} = \frac{\sum_{w\in W_K}(-1)^{\mathrm{sign}\,w} e^{2\pi i w(\rho_K+\ell\lambda+\mu)}}{\prod_{\alpha\in\Sigma^+_K}(e^{\pi i w\alpha} - e^{-\pi i w\alpha})} = e^{2\pi i\ell\lambda}\frac{\sum_{w\in W_K}(-1)^{\mathrm{sign}\,w} e^{2\pi i w(\rho_K+\mu)}}{\prod_{\alpha\in\Sigma^+_K}(e^{\pi i w\alpha} - e^{-\pi i w\alpha})}. \qquad \square$$

注记 5.2. 看待该引理的一种更函子性的方式，是采用与 [K2 中引理 12], 的证明里相同的论证，并运用亚当斯算子 ψ^ℓ：采用那里的记号，$\tilde{\pi}^! V^K_{\rho_K+\lambda} = V^T_\lambda$成立，因为两边都是一维的。因此可得 $V^K_{\rho_K+\ell\lambda+\mu} = \tilde{\pi}_!(\psi^\ell V^T_\lambda \otimes V^T_\mu) = \tilde{\pi}_!(\psi^\ell\tilde{\pi}^! V^K_{\rho_K+\lambda} \otimes V^T_\mu) = \psi^\ell V^K_{\rho_K+\lambda} \otimes V^K_{\rho_K+\mu}$。

下列结果推广了 [KaK，第 663 页，注记 1。], 其中已在情形$t = e_G$下得到证明：

命题 5.3. 考虑与命题 *5.1* 中相同的设定。对任意权 μ以及任意$t \in G$，可得

$$\deg_\ell \chi_{\rho+\ell\lambda+\mu}(t) \leq \dim_{\mathbb{C}}(G/K)^t.$$

证明。 由命题 5.1 以及 [K2中的 Atiyah–Segal–Singer 不动点公式，定理 13],可得

$$\chi_{\rho+\ell\lambda+\mu}(t) = \int_{M^t} \mathrm{Td}_t(TM)\mathrm{ch}_t(E_{\rho_K+\ell\lambda+\mu})$$

$$= \int_{M^t} \mathrm{Td}_t(TM)\mathrm{ch}_t(L_{\rho_K+\lambda})^\ell \mathrm{ch}_t(E_{\rho_K+\mu}) \tag{28}$$
$$= \int_{M^t} \mathrm{Td}_t(TM)(\mathrm{ch}_t(L_{\rho_K+\lambda})^{[0]})^\ell e^{\ell c_1(L_{\rho_K+\lambda})}\mathrm{ch}_t(E_{\rho_K+\mu}).$$

右边的次数在 ℓ 小于或等于 $\dim_{\mathbb{C}}(G/K)_{t\circ}$ □

对于一般的厄米对称空间，挠率的值由 [KaK，定理 5.2] 用特征标 $\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}$ 表示。注意，对于固定的 $t \in G$， $\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)$ 是形如 $k^m \ell^{m'} e^{i\varphi'\ell+i\varphi k}$ 的项的线性组合，其中 φ、$\varphi' \in \mathbb{R}$、m、$m' \in \mathbb{N}_0$ 满足 [K2，式 (66)]。如 [K2，式 (66)]，所述，对于 $t = e^X$，角 φ、φ' 总是具有 $2\pi w\alpha(X)$、$2\pi w'\lambda(X)$ 的形式，其中w、$w' \in W_G$。算子 $\boldsymbol{\zeta}$、$\boldsymbol{\zeta}'$ 不会改变 ℓ 中的增长。

定理 5.4. 设 $M = G/K$ 是一个紧致厄米对称空间，并设 $L := L_{\rho_K+\lambda}$ 是 G-不变的全纯厄米线丛，定义在 M 上。假设 L 是正的，即 $\forall \alpha \in \Psi$： $\langle \alpha^\vee, \lambda\rangle > 0$。固定 M 上的一个 *Kähler* 度量 g_{X_0}。选取 $X \in \mathfrak{t}$ 并令 $t := e^X$。那么， L 的高次幂对应的等变解析挠率的渐近行为为

$$\begin{aligned} T_t(G/K, L^\ell_{\rho_K+\ell\lambda}) = &-\sum_{\alpha\in\Psi} \log \frac{\langle \alpha^\vee, \ell\lambda\rangle}{\alpha^\vee(X_0)} \cdot \boldsymbol{\zeta}\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t) + \sum_{\alpha\in\Psi} \boldsymbol{\zeta}'\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t) \\ &- \sum_{\alpha\in\Psi} \boldsymbol{\zeta}\left(\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t) \cdot \log^\ddagger\left(\frac{\langle \alpha^\vee, \rho\rangle + k}{\langle \alpha^\vee, \ell\lambda\rangle} + 1\right)\right)^{[\deg_\ell > -N]} \\ &- \sum_{\alpha\in\Psi} \boldsymbol{\zeta}^R_{\langle \alpha^\vee,\rho\rangle,\langle \alpha^\vee,\lambda\rangle\ell,N}\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t). \end{aligned} \tag{29}$$

证明。 根据 [KaK，定理 5.2]，$L^\ell_{\rho_K+\ell\lambda}$ 的等变解析挠率由下式给出

$$\begin{aligned} T_t(G/K, L^\ell_{\rho_K+\ell\lambda}) = &-2\sum_{\alpha\in\Psi} \boldsymbol{\zeta}'\chi^{\mathrm{odd}}_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}(t) - 2\sum_{\alpha\in\Psi} \chi^*_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}(t)(\langle \alpha^\vee, \rho+\ell\lambda\rangle) \\ &- \sum_{\alpha\in\Psi} \boldsymbol{\zeta}\chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}(t) \cdot \log \alpha^\vee(X_0) - \chi_{\rho+\ell\lambda}(t) \sum_{\alpha\in\Psi^+} \log \alpha^\vee(X_0) \\ &- \sum_{\alpha\in\Psi} \sum_{k=1}^{\langle \alpha^\vee,\rho+\ell\lambda\rangle} \chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}(t) \cdot \log k. \end{aligned} \tag{30}$$

由式（17），

$$-\boldsymbol{\zeta}\chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha} - \chi_{\rho+\ell\lambda} = \boldsymbol{\zeta}\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}. \tag{31}$$

在丰沛线丛的这一情形下，可得 $\Psi^+ = \Psi$。因此对数 $\alpha^\vee$（X_0）因子可如 [K2，定理 18] 中那样化简。我们将使用该对称性

$$\chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha} = -\chi_{\rho+\ell\lambda+(k-\langle \alpha^\vee,\rho+\ell\lambda\rangle)\alpha} \tag{32}$$

由关于垂直于 α的超平面反射所诱导。根据命题 3.5 可得

$$-\sum_{\alpha\in\Psi} \sum_{k=1}^{\langle \alpha^\vee,\rho+\ell\lambda\rangle} \chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}(t) \cdot \log k$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha\in\Psi}\Bigg(2\widetilde{\chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}}(t)^*(\langle\alpha^\vee,\rho+\ell\lambda\rangle)+\log\langle\alpha^\vee,\ell\lambda\rangle\cdot\zeta\chi_{\rho+\ell\lambda-(k+\langle\alpha^\vee,\rho+\ell\lambda\rangle)\alpha}(t)\\
&\quad-2\mathrm{Res}\chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}(t)(\langle\alpha^\vee,\rho+\ell\lambda\rangle)\cdot\log\langle\alpha^\vee,\ell\lambda\rangle\\
&\quad-\left(2\mathrm{Res}\chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}(t)(\langle\alpha^\vee,\rho+\ell\lambda\rangle)\cdot\log^\ddagger\left(\frac{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle}{\langle\alpha^\vee,\ell\lambda\rangle}+1\right)\right)^{[\deg_\ell>-N]}\\
&\quad+\zeta\left(\chi_{\rho+\ell\lambda-(k+\langle\alpha^\vee,\rho+\ell\lambda\rangle)\alpha}(t)\cdot\log^\ddagger\left(\frac{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle+k}{\langle\alpha^\vee,\ell\lambda\rangle}+1\right)\right)^{[\deg_\ell>-N]}\\
&\quad-\zeta^R_{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle,\langle\alpha^\vee,\ell\lambda\rangle,N}\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)+\zeta'\chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}(t)\Bigg)\\
&= \sum_{\alpha\in\Psi}\Bigg(2\widetilde{\chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}}(t)^*(\langle\alpha^\vee,\rho+\ell\lambda\rangle)-\log\langle\alpha^\vee,\ell\lambda\rangle\cdot\zeta\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)\\
&\quad-2\mathrm{Res}\chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}(t)(\langle\alpha^\vee,\rho+\ell\lambda\rangle)\cdot\log\langle\alpha^\vee,\ell\lambda\rangle\\
&\quad-\left(2\mathrm{Res}\chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}(t)(\langle\alpha^\vee,\rho+\ell\lambda\rangle)\cdot\log^\ddagger\left(\frac{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle}{\langle\alpha^\vee,\ell\lambda\rangle}+1\right)\right)^{[\deg_\ell>-N]}\\
&\quad-\zeta\left(\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)\cdot\log^\ddagger\left(\frac{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle+k}{\langle\alpha^\vee,\ell\lambda\rangle}+1\right)\right)^{[\deg_\ell>-N]}\\
&\quad-\zeta^R_{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle,\langle\alpha^\vee,\ell\lambda\rangle,N}\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)+\zeta'\chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}(t)\Bigg).
\end{aligned}
\tag{33}
$$

根据命题 3.4，对称性（32）意味着 $\mathrm{Res}\chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}(t)(\langle\alpha^\vee,\rho+\ell\lambda\rangle)=0$，且项 $\sum_{\alpha\in\Psi}2\widetilde{\chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}}(t)^*(\langle\alpha^\vee,\rho+\ell\lambda\rangle)$ 与项 $-2\sum_{\alpha\in\Psi}\chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}(t)^*(\langle\alpha^\vee,\rho+\ell\lambda\rangle)$ 在等式（30）中相消。因此可得渐近展开

$$
\begin{aligned}
&T_t(G/K,L^\ell_{\rho_K+\ell\lambda})=-2\sum_{\alpha\in\Psi}\zeta'\chi^{\mathrm{odd}}_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}(t)+\sum_{\alpha\in\Psi}\zeta\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)\cdot\log\alpha^\vee(X_0)\\
&-\sum_{\alpha\in\Psi}\Bigg(\log\langle\alpha^\vee,\ell\lambda\rangle\cdot\zeta\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)+\zeta\left(\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)\cdot\log^\ddagger\left(\frac{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle+k}{\langle\alpha^\vee,\ell\lambda\rangle}+1\right)\right)^{[\deg_\ell>-N]}\\
&+\zeta^R_{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle,\langle\alpha^\vee,\ell\lambda\rangle,N}\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)-\zeta'\chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}(t)\Bigg).
\end{aligned}
$$

□

定理 *5.5.* 考虑与定理 *5.4* 中相同的情形以及取值集合 $\{x_j\,|\,j\in J\}:=\{{}^{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle}_{\alpha^\vee}X_0(\,)\;|\,\alpha\in\Psi\}$。由于 X_0、~~λ~~和集合 Ψ 是 W_K-不变的，每个 $\Psi_j:=\{\alpha\in\Psi\,|\,{}^{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle}_{\alpha^\vee}X_0(\,)=x_j\}$ 都定义了~~一~~个权为 Ψ_j 的虚拟 K-表示。令 $E_j\to G/K$ 表示相应的向量丛。令 $e^{i\varphi}$ 表示 t 在 M^t 的一个分支上的 $L_{\rho_K+\lambda}$ 上的作用。定理 *5.4* 中渐近展开的最高阶项为

$$
\begin{aligned}
&T_t((M,g_{X_0}),L^\ell_{\rho_K+\lambda})\\
&=\ -\log\ell\cdot\int_{M^t}(\mathrm{Td}'_t(TM)-n\mathrm{Td}_t(TM))\mathrm{ch}_t(L_{\rho_K+\lambda})^\ell\\
&\quad-\sum_{j\in J}\log x_j\int_{M^t}\mathrm{Td}_t(TM)\left(\frac{\mathrm{Td}'_t(E_j)}{\mathrm{Td}_t(E_j)}-\mathrm{rk}\,E_j\right)\mathrm{ch}_t(L_{\rho_K+\lambda})^\ell\\
&\quad+\int_{M^t}\mathrm{Td}_t(TM)G_t(TM)\mathrm{ch}_t(L_{\rho_K+\lambda})^\ell
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{m=1-N}^{\dim M^t-1}\ell^m\int_{M^t}\mathrm{Td}_t(TM)\mathrm{ch}_t(L^\ell_{\rho_K+\lambda})^{[0]}\boldsymbol{\zeta}\Bigg(\sum_{\alpha\in\Psi}\mathrm{ch}_t(E_{\rho_K+k\alpha})\\
&\cdot\sum_{j=\max\{1,-m\}}^{\dim M^t-m}\frac{(-1)^{j+1}}{j(m+j)!}\left(\frac{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle+k}{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle}\right)^j c_1(L_{\rho_K+\lambda})^{m+j}\Bigg)+O(\ell^{-N})\\
=\ &\int_{M^t}\mathrm{Td}^*_t(TM)\mathrm{ch}(L^\ell_{\rho_K+\lambda})\log\ell+O(\ell^{\dim M^t}).
\end{aligned}
$$

证明。 根据定理 5.4,

$$
T_t(G/K,L^\ell_{\rho_K+\ell\lambda})\ =\ -\log\ell\cdot\sum_{\alpha\in\Psi}\boldsymbol{\zeta}\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)+O(\ell^{\dim M^t})
$$

利用亚当斯算子 ψ^k, [K2、(103)、(106)] 可得

$$
\begin{aligned}
-\log\ell\cdot\boldsymbol{\zeta}\sum_{\alpha\in\Psi}\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)\ &=\ -\log\ell\cdot\int_{M^t}\mathrm{Td}_t(TM)\boldsymbol{\zeta}\mathrm{ch}_t(\psi^kTM)\mathrm{ch}_t(L^\ell_{\rho_K+\lambda})\\
&\overset{(27)}{=}\ -\log\ell\cdot\int_{M^t}(\mathrm{Td}'_t(TM)-\dim M\cdot\mathrm{Td}_t(TM))\mathrm{ch}_t(L^\ell_{\rho_K+\lambda}).
\end{aligned}
$$

同理

$$
\sum_{\alpha\in\Psi}\boldsymbol{\zeta}'\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)=\int_{M^t}\mathrm{Td}_t(TM)G_t(TM)\mathrm{ch}_t(L^\ell_{\rho_K+\lambda}).
$$

