arXiv:2602.08173v1 [math.ST] 9 Feb 2026

上下文多层随机块模型中社区检测的基本极限

Shuyang Gong[*1]、Dong Huang[†2]和Zhangsong Li[‡1]

[1]北京大学数学科学学院[2]清华大学统计与数据科学系

2026年2月10日

摘要

我们研究通过联合观测高维协变量矩阵和 L 稀疏网络来进行社区检测的问题，这些观测均编码了关于 n 个体潜在社区标签的含噪部分信息。在网络的平均度为常数且特征数量 p 与 n 成正比增长的渐近情形下，我们推导出一个尖锐阈值，确定何时能够检测并估计个体标签。我们的结果将 [MN23] 的工作扩展到含噪测量的常数度情形，并解决了 [YLS25] 中的一个猜想，其中网络数量为常数。

我们的信息论下界通过一种关于伯努利矩与高斯矩的新型比较不等式，以及一种受 [DHSS25]启发的“恢复到卡方散度约化”论证的统计变体得出。在算法方面，我们设计了基于统计带标记的环和装饰路径的高效算法，并证明这些算法在检测和弱恢复方面均能达到尖锐阈值。特别是，我们的结果表明，在这一设定中不存在统计计算差距。

目录

1 引言 **2**

1.1 上下文多层随机块模型及主要结果 .3 1.2 讨论及其他相关工作 .5 1.3 记号与论文结构 .7

2 信息论 理论下界 **8**

2.1 检测下界 .8 2.2 恢复下界 .10

3 基于装饰图计数的高效算法 **13**

3.1 检测统计量与理论保证 .14 3.2 恢复统计量与理论保证 .16

[*]电子邮件：gongsyprob@gmail.com。

[†]电子邮件：hd23@mails.tsinghua.edu.cn。

[‡]电子邮箱：ramblerlzs@pku.edu.cn。

4 子图计数的统计分析 **18**
4.1 命题 3.4 的证明 .184.2 定理 3.5 的证明.214.3 命题 3.8 的证明 .214.4 定理 3.9 的证明.26

5 数值实验 **27**

A 第 2 节的补充证明 **29**
A.1 引理 2.4 的证明 .29A.2 引理 2.5 的证明 .30A.3 引理 2.9 的证明 .32

B 第 3 节的补充证明 **34**
B.1 引理 3.3 的证明 .34B.2 引理 3.7 的证明 .37

C 第 4 节的补充证明 **37**
C.1 引理 4.3 的证明 .37C.2 引理 4.4 的证明 .42C.3 引理 4.8 的证明 .43C.4 引理 4.9 的证明 .
44

1 引言

潜在社区的检测是现代网络分析中的一个基本问题。过去三十年间，这一问题在概率论、统计学、计算机科学、统计物理和社会科学领域广受关注，推动人们深入理解了信号恢复的基本统计阈值，并提出了用于社区检测的统计最优算法。随机块模型（SBM） [HLL83]是研究社区检测的一种常用模型。关于随机块模型的理论方法、算法及应用，已有大量文献。感兴趣的读者可参阅 [Abbe18] ，了解这一研究领域的最新进展综述。

不断发展的数据采集技术催生了一种新范式：我们可以获得多个数据集，将其作为有关社区结构的多个信息来源。例如，对于一组 n人，我们可能观察到他们参与的多个社会网络（ Facebook、LinkedIn 等），同时还可以获得每个人的大量社会经济（基因组、神经影像等）协变量。这就带来了一个挑战：如何最好地整合这些多源信息，以揭示共同的潜在社区结构。

在不观测任何协变量、仅观测多个网络的情形，已在多层网络文献中得到研究 [PC20、LZZ24、YLS25]。一个更一般且更有趣的情形是，同时观测一个或多个网络以及一组协变量。在开创性工作 [DMMS18], 中，作者考虑了这样一种情况：可用数据由一个随机块模型的邻接矩阵和一个高维高斯协变量矩阵组成，二者均包含相同的平衡双块社区结构。在这一简化但颇具启发性的模型下，他们严格确立了检测社区结构（即比随机猜测更好地揭示社区结构）的尖锐信息论阈值，其中特征维数 p 和网络规模 n 按比例趋于无穷大，且

网络的平均度以 n的速度发散。此外，他们提出了一种启发式算法，其实证结果支持该信息论阈值。随后，尖锐阈值被推广到平均度有界的情形 [LS23]。最近， [MN23] 在平均度发散的假设下，推导出了具有共同标签结构的上下文多层随机块模型的相变和信息论极限。

本文的研究动机源于 [MN23]尚未解决的两个关键局限：(1) 网络平均度保持稀疏的情形；(2) 测量带噪声的情形，即网络的社区标签是由协变量所指示标签经过噪声扰动得到的版本。为此，我们提出了一个用于上下文多层网络社区检测的通用框架。我们的主要贡献有两点：

- 当网络数量为常数时，我们为社区结构可检测与否之间的相变建立了尖锐阈值：在前一种情形下，社区结构可以被检测；而在后一种情形下，任何方法的表现都不优于随机猜测。
- 我们提出了一种基于子图计数的高效算法，可在我们的通用框架下实现信号恢复。

因此，我们的结果将 [MN23] 的结果推广到了在实践中至关重要的稀疏且带噪声的情形。此外，我们的结果可直接扩展到不含上下文信息的情形，从而解决了 [YLS25] 中关于网络数量为常数时的猜想。

1.1 上下文多层随机块模型与主要结果

上下文多层随机块模型的一般表述如下。具体而言，记 U_n 为无序对 (i,j) 的集合，其中 $1 \le i < j \le n$，我们可以如下定义该模型。

定义 *1.1*（随机块模型）。给定一个整数 $n \ge 1$ 和两个参数 $\lambda > 0, \epsilon \in (0,1)$，我们按如下方式定义一个定义在 $[n] = \{1,\dots,n\}$ 上的随机图 $\boldsymbol{G}$。首先，我们从均匀分布中随机选取一个标签赋值 $\boldsymbol{x} \in \{-1,+1\}^n$。对于每一对不同的节点 $(i,j) \in \mathrm{U}_n$，我们独立地以概率 $(1+\epsilon)\frac{\lambda}{n}$ 添加一条边 (i,j)，如果 $\boldsymbol{x}(i) = \boldsymbol{x}(j)$；如果 $\boldsymbol{x}(i) \neq \boldsymbol{x}(j)$，则以概率 $(1-\epsilon)\frac{\lambda}{n}$ 添加边。我们将 $\mathcal{S}(n,\lambda,\epsilon)$ 记为 $\boldsymbol{G}$的分布。

定义 1.2（上下文多层随机块模型）。给定整数 p、n、$L \in \mathbb{N}$，参数 μ、$\rho > 0$ 以及两组参数 $\{\lambda_\ell : 1 \le \ell \le L\}$、$\{\epsilon_\ell \in (0,1) : 1 \le \ell \le L\}$，我们按如下方式生成一个矩阵$\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{n*p}$和 L 个随机图 $\boldsymbol{G}_1$、……、$\boldsymbol{G}_L$。首先，均匀随机抽取一个标签赋值 $\boldsymbol{x} \in \{-1,+1\}^n$。接着，抽取独立同分布的随机向量 $\boldsymbol{z}_1$、……、$\boldsymbol{z}_L \in \{-1,+1\}^n$，使得

$$\mathbb{P}\big(\boldsymbol{z}_\ell(i) = 1\big) = 1 - \mathbb{P}\big(\boldsymbol{z}_\ell(i) = -1\big) = \frac{1+\rho}{2} \ \textit{independently for } 1 \le \ell \le L, 1 \le i \le n\,. \tag{1.1}$$

定义（其中 $\odot$ 表示 *Hadamard*积）

$$\boldsymbol{x}_\ell = \boldsymbol{x} \odot \boldsymbol{z}_\ell \ \textit{for } 1 \le \ell \le L, \ \textit{i.e., } \boldsymbol{x}_\ell(i) = \boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{z}_\ell(i) \ \textit{for } 1 \le i \le n\,. \tag{1.2}$$

在给定 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{x}_1$、……、$\boldsymbol{x}_L$ 的条件下，我们的观测相互独立：

$$\boldsymbol{Y} = \sqrt{\frac{\mu}{n}}\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^\top + \boldsymbol{Z}, \quad \boldsymbol{G}_\ell \sim \mathcal{S}(n,\lambda_\ell,\epsilon_\ell) \ \textit{with labeling } \boldsymbol{x}_\ell\,, 1 \le \ell \le L\,. \tag{1.3}$$

这里 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{N}(0,\mathbb{I}_p)$ 是一个标准的 p 维高斯向量，并且 $\boldsymbol{Z} \in \mathbb{R}^{n*p}$ 的条目独立同分布，服从标准正态分布。令 $\mathcal{S}(n,p;\ \mu,\rho,\{\lambda_\ell\},\{\epsilon_\ell\})$ 表示 $(\boldsymbol{Y};\ \boldsymbol{G}_1,\dots,\boldsymbol{G}_L)$的分布。我们关注满足 $\frac{p}{n} = \frac{1}{\gamma}$ 的情形，其中某个常数$\gamma \in (0,\infty)$ 成立，且 L 固定。

我们用 $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{n,p,\mu,\rho,\{\lambda_\ell\},\{\epsilon_\ell\}}$ 表示定义 1.2 下 $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L)$ 的分布。此外，我们用 $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{n,p,\{\lambda_\ell\}}$ 表示 $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L)$ 的分布，其中 $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{n*p}$ 的条目独立同分布，服从标准正态分布，而 $\boldsymbol{G}_\ell$ 是独立的 Erd˝os-R´enyi 图 $\mathcal{G}(n, \frac{\lambda_\ell}{n})$，其平均度为 λ_ℓ。最简单的统计任务之一是二元假设检验。在我们的情形中，给定 $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L)$，任务是判断它是从 $\mathbb{P}$ 还是 $\mathbb{Q}$中抽样得到的。我们将 $\mathbb{P}$ 称为植入分布，将 $\mathbb{Q}$称为零分布。

定义 1.3. 我们称检验 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L) \in \{0,1\}$ 在$\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$之间实现强检测，如果

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{A}(\boldsymbol{Y}) = 0\big) + \mathbb{Q}(\mathcal{A}(\boldsymbol{Y}) = 1) \to 0 \ \textit{as}\ n \to \infty\,. \tag{1.4}$$

众所周知，对于检验 $\mathbb{P}$与$\mathbb{Q}$，第一类错误和第二类错误之和的最小值等于 $1 - \mathrm{TV}(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$（例如参见 [LR05, 定理 13.1.1]），其中 $\mathrm{TV}(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = \frac{1}{2}\int |d\mathbb{P} - d\mathbb{Q}|$ 是 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$之间的总变差距离。因此，强检测可行和不可行分别对应于 $\mathrm{TV}(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = 1 - o(1)$ 和 $\mathrm{TV}(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = o(1)$。另一个目标是恢复植入向量 $\boldsymbol{x}$。注意，该模型无法区分 $\boldsymbol{x}$ 和 $-\boldsymbol{x}$。因此，我们的目标改为估计秩一扰动 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top$。对于 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n*n}$ 和 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，定义$\langle \mathcal{X}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top \rangle := \mathrm{tr}(\mathcal{X}^\top \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top)$。