由方程式(28)可得

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{\alpha\in\Psi}\log\frac{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle}{\alpha^\vee(X_0)}\cdot\boldsymbol{\zeta}\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)\\
&=\ -\sum_{\alpha\in\Psi}\log\frac{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle}{\alpha^\vee(X_0)}\cdot\int_{M^t}\mathrm{Td}_t(TM)\mathrm{ch}_t(L_{\rho_K+\lambda})^\ell\boldsymbol{\zeta}\mathrm{ch}_t(E_{\rho_K+k\alpha})
\end{aligned}
$$

在$^{1\ 0}_{G/K}$. 中将 [K2引理 2] 的证明中的 Ad E_j替换为 $\bigoplus_{\alpha\in\Psi_j}E_{\rho_K+k\alpha}=\psi^kE_j$, 因此方程式(27)表明

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{\alpha\in\Psi}\log\frac{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle}{\alpha^\vee(X_0)}\cdot\boldsymbol{\zeta}\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)\\
&=\ -\sum_{j\in J}\log x_j\cdot\int_{M^t}\mathrm{Td}_t(TM)\mathrm{ch}_t(L_{\rho_K+\lambda})^\ell\boldsymbol{\zeta}\mathrm{ch}_t(\psi^kE_j)\\
&=\ -\sum_{j\in J}\log x_j\cdot\int_{M^t}\mathrm{Td}_t(TM)\left(\frac{\mathrm{Td}'_t(E_j)}{\mathrm{Td}_t(E_j)}-\mathrm{rk}\,E_j\right)\mathrm{ch}_t(L_{\rho_K+\lambda})^\ell
\end{aligned}
$$

此外

$$
\begin{aligned}
-\boldsymbol{\zeta}\left(\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)\cdot\log^\ddagger\left(\frac{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle+k}{\langle\alpha^\vee,\ell\lambda\rangle}+1\right)\right)^{[\deg\ell=m]}&=-\int_{M^t}\mathrm{Td}_t(TM)\boldsymbol{\zeta}\Bigg(\mathrm{ch}_t(E_{\rho_K+k\alpha})\\
\cdot\sum_{j=\max\{1,-m\}}^{\dim M^t-m}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\left(\frac{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle+k}{\langle\alpha^\vee,\ell\lambda\rangle}\right)^j&\mathrm{ch}_t(L_{\rho_K+\lambda})^{[0]}\frac{\ell^{m+j}c_1(L_{\rho_K+\lambda})^{m+j}}{(m+j)!}\Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\ell^m \int_{M^t} \mathrm{Td}_t(TM)\mathrm{ch}_t(L_{\rho_K+\lambda}^{\ell})^{[0]}\zeta\Bigg(\mathrm{ch}_t(E_{\rho_K+k\alpha}) \\
&\quad \cdot \sum_{j=\max\{1,-m\}}^{\dim M^t-m} \frac{(-1)^{j+1}}{j(m+j)!}\left(\frac{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle+k}{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle}\right)^j c_1(L_{\rho_K+\lambda})^{m+j}\Bigg) \\
&\overset{(32)}{=} \ell^m \int_{M^t} \mathrm{Td}_t(TM)\mathrm{ch}_t(L_{\rho_K+\lambda})^{[0]}\zeta\Bigg(\mathrm{ch}_t(E_{\rho_K-(k+\langle\alpha^\vee,\rho\rangle)\alpha}) \\
&\quad \cdot \sum_{j=\max\{1,-m\}}^{\dim M^t-m} \frac{(-1)^{j+1}}{j(m+j)!}\left(\frac{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle+k}{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle}\right)^j c_1(L_{\rho_K+\lambda})^{m+j}\Bigg)
\end{aligned}
$$

其中，只有维数为 $M^t > m$ 的不动点子流形分量才有非平凡贡献。这里，$\mathrm{ch}_t(L_{\rho_K+\lambda})^{[0]}$ 等于 t 在 $L_{\rho_K+\lambda}$ 上对M^t各分量的作用。

□

命题3.3 推出如下结论：

引理 *5.6.* 对于 $\alpha\in\Psi$，考虑特征标 $\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)=\sum_{m,\varphi}\sum_{\psi\in]-\pi}^{r\geq 0},_{,\pi]} f_{\alpha,m,r,\varphi,\psi}e^{ik\varphi+i\ell\psi}\ell^r k^m$及系数 $f_{\alpha,r,m,\varphi,\psi}\in\mathbb{C}$。令 $\varphi_0:=\begin{cases}2\pi,\varphi, & \text{若 } \varphi=0\\ \varphi, & \text{否则}\end{cases}$ 则得到定理 *5.4* 中误差项的如下估计

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{\alpha\in\Psi}\zeta^R_{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle,\langle\alpha^\vee,\ell\lambda\rangle,N}\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)\right| \\
&\leq \sum_{\substack{\alpha\in\Psi\\ r,m,\varphi}} \ell^{-N}\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle^{-r-N}m!(r+N-1)!\left(\frac{2\zeta(2)}{|\varphi_0|^{m+r+N+1}}+\frac{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle^{m+r+N+1}}{(m+r+N)!}\right)\left|\sum_{\psi} f_{\alpha,r,m,\varphi,\psi}e^{i\ell\psi}\right| \\
&\leq \frac{(\dim(G/K)^t+N-1)!}{(2\pi\ell c_2)^N}\cdot c_1
\end{aligned}
$$

其中 $c_1\in\mathbb{R}^+$ 与 N 和 ℓ 无关，并且

$$
c_2=\min_{q\in\mathbb{Z},w\in W_G,\alpha\in\Psi}\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle\cdot\begin{cases}1 & \text{if } w\alpha(X)\in\mathbb{Z},\\ |q+w\alpha(X)| & \text{else.}\end{cases}
$$

最后一项在 $N=\lfloor 2\pi\ell c_2\rfloor-\dim(G/K)^t$处达到最小值，若该值为正，因为当 N 从该值增大或减小时，商都会增大。系数 $f_{\alpha,\ m,\ r,\ \varphi,\ \psi}$可由 Σ_G 和 W_G 在 [K2，公式 (66)]中给出。注意，$m+r\leq\dim(G/T)^t$ 可由与命题 5.3 应用于丛 $L_\lambda^{\otimes\ell}\otimes L_\alpha^{\otimes k}\to G/T$时相同的证明得到，因为此时

$$
\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)=\int_{(G/T)^t}\mathrm{Td}_t(T(G/T))\mathrm{ch}_t(L_\lambda^{\otimes\ell})\mathrm{ch}_t(L_\alpha^{\otimes k}).
$$

证明。第一个界由命题 3.3 在将 ℓ^r 写成 $\frac{\langle\alpha^\vee\ \ell\lambda\rangle^r}{\langle\alpha^\vee\ \lambda\rangle^r}$,,,. 此外，$r\leq\dim(G/K)^t$ 由命题 5.3成立。利用 $|\varphi_0|\leq 2\pi$ 以及指数函数的泰勒展开，引理 5.6 第二行中的括号可估计为

$$
\begin{aligned}
\frac{2\zeta(2)}{|\varphi_0|^{m+r+N+1}}+\frac{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle^{m+r+N+1}}{(m+r+N)!} &= \frac{1}{|\varphi_0|^{m+r+N+1}}\left(2\zeta(2)+\frac{(|\varphi_0|\langle\alpha^\vee,\rho\rangle)^{m+r+N+1}}{(m+r+N)!}\right) \\
&\leq \frac{1}{|\varphi_0|^{m+r+N+1}}\left(2\zeta(2)+2\pi\langle\alpha^\vee,\rho\rangle e^{2\pi\langle\alpha^\vee,\rho\rangle}\right).
\end{aligned}
$$

最后，由 [K2，公式（66）] 角 φ 对于 $\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}$（$t$）具有如下形式 $2\pi w\alpha$（X），其中 $w\in W_G$。 □

6 与其他结果的比较

本节将给出一种不同的初等证明，说明定理 5.5与 Bismut–Vasserot 和 Finski 的结果相容。令人意外的是，对于公式（36）中的求和项7 24 ，相关证明远比其他部分之间的比较复杂。我们需要以下三个命题来处理这一求和项。

令 $\langle x,y\rangle_G$ 表示 $\mathfrak{t}^*$ 上由 Σ诱导的典范标量积，满足 $\langle x,y\rangle_G = \sum_{\alpha\in\Sigma}\langle x,\alpha\rangle_G\langle\alpha,y\rangle_G$。这是由负 Killing 形式诱导的标量积（[BtD, 第214]页），且当 G 为单时，由舒尔引理可知，它与 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 成正比。

命题 6.1。 设 G为紧李群， V 为一个不可约 G-表示，其特征标为 χ ，权为 $(\alpha_j)_{j\in J}$。则映射

$$\mathbb{Z}\to\mathbb{Q},\ k\mapsto\sum_{j\in J}\langle\alpha_j,\rho_G\rangle\prod_{\beta\in\Sigma^+}\frac{\langle\beta^\vee,\rho_G+k\alpha_j\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho_G\rangle}$$

关于 k是线性的。
该值等于 $\sum_{j\in J}\langle\alpha_j,\rho_G\rangle\dim V_{\rho_G+k\alpha_j}$， 以虚表示 $V_{\rho_G+k\alpha_j}$表示。

证明。 任意 G-表示都可以分解为若干虚表示，使得每个虚表示中的所有权具有相同的范数，因为这些权的子集是 W_G-不变的。因此，不失一般性，我们可以假设 $\|\alpha_j\|\equiv$为常数。 并且 G 是简单的。虚表示 $\psi^k V$ 的权为（ $k\alpha_j$ ） $_{j\in J}$，其特征标为 $\oplus_{j\in J}\chi_{\rho_G+k\alpha_j}$。 于是，Freudenthal–de Vries 公式[FrdV，47.10 节2]表明

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}\langle k\alpha_j,\rho_G\rangle_G^2 &= \sum_{j\in J}\frac{\langle k\alpha_j,2\rho_G+k\alpha_j\rangle_G}{24}\prod_{\beta\in\Sigma^+}\frac{\langle\beta,\rho_G+k\alpha_j\rangle}{\langle\beta,\rho_G\rangle}\\ &= \sum_{j\in J}\frac{k\langle\alpha_j,\rho_G\rangle_G}{12}\prod_{\beta\in\Sigma^+}\frac{\langle\beta,\rho_G+k\alpha_j\rangle}{\langle\beta,\rho_G\rangle}+\frac{k^2}{24}\sum_{j\in J}\|\alpha_j\|_G^2.\end{aligned}$$

因此，在典范标量积的情形下，上述映射等于

$$k\cdot\sum_{j\in J}\left(12\langle\alpha_j,\rho_G\rangle_G^2-\frac{1}{2}\|\alpha_j\|_G^2\right).$$ □

注 6.2。 通过在 [FrdV，47.10]，的方法中，利用 Weyl 特征公式的高阶泰勒展开推广这一证明，可以证明，对于任意 $m\in\mathbb{N}_0$,$\sum_{j\in J}\langle\alpha_j,\ \rho_G\rangle^m\prod_{\beta\in\Sigma^+}{}^{\langle\beta,\ \rho_G+k\alpha_j\rangle}_{\langle\beta\ \rho_G\rangle}$，都是关于 k 的 m 次多项式，且其奇偶性依次交替。

命题 6.3. 设 G为一个紧致单李群， G/K 为复维数为 n的厄米对称空间。设 λ 为一个权，使得 $\forall\gamma\in\Sigma_K:\ \langle\gamma,\lambda\rangle=0$ 和$\forall\alpha\in\Psi:\ \langle\gamma,\lambda\rangle>0$。那么 $\rho-\rho_K=c_\lambda\lambda$，其中对任意 $\alpha_0\in\Psi$

$$c_\lambda=\sqrt{\frac{n}{8}}\frac{1}{\|\lambda\|_G}=\frac{n}{8\langle\lambda,\rho-\rho_K\rangle_G}=\frac{1}{4\langle\alpha_0,\lambda\rangle_G}\tag{34}$$

以及 $\|\rho\|_G^2=\|\rho_K\|_G^2+\frac{n}{8}$。

证明。对于任意 $\gamma \in \Sigma_K^+, \sum_{\alpha\in\Psi}\langle\gamma^\vee,\alpha\rangle = 2\langle\gamma^\vee,\rho-\rho_K\rangle = 0$，由于 $s_\gamma\gamma = -\gamma$和 $s_\gamma \in W_K$置换了Ψ。由于 K 等于一个半单李群乘以 S^1，这意味着 $\exists c_\lambda \in \mathbb{R}:\ \rho-\rho_K = c_\lambda\lambda$。权 λ 是余极小权 λ_0 的倍数，因为相对于 $(\Sigma^+)^\vee$， $\lambda_0^\vee$ 是极小的[（Mi，定理 1.25]）。因此 $\forall\alpha\in\Psi:\ \langle\lambda,\alpha\rangle > 0$意味着 $\langle\lambda,\ \alpha\rangle$与 $\alpha\in\Psi$ 无关，依据 [Bou7-9，命题 VIII.3.6(iii)]。因此，对于任意 $\alpha_0\in\Psi$，我们得到$2c_\lambda\|\lambda\|^2 = 2\langle\rho-\rho_K,\lambda\rangle = \sum_{\alpha\in\Psi}\langle\alpha,\lambda\rangle = n\langle\alpha_0,\lambda\rangle$以及 $\frac{1}{2}\|\lambda\|_G^2 = \sum_{\gamma\in\Sigma^+}\langle\gamma,\lambda\rangle_G^2 = n\langle\alpha_0,\lambda\rangle_G^2$。这意味着式 (34)。此外，还可得出 $\|\rho\|_G^2 = \|\rho_K\|_G^2 + c_\lambda^2\|\lambda\|^2 = \|\rho_K\|_G^2 + \frac{n}{8}$。 □

特别是 $\langle\alpha_0,\ \rho-\rho_K\rangle_G = c_\lambda\langle\alpha_0,\ \lambda\rangle_G = \frac{1}{4}$。

命题 6.4. 在命题 *6.3* 的假设下，令 $\langle x,\ y\rangle_K$ 表示与 Σ_K在 （维数 $\mathfrak{t}-1$）维子环面 $\mathfrak{t}_K^*$相关联的典范标量积。则

$$\frac{\langle\cdot,\cdot\rangle_{G|\mathfrak{t}_K^*}}{\langle\cdot,\cdot\rangle_K} = \frac{3\dim K - \dim G}{2(\dim K - 1)}.$$

证明。 由于任意 W_G-不变标量积都是 W_K-不变的，因此存在 $c>0$ 使得$c\|\cdot\|_K^2 = \|\cdot\|_G^2$。现在，弗洛伊德塔尔–德弗里斯奇异公式（[FrdV，式 47.11]）指出，$\dim G = 24\|\rho_G\|_G^2$且 $\dim K-1 = 24\|\rho_K\|_K^2$。另一方面，命题 6.3表明 $\dim K - 1 = \frac{24}{c}(\|\rho_G\|_G^2 - \frac{n}{8})$。因此 $c = \frac{3\dim K - G}{2\quad K-1}$ $\frac{}{\dim(\dim)}$。 □