定义 1.4. 我们称估计量 $\mathcal{X} := \mathcal{X}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L) \in \mathbb{R}^{n*n}$ 实现了弱恢复，如果

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{\langle \mathcal{X}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top \rangle}{\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}} \|\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\|_{\mathrm{F}}}\right] \geq c \ \textit{for some constant}\ c > 0\,. \tag{1.5}$$

定义

$$F(\mu, \rho, \gamma, \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\}) = \max\left\{\frac{\mu^2}{\gamma}, \max_{1 \leq \ell \leq L}\{\epsilon_\ell^2 \lambda_\ell\}, \frac{\mu^2}{\gamma} + \sum_{\ell=1}^{L} \frac{\rho^4 \epsilon_\ell^2 \lambda_\ell}{1 - (1-\rho^4)\epsilon_\ell^2 \lambda_\ell}\right\}. \tag{1.6}$$

我们的主要结果可概括如下。

定理1.5. 假设 $L = O(1)$ 且 $F(\mu, \rho, \gamma, \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\}) < 1$。则强检测和弱恢复在信息论上不可能。

相反，假设 $L = O(1)$ 且 $F(\mu, \rho, \gamma, \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\}) > 1$。则存在一个检验$\mathcal{A}$ （以及一个估计量 $\mathcal{X}$）实现强检测（以及弱恢复）。此外，该检验 $\mathcal{A}$ 和估计量 $\mathcal{X}$ 均可在多项式时间内计算。因此，对于上下文多层随机块模型中的检测或恢复，都不存在统计–计算差距。

备注 1.6. 请注意，在 $F(\mu, \rho, \gamma, \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\})$ 的定义中，项 $\frac{\mu^2}{\gamma} = 1$对应于尖峰矩阵的 ***Ben Arous-Baik-P´ech´e***（***BBP***）阈值 $\boldsymbol{Y}$ *[BBP05]*，而项$\epsilon_\ell^2 \lambda_\ell = 1$ 对应于块模型的 ***Kesten-Stigum***（***KS***）阈值 $\boldsymbol{G}_\ell$ *[KS66、DKMZ11、MNS15、MNS18、MSS25a]*。相比之下，最后一项 $\frac{\mu^2}{\gamma} + \sum_{\ell=1}^{L} \frac{\rho^4 \epsilon_\ell^2 \lambda_\ell}{1-\rho^4}$ $\epsilon_\ell^2 \lambda_\ell$ 仅在上下文多层设定中出现，反映了低秩矩阵恢复与社区检测之间的相互作用。因此，我们的结果表明，算法可以利用上下文信息与不同图的标签之间的相关性来检测和估计信号，即使在某些情形下，仅从 $\boldsymbol{Y}$ 恢复 $\boldsymbol{x}$ 或仅从 $\boldsymbol{G}_\ell$ 恢复 $\boldsymbol{x}_\ell$ 在信息论上都不可能。

备注 *1.7*。在与 *[MN23]*，相同的设定下，我们的结果直接表明，当网络数量为任意常数时，该模型不存在统计计算差距。不过，我们想指出，我们关于恢复的信息论下界可推广到 $L = o(\log n)$ 这一设定（详情见备注 *2.10*）。我们的恢复算法结果也可推广到 $L = o(\log n)$ 这一情形，不过在这种情况下，我们的算法需要伪多项式运行时间 $n^{O(\log L)}$。因此，恢复阈值仍有待通过 $F(\mu, \rho, \gamma; \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\}) = 1$ 加以刻画。相比之下，我们预计检测问题在 $L = O(1)$ 和 $L = \omega(1)$ 这两种情形下的表现有所不同。

备注 1.8. 在准备这篇手稿期间，我们注意到我们的结果与以下工作之间存在联系 *[YLS25]*。在没有上下文信息的情况下，我们的模型退化为 L 具有相关标签的稀疏随机区块模型。在这一特殊情形下，我们得到的阈值恰好简化为

$$\max\left\{\max_{1\le \ell\le L}\{\epsilon_\ell^2\lambda_\ell\}, \sum_{\ell=1}^{L}\frac{\rho^4\epsilon_\ell^2\lambda_\ell}{1-(1-\rho^4)\epsilon_\ell^2\lambda_\ell}\right\} = 1\,. \tag{1.7}$$

这与 *[YLS25]* 中研究的模型和提出的阈值相符。他们的分析运用了统计物理中的技术，并严格证明了 (1.7) 在平均度 λ_ℓ 相对于 呈对数级增长的假设下 n。这一情形允许进行高斯近似，而这正是他们方法的核心。因此，他们的方法无法推广到（或许更有趣的）常数度数情形。文献 *[YLS25]* 的作者猜想，相同的阈值 (1.7) 对常数 λ_ℓ仍然成立。当网络数量 L 为任意常数时，我们的结果证实了这一猜想。

1.2 讨论及其他相关工作

多层随机区块模型。 多层网络中的社区检测问题近来受到广泛关注。现有文献，尤其是该领域的早期研究，大多使用随机块模型（SBM）对多层网络进行建模，并假设社区划分在所有层中保持不变（例如，见 [BC20+、LCL20、MN23]）。然而，正如 [VMGP16、CLM22]所指出的，这一假设在实际中往往并不现实。在许多应用中，各层的社区划分并不完全相同，而是预期彼此相关。为此， [CLM22] 提出了一种便于处理的相关社区模型，并分析了一种两步算法的性能；该算法将谱聚类与最大后验（MAP）细化相结合。

当没有观测到上下文信息时，我们的模型可化为与 [CLM22] 相同的模型。然而，他们的理论分析聚焦于信噪比（SNR）较高、能够实现精确恢复的情形；我们则关注更具挑战性的低信噪比设置，并研究弱恢复问题。我们的模型与 [MN23]中的模型理念最为接近。不过，我们超越了该研究中至关重要的齐次社区划分假设。最后，近期的研究[LZZ24] 探讨了多层稠密网络中潜在社区结构的检验问题。

子图计数。 我们的算法基于子图计数，这是一种在理论和实践中的网络分析里广泛使用的方法 [MNS15, BDER16] ，以及 [ADH+08, RPS+21]。例如，在社区检测中，研究表明，在稀疏区域，对数长度的环计数能够达到区分对称随机块模型（SBM）与 Erd˝os–R´enyi 图的最优阈值 [MNS15,MSS25a]。类似地，在稠密区域，对带符号环进行计数

可获得渐近最优功效 [Ban18, BM17]。其他基于计数非回溯游走或自避游走的方法 [Mas14,MNS18,BLM15,AS15,AS18]也已得到发展，可为相关的社群恢复问题实现尖锐阈值。

然而，在上下文多层随机块模型的设定中，传统的子图计数方法（例如计算简单路径或环的数量）本质上并非最优，因为它未能利用上下文信息与不同图层中的标签赋值之间的相关性。相反，我们的工作与多模态学习领域的最新进展相契合 [Li25+]，这些进展强调了计数装饰路径和环的重要性。具体而言，我们考虑边根据其来自上下文矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 还是某个图层 $\boldsymbol{G}_\ell$而加上“装饰”的环。这种装饰方案确保可取的装饰环数量呈指数级增长，速度远超无标记环的数量，使我们能够在单个尖峰模型或单层随机块模型中突破 BBP 阈值/KS 阈值。

尽管这一概念很自然，但对其进行分析却面临重大的技术挑战。尤其是在稀疏网络中，稀疏性会在不同的装饰环之间诱发复杂的相关性，使得精确控制其数量变得困难。为克服这一问题，我们引入了一种精巧的加权方案，根据每个装饰环特定的组合结构为其赋予权重（详情参见（3.10）和（3.20））。这种加权方法与“非加权”方法有重要区别；我们认为，这种加权对于设计能够在该模型中达到尖锐阈值的高效算法至关重要。

恢复到检测的归约。 尽管已有成熟的方法可用于证明随机块模型中的恢复下界，例如将恢复问题与树上的广播联系起来 [MNS15，MSS25a] 或推导极限互信息（例如，参见 [DAM17，ZZ16，GMZZ17] 关于单层随机块模型的工作，以及 [MN23、YLS25] 关于多层随机块模型的工作），但这些方法并不容易应用于我们所研究的稀疏且含噪情形。挑战有两方面。首先，上下文多层随机块模型的局部弱极限对应于一个在多棵树上进行、标签相关且包含上下文信息的广播问题，这在分析上颇具挑战。其次，极限互信息的计算高度依赖于一种高斯近似方案，该方案将随机块模型与合适的尖峰矩阵联系起来，因此将此方法限制在度发散的情形。

相反，我们采用基于归约的方法，利用弱恢复至少与检测一样“困难”这一事实。我们的方法受到 [DHSS25]的启发，也可视为其统计学变体；基本思路是论证：如果某个统计量能够实现弱恢复，那么它也可用于构造一个实现强检测的统计量（在适当意义下，详见引理2.6）。这一视角使我们能够通过分析更易处理的检测问题来推导恢复下界，因为在该问题中可以直接计算卡方散度。我们认为，这种方法不仅对当前问题有效，也构成了一种通用且易于实现的方法论，可应用于更广泛的问题类别。

开放问题。 我们的工作聚焦于具有两个平衡社群的上下文多层随机块模型。一个自然的拓展是研究具有多个社群或社群规模不平衡的情形。我们预计，只要社群数量固定，我们的算法技术仍然适用，不过由此得到的检测阈值可能不如本文所述的阈值那样明确。对于社群数量较多的情形，我们预计还会出现更多信息—计算差距，这与在更简单模型中观察到的现象一致 [AS18，MSS25a]。这一拓展值得专门研究，我们将其留待未来工作。

另一个有趣的方向是设计更实用、无需依赖颜色编码方案的算法，因为我们当前的恢复算法在 n 中的运行时间为多项式时间，但多项式的次数很高。对于单层随机块模型中的社群恢复，基于

非回溯矩阵的谱方法已知能够达到与统计自避游走数量相当的性能 [KMM+13、BLM15]。将此类谱方法扩展到上下文和多层设置需要大量新的见解；我们也将这一问题留待未来研究。