定理 6.5. 定理 *5.5* 中的首项等于 *[BV1，定理 8]* 与*[Fi，定理 1.3]*所给出的项。即

$$T(M,L^\ell) = \int_M \frac{\ell^n}{n!}c_1(L)^n\Big(\frac{n}{2}\log\frac{\ell}{2\pi} + \frac{1}{2}\log\mathring{\Omega}^L\Big) + o(\ell^n) \tag{35}$$

其中 $\mathring{\Omega}^L$由 $\omega^{TM}(\mathring{\Omega}^L\cdot,\cdot) = \Omega^L$定义。此外，在情形 $X_0 := \frac{\lambda}{2\pi}$下，从而 $x_{\bar{J}} \equiv 2\pi$，正如 *[Fi，定理 1. 中所考虑的3]*，

$$\begin{aligned} T(M,L^\ell) = \int_M \Bigg(&\frac{\ell^n}{n!}c_1(L)^n\cdot\frac{n}{2}\log\ell \\ &+\frac{\ell^{n-1}}{(n-1)!}c_1(L)^{n-1}c_1(TM)\Big(\frac{3n+1}{12}\log\ell + \frac{24\zeta'(-1)+2\log(2\pi)+7}{24}\Big)\Bigg) \\ &+o(\ell^{n-1}). \end{aligned} \tag{36}$$

证明。 根据乘积的解析挠率公式，我们可以假设 G 是单群，因此 K 等于 S^1 与一个半单群的乘积（[He，命题 VIII.6.2]）。我们将使用以下展开式

$$\begin{aligned} \mathrm{Td}(TM) &= 1 + \frac{c_1(TM)}{2} + \text{higher order}, \\ \frac{\mathrm{Td}'(E)}{\mathrm{Td}(E)} - \mathrm{rk}\,E &= -\frac{\mathrm{rk}\,E}{2} - \frac{c_1(E)}{12} + \text{higher order}, \\ G(TM) &= \zeta'(0)\mathrm{rk}\,TM + c_1(TM)\zeta'(-1) + \text{higher order} \\ &= -\frac{n}{2}\log(2\pi) + c_1(TM)\zeta'(-1) + \text{higher order}, \\ \mathrm{ch}(L^\ell) &= \frac{\ell^n}{n!}c_1(L)^n + \frac{\ell^{n-1}}{(n-1)!}c_1(L)^{n-1} + \text{lower order}. \end{aligned}$$

令 T_4 表示定理 ℓ^{n-1} 中 $m=n-1$ 对应的加项里的 5.5系数。前三个加项可得

$$
\begin{aligned}
T(G/K, L^{\ell}_{\rho_K+\ell\lambda}) &= \int_M \Bigg(\frac{\ell^n}{n!} c_1(L)^n (\frac{n}{2}\log\ell - \frac{n}{2}\log(2\pi) + \sum_{j\in J}\frac{\operatorname{rk} E_j}{2}\log x_j) \\
&\quad + \frac{\ell^{n-1}}{(n-1)!} c_1(L)^{n-1}\Big(\frac{c_1(TM)}{2}(\frac{n}{2}\log\ell - \frac{n}{2}\log(2\pi) + \sum_{j\in J}\frac{\operatorname{rk} E_j}{2}\log x_j) \\
&\quad + (\frac{c_1(TM)}{12}\log\ell + c_1(TM)\zeta'(-1) + \sum_{j\in J}\frac{c_1(E_j)}{12}\log x_j)\Big)\Bigg) + T_4 + o(\ell^{n-1}) \\
&= \int_M \Bigg(\frac{\ell^n}{n!} c_1(L)^n (\frac{n}{2}\log\frac{\ell}{2\pi} + \sum_{j\in J}\frac{\operatorname{rk} E_j}{2}\log x_j) \\
&\quad + \frac{\ell^{n-1}}{(n-1)!} c_1(L)^{n-1}\Big(c_1(TM)(\frac{3n+1}{12}\log\ell - \frac{n}{4}\log(2\pi) \\
&\quad + \sum_{j\in J}\frac{\operatorname{rk} E_j}{4}\log x_j + \zeta'(-1)) + \sum_{j\in J}\frac{c_1(E_j)}{12}\log x_j\Big)\Bigg) + T_4 + o(\ell^{n-1}). \qquad (37)
\end{aligned}
$$

由于等变性，曲率项 $\mathring{\Omega}^L$ 在不可约齐性空间 M 上是恒等算子的常数倍。对于选择 $X_0=\lambda$，可得 $\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Psi}\log\frac{\langle\alpha^\vee\ \lambda\rangle}{\alpha^\vee\ X_0}$，$()=0$，且$1\,2\log\mathring{\Omega}^L=0$，因为在这种情况下 $\omega^{TM}\equiv\Omega^L$。将 X_0 在 TM 的虚子表示 E_j 上重新缩放，会使 $\mathring{\Omega}^L$ 按相同因子缩放，因此

$$
\frac{1}{2}\log\mathring{\Omega}^L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Psi}\log\frac{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle}{\alpha^\vee(X_0)} = \sum_{j\in J}\frac{\operatorname{rk} E_j}{2}\log x_j.
$$

因此，对于对称空间，式（37）推出式（35）：

$$
\int_M c_1(L)^n \sum_{j\in J}\frac{\operatorname{rk} E_j}{2}\log x_j = \int_M c_1(L)^n \frac{1}{2}\log\mathring{\Omega}^L.
$$

此外，式（37）也包含与式（ℓ 和 ζ'（-1）相同的 log 倍数（36）。此外，在 $x_j\equiv 2\pi$ 的情况下，可得

$$
\begin{aligned}
&\int_M c_1(L)^{n-1}c_1(TM)\frac{2\log(2\pi)}{24} \\
=& \int_M c_1(L)^{n-1}\Big(c_1(TM)(-\frac{n}{4}\log(2\pi) + \sum_{j\in J}\frac{\operatorname{rk} E_j}{4}\log x_j) + \sum_{j\in J}\frac{c_1(E_j)}{12}\log x_j\Big).
\end{aligned}
$$

最后，我们证明该项

$$
\begin{aligned}
T_4 &= -\ell^{n-1}\int_M \operatorname{Td}(TM)\boldsymbol{\zeta}\left(\sum_{\alpha\in\Psi}\operatorname{ch}(E_{\rho_K+k\alpha})\frac{c_1(L_{\rho_K+\lambda})^n}{n!}\frac{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle+k}{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle}\right) \\
&= -\frac{\ell^{n-1}}{n!}\boldsymbol{\zeta}\left(\sum_{\alpha\in\Psi}\dim(V^K_{\rho_K+k\alpha})\frac{\langle\alpha^\vee,\rho-\rho_K\rangle+\langle\alpha^\vee,\rho_K\rangle+k}{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle}\right)\int_M c_1(L_{\rho_K+\lambda})^n \\
&=: T_{41}+T_{42}+T_{43} \qquad (38)
\end{aligned}
$$

等于 T_F:= $\frac{7\ell^{n-1}}{24\,(n-1)!}\int_M c_1(L)^{n-1}c_1(TM)$。首先，我们将 T_F与 $\int_M c_1(L)^n$联系起来。希策布鲁赫–黎曼–罗赫定理表明， $\sum_{\alpha\in\Psi}\dim V^G_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}$ 中的 ℓ^{n-1} 次项为

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha\in\Psi}(\dim V^G_{\rho+\ell\lambda+k\alpha})^{[\deg_\ell=n-1]} = \left(\int_M \mathrm{Td}(TM)\mathrm{ch}(L_{\rho_K+\lambda})^\ell \mathrm{ch}(\psi^k TM)\right)^{[\deg_\ell=n-1]}\\
= &\int_M (1+\frac{1}{2}c_1(TM))\frac{\ell^{n-1}c_1(L_{\rho_K+\lambda})^{n-1}}{(n-1)!}(n+kc_1(TM))\\
= &\ (n/2+k)\frac{\ell^{n-1}}{(n-1)!}\int_M c_1(TM)c_1(L_{\rho_K+\lambda})^{n-1} = \frac{12(n+2k)}{7}T_F. \qquad (39)
\end{aligned}$$

另一方面，外尔维数公式表明

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\Psi}(\dim V^G_{\rho+\ell\lambda+k\alpha})^{[\deg_\ell=n-1]} &= \sum_{\alpha\in\Psi}\left(\prod_{\beta\in\Psi}\frac{\langle\beta^\vee,\rho+\ell\lambda+k\alpha\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho\rangle}\cdot\prod_{\beta\in\Sigma_K^+}\frac{\langle\beta^\vee,\rho+k\alpha\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho\rangle}\right)^{[\deg_\ell=n-1]}\\
&= \sum_{\alpha,\gamma\in\Psi}\frac{\langle\gamma^\vee,\rho+k\alpha\rangle}{\langle\gamma^\vee,\ell\lambda\rangle}\prod_{\beta\in\Psi}\frac{\langle\beta^\vee,\ell\lambda\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho\rangle}\cdot\prod_{\beta\in\Sigma_K^+}\frac{\langle\beta^\vee,\rho+k\alpha\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho\rangle}. \qquad (40)
\end{aligned}$$

由式（39），该项关于 k 是仿射线性的，因此它等于

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\Psi}(\dim V^G_{\rho+\ell\lambda+k\alpha})^{[\deg_\ell=n-1]} &= \sum_{\alpha\in\Psi}\prod_{\beta\in\Psi}\frac{\langle\beta^\vee,\ell\lambda\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho\rangle}\cdot\left(\sum_{\gamma\in\Psi}\frac{\langle\gamma^\vee,\rho+k\alpha\rangle}{\langle\gamma^\vee,\ell\lambda\rangle}\cdot\prod_{\tilde\beta\in\Sigma_K^+}\frac{\langle\tilde\beta^\vee,\rho\rangle}{\langle\tilde\beta^\vee,\rho\rangle}\right.\\
&\left.+\sum_{\tilde\gamma\in\Psi}\frac{\langle\tilde\gamma^\vee,\rho\rangle}{\langle\tilde\gamma^\vee,\ell\lambda\rangle}\cdot\sum_{\gamma\in\Sigma_K^+}\frac{\langle\gamma^\vee,k\alpha\rangle}{\langle\gamma^\vee,\rho\rangle}\prod_{\beta\in\Sigma_K^+}\frac{\langle\beta^\vee,\rho\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho\rangle}\right). \qquad (41)
\end{aligned}$$

命题 $\forall\gamma\in\Sigma_K^+\colon\ \gamma\perp\rho-\rho_K$证明中的关系 6.3 表明，式（41）中的第二个加数为零，并且

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\Psi}(\dim V^G_{\rho+\ell\lambda+k\alpha})^{[\deg_\ell=n-1]} &= \sum_{\alpha\in\Psi}\prod_{\beta\in\Psi}\frac{\langle\beta^\vee,\ell\lambda\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho\rangle}\cdot\sum_{\gamma\in\Psi}\frac{\langle\gamma^\vee,\rho+k\alpha\rangle}{\langle\gamma^\vee,\ell\lambda\rangle}\\
&= \prod_{\beta\in\Psi}\frac{\langle\beta^\vee,\ell\lambda\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho\rangle}\cdot\sum_{\gamma\in\Psi}\frac{\langle\gamma^\vee,n\rho+2k(\rho-\rho_K)\rangle}{\langle\gamma^\vee,\ell\lambda\rangle}. \qquad (42)
\end{aligned}$$

结合式（39）和式（42）可得

$$T_F = \frac{7n\ell^{n-1}c_\lambda}{12}\prod_{\beta\in\Psi}\frac{\langle\beta^\vee,\lambda\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho\rangle}. \qquad (43)$$

改为考虑 ℓ^n 的系数，可得 $\frac{\ell^n}{n!}\int_M c_1(L)^n = \prod_{\beta\in\Psi}\frac{\langle\beta^\vee,\lambda\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho\rangle}$，与式（43）相同。

项 T_{41}：可以发现

$$T_{41} = -\ell^{-1}c_\lambda\zeta\left(\sum_{\alpha\in\Psi}\dim(V^K_{\rho_K+k\alpha})\right)\prod_{\beta\in\Psi}\frac{\langle\beta^\vee,\ell\lambda\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho\rangle}$$

$$= \quad -\ell^{-1}c_\lambda \boldsymbol{\zeta}\left(\dim(\psi^k \mathrm{Ad}^{1,0}_{G/K})\right)\prod_{\beta\in\Psi}\frac{\langle\beta^\vee,\ell\lambda\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho\rangle} = -\ell^{n-1}c_\lambda\zeta(0)n\prod_{\beta\in\Psi}\frac{\langle\beta^\vee,\lambda\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho\rangle}.$$

项 T_{42}：根据命题6.1项

$$\sum_{\alpha\in\Psi}\dim(V^K_{\rho_K+k\alpha})\frac{\langle\alpha^\vee,\rho_K\rangle}{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle} = \sum_{\alpha\in\Psi}\frac{\langle\alpha^\vee,\rho_K\rangle}{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle}\prod_{\beta\in\Sigma^+_{K_\alpha}}\frac{\langle\beta^\vee,\rho_K+k\alpha\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho_K\rangle}$$

关于 k 是线性的，因此可表示为 $k\sum_{\alpha\in\Psi}\frac{\langle\alpha^\vee,\rho_K\rangle}{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle}\sum_{\beta\in\Sigma^+_K}\frac{\langle\beta^\vee,\alpha\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho_K\rangle}$. 因此

$$T_{42} = -\ell^{-1}\zeta(-1)\sum_{\alpha\in\Psi}\frac{\langle\alpha^\vee,\rho_K\rangle}{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle}\sum_{\beta\in\Sigma^+_K}\frac{\langle\beta^\vee,\alpha\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho_K\rangle}\cdot\prod_{\beta\in\Psi}\frac{\langle\beta^\vee,\ell\lambda\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho\rangle}.$$

项 T_{43}：权集 $\Psi_j := \{\alpha\in\Psi\,|\,\langle\alpha,\lambda\rangle = j\}$ 对任意 $j\in\mathbb{N}$ 都是 W_K-不变的。因此存在一个虚拟 K-表示 F_j，其权为 Ψ_j，并且

$$\sum_{\alpha\in\Psi}\frac{\dim V^K_{\rho_K+k\alpha}}{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle} = \sum_{j\in\mathbb{N}}\frac{\dim\psi^k F_j}{j}$$

与 k 无关。因此

$$T_{43} \quad = \quad -\ell^{-1}\zeta(-1)\sum_{\alpha\in\Psi}\frac{1}{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle}\prod_{\beta\in\Psi}\frac{\langle\beta^\vee,\ell\lambda\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho\rangle}.$$