1.3 记号和论文结构

本小节记录一些记号约定。对于两个概率测度 $\mathbb{P}$和 $\mathbb{Q}$，我们将它们之间的全变差距离记为 $\mathsf{TV}(\mathbb{P},\mathbb{Q})$。从 $\mathbb{P}$到 $\mathbb{Q}$的卡方散度定义为 $\chi^2(\mathbb{P}\|\mathbb{Q}) = \mathbb{E}_{X\sim\mathbb{Q}}[(\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(X))^2]$。对于矩阵或向量 M，我们使用 $M^\top$ 表示其转置。对于 $k*k$矩阵 $M=(m_{ij})_{k*k}$，令 $\det(M)$ 和 $\mathsf{tr}(M)$ 分别表示 M的行列式和迹。如果 M 为正定，则记为 $M\succ 0$ ；如果 M 为半正定，则记为 $M\succeq 0$ 。此外，如果 M 具有实特征值，则将 $\varsigma_1(M) \geq \ldots \geq \varsigma_k(M)$ 记为 M的特征值。对于两个 $k*l$ 矩阵 M_1 和 M_2，我们将它们的内积定义为

$$\langle M_1, M_2\rangle := \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} M_1(i,j)M_2(i,j)\,.$$

此外，对于一个 $k*l$ 矩阵 M，定义

$$\|M\|_{\mathrm{F}} = \langle M, M\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} M_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \|M\|_{\mathrm{op}} = \sqrt{\varsigma_1(MM^\top)},$$

分别表示其弗罗贝尼乌斯范数和算子范数。我们用 $\mathbb{I}_k$表示 $k*k$单位矩阵（如果维度可由上下文明确，则省略下标）。对于图，我们采用以下记号约定。

标记图。记 K_n 为顶点集为 $[n]$的完全图。对于任意图 H，令 $V(H)$ 表示 H 的顶点集，令 $E(H)$ 表示 H的边集。若 H 是 G的子图，记作 $H\subset G$，当且仅当 $V(H)\subset V(G)$ 且 $E(H)\subset E(G)$。对于所有 $v\in V(H)$，定义 $\deg_H(v) = \#\{e\in E(H): v\in e\}$ ，称其为 v 在 H中的度。若 v 是H的孤立顶点，则 $\deg_H(v)=0$。记 $\mathsf{I}(H)$ 为 H的孤立顶点集。若 v 是 H的叶节点，则 $\deg_H(v)=1$。记 $\mathsf{L}(H)$ 为 H中的叶子集。对于 $H,S\subset\mathsf{K}_n$，记顶点集为 $V(H)\cap V(S)$、边集为 $E(H)\cap E(S)$ 的图为 $H\cap S$；记顶点集为 $V(H)\cup V(S)$、边集为 $E(H)\cup E(S)$ 的图为 $S\cup H$。

图同构与无标记图。 如果存在一个双射 $\sigma: V(H)\to V(H')$，使得 $(\sigma(u)\ \sigma(v))\in E(H')$ 当且仅当 $(u,v)\in E(H)$，则称两个图 H 和 H' 同构，记作$H\cong H'$。用 $[H]$ 表示 H的同构类；通常将这些同构类称为无标记图。令 $\mathsf{Aut}(H)$ 表示 H 的自同构数量（即到自身的图同构）。

我们采用标准的渐近记号：对于两个正数数列 a_n 和 b_n ，若 $a_n<Cb_n$ 对于某个绝对常数 C 及所有 n均成立，则记作 $a_n=O(b_n)$（类似地，若常数 C 并非绝对常数，而仅依赖于 h，则使用记号O_h ）；若 $b_n=O(a_n)$，则记作 $a_n=\Omega(b_n)$；若 $a_n=O(b_n)$且 $a_n=\Omega(b_n)$，则记作 $a_n=\Theta(b_n)$；若 $a_n/b_n\to 0$ 当 $n\to\infty$时成立，则记作 $a_n=o(b_n)$或 $b_n=\omega(a_n)$。为简化记号，本文中始终假设 μ、γ、$\{\lambda_\ell\}$、$\{\epsilon_\ell\}$为固定常数，并省略对它们的依赖，例如，我们简单地写作 $O(1)$，而不写$O_{\mu、\gamma、\{\lambda_\ell\}、\{\epsilon_\ell\}}(1)$。对于两个实数 a和 b，令 $a\vee b=$为$\max\{a,b\}$， $a\wedge b=$为$\min\{a,b\}$。对于两个集合 A和B，定义 $A\sqcup B$为 A与 B的不交并（因此，记号 $\sqcup$仅在 A、 B

不交时才适用）。集合 A 的示性函数记作 $\mathbf{1}_A$。此外，我们使用 $|A|$和 $\#A$两种记号表示 A的基数。

本文其余部分安排如下。在第2节中，我们证明定理1.5中所述的检测与恢复的信息论下界。在第3节中，我们提出高效的检测与恢复算法，并正式陈述定理 1.5中的算法上界。第 4 节对我们的算法进行统计分析。在第 5 节中，我们对算法进行实证评估，并将其性能与单通道方法进行比较。为确保行文流畅，若干辅助证明放在附录中。

2 信息论下界

本节中，我们证明当 $L = O(1)$ 和 $F(\mu,\ \rho,\ \gamma,\ \{\lambda_\ell\},\ \{\epsilon_\ell\}) < 1$ 时，强检测和弱恢复在信息论上不可能。具体而言，本节中我们始终假设

$$L = O(1) \text{ and } F(\mu, \rho, \gamma, \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\}) \le 1 - \delta \text{ for some constant } \delta > 0\,. \tag{2.1}$$

2.1 检测下界

在本小节中，我们证明在条件（2.1）下，强检测在信息论上不可能。论证的第一步是采用适当的截断。具体而言，我们选取一个足够小的常数 $\iota = \iota(L,\ \mu,\ \rho,\ \gamma,\ \{\lambda_\ell\},\ \{\epsilon_\ell\}) > 0$ 使得

$$\frac{(1+\iota)^2\mu^2}{\gamma} \le 1 - \Omega(1) \text{ and } \frac{(1+\iota)^2\mu^2}{\gamma} + \sum_{1\le\ell\le L} \frac{\rho^4\epsilon_\ell^2\lambda_\ell}{1-(1-\rho^4)\epsilon_\ell^2\lambda_\ell} \le 1 - \Omega(1)\,. \tag{2.2}$$

回顾一下，在 $\mathbb{P}$ 下，$\boldsymbol{u} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbb{I}_p)$。定义事件

$$\mathcal{E}_\diamond := \Big\{(1-\iota)p \le \|\boldsymbol{u}\|^2 \le (1+\iota)p\Big\}\,. \tag{2.3}$$

定义 $\widetilde{\mathbb{P}} := \mathbb{P}(\cdot \mid \mathcal{E}_\diamond)$。由于标准高斯集中不等式蕴含 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_\diamond) = 1 - o(1)$，我们立即得到 $\mathrm{TV}(\mathbb{P}, \widetilde{\mathbb{P}}) = o(1)$，因此只需证明 $\mathrm{TV}(\widetilde{\mathbb{P}}, \mathbb{Q}) = o(1)$。命题 2.1 给出 $\chi^2(\widetilde{\mathbb{P}}\|\mathbb{Q}) = O(1)$，这意味着 $\mathrm{TV}(\widetilde{\mathbb{P}}, \mathbb{Q}) = o(1)$（例如参见 [Tsy09，公式 2.27]），因此强检测是不可能的（回顾一下，强检测的不可能性等价于 $\mathrm{TV}(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = o(1)$）。

命题 2.1。 假设 (2.1) 成立。那么我们有 $\chi^2(\widetilde{\mathbb{P}}\|\mathbb{Q}) = O(1)$。

注释2.2。 根据命题 *2.1* 可以标准地推导出，在给定 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$的情况下，二者之间的强检测在信息论上是不可能的(2.1)。因此，此处省略更多细节，仅请读者参阅 *[PWBM18，命题 2。5]*。

现在我们给出命题 2.1的证明。为此，记 $\mathfrak{F}$为$\|\boldsymbol{u}\|^2/p$ 在 $\widetilde{\mathbb{P}}$下的分布。显然 $\mathfrak{F}$ 的支撑集包含于 $[1-\iota, 1+\iota]$。此外，对于任意 $|t| \le \iota$ 定义

$$\mathbb{P}_t := \mathbb{P}\left(\cdot \mid \|\boldsymbol{u}\|^2 = (1+t)p\right)\,. \tag{2.4}$$

由柯西-施瓦茨不等式容易直接验证，

$$\chi^2(\widetilde{\mathbb{P}}\|\mathbb{Q}) \le \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(\int_{-\iota}^{\iota} \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_t}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}\mathrm{d}\mathfrak{F}(t)\right)^2\right] \le \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_{-\iota}^{\iota}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_t}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}\right)^2 \mathrm{d}\mathfrak{F}(t)\right] = \int_{-\iota}^{\iota} \chi^2(\mathbb{P}_t\|\mathbb{Q})\mathrm{d}\mathfrak{F}(t)\,.$$

因此，为证明命题2.1 ，只需给出卡方散度的上界，即 $\mathbb{P}_t$ 与 $\mathbb{Q}$之间者，如下一引理所示。

引理 2.3。 假设 (2.1) 成立，并且我们选择 ι 使其符合 (2.2)。那么有 $\chi^2(\mathbb{P}_t\|\mathbb{Q}) = O(1)$ 对所有 $|t| \le \iota$均成立。

本节余下部分将用于证明引理 2.3。为此，注意到在$\mathbb{P}_t$的条件下，有 $\boldsymbol{u}$ 是从球面 $\sqrt{(1+t)}\, p \cdot \mathbb{S}^d$上均匀抽样得到的。下一个引理给出了卡方散度的一个易于处理的上界 $\chi^2(\mathbb{P}_t\|\mathbb{Q})$。

引理 2.4。 假设 (2.1) 成立。那么对所有 $|t| \le \iota$，均有

$$\chi^2(\mathbb{P}_t\|\mathbb{Q}) \le \mathbb{E}_{\substack{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_L \\ \boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}_1',\ldots,\boldsymbol{x}_L'}} \left\{ \exp\left(\frac{(1+t)^2\mu^2}{2\gamma} \left(\frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \rangle}{\sqrt{n}} \right)^2 + \sum_{1 \le \ell \le L} \frac{\epsilon_\ell^2 \lambda_\ell}{2} \left(\frac{\langle \boldsymbol{x}_\ell, \boldsymbol{x}_\ell' \rangle}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) \right\} . \tag{2.5}$$

Here $(\boldsymbol{x}',\ \boldsymbol{x}_1',\ \ldots\ldots,\ \boldsymbol{x}_L')$ 是 $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_1,\ \ldots\ldots,\ \boldsymbol{x}_L)$ 的一个独立副本（如 (1.2)中所定义）。