将 T_F 和 $T_{41}+T_{42}+T_{43}$ 除以 $\frac{\ell^{n-1}c_\lambda}{12}\prod_{\beta\in\Psi}\frac{\langle\beta^\vee,\lambda\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho\rangle}$，可知要证明 $T_F = T_4$，我们需要证明

$$7n = 6n + \sum_{\alpha\in\Psi}\frac{\langle\alpha,\rho_K\rangle}{c_\lambda\langle\alpha,\lambda\rangle}\sum_{\beta\in\Sigma^+_K}\frac{\langle\beta^\vee,\alpha\rangle}{\langle\beta^\vee,\rho_K\rangle} + \sum_{\alpha\in\Psi}\frac{\|\alpha\|^2}{2c_\lambda\langle\alpha,\lambda\rangle}.$$

到目前为止，我们一直有意避开不适用于一般复齐性空间的论证。现在我们将重点缩小到对称空间。由 $\forall\alpha\in\Psi:\ c_\lambda\langle\alpha,\ \lambda\rangle_G \equiv \frac{1}{4}$ 如命题 6.3 所示，并在等式两边减去 $6n$，即可将最后一个方程化简为

$$n = 4\sum_{\substack{\alpha\in\Psi\\ \beta\in\Sigma^+_K}}\frac{\langle\alpha,\rho_K\rangle_G\langle\beta^\vee,\alpha\rangle_G}{\langle\beta^\vee,\rho_K\rangle_G} + 2\sum_{\alpha\in\Psi}\|\alpha\|^2_G. \tag{44}$$

戈登·布朗公式（[Brown]）表明 $2\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\|\alpha\|^2_G =$ 维数 $\mathfrak{t}$ 以及 $2\sum_{\alpha\in\Sigma^+_K}\|\alpha\|^2_K =$ 维数 $\mathfrak{t}-1$。此外，典范标量积的定义意味着

$$4\sum_{\substack{\alpha\in\Sigma^+\\ \beta\in\Sigma^+_K}}\langle\alpha,\rho_K\rangle_G\frac{\langle\beta^\vee,\alpha\rangle_G}{\langle\beta^\vee,\rho_K\rangle_G} = 2\sum_{\beta\in\Sigma^+_K}\frac{\langle\beta^\vee,\rho_K\rangle_G}{\langle\beta^\vee,\rho_K\rangle_G} = \#\Sigma_K = 4\sum_{\substack{\alpha\in\Sigma^+_K\\ \beta\in\Sigma^+_K}}\langle\alpha,\rho_K\rangle_K\frac{\langle\beta^\vee,\alpha\rangle_K}{\langle\beta^\vee,\rho_K\rangle_K}.$$

因此，令 $c:= \frac{\langle\cdot,\ \cdot\rangle_G}{\langle\cdot\ \cdot\rangle_K}$，根据命题 6.4可得

$$2\sum_{\alpha\in\Psi}\|\alpha\|^2_G + 4\sum_{\substack{\alpha\in\Psi\\ \beta\in\Sigma^+_K}}\langle\alpha,\rho_K\rangle_G\frac{\langle\beta^\vee,\alpha\rangle_G}{\langle\beta^\vee,\rho_K\rangle_G} = (1-c)\dim\mathfrak{t} + c + (1-c)\#\Sigma_K$$

$$= \quad \frac{\dim G - \dim K - 2}{2(\dim K - 1)}(\dim\mathfrak{t} - 1 + \#\Sigma_K) + 1 = n.$$

因此，式（44）成立，且 $T_4 = T_F$。 □

7 Jantzen 求和公式的应用

我们利用解析挠率与 Jantzen 求和公式 [J, p.311] 之间的关系，将前述结果应用于 Chevalley 群概形的格表示。关于本文研究对象的详细信息，请参阅 [J] 和 [KaK]。考虑一个定义在 Spec $\mathbb{Z}$ 上的半单 Chevalley 群概形 $\mathcal{G}$。固定一个极大分裂环面 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}$，其特征标群为 $X^*(\mathcal{T})$，并在其上取一个序。令 $\mathcal{B}$ 为与之对应的 Borel 子群，并设 $X := \mathcal{G}/\mathcal{B}$。给定两个 $\mathbb{Z}$-自由的 $\mathcal{G}$-模 A、A'，使得 $A_{\mathbb{Q}}$ 和 $A'_{\mathbb{Q}}$ 同构且不可约，则将 A' 嵌入 $A \otimes \mathbb{Q}$ 并使最高权的权空间相互对应时，所得指标为 $[A, A'] \in \mathbb{Q}^+$。

定理 7.1。设 λ 是 $\mathcal{G}$的一个支配权。设 w_0 为最长的 *Weyl* 群元素。设 $A_{\rho+\lambda} := H^0(X, \mathcal{L}_\lambda)_{\text{free}}$ 为由线丛 $\mathcal{L}_\lambda$诱导的 $\mathcal{G}$-模。则对于 $\ell \to \infty$ 可得到渐近展开

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mu \in X^*(\mathcal{T})} \mu(t) \log[A_{\rho+\ell\lambda,\mu} : A_{w_0(\rho+\ell\lambda),\mu}] \\
=&\sum_{\alpha \in \Psi} \Bigg(2\widetilde{\chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}}(t)^*(\langle \alpha^\vee, \rho + \ell\lambda \rangle) + \log\langle \alpha^\vee, \ell\lambda \rangle \cdot \boldsymbol{\zeta} \chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}(t) \\
&+ \boldsymbol{\zeta}' \chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}(t) - \boldsymbol{\zeta} \left(\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t) \cdot \log^\ddagger \left(\frac{\langle \alpha^\vee, \rho \rangle + k}{\langle \alpha^\vee, \ell\lambda \rangle} + 1 \right) \right. \\
&\left. + \chi_{\rho+\ell\lambda}(t) \cdot \log^\ddagger \left(\frac{\langle \alpha^\vee, \rho \rangle}{\langle \alpha^\vee, \ell\lambda \rangle} + 1 \right) \right)^{[\deg_\ell > -N]} \Bigg) + O(\ell^{-N}).
\end{aligned}$$

证明。这是将 [KaK，推论 73]中给出的 Jantzen 求和公式与公式（3]

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mu \in X^*(T)} \mu \log[A_{\rho+\lambda,\mu} : A_{w_0(\rho+\lambda),\mu}] \\
&\quad + \sum_{\mu \in X^*(T)} \sum_{q=0}^{n} \mu \cdot (-1)^q \Big(\log \# H^q(X, \mathcal{L}_\lambda)_{\mu,\text{tor}} - \log \# H^{n-q}(X, \mathcal{L}_{w_0.\lambda})_{\mu,\text{tor}} \Big) \\
&\quad - (-1)^{l(w)} \chi_{\rho+\lambda} \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \Big(\log \# H^q(X, \mathcal{L}_\lambda)_{\lambda_0,\text{tor}} - \log \# H^{n-q}(X, \mathcal{L}_{w_0.\lambda})_{\lambda_0,\text{tor}} \Big) \\
= \quad & - \sum_{\alpha \in \Psi} \sum_{k=1}^{\langle \alpha^\vee, \rho+\lambda \rangle - 1} \chi_{\rho+\lambda-k\alpha} \cdot \log k
\end{aligned}$$

（针对 λ 支配的情形略作简化）与公式（33）结合得到的。将对称性（32）应用为

$$\chi_{\rho+\ell\lambda-\langle \alpha^\vee, \rho+\ell\lambda \rangle \alpha}(t) \cdot \log\langle \alpha^\vee, \rho + \ell\lambda \rangle = -\chi_{\rho+\ell\lambda}(t) \cdot \log\langle \alpha^\vee, \rho + \ell\lambda \rangle$$

在求和式（$k = \langle \alpha^\vee, \rho + \ell\lambda \rangle$ 式（33）中对应于 λ 支配的，根据 Kempf 消失定理 [J，命题 4。5] 可知，上同调 $H^q(X, \mathcal{L}_\lambda)$ 的挠率对所有 q均为零。由此根据 [J，第8节。8] 可知，上同调 $H^q(X, \mathcal{L}_{w_0\lambda})$ 的挠率也为零。因此得到

$$\sum_{\mu \in X^*(\mathcal{T})} \mu(t) \log[A_{\rho+\ell\lambda,\mu} : A_{w_0(\rho+\ell\lambda),\mu}]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha\in\Psi}\Bigg(2\widetilde{\chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}}(t)^*(\langle\alpha^\vee,\rho+\ell\lambda\rangle) - \log\langle\alpha^\vee,\ell\lambda\rangle\cdot\zeta\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)\\
&\quad + \zeta'\chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}(t) - \chi_{\rho+\ell\lambda}(t)\cdot\log\langle\alpha^\vee,\rho+\ell\lambda\rangle\\
&\quad - \zeta\left(\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)\cdot\log^\ddagger\left(\frac{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle+k}{\langle\alpha^\vee,\ell\lambda\rangle}+1\right)\right)^{[\deg_\ell>-N]}\\
&\quad - \zeta^R_{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle,\langle\alpha^\vee,\ell\lambda\rangle,N}\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)\Bigg).
\end{aligned}
$$

对 $\log\langle\alpha^\vee,\ \rho+\ell\lambda\rangle\chi_{\rho+\ell\lambda}(t)$ 作泰勒展开，得到一项 $-\log\langle\alpha^\vee,\ \ell\lambda\rangle\cdot(\zeta\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)+\chi_{\rho+\ell\lambda}(t))$，利用式（31）可将其化简为

$$
\zeta\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)+\chi_{\rho+\ell\lambda}(t) = -\zeta\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t). \qquad \square
$$

此结果可利用 $\Phi(e^{i\varphi},-m,0)=e^{i\varphi}\Phi(e^{i\varphi},-m,1)+\{{}^{1}_{0}$改写，若 $^{m=0}{}_{,m>0}$，则由式 (1) 并进一步化简误差项。

8 孤立不动点的情形

在本章中，G/K 可以是任意紧复齐性流形，换言之，即（广义）旗流形。令 $\mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}:=\{X\in\mathfrak{t}|\alpha(X)\notin\mathbb{Z}\ \forall\alpha\in\Sigma_G\}$。我们将使用算子$\zeta_{m,\ a}$，它们在定义 1.1 中引入。注意，$\zeta_{0,\ a}e^{ik\varphi}\equiv\zeta e^{ik\varphi}=\frac{1}{e^{-i\varphi}-1}$ 由式 (5) 给出。

定理 8.1. 设 $M=G/K$ 为紧复齐性流形，并设 $L:=L_{\rho_K+\lambda}$ 为 M 上的一个 G-不变全纯 *Hermitian* 线丛。假设 L 在如下意义下为正：$\forall\alpha\in\Psi:\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle>0$。在 M 上固定一个 *Kähler* 度量 g_{X_0}。选取 $X\in\mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}$ 并令 $t:=e^X$。则 L 的高次幂的等变解析挠率的渐近行为由下式给出

$$
\begin{aligned}
T_t((M,g_{X_0}),L^\ell_{\rho_K+\lambda}) &= -\log\ell\cdot\zeta\sum_{\alpha\in\Psi}\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)+\zeta'\sum_{\alpha\in\Psi}\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)\\
&\quad -\sum_{\alpha\in\Psi}\log\frac{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle}{\alpha^\vee(X_0)}\cdot\zeta\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)+\tilde{C}\cdot\chi_{\rho+\ell\lambda}(t)\\
&\quad +\sum_{\alpha\in\Psi}\sum_{m=1}^{N-1}\frac{\zeta_{m,\langle\alpha^\vee,\rho\rangle}\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)}{(-\langle\alpha^\vee,\ell\lambda\rangle)^m m}-\sum_{\alpha\in\Psi}\zeta^R_{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle,\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle\ell,N}\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)\\
&= \log\ell\cdot\int_{M^t}\mathrm{Td}^*_t(TM)\mathrm{ch}_t(L^\ell_{\rho_K+\lambda})+O(1).
\end{aligned}
$$

如果 G 不属于 G_2、F_4 或 E_8 类型，则常数 C 消失。

这里，$\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)$ 是由形如 $e^{i(\varphi'\ell+\varphi k)}$ 的项组成的 $\varphi,\ \varphi'\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$的线性组合。

证明。根据 [KaK，定理 5。4], 由常数的公式 C 见 [KaK，定理 7。1]对正的 L以及 [KaK，第 660], 页末的说明，挠率由下式给出

$$
\begin{aligned}
T_t((M,g_{X_0}),L^\ell_{\rho_K+\lambda}) &= \int_{M^t}\mathrm{Td}_t(TM)R_t(TM)\mathrm{ch}_t(L^\ell_{\rho_K+\lambda})\\
&\quad -\sum_{\alpha\in\Psi}\zeta\chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}(t)\cdot\log\alpha^\vee(X_0)-\chi_{\rho+\ell\lambda}(t)\sum_{\alpha\in\Psi^+}\log\alpha^\vee(X_0)-\sum_{\alpha\in\Psi}\sum_{k=1}^{\langle\alpha^\vee,\rho+\ell\lambda\rangle}\chi_{\rho+\ell\lambda-k\alpha}(t)\cdot\log k.
\end{aligned}
$$

因此，该结果的推导方式与厄米对称空间情形下定理 5.4 和定理 5.5 的证明相同，因为解析挠率的公式形式相同。在 $X \in \mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}$ 情形下，$\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(t)$ 在 ℓ 和 k 中的多项式次数等于 0，因此定理 ‡中的对数‡-项可由上述结果给出。 □

引理8.2. 定理中的误差项*8.1*可估计为

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{\alpha\in\Psi}\zeta^R_{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle,\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle\ell,N}\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(e^X)\right| < \frac{\ell^{-N}}{\left|\prod_{\alpha\in\Sigma^+}2\sin(\pi iw\alpha(X))\right|}\\
&\cdot\sum_{\alpha\in\Psi}\frac{1}{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle^N}\left(\frac{(N-1)!}{(2\pi)^{N+1}}\sum_{w\in W_G}(\zeta(N+1,w\alpha(X))+\zeta(N+1,1-w\alpha(X)))\right.\\
&\left.+\frac{\#W_G}{N}\cdot(\zeta(-N)-\zeta(-N,\langle\alpha^\vee,\rho\rangle+1))\right)\\
<&\frac{\ell^{-N}}{\left|\prod_{\alpha\in\Sigma^+}2\sin(\pi iw\alpha(X))\right|}\\
&\cdot\sum_{\alpha\in\Psi}\frac{1}{\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle^N}\left((N-1)!\sum_{w\in W_G}\frac{2\zeta(2)}{(2\pi\min_{q\in\mathbb{Z}}|q+w\alpha(X)|)^{N+1}}\right.\\
&\left.+\frac{\#W_G}{N}\cdot\langle\alpha^\vee,\rho\rangle^{N+1}\right)\\
\leq&\frac{(N-1)!}{(2\pi\ell\min_{q\in\mathbb{Z},w\in W_G,\alpha\in\Psi}|q+w\alpha(X)|\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle)^N}\cdot c_1
\end{aligned}$$