引理 2.4的证明推迟到附录的第 A.1 节。根据引理 2.4，为了证明引理 2.3，只需对式（2.5）右侧进行界定。主要挑战在于，内积 $\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}' \rangle$ 和 $\langle \boldsymbol{x}_\ell,\ \boldsymbol{x}_\ell' \rangle$ 存在非消失相关性，导致现有的单信号情形方法（例如 [PWBM18] 中的方法或 [LS23]中的方法）失效。不过，如何控制式（2.5）右侧有一个清晰的直觉：根据中心极限定理，我们预期

$$\left(\frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \rangle}{\sqrt{n}}, \frac{\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1' \rangle}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{\langle \boldsymbol{x}_L, \boldsymbol{x}_L' \rangle}{\sqrt{n}} \right) \text{ behaves like } (U, V_1, \ldots, V_\ell) , \tag{2.6}$$

其中 $U,\ V_1,\ \ldots\ldots,\ V_L$ 是联合均值为零的高斯变量，满足

$$\mathbb{E}\big[U^2\big] = \mathbb{E}\big[V_\ell^2\big] = 1 \text{ and } \mathbb{E}\big[UV_\ell\big] = \rho^2, \mathbb{E}\big[V_\ell V_{\ell'}\big] = \rho^4 . \tag{2.7}$$

注意，等价地，我们可以写成 $V_\ell = \rho^2 U + \sqrt{1-\rho^4} W_\ell$满足 $U,\ W_1,\ \ldots\ldots,\ W_L$ 是独立同分布的标准正态变量。我们论证的关键在于，针对拉ademacher变量，证明一种类似于式（2.6）中高斯近似方案的结果，具体见下一个引理。

引理 2.5。 设 $U,\ V_1,\ V_L$ 是式 (2.7)中定义的联合均值为零的高斯变量。那么，对于任意$\alpha,\ \alpha_1,\ \ldots\ldots,\ \alpha_L \in \mathbb{N}$，有

$$\mathbb{E}_{\substack{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_L \\ \boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}_1',\ldots,\boldsymbol{x}_L'}} \left[\left(\frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \rangle}{\sqrt{n}} \right)^{2\alpha} \left(\frac{\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1' \rangle}{\sqrt{n}} \right)^{2\alpha_1} \cdots \left(\frac{\langle \boldsymbol{x}_L, \boldsymbol{x}_L' \rangle}{\sqrt{n}} \right)^{2\alpha_L} \right] \le \mathbb{E}_{U,V_1,\ldots,V_L} \left[U^{2\alpha} V_1^{2\alpha_1} \cdots V_L^{2\alpha_L} \right] .$$

特别　　地，根据泰勒展开，式 (2.5) 右侧的值有界　　y

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{(1+t)^2\mu^2}{2\gamma} \cdot U^2 + \sum_{1 \le \ell \le L} \frac{\epsilon_\ell^2 \lambda_\ell}{2} \cdot V_\ell^2 \right) \right] . \tag{2.8}$$

引理 2.5 的证明包含在附录的 A.2 节中。现在我们可以完成引理 2.3的证明。

引理 2.3的证明。 利用引理 2.4 和 2.5，只需证明 $(2.8) = O(1)$ 在给定 (2.2) 和 $L = O(1)$ 的条件下成立。由于我们可以写成 $V_\ell = \rho^2 U + \sqrt{1-\rho^4} W_\ell$ 使得 $U, W_1, \ldots, W_L$ 是独立同分布的标准正态变量，因此我们有

$$
\begin{aligned}
(2.8) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{(1+t)^2\mu^2}{2\gamma}\cdot U^2 + \sum_{1\le \ell\le L}\frac{\epsilon_\ell^2\lambda_\ell}{2}\cdot\left(\rho^2 U+\sqrt{1-\rho^4}W_\ell\right)^2\right)\right] \\
&= \prod_{1\le\ell\le L}\left(1-\epsilon_\ell^2\lambda_\ell(1-\rho^4)\right)^{-1/2}\cdot\mathbb{E}\left[\exp\left(U^2\left(\frac{(1+t)^2\mu^2}{2\gamma}+\sum_{1\le\ell\le L}\frac{\rho^4(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^2}{2(1-(1-\rho^4)\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)}\right)\right)\right] \\
&= \left(1-\frac{(1+t)^2\mu^2}{\gamma}-\sum_{1\le\ell\le L}\frac{\rho^4(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^2}{(1-(1-\rho^4)\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)}\right)^{-1/2}\prod_{1\le\ell\le L}(1-\epsilon_\ell^2\lambda_\ell(1-\rho^4))^{-1/2} = O(1)\,,
\end{aligned}
$$

其中第二个等式是由以下事实得出的：对于 $W\sim\mathcal{N}(0,1)$ 和 $2AC^2<1$,

$$
\mathbb{E}\left[e^{A(BU+CW)^2}\mid U\right] = (1-2AC^2)^{-1/2}\exp\left(\frac{AB^2U^2}{1-2AC^2}\right),
$$

这里，对于所有 $1\le\ell\le L$, $2AC^2 = (1-\rho^4)\epsilon_\ell^2\lambda_\ell = 1-\Omega(1)$，因此该条件成立；最后一个等式由 $\mathbb{E}[\exp(AU^2)] = (1-2A)^{-1/2}$（对于 $A<\frac{1}{2}$）以及

$$
\frac{(1+t)^2\mu^2}{2\gamma}+\sum_{1\le\ell\le L}\frac{\rho^4(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^2}{2(1-(1-\rho^4)\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)} < \frac{1}{2}
$$

由（2.2）和 $|t|\le\iota$。 □

2.2 恢复下界

在本小节中，我们证明弱恢复在（2.1）下是信息论上不可能的。正如我们在第 1.2 节中所述，我们将把恢复下界归约到卡方散度计算，即第 2.1 节。我们的论证将基于矛盾的证明与上述归约技术相结合。具体而言，我们在图 1 中总结了弱恢复不可能性的证明提纲。