其中 $c_1\in\mathbb{R}^+$ 与 N 和 ℓ无关。

证明. 由于 $X\in\mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}$，特征由下式给出

$$\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}(e^X)=\frac{\sum_{w\in W_G}(-1)^w\exp(2\pi iw(\rho+\ell\lambda+k\alpha)(X))}{\prod_{\alpha\in\Sigma^+}2i\sin(\pi iw\alpha(X))}.$$

定理2.1 表明

$$\begin{aligned}
\left|\zeta^R_{\langle\alpha^\vee,\rho\rangle,\langle\alpha^\vee,\lambda\rangle\ell,N}e^{2\pi ikw\alpha(X)}\right| &< \frac{\ell^{-N}}{N}C(e^{2\pi ikw\alpha(X)},-N,\langle\alpha^\vee,\rho\rangle+1)\\
&= \ell^{-N}\left(\frac{(N-1)!}{(2\pi)^{N+1}}(\zeta(N+1,w\alpha(X))+\zeta(N+1,1-w\alpha(X))\right.\\
&\quad\left.+\frac{\zeta(-N)-\zeta(-N,\langle\alpha^\vee,\rho\rangle+1}{N}\right).
\end{aligned}$$

结合这些 我们得到第一个估计。其他估计可如引理 5.6. □

例 8.3。 在 $\mathbb{P}^1\mathbb{C}=\mathbf{SU}(2)/\mathbf{S}(\mathbf{U}(1)\times\mathbf{U(1)})$ 上，令 λ为由下式给出的权 $\left(\begin{smallmatrix}i\varphi & 0\\ 0 & -i\varphi\end{smallmatrix}\right)\mapsto\frac{\varphi}{2\pi}$。根据 [K1，定理 2], 对于任意 $\ell\in\mathbb{Z}$，挠率由实数给出

$$\begin{aligned}
T_t((\mathbb{P}^1\mathbb{C},g_{X_0}),L^\ell_{\rho_K+\lambda}) &= \frac{\cos|\ell+1|\frac{\varphi}{2}}{i\sin\frac{\varphi}{2}}\left(e^{i\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial s}(e^{i\varphi},0,1)-e^{-i\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial s}(e^{-i\varphi},0,1)\right)\\
&\quad-\sum_{k=1}^{|\ell+1|}\frac{\sin(|\ell+1|-2k)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\log k.
\end{aligned}$$

对于满足 $\|\alpha\|^2 = 2$ 的 Fubini–Study度量。对于一般度量，还存在一个附加项，可由下式表示：$\cos(\ \ell+2\ \frac{\varphi}{2})\sin^2\frac{\varphi}{2}\log\alpha^\vee(X_0)$，根据 [KaK，定理 5。2]。

另一方面，定理 8.1 表明，在这种情况下：

推论 8.4。球面绕角度为 φ 的轴旋转 t 所对应的等变挠率 $T_t(\mathbb{P}^1\mathbb{C},\mathcal{O}(\ell))$ 关于 $\ell\to+\infty$ 的渐近展开为

$$\begin{aligned}T_t(\mathbb{P}^1\mathbb{C},\mathcal{O}(\ell)) \;=\; & \frac{\cos(\ell+2)\frac{\varphi}{2}}{-2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\log\ell\\ &+\frac{\cos(\ell+2)\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\log\alpha^\vee(X_0)+\frac{\cos|\ell+1|\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}R^{\mathrm{rot}}(\varphi)\\ &+\frac{\sin|\ell+1|\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\left(-\log 2\pi+\Gamma'(1)-\frac{\psi(\frac{\varphi}{2\pi})+\psi(1-\frac{\varphi}{2\pi})}{2}\right)\\ &+\frac{1}{2i\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\sum_{m=1}^{N-1}\frac{e^{i(\ell+3)\frac{\varphi}{2}}\Phi(e^{i\varphi},-m,2)-e^{-i(\ell+3)\frac{\varphi}{2}}\Phi(e^{-i\varphi},-m,2)}{(-\ell)^m m}\right.\\ &\left.+\frac{e^{i(\ell+3)\frac{\varphi}{2}}R(e^{i\varphi},-N,2,0,\ell)-e^{-i(\ell+3)\frac{\varphi}{2}}R(e^{-i\varphi},-N,2,0,\ell)}{(-\ell)^N N}\right).\end{aligned}$$

应用 $T_t(\mathbb{P}^1\mathbb{C},\mathcal{O}(-\ell)) = T_t(\mathbb{P}^1\mathbb{C},\mathcal{O}(\ell-2))$ 后，该公式还给出了关于 $\ell\to-\infty$ 的一个略有不同的渐近展开。

根据引理 8.2 最后一项有如下界

$$\frac{\frac{N!}{(2\pi)^{N+1}}(\zeta(N+1,\frac{\varphi}{2\pi})+\zeta(N+1,1-\frac{\varphi}{2\pi}))+1}{\ell^N N\cdot|\sin\frac{\varphi}{2}|}.$$

证明。在这种情况下，$\Psi=\{2\lambda\}$ 和 $\chi_{\rho+\ell\lambda+k\alpha}\left(\begin{pmatrix}e^{i\varphi/2}&0\\0&e^{-i\varphi/2}\end{pmatrix}\right) = \text{正弦}(\ell+2k+1)\frac{\varphi}{2}\,\text{正弦}\,\frac{\varphi}{2}$ 对球面绕角度为 φ 的轴旋转成立。我们假设 $\ell>0$。因此，$\log\ell$ 的系数为

$$-\zeta\frac{\sin(\ell+2k+1)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{-1}{2i\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\frac{e^{i(\ell+1)\varphi/2}}{e^{-i\varphi}-1}-\frac{e^{-i(\ell+1)\varphi/2}}{e^{i\varphi}-1}\right)=\frac{\cos((\ell+2)\frac{\varphi}{2})}{-2\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

等价地，

$$\int_{M^t}\mathrm{Td}_t^*(TM)\mathrm{ch}_t(L^\ell_{\rho_K+\lambda})=\frac{e^{i\ell\varphi/2}}{(1-e^{-i\varphi})^2}+\frac{e^{-i\ell\varphi/2}}{(1-e^{i\varphi})^2}=\frac{\cos((\ell+2)\frac{\varphi}{2})}{-2\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

The因此，该项也等于 –log $\alpha^\vee(X_0)$ 的系数。因此，对于 $\ell\to+\infty$

$$\begin{aligned}T_t((M,g_{X_0}),L^\ell_{\rho_K+\lambda}) = & -\frac{\cos((\ell+2)\frac{\varphi}{2})}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\cdot\log\frac{\ell}{\alpha^\vee(X_0)}\\ &+\frac{1}{2i\sin\frac{\varphi}{2}}\left(e^{i(\ell+3)\frac{\varphi}{2}}\frac{\partial\Phi}{\partial s}(e^{i\varphi},0,1)-e^{-i(\ell+3)\frac{\varphi}{2}}\frac{\partial\Phi}{\partial s}(e^{-i\varphi},0,1)\right.\\ &+\sum_{m=1}^{N-1}\frac{e^{i(\ell+3)\frac{\varphi}{2}}\Phi(e^{i\varphi},-m,2)-e^{-i(\ell+3)\frac{\varphi}{2}}\Phi(e^{-i\varphi},-m,2)}{(-\ell)^m m}\\ &\left.+\left(\zeta^R_{1,\ell,N}e^{-i(\ell+1+2k)\frac{\varphi}{2}}-\zeta^R_{1,\ell,N}e^{i(\ell+1+2k)\frac{\varphi}{2}\varphi}\right)\right).\end{aligned}$$

式 (19) 给出了 ζ' 项的值。 □

9 射影平面上的李代数等变挠率

关于李代数作用等变的解析挠率定义见 [BG，第 2 节。6]。设 X 是 $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ 上的等距圆作用的生成元，其流的周期为 2π。根据 [K4，定理 9，4] Bismut–Goette 的 X-等变挠率为

$$\begin{aligned} T_{tX}(\mathbb{P}^1\mathbb{C},\mathcal{O}(\ell)) &= -\frac{\cos\frac{(\ell+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sum_{\substack{k\geq 1\\ k\,\mathrm{odd}}}\left(2\zeta'(-k)+\mathcal{H}_k\zeta(-k)\right)\frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}t^k}{k!} \\ &\quad +\sum_{k=1}^{|\ell+1|}\frac{\sin(2k-|\ell+1|)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\log k+\left(\frac{\cos\frac{(\ell+1)t}{2})}{t\sin\frac{t}{2}}\right)^{\#} \end{aligned} \tag{45}$$

其中 $(t^{2k})^{\#}:=t^{2k}\cdot\begin{cases}2\mathcal{H}_{2k+1}-\mathcal{H}_k & \text{若 } k\geq 0,\\ 0 & k=-1\end{cases}$。此表达式可有两种解释，由此在 ℓ中得到不同的渐近展开：将其视为关于 t 的收敛幂级数（当 $|t|<2\pi$时），以及视为关于 t的形式幂级数，此时每个幂 t^m对应一个渐近展开。本节将描述第一种解释下的渐近展开。第 10 节将采用另一种解释。

˜我们用 $\ell:=|\ell+1|$表示渐近展开。因此，前两项的系数与关于 ℓ 的渐近展开相同。利用 $(\ell+1)^{-m}\sim\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+k-1}{k}(-1)^k\ell^{-m-k}$以及 $\log(\ell+1)\sim\log\ell-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\ell^k}$，可以得到关于 ℓ 的渐近展开。

定理 9.1。将 $f(r):=\left(\frac{r}{\text{正弦}\,\frac{tr}{2}}-\frac{1}{\text{正弦}\,\frac{t}{2}}\right)\cdot\frac{t}{(1-r^2)}$ 定义为在 $r\in]-\frac{2\pi}{|t|},\frac{2\pi}{|t|}[$ 上的连续延拓。$T_{tX}(\mathbb{P}^1\mathbb{C},\mathcal{O}(\ell))$ 的各项具有如下渐近展开，其中 $\tilde{\ell}:=|\ell+1|\to\infty$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\tilde{\ell}}\frac{\sin(2k-\tilde{\ell})\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\log k &= -\frac{\cos\frac{(\tilde{\ell}+1)t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\log\tilde{\ell} \\ &\quad -\frac{1}{2i\sin\frac{t}{2}}\left(e^{\frac{-i(\tilde{\ell}-2)t}{2}}\frac{\partial}{\partial s}\Phi(e^{it},0,1)-e^{\frac{i(\tilde{\ell}-2)t}{2}}\frac{\partial}{\partial s}\Phi(e^{-it},0,1)\right) \\ &\quad +\frac{1}{2i\sin\frac{t}{2}}\sum_{m=1}^{N-1}\frac{(-\tilde{\ell})^{-m}}{m}\left(e^{\frac{i(\tilde{\ell}+2)t}{2}}\Phi(e^{it},-m,1)-e^{-\frac{i(\tilde{\ell}+2)t}{2}}\Phi(e^{-it},-m,1)\right) \\ &\quad +\frac{1}{2i\sin\frac{t}{2}}\frac{(-\tilde{\ell})^{-N}}{N}\left(e^{\frac{i(\tilde{\ell}+2)t}{2}}R(e^{it},-N,1,0,\tilde{\ell})-e^{-\frac{i(\tilde{\ell}+2)t}{2}}R(e^{-it},-N,1,0,\tilde{\ell})\right) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \left(\frac{\cos\frac{\tilde{\ell}t}{2}}{t\sin\frac{t}{2}}\right)^{\#} &\sim -\frac{1}{t\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{\tilde{\ell}t}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{(\tilde{\ell}t)^{2m+1}}\right)\right. \\ &\quad \left.+\cos\frac{\tilde{\ell}t}{2}\cdot\left(-\log(\tilde{\ell}t)+\Gamma'(1)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m-1)!}{(\tilde{\ell}t)^{2m}}\right)\right) \\ &\quad +\sum_{m=1}^{\infty}2\left(\frac{2}{\tilde{\ell}t}\right)^m\cos\frac{\tilde{\ell}t+\pi m}{2}\cdot f^{(m-1)}(1). \end{aligned}$$

注释 9.2。 t正弦$(\frac{t}{2})^{m+1}f^{(m-1)}(1)$是关于 t、正弦 $\frac{t}{2}$和余弦 $\frac{t}{2}$的多项式。-利用级数1 正弦 $\frac{t}{2}=\frac{2}{t}+\frac{t}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(\frac{t}{2\pi})^2-m^2}$ 可得

$$f^{(m-1)}(1)=(m-1)!t^{m-1}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p 4p\pi}{4p^2\pi^2-t^2}\left(\frac{1}{(2p\pi-t)^m}-\frac{1}{(-2p\pi-t)^m}\right).$$

证明。 第一个展开由命题 3.5 推出，正如推论 8.4中所示。根据 [K4，命题 9。2]我们知道

$$\left(\frac{\cos\frac{\tilde{\ell}t}{2}}{t\sin\frac{t}{2}}\right)^{\#}=-\int_{-1}^{1}\left(\frac{r\cos\frac{\tilde{\ell}tr}{2}}{\sin\frac{tr}{2}}-\frac{\cos\frac{\tilde{\ell}t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)\cdot\frac{dr}{t(1-r^2)}.$$

此外 [K4，定理 9。3] 说明了如何求出该积分的渐近展开：我们需要用到由下式定义的正弦积分函数和余弦积分函数：$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x \sin_r{}^r\,dr$ 和 $\mathrm{Ci}(x)=-\int_x^{+\infty}\cos_r{}^r\,dr$，其中 $x\in\mathbb{R}^+$。在 [K4，定理 9。3]的证明中，上述积分被分解为

$$\left(\frac{\cos\frac{\tilde{\ell}t}{2}}{t\sin\frac{t}{2}}\right)^{\#}=-\int_{-1}^{1}\cos\frac{\tilde{\ell}tr}{2}\cdot f(r)\,dr-\frac{\sin\frac{\tilde{\ell}t}{2}\cdot\mathrm{Si}(\tilde{\ell}t)-\cos\frac{\tilde{\ell}t}{2}\cdot\left(-\Gamma'(1)-\mathrm{Ci}(\tilde{\ell}t)+\log(\tilde{\ell}t)\right)}{t\sin\frac{t}{2}}. \quad (46)$$

分部积分表明，对于 f 的第 $2m$阶导数，有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\cos\frac{\tilde{\ell}tr}{2}\cdot f^{(2m)}(r)\,dr &= \frac{2}{\tilde{\ell}t}\sin\frac{\tilde{\ell}tr}{2}\cdot f^{(2m)}(r)\Big|_{-1}^{1}-\frac{2}{\tilde{\ell}t}\int_{-1}^{1}\sin\frac{\tilde{\ell}tr}{2}\cdot f^{(2m+1)}(r)\,dr\\ &\overset{f\text{ even}}{=} 2\frac{2}{\tilde{\ell}t}\sin\frac{\tilde{\ell}t}{2}\cdot f^{(2m)}(1)-\frac{2}{\tilde{\ell}t}\int_{-1}^{1}\sin\frac{\tilde{\ell}tr}{2}\cdot f^{(2m+1)}(r)\,dr\end{aligned}$$

类似地

$$\int_{-1}^{1}\sin\frac{\tilde{\ell}tr}{2}\cdot f^{(2m+1)}(r)\,dr=-2\frac{2}{\tilde{\ell}t}\cos\frac{\tilde{\ell}t}{2}\cdot f^{(2m+1)}(1)+\frac{2}{\tilde{\ell}t}\int_{-1}^{1}\cos\frac{\tilde{\ell}tr}{2}\cdot f^{(2m+2)}(r)\,dr.$$

结合这些结果，利用归纳法可得，对任意 $N\in\mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}-\int_{-1}^{1}\cos\frac{\tilde{\ell}tr}{2}\cdot f(r)\,dr &= \sum_{m=1}^{N}2\left(\frac{2}{\tilde{\ell}t}\right)^m(-1)^{m(m+1)/2}f^{(m-1)}(1)\cdot\begin{cases}\sin\frac{\tilde{\ell}t}{2}\\ \cos\frac{\tilde{\ell}t}{2}\end{cases}\text{for } m\ \begin{matrix}\text{odd},\\ \text{even}\end{matrix}\\ &\quad-\left(\frac{2}{\tilde{\ell}t}\right)^N(-1)^{N(N+1)/2}\cdot\int_{-1}^{1}dr\ f^{(N)}(r)\begin{cases}\sin\frac{\tilde{\ell}tr}{2}\\ \cos\frac{\tilde{\ell}tr}{2}\end{cases}\text{for } N\ \begin{matrix}\text{odd},\\ \text{even}.\end{matrix}\end{aligned}$$

利用

$$\cos\frac{\tilde{\ell}t+\pi m}{2}=(-1)^{m(m+1)/2}f^{(m-1)}(1)\cdot\begin{cases}\sin\frac{\tilde{\ell}t}{2}\\ \cos\frac{\tilde{\ell}t}{2}\end{cases}\text{for } m\ \begin{matrix}\text{odd},\\ \text{even}\end{matrix}$$

最后一项进一步简化。三角积分的渐近展开为（[Erd2，9.8(10)-(11)]）

$$\begin{aligned}\mathrm{Si}(\tilde{\ell}t) &\sim \frac{\pi}{2}+\sin\tilde{\ell}t\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m-1)!}{(\tilde{\ell}t)^{2m}}-\cos\tilde{\ell}t\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{(\tilde{\ell}t)^{2m+1}},\\ \mathrm{Ci}(\tilde{\ell}t) &\sim \cos\tilde{\ell}t\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m-1)!}{(\tilde{\ell}t)^{2m}}+\sin\tilde{\ell}t\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{(\tilde{\ell}t)^{2m+1}}\end{aligned}$$

因此，通过三角加法公式，可以得到公式（46）中第二个加项的展开式。

□

10 挠率形式的渐近性

本节将计算文献 [BK，定义 3.8]，中所定义的、针对射影直线纤维化的挠率形式的渐近展开。为此，我们使用作者在 $T_\pi(\mathcal{O}(\ell))$ 中给出的这一特定挠率形式的公式 [K4，定理 1.1]。关于该对象定义的详细信息，请参阅那篇文章。在计算中，我们将需要以下结果，而该结果似乎此前尚未发表。

命题 10.1. 对于任意 $m \in \mathbb{Z}^+$, $j \in \mathbb{Z}_0^+$, $a \in \mathbb{C}$，以下恒等算子成立：

$$\sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} \frac{a^r}{j+m-r} = \frac{1}{m\binom{j+m}{m}} \left((-1)^m a^{m+j} + (a+1)^{j+1} \sum_{r=0}^{m-1} \binom{j+r}{j} (-a)^{m-1-r} \right).$$

Hansen 给出了 [Ha, (6.11.19)] 中左侧的递推关系，并给出了 m的几个特殊取值。项 $\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r+m+1}\binom{j+r}{j}a^{m-1-r}$ 是 $a=0$ 处 $-\frac{(-1)^m a^{m+j}}{(a+1)^{j+1}}$ 在单位圆盘外的洛朗级数的正则部分。对于 $m+j<0$ 的情形，见式（47）。

证明。在 $a=0$ 的情形下，两边均等于 $\frac{1}{j+m-r}$。现在将左侧的 a 替换为 $-\frac{1}{a}$，并将 r 替换为 $j-r$，得到

$$(-a)^{-m-j} \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} \frac{(-a)^{m+r}}{m+r} = \frac{1}{m\binom{j+m}{m}} \left((-1)^m (-a)^{-m-j} + (1-\frac{1}{a})^{j+1} \sum_{r=0}^{m-1} \binom{j+r}{j} a^{r+1-m} \right).$$

两边乘以 $(-a)^{m+j}$，将此方程变为

$$\sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} \frac{(-a)^{m+r}}{m+r} = \frac{(-1)^m}{m\binom{j+m}{m}} \left(1 - (1-a)^{j+1} \sum_{r=0}^{m-1} \binom{j+r}{j} a^r \right). \tag{47}$$

对方程（47）右边关于 a求导，得到

$$\begin{aligned}
& \frac{(-1)^m}{m\binom{j+m}{m}} \left((1-a)^j \sum_{r=0}^{m-1} \binom{j+r}{j} (j+1) a^r - (1-a)^j (1-a) \sum_{r=0}^{m-1} \binom{j+r}{j} r a^{r-1} \right) \\
= & \frac{(-1)^m (1-a)^j}{m\binom{j+m}{m}} \left(\sum_{r=0}^{m-1} \left(\binom{j+r}{j} (j+1) - \binom{j+r+1}{j} (r+1) \right. \right. \\
& \left. \left. + \binom{j+r}{j} r \right) a^r + m \binom{j+m}{m} a^{m-1} \right) \\
= & -(1-a)^j (-a)^{m-1}
\end{aligned}$$

因为对 r 求和中的每一项都为零。所得结果等于方程（47）左边的导数。由于方程（47）两边在 $a=0$ 处均等于 0，因此该公式对任意 a都成立。 □

注记 10.2. 将两边乘以 $m\binom{j+m}{m}$，左边得到 $\sum_{r=0}^{j}\binom{j+m}{m}\binom{j}{r}\frac{ma^r}{j+m-r}$。展开右边的项 $(a+1)^{j+1}$，得到

$$(-1)^m a^{m+j} + \sum_{q=0}^{j+1} \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^{r+m+1} \binom{j+1}{r} \binom{j+r}{j} a^{m-1-r+q}$$

$$
\begin{aligned}
\overset{\substack{r\mapsto\\ m-1-r+q}}{=}\quad & (-1)^m a^{m+j}+\sum_{q=0}^{j+1}\sum_{r=q}^{q+m-1}(-1)^{r+q}\binom{j+1}{r}\binom{j+m-1-r+q}{j}a^r\\
= \quad & (-1)^m a^{m+j}+\sum_{r=0}^{j+m}\sum_{q=r}^{r+m-1}(-1)^{r+q}\binom{j+1}{r}\binom{j+m-1-r+q}{j}a^r\\
\overset{q\mapsto r-q}{=}\quad & (-1)^m a^{m+j}+\sum_{r=0}^{j+m}\sum_{q=0}^{m-1}(-1)^{q}\binom{j+1}{r-q}\binom{j+m-1-q}{j}a^r
\end{aligned}
$$

因此比较 a 的各次幂的系数可知，对任意 $m\in\mathbb{Z}^+$、 $j\in\mathbb{Z}_0^+$、 $0\le r<m+j$，均有

$$
m\binom{j+m}{m}\binom{j}{r}=(j+m-r)\sum_{q=0}^{m-1}(-1)^q\binom{j+1}{r-q}\binom{j+m-1-q}{j}. \tag{48}
$$

显然，这个公式对于 $m=0$ 以及任意 $r\in\mathbb{Z}$ 也成立。对于固定的 $r\in\mathbb{Z}_0^+$，等式两边都是关于 j 的多项式，因此，式（48）对任意 $m\in\mathbb{Z}_0^+$、$r\in\mathbb{Z}_0^+$、$j\in\mathbb{C}$都成立，进而可用于推广命题 10.1。

定理 10.3。 设 $P\to B$ 是一个$\mathbf{U}(2)$ 主丛， $\pi:\mathbb{P}\to B$ 是诱导的 $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$-丛，且 $E:=P\times_{\mathbf{U}(2)}\mathbb{C}^2$，因此 $\mathbb{P}=\mathbb{P}E$。对于 $\mathcal{O}(\ell)$，在 $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$-丛 $\pi:\mathbb{P}E\to B$ 上， $\ell\to\infty$ 在任意微分形式次数 $n\in\mathbb{N}_0$ 下的挠形式 $T_\pi(\mathcal{O}(\ell))$的渐近展开为

$$
\begin{aligned}
T_\pi(\mathcal{O}(\ell))^{[2n]} \;=\; & \sum_{m=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{2c_1(E)^{n-2m}(c_1(E)^2-4c_2(E))^m}{(n-2m)!(2m+1)!}(-\frac{\ell}{2})^{n-2m}\\
& \cdot\left(\sum_{k=0}^{m}\left(\zeta'(-2k-1)-\mathcal{H}_{2k+1}\frac{B_{2k+2}}{2k+2}\right)\binom{2m+1}{2k+1}B_{2m-2k}\left(-\frac{\ell}{2}\right)\right.\\
& -B_{2m+2}\left(-\frac{\ell}{2}\right)\frac{2\mathcal{H}_{2m+1}-\mathcal{H}_m}{2m+2}\\
& -\frac{1}{2m+2}\sum_{j=1}^{2m+2}\binom{2m+2}{j}B_{2m+2-j}(-\frac{\ell}{2})\cdot\frac{(\ell+1)^j}{j}\\
& -\log\ell\cdot\left(B_{2m+2}(-\frac{\ell}{2})+(1+\frac{\ell}{2})B_{2m+1}(-\frac{\ell}{2})\right)\\
& +\frac{\log 2\pi}{2}B_{2m+1}(-\frac{\ell}{2})+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m+1)!}{2(2m+1-2k)!(2\pi)^{2k}}\zeta(2k+1)B_{2m+1-2k}(-\frac{\ell}{2})\\
& +\sum_{j=1-N}^{2m}\sum_{q=\max\{0,1+j\}}^{2m+1}\left(\sum_{r=\max\{0,1+j\}}^{q}\binom{q}{r}\frac{(-\frac{1}{2})^r}{r-j}\right)\\
& \cdot\binom{2m+1}{q}B_{2m+1-q}\cdot\left((-1)^{q-j}\frac{B_{q-j+1}}{q-j+1}-1+\frac{1}{q-j+1}\right)(-1)^j\ell^j\\
& +\sum_{q=0}^{2m+1}\sum_{r=0}^{2m+1-q}\frac{(2m+1)!(q-1+N)!}{q!(2m+1-q-r)!(q+r+N)!}B_{2m+1-q-r}\\
& \left.\cdot\frac{(-1)^N\ell^{-N}}{2^q}R(1,-q-r-N,2,r,\ell)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \frac{c_1(E)^{n-2m}(c_1(E)^2-4c_2(E))^m}{(n-2m)!(2m+1)!}(-1)^n \\
&\cdot\left(\frac{1}{2^{n+1}}\ell^{n+1}\log\frac{\ell}{2\pi}+\frac{2m+1}{2^{n-1}3}\ell^n\log\ell\right. \\
&\left.+\frac{7-4m-6(2m+1)\log(2\pi)+24(2m+1)\zeta'(-1)}{2^{n+2}3}\ell^n\right) \\
&+O(\ell^{n-1}\log\ell).
\end{aligned}
$$

为使完整公式稍短一些，这里用关于 ℓ 的伯努利多项式来表示，而没有使用 ℓ的幂；这用到了下文证明中的等式 (54)、(52)、(56)、(63)、(60)、(65)。使用等式 (55)、(53)、(58)、(62)、(59)、(66)，则可将其表示为 ℓ^j 的线性组合。结果中的各项依次通过相加 $T_1+T_{23}^{\mathrm{odd}}$、$T_3$、$T_{21}$、$T_{22}$、$T_{23}^{\mathrm{even}}$、$T_{24}$、$T_{25}$ 得到。

的渐近展开 $T_\pi(\mathcal{O}(\ell))^{[0]}$ 至 $O(\ell^{-1})$ 已由 Finski 在 [Fi，第 4 节中给出。3] 使用来自 $T_\pi(\mathcal{O}(\ell))^{[0]}$ 的 [K2] 中的公式。

证明。 根据 [K4，定理 1。1], 该 X-等变挠率由 $T_\pi(\mathcal{O}(\ell)) = e^{-\frac{\ell}{2}c_1(E)}T_\ell(c_1(E)^2-4c_2(E))$ 给出，其中 $T_\ell(-t^2)$ 是由与下式相同的公式给出的幂级数 T_{tX} 见式（45），它自然地分解为三项

$$
\begin{aligned}
T_\ell(-t^2) &= -\frac{\cos\frac{(\ell+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\,\mathrm{odd}}}\left(2\zeta'(-m)+\mathcal{H}_m\zeta(-m)\right)\frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}}t^m}{m!} \\
&\quad +\sum_{m=1}^{|\ell+1|}\frac{\sin(2m-|\ell+1|)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\log m+\left(\frac{\cos\frac{(\ell+1)t}{2}}{t\sin\frac{t}{2}}\right)^{\#} \qquad (49)\\
&=: \sum_{m=0}^{\infty}\frac{2(-1)^m t^{2m}}{(2m+1)!}T_1+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2(-1)^m t^{2m}}{(2m+1)!}T_2+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2(-1)^m t^{2m}}{(2m+1)!}T_3, \qquad (50)
\end{aligned}
$$

其中 $(t^{2m})^{\#} := t^{2m}\cdot\begin{cases}2\mathcal{H}_{2m+1}-\mathcal{H}_m & \text{若 } m\geq 0,\\ 0 & m=-1\end{cases}$ 且 T_1, T_2, T_3 依赖于 m 和 ℓ，但不依赖于t。假设 $\ell\geq -1$。根据伯努利多项式的定义和公式 $B_m(x) = -m\zeta(1-m,x)$ $(m\in\mathbb{Z}^+$, [Erd1, 1.11(11)]), 可得泰勒级数

$$
\frac{\cos\frac{(\ell+1)t}{2}}{t\sin\frac{t}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty}B_{2m}(\frac{\ell}{2}+1)\frac{2(-1)^m t^{2m-2}}{(2m)!} = \sum_{m=0}^{\infty}B_{2m}\left(-\frac{\ell}{2}\right)\frac{2(-1)^m t^{2m-2}}{(2m)!}. \qquad (51)
$$

因此

$$
\begin{aligned}
T_3 &= -B_{2m+2}\left(-\frac{\ell}{2}\right)\frac{2\mathcal{H}_{2m+1}-\mathcal{H}_m}{2m+2} \qquad (52)\\
&= -(2\mathcal{H}_{2m+1}-\mathcal{H}_m)\sum_{j=0}^{2m+2}\frac{(2m+1)!}{(2m+2-j)!j!}B_{2m+2-j}\cdot\left(-\frac{\ell}{2}\right)^j. \qquad (53)
\end{aligned}
$$

同理

$$
T_1 = \frac{(2m+1)!}{2(-1)^m}\cdot\left(\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r}\left(-\frac{\ell}{2}\right)\frac{2(-1)^r t^{2r-1}}{(2r)!}\right.
$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(2\zeta'(-2k-1) + \mathcal{H}_{2k+1}\zeta(-2k-1)\right) \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \Bigg)^{[\deg_t = 2m]}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \left(2\zeta'(-2k-1) - \mathcal{H}_{2k+1}\frac{B_{2k+2}}{2k+2}\right) \binom{2m+1}{2k+1} B_{2m-2k}\left(-\frac{\ell}{2}\right) \tag{54}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{2m-2k} \left(2\zeta'(-2k-1) - \mathcal{H}_{2k+1}\frac{B_{2k+2}}{2k+2}\right) \frac{(2m+1)! B_{2m-2k-j} \cdot \left(-\frac{\ell}{2}\right)^j}{(2m-2k-j)! j! (2k+1)!}$$

$$= \sum_{j=0}^{2m} \sum_{k=0}^{\lfloor m-j/2 \rfloor} \left(2\zeta'(-2k-1) - \mathcal{H}_{2k+1}\frac{B_{2k+2}}{2k+2}\right) \frac{(2m+1)! B_{2m-2k-j} \cdot \left(-\frac{\ell}{2}\right)^j}{(2m-2k-j)! j! (2k+1)!}. \tag{55}$$

再次利用伯努利多项式的定义， T_2 可写为

$$T_2 = \sum_{k=1}^{\ell+1} B_{2m+1}\left(k - \frac{\ell}{2}\right) \log k.$$

多项式 $k \mapsto B_{2m+1}\left(k - \frac{\ell}{2}\right)$ 关于 $k = \frac{\ell+1}{2}$ 呈反对称。因此，根据命题3.4 和 3.5

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\ell+1} B_{2m+1}\left(k-\frac{\ell}{2}\right)\log k \quad &= \quad -2B_{2m+1}\left(k-\frac{\ell}{2}\right)^{*}(\ell+1) \\
&\quad + \log \ell \cdot \boldsymbol{\zeta}\left(B_{2m+1}\left(-k-\frac{\ell}{2}\right)\right) - \boldsymbol{\zeta'}\left(B_{2m+1}\left(k-\frac{\ell}{2}\right)\right) \\
&\quad + \boldsymbol{\zeta}\left(B_{2m+1}\left(-k-\frac{\ell}{2}\right)\log^{\ddagger}\left(\frac{k+1}{\ell}+1\right)\right)^{[\deg_\ell > -N]} \\
&\quad + \boldsymbol{\zeta}^{R}_{1,\ell,N}\left(B_{2m+1}\left(-k-\frac{\ell}{2}\right)\right) \\
&=: \quad T_{21} + T_{22} + T_{23} + T_{24} + T_{25}.
\end{aligned}$$

利用 $B_m(x+y) = \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} B_{m-h}(x) y^h$ [Erd1, 1.13(8)] 以及命题 3.4 可得

$$\begin{aligned}
T_{21} \quad &= \quad -\sum_{h=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{h} B_{2m+1-h}(-\frac{\ell}{2}) \cdot \frac{(\ell+1)^{h+1}}{(h+1)^2} \\
&= \quad -\sum_{h=1}^{2m+2} \binom{2m+2}{h} B_{2m+2-h}(-\frac{\ell}{2}) \cdot \frac{(\ell+1)^{h}}{h(2m+2)} \qquad (56) \\
&= \quad -\sum_{h=1}^{2m+2} \sum_{r=0}^{2m+2-h} \sum_{j=0}^{h} \binom{2m+2}{r, 2m+2-h-r, j, h-j} \frac{B_{2m+2-h-r}}{h(2m+2)} \cdot (-\frac{1}{2})^r \ell^{r+j} \\
&= \quad -\sum_{r=0}^{2m+2} \sum_{h=1}^{2m+2-r} \sum_{j=0}^{h} \binom{2m+2}{r, 2m+2-h-r, j, h-j} \frac{B_{2m+2-h-r}}{h(2m+2)} \cdot (-\frac{1}{2})^r \ell^{r+j} \\
&= \quad -\sum_{r=0}^{2m+2} \sum_{j=0}^{2m+2-r} \sum_{h=\max\{1,j\}}^{2m+2-r} \binom{2m+2}{r, 2m+2-h-r, j, h-j} \frac{B_{2m+2-h-r}}{h(2m+2)} \cdot (-\frac{1}{2})^r \ell^{r+j} \\
&\overset{\substack{j\mapsto j-r \\ h\mapsto h-r}}{=} \quad -\sum_{r=0}^{2m+2} \sum_{j=r}^{2m+2} \sum_{h=\max\{1+r,j\}}^{2m+2} \binom{2m+2}{r, 2m+2-h, j-r, h-j} \frac{B_{2m+2-h}}{(h-r)(2m+2)} \cdot (-\frac{1}{2})^r \ell^{j}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{r=0}^{2m+2}\sum_{j=r}^{2m+2}\sum_{h=\max\{r+1,j\}}^{2m+2}\binom{2m+2}{r,2m+2-h,j-r,h-j}\frac{B_{2m+2-h}}{(h-r)(2m+2)}\cdot(-\frac{1}{2})^r\ell^j\\
&= -\sum_{j=0}^{2m+2}\sum_{r=0}^{j}\sum_{h=\max\{r+1,j\}}^{2m+2}\binom{2m+2}{r,2m+2-h,j-r,h-j}\frac{B_{2m+2-h}}{(h-r)(2m+2)}\cdot(-\frac{1}{2})^r\ell^j\\
&= -\sum_{j=0}^{2m+1}\sum_{h=j+1}^{2m+2}\left(\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\cdot\frac{(-\frac{1}{2})^r}{h-r}\right)\binom{2m+2}{j,2m+2-h,h-j}\frac{B_{2m+2-h}}{2m+2}\cdot\ell^j\\
&\quad -\sum_{j=1}^{2m+2}\left(\sum_{r=0}^{j-1}\binom{j}{r}\cdot\frac{(-\frac{1}{2})^r}{j-r}\right)\binom{2m+2}{j}\frac{B_{2m+2-j}}{2m+2}\cdot\ell^j
\end{aligned}
$$

其中最后一步中的第二个求和对应于情形 $h=j$。应用 $\sum_{r=0}^{j-1}\binom{j}{r}\cdot\frac{(-\frac{1}{2})^{r-j}}{r-j}=\sum_{r=1}^{j}\binom{j}{r}\cdot\frac{(-1)^{r-1}}{r}=-2\mathcal{H}_j+\mathcal{H}_{\lfloor j/2\rfloor}$([KaK, p. 666]) 和 $\sum_{r=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{r}\cdot\frac{(-\frac{1}{2})^r}{2m+2-r}=\sum_{r=0}^{2m+2}\binom{2m+2}{r}\cdot\frac{(-\frac{1}{2})^r}{2m+2}=0$可得

$$
\begin{aligned}
T_{21} &= -\sum_{j=0}^{2m}\sum_{h=j+1}^{2m+2}\left(\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\cdot\frac{(-\frac{1}{2})^r}{h-r}\right)\binom{2m+2}{j,2m+2-h,h-j}\frac{B_{2m+2-h}}{2m+2}\cdot\ell^j\\
&\quad +\sum_{j=1}^{2m+2}\left(2\mathcal{H}_j-\mathcal{H}_{\lfloor j/2\rfloor}\right)\binom{2m+2}{j}\frac{B_{2m+2-j}}{2m+2}\cdot(-\frac{\ell}{2})^j. \qquad (57)
\end{aligned}
$$

在考察最高次项时，将对 r 的求和用命题 10.1 替换，可得到更合适的公式

$$
\begin{aligned}
T_{21} &= -\sum_{j=0}^{2m}\sum_{h=j+1}^{2m+2}\left((-1)^j+\sum_{r=0}^{h-j-1}\binom{j+r}{r}2^r\right)\binom{2m+2}{h}\frac{2^{-h}B_{2m+2-h}}{(h-j)(2m+2)}\cdot\ell^j\\
&\quad +\sum_{j=1}^{2m+2}\left(2\mathcal{H}_j-\mathcal{H}_{\lfloor j/2\rfloor}\right)\binom{2m+2}{j}\frac{B_{2m+2-j}}{2m+2}\cdot(-\frac{\ell}{2})^j. \qquad (58)
\end{aligned}
$$

再次使用 $B_m(x+y)$ 的公式，还可以得到

$$
\begin{aligned}
T_{23} &= -\sum_{h=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{h}\zeta' B_{2m+1-h}(k)\cdot(-\frac{\ell}{2})^h \qquad (59)\\
&= -\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}B_{2m+1-k}(-\frac{\ell}{2})\zeta'(-k).
\end{aligned}
$$

由于 $\zeta'(-2k)=(-1)^k\frac{(2k)!}{2(2\pi)^{2k}}\zeta(2k+1)$ 对 $k\in\mathbb{Z}^+$ 成立，且 $\zeta'(0)=-\log\sqrt{2\pi}$，该和式中 k 为偶数的部分等于

$$
T_{23}^{\text{even}}=\frac{\log 2\pi}{2}B_{2m+1}(-\frac{\ell}{2})+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}(2m+1)!}{2(2m+1-2k)!(2\pi)^{2k}}\zeta(2k+1)B_{2m+1-2k}(-\frac{\ell}{2}). \qquad (60)
$$

奇数部分与 ζ' 中的一半求和项相抵消 T_1，如公式 (54) 所示：

$$
T_{23}^{\text{odd}} = -\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k+1}B_{2m-2k}(-\frac{\ell}{2})\zeta'(-2k-1).
$$

我们使用方程 $B_m = (-1)^{m-1} m\zeta(1-m)$，以及欧拉卷积恒等式 $\forall m \in \mathbb{Z}^+$：
$\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} B_j B_{m-j} = -mB_{m-1} - (m-1)B_m$ [Nie，第 42 页公式 (13)]，从而得到恒等算子

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\zeta} B_m(-k) &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} B_j \cdot (-1)^{m-j} \zeta(j-m) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} B_j \frac{B_{1+m-j}}{1+m-j} \\ &= \frac{1}{m+1} \left(\sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} B_j B_{1+m-j} - B_{m+1} \right) = -B_{m+1} - B_m. \end{aligned} \tag{61}$$

Thus

$$\begin{aligned} T_{22} &= \log \ell \cdot \sum_{j=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{j} \boldsymbol{\zeta} B_{2m+1-j}(-k) \cdot (-\frac{\ell}{2})^j \\ &\overset{(61)}{=} -\log \ell \cdot \sum_{j=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{j} (B_{2m+2-j} + B_{2m+1-j}) \cdot (-\frac{\ell}{2})^j \qquad (62) \\ &= -\log \ell \cdot \left(\sum_{j=0}^{2m+2} \frac{2m+2-j}{2m+2} \binom{2m+2}{j} B_{2m+2-j} \cdot (-\frac{\ell}{2})^j + B_{2m+1}(-\frac{\ell}{2}) \right) \\ &= -\log \ell \cdot \big(B_{2m+2}(-\frac{\ell}{2}) + (1+\frac{\ell}{2}) B_{2m+1}(-\frac{\ell}{2}) \big). \qquad (63) \end{aligned}$$

此外，利用

$$\boldsymbol{\zeta}((k+1)^n) \overset{(25)}{=} \Phi(1,-n,2) + \frac{1}{n+1} = \zeta(-n) - 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} B_{n+1} - 1 + \frac{1}{n+1} \tag{64}$$

可得

$$\begin{aligned} T_{24} &= \boldsymbol{\zeta} \left(\sum_{r=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{r} B_{2m+1-r}(-k) \cdot (-\frac{\ell}{2})^r \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} (\frac{k+1}{\ell})^j \right)^{[\deg_\ell > -N]} \\ &= \boldsymbol{\zeta} \sum_{j=1-N}^{2m} \sum_{r=\max\{0,1+j\}}^{2m+1} \binom{2m+1}{r} B_{2m+1-r}(-k) \cdot (k+1)^{r-j} \frac{(-1)^{j+1} \ell^j}{2^r (r-j)} \\ &= \boldsymbol{\zeta} \sum_{j=1-N}^{2m} \sum_{r=\max\{0,1+j\}}^{2m+1} \binom{2m+1}{r} (-1)^{2m+1-r} B_{2m+1-r}(k+1) \cdot (k+1)^{r-j} \frac{(-1)^{j+1} \ell^j}{2^r (r-j)} \\ &= \boldsymbol{\zeta} \sum_{j=1-N}^{2m} \sum_{r=\max\{0,1+j\}}^{2m+1} \sum_{q=0}^{2m+1-r} \binom{2m+1}{r,q,2m+1-r-q} B_{2m+1-r-q} \cdot (k+1)^{q+r-j} \frac{(-1)^{j+r} \ell^j}{2^r (r-j)} \\ &= \boldsymbol{\zeta} \sum_{j=1-N}^{2m} \sum_{r=\max\{0,1+j\}}^{2m+1} \sum_{q=r}^{2m+1} \binom{2m+1}{r,q-r,2m+1-q} B_{2m+1-q} \cdot (k+1)^{q-j} \frac{(-1)^{j+r} \ell^j}{2^r (r-j)} \\ &= \boldsymbol{\zeta} \sum_{j=1-N}^{2m} \sum_{q=\max\{0,1+j\}}^{2m+1} \sum_{r=\max\{0,1+j\}}^{q} \binom{2m+1}{r,q-r,2m+1-q} B_{2m+1-q} \cdot (k+1)^{q-j} \frac{(-1)^{j+r} \ell^j}{2^r (r-j)} \\ &= \boldsymbol{\zeta} \sum_{j=1-N}^{2m} \sum_{q=\max\{0,1+j\}}^{2m+1} \left(\sum_{r=\max\{0,1+j\}}^{q} \binom{q}{r} \frac{(-\frac{1}{2})^r}{r-j} \right) \binom{2m+1}{q} B_{2m+1-q} \cdot (k+1)^{q-j} (-\ell)^j \end{aligned}$$

$$\overset{(64)}{=}\sum_{j=1-N}^{2m}\sum_{q=\max\{0,1+j\}}^{2m+1}\left(\sum_{r=\max\{0,1+j\}}^{q}\binom{q}{r}\frac{(-\frac{1}{2})^r}{r-j}\right)\cdot\binom{2m+1}{q}$$
$$\cdot B_{2m+1-q}\cdot\left((-1)^{q-j}\frac{B_{q-j+1}}{q-j+1}-1+\frac{1}{q-j+1}\right)(-\ell)^j. \tag{65}$$

在 $j<0$ 命题 10.1中，更具体地说，式（47）再次给出了对 r 求和的另一种表达式

$$T_{24}\overset{j\le 0}{=}\sum_{j=1-N}^{2m}\sum_{q=0}^{2m+1}\left(\frac{1-2^{-q-1}\sum_{r=0}^{-j-1}\binom{q+r}{q}2^{-r}}{-j\binom{q-j}{-j}}\right)\cdot\binom{2m+1}{q}$$
$$\cdot B_{2m+1-q}\cdot\left((-1)^{q-j}\frac{B_{q-j+1}}{q-j+1}-1+\frac{1}{q-j+1}\right)(-\frac{\ell}{2})^j. \tag{66}$$

最后得到

$$\begin{aligned}
T_{25} &= \zeta^R_{1,\ell,N}\sum_{q=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{q}B_{2m+1-q}(-k)\cdot\left(-\frac{\ell}{2}\right)^q\\
&= \zeta^R_{1,\ell,N}\sum_{q=0}^{2m+1}\sum_{r=0}^{2m+1-q}\binom{2m+1}{q,r,2m+1-q-r}B_{2m+1-q-r}\cdot\frac{(-1)^{r+q}}{2^q}k^r\ell^q\\
&= \sum_{q=0}^{2m+1}\sum_{r=0}^{2m+1-q}\binom{2m+1}{q,r,2m+1-q-r}B_{2m+1-q-r}\\
&\quad\cdot\frac{(-1)^{r+q}}{2^q}\frac{(-1)^{r+q+N}\ell^{-N}}{\binom{q+r+N}{r}\cdot(q+N)}R(1,-q-r-N,2,r,\ell)\\
&= \sum_{q=0}^{2m+1}\sum_{r=0}^{2m+1-q}\frac{(2m+1)!(q-1+N)!}{q!(2m+1-q-r)!(q+r+N)!}B_{2m+1-q-r}\\
&\quad\cdot\frac{(-1)^N\ell^{-N}}{2^q}R(1,-q-r-N,2,r,\ell).
\end{aligned}\tag{67}$$

根据（58）和（54），ℓ^{2m+2} 和 ℓ^{2m+1} <style id='15}>在 T_{21} 中的系数与 T_3中的相应项相消，因为 $2\mathcal{H}_{2m+2}-\mathcal{H}_{m+1}=2\mathcal{H}_{2m+1}-\mathcal{H}_m$。此外，根据（62）和（60），$T_{22}$和 T_{23} 的最高次项给出

$$(T_{22}+T_{23})^{[\deg_\ell=2m+1]}=2^{-2m-2}\log\frac{\ell}{2\pi}.$$

l^{2m} 的系数为

$$\begin{aligned}
&(T_1+T_3+T_{21}+T_{22}+T_{23}+T_{24})^{[\deg_\ell=2m]}=(\frac{2m+1}{2^{2m-1}}\zeta'(-1)-\frac{2m+1}{3\cdot 2^{2m+2}})\\
&-\frac{2m+1}{3\cdot 2^{2m+2}}(2\mathcal{H}_{2m+1}-\mathcal{H}_m)+(\frac{1}{2^{2m+1}}-\frac{1}{2^{2m+2}}+(2\mathcal{H}_{2m}-\mathcal{H}_m)\frac{2m+1}{3\cdot 2^{2m+2}})\\
&+\frac{2m+1}{3\cdot 2^{2m}}\log\ell-(\frac{2m+1}{2^{2m}}\zeta'(-1)+\frac{2m+1}{2^{2m+2}}\log 2\pi)+\frac{7}{3\cdot 2^{2m+3}}\\
=\;&\frac{1}{3\cdot 2^{2m+3}}\Big(7-4m+(2+4m)\log\frac{\ell^4}{(2\pi)^3}+24(1+2m)\zeta'(-1)\Big).
\end{aligned}$$

将 $(-t^2)$ 替换为 $c_1(E)^2-4c_2(E)$，即可得到所声称的公式：

$$T_\pi(\mathcal{O}(\ell))^{[2n]}=\left(e^{-\frac{\ell}{2}c_1(E)}T_\ell(c_1(E)^2-4c_2(E))\right)^{[2n]}$$

$$= \sum_{\substack{r\geq 0\\ r+2m=n}} \frac{1}{r!}(-\frac{\ell}{2}c_1(E))^r \sum_{m=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \frac{2(c_1(E)^2-4c_2(E))^m}{(2m+1)!}(T_1+T_2+T_3). \qquad \square$$

注记 10.4. $T_1+T_3+T_{21}+T_{22}+T_{23}+T_{24}$ 的更多系数乘以相应的 ℓ 次幂后，可得：

$$\frac{l^{2m-1}}{3\cdot 2^{2m+2}}\Big(5+18m-8m^2+8m(1+2m)(\log\frac{\ell}{\sqrt{2\pi}}-\frac{3}{2\pi^2}\zeta(3)+6\zeta'(-1))\Big)$$

and

$$\frac{l^{2m-2}}{2^{2m+3}}\Big(\frac{1}{135}\big(-87-121m+840m^2-152m^3\big)$$
$$+4m(4m^2-1)\big(\frac{4}{45}\log\ell-\frac{1}{\pi^2}\zeta(3)+\frac{8}{3}\zeta'(-3)+\frac{4}{3}\zeta'(-1)\big)\Big).$$

注记 10.5. 根据 [K4，定理 11。2], 算术黎曼–罗赫中的 R-类项由方程 (49) 中的第一项给出，对应于 T_1。因此，挠形式与 R-类项之差的渐近展开，可通过省略定理 10.3右侧方程 (54) 中给出的项得到。该项的阶为 $O(\ell^{2m})$。

最后，我们验证定理 10.3 中的最高次项与 Puchol 在 [P，定理 1 中给出的公式一致。3]:

引理 10.6. 利用 $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$-纤维化全空间上 $\mathcal{O}(1)$ 丛的曲率 $\Omega^{\mathcal{O}(1)}$，挠形式的 $2n$-分量等于

$$T_\pi(\mathcal{O}(\ell))^{[2n]} = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{P}^1\mathbb{C}}\log\frac{\ell\mathring{\Omega}^{\mathcal{O}(1)}}{2\pi}e^{-\frac{\ell}{2\pi i}\Omega^{\mathcal{O}(1)}}\right)^{[2n]}+o(\ell^{n+1}).$$

这里 $\mathring{\Omega}^{\mathcal{O}(1)}$ 的定义同定理 6.5。

证明。在这种情况下 $\mathring{\Omega}^{\mathcal{O}(1)}=\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$。我们将纤维记为 Z 并将垂直切空间记为$T\pi$。[K4，命题 11。1] 指出

$$\pi^*c_1(E)=c_1(T\pi)-2c_1(\mathcal{O}(1)) \quad \text{and} \quad \pi^*(c_1(E)^2-4c_2(E))=c_1(T\pi)^2.$$

因此，利用投影公式以及 $\int_{\mathbb{P}^1\mathbb{C}}c_1(T\pi)=2$ 我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\ell^{n+1}}{2}\log\frac{\ell}{2\pi}\cdot\int_Z\frac{c_1(\mathcal{O}(1))^{n+1}}{(n+1)!}\\
&= \frac{\ell^{n+1}}{2}\log\frac{\ell}{2\pi}\cdot\int_Z\sum_{j=0}^{n+1}\frac{1}{2^n(n+1)!}\binom{n+1}{j}c_1(T\pi)^j(-\pi^*c_1(E))^{n+1-j}\\
&\overset{m:=2j+1}{=} \frac{\ell^{n+1}}{2}\log\frac{\ell}{2\pi}\cdot\int_Z\sum_{m=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(-1)^{n-2m}}{2^{n+1}(2m+1)!(n-2m)!}\\
&\quad\cdot c_1(T\pi)\pi^*((c_1(E)^2-4c_2(E))^mc_1(E)^{n-2m})\\
&= \ell^{n+1}\log\frac{\ell}{2\pi}\cdot\sum_{m=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(2m+1)!(n-2m)!}(c_1(E)^2-4c_2(E))^mc_1(E)^{n-2m}
\end{aligned}$$

这等于定理 10.3中最后一个公式的最高次项。 $\square$

参考文献

[Ap] Apostol, T. M.：《论 Lerch ζ 函数》。Pac. J. Math. 1 (1951)，161–167。[BeVe] Bergeron, N.；Venkatesh, A.：《算术群挠同调的渐近增长》。J. Inst. Math. Jussieu 12(2) (2013)，391–447。[Ber] Berman, R.：《全纯线丛高次幂的隧穿、Quillen度量与解析挠率》。Contemp. Math.，630，AMS，普罗维登斯，RI，2014，15–31。[BG] Bismut, J.-M.；Goette, S.：《全纯等变解析挠》。Geom. Funct. Anal. 10 (2000)，第 6 期，1289–1422。[BK] Bismut, J.-M.；K¨ohler, K.：《直像的高阶解析挠率形式与反常公式》。J. Alg. Geom. 1 (1992)，647–684。[BMZ] Bismut, J.-M.；Ma, X.；Zhang, W.：《渐近挠率与 Toeplitz 算子》。J. Inst. Math. Jussieu 16 (2017)，223–349。[BV1] Bismut, J.-M.；Vasserot, E.：《与正线丛高次幂相关的 Ray–Singer解析挠的渐近展开》。Comm. Math. Phys. 125 (2) (1989)，355–367。[BV2] Bismut, J.-M.；Vasserot, E.：《正向量丛对称幂的 Ray-Singer解析挠的渐近展开》。《傅里叶研究所年刊》40 (1990)，835–848。[Bou7-9] Bourbaki, N.：《李群与李代数。数学基础》第 7–9 章。Springer-Verlag，柏林，2005。[BtD] Br¨ocker, Th.，tom Dieck, T.：《紧李群的表示》。GTM 98，Springer-Verlag，柏林，1985。[Brown] Brown, G.：《关于半单李代数的一则注记》。Proc. 美国数学会 15，518 (1964)。[Eli] Elizalde, E.：《广义黎曼 ζ 函数一阶导数的渐近展开》。Math. of Comp. 47，第 175 期 (1986)，347–350。[Erd1] Erd´elyi, A. 等：《高等超越函数》第 I 卷。McGraw-Hill，纽约，1953。[Erd2] Erd´elyi, A. 等：《高等超越函数》第 II 卷。McGraw-Hill，纽约，1953。[Fi] Finski, S.：《解析挠率的完整渐近展开》。J. Funct. Anal. 275 (2018)，3457–3503。[FrdV] Freudenthal, H.，de Vries, H.：《线性李群》。Academic Press，1969。[GS1] Gillet, H.，Soul´e, C.：《带厄米度量的代数向量丛的特征类 I》。Ann. Math. 131，163–203 (1990)。[GS2] Gillet, H.，Soul´e, C.：《算术黎曼–罗赫定理》。Invent. Math. 110，第 3 期，(1992)，473–543。

[GrRy] Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M.：《积分、级数与乘积表》。Alan Jeffrey 编订的修订增补版，收入 Yu. V. Geronimus 和 M. Yu. Tseytlin 编订的第四版内容。由俄语译出。学术出版社，纽约-伦敦-多伦多（安大略省），1980 年。[Ha] Hansen, E.：《级数与乘积表》。普伦蒂斯-霍尔，1975 年。[He] Helgason, S.：《微分几何、李群与对称空间》。学术出版社，1978 年。[J] Jantzen, J. C.：《代数群表示》。学术出版社，1987 年。[KaK] Kaiser, C., K¨ohler, K.：Arakelov 几何中的 Lefschetz 型不动点公式。III. Chevalley 概形的表示与旗簇的高度。《数学发明》147 (2002)，第 3 期，633–669。[Kat] Katsurada, M.：与各种 ζ 函数相关的完整渐近展开。《纯数学高级研究》84，日本数学会，东京 (2020)，205–262。[K1] K¨ohler, K.：$\mathbb{P}^n\mathbb{C}$上的等变解析挠率。《数学年刊》297 (1993)，第 3 期，553–565。[K2] K¨ohler, K.：厄米对称空间上的全纯挠率。《纯粹与应用数学杂志》460 (1995)，93–116。[K3] K¨ohler, K.：对称空间上的等变 Reidemeister 扭率。《数学年刊》307 (1997)，57–69。[K4] K¨ohler, K.：以射影曲线为纤维的纤维化的解析挠率形式。《数学杂志》305，47 (2023)。[La] Larra´ın-Hubach, A.：修正的全纯解析扭率的渐近展开。《复流形》12 (2025)，论文编号 20250010。[Liu1]Liu, B.；紧局部对称空间上的等变实解析扭率的渐近展开。《泛函分析杂志》281 (2021)，文章编号 109117。[Liu2] Liu, B.：关于紧局部对称轨形上实解析扭率的完整渐近展开。《分析与偏微分方程》17 (2024)，1261–1329。[Mq] Ma, Q.：Toeplitz 算子与挠率形式的完整渐近展开。《泛函分析杂志》286 (2024)，文章编号 110210。[Ma] Ma, X.：下沉与等变 Quillen 度量。《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）50 (2000)，第 5 期，1539–1588。[Mi] Milne, J.：《志村簇导论》。载于《调和分析、迹公式与志村簇》，265–378，《Clay 数学论文集》4，美国数学会，普罗维登斯（罗得岛州），2005。[Mou] Mourougane, C.：Hirzebruch 曲面的解析挠率。《数学年刊》335 (2006)，第 1 期，221–247。[Nie] Nielsen, N.：《伯努利数初等论述》。Gauthier–Villars，巴黎，1923。[Ob] Oberhettinger, F.：关于 Lerch ζ 函数的注记。《太平洋数学杂志》6 (1956)，117–120。

[P] Puchol, M.：全纯挠率形式的渐近展开。伦敦数学会杂志 (2)108(2023)，80–140。[Su] Su, G.：*Cappell-Miller* 全纯挠率的渐近展开。《Manuscripta Mathematica》154(2017)，411–428。[T] Teßmer, P.：渐近等变全纯挠率形式。arXiv:2408.12559。