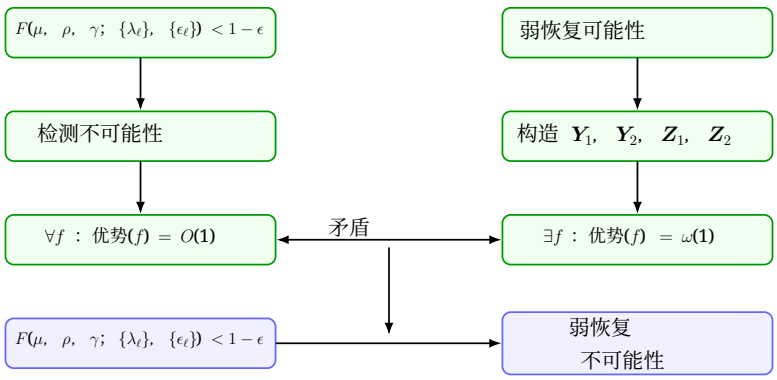


图 1：弱恢复不可能性的证明提纲

为此，回顾定义 1.2。注意，随着 μ 增大，问题会变得更容易。此外，对于任意 $\epsilon\in(0,1)$ 以及所有满足以下条件的参数 $F(\mu,\ \rho,\ \gamma;\ \{\lambda_\ell\},\ \{\epsilon_\ell\}) < 1-\epsilon$，我们总能

选取一个较小的常数 $\mu < \mu'$，使得 $F(\mu', \rho, \gamma; \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\}) < 1 - \frac{\epsilon}{2}$。因此，不失一般性，我们可以假设 $\mu = \Theta(1)$。论证的第一步是通过抽样引入外部随机性，令 $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^{n*p}$ 由独立同分布的标准正态条目组成（且独立于 $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L)$）。将 $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L) \sim \mathbb{P}$ 和 $\boldsymbol{W}$ 的联合分布记为 $\mathbb{P}_\bullet$，并将 $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L) \sim \mathbb{Q}$ 和 $\boldsymbol{W}$ 的联合分布记为 $\mathbb{Q}_\bullet$，其中 $\widetilde{\ }$。此外，回顾 (2.3)。将 $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L) \sim \mathbb{P}(\cdot \mid \mathcal{E}_\diamond)$ 和 $\boldsymbol{W}$ 的联合分布记为 $\mathbb{P}_\bullet$。我们首先推导命题 2.1 的一个直接推论。

Lemma 2.6. 对于所有关于 $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L)$ 与 $\boldsymbol{W}$ 可测的函数 f，我们有

$$\mathsf{Adv}(f) := \frac{\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}_\bullet}[f]}{\sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\bullet}[f^2]}} = O(1)\,. \tag{2.9}$$

~ ___ ~证明。注意到 $\mathrm{d}\mathbb{P}_\bullet \mathrm{d}\mathbb{Q}_\bullet(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L) = \mathrm{d}\mathbb{P}\,\mathrm{d}\mathbb{Q}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L)$。利用柯西-施瓦茨不等式，__~于是我们有（令 $\mathcal{L} = \mathrm{d}\mathbb{P}_\bullet \mathrm{d}\mathbb{Q}_\bullet$）

$$\mathsf{Adv}(f) = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\bullet}[\mathcal{L} \cdot f]}{\sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\bullet}[f^2]}} \le \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\bullet}[\mathcal{L}^2]} = \sqrt{\chi^2(\widetilde{\mathbb{P}}_\bullet \| \mathbb{Q}_\bullet)} = \sqrt{\chi^2(\widetilde{\mathbb{P}} \| \mathbb{Q})} = O(1)\,,$$

其中最后一个等式由命题2.1。 □

在本小节的其余部分，我们将证明如下结果。

引理 2.7. 假设对某个 $F(\mu, \rho, \gamma, \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\}) < 1 - \epsilon$，给定

$$(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L) \sim \mathcal{S}(n, p; \mu, \rho, \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\})$$

存在一个估计量 $\mathcal{X}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L)$ 在定义 *1.4* 的意义下实现弱恢复。则对某个 $F(\mu', \rho, \gamma, \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\}) < 1 - \epsilon'$ 以及

$$(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L) \sim \mathcal{S}(n, p; \mu', \rho, \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\})\,,$$

存在一个函数 $f = f(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L)$（其中 $\boldsymbol{W}$ 是外部随机性），使得优势$(f) = \omega(1)$。

注释 2.8。结合引理 *2.6* 和*2.7*，我们知道，如果 (2.1) 成立，那么弱恢复在信息论上不可能。

本小节余下部分将用于证明引理 2.7。为此，假设对于某些满足（μ，ρ，γ，$\{\lambda_\ell\}$，$\{\epsilon_\ell\}$ 2.1）的参数，给定

$$(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L) \sim \mathcal{S}(n, p, \mu, \rho, \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\}),$$

那么存在一个估计量 $\mathcal{X}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L)$，满足定义 1.4，即

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{\langle \mathcal{X}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top \rangle}{\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}} \|\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\|_{\mathrm{F}}}\right] \ge c \text{ for some constant } c > 0\,.$$

随后使用标准的马尔可夫不等式，我们得到

$$\mathbb{P}\left(\frac{\langle \mathcal{X}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top \rangle}{\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}} \|\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\|_{\mathrm{F}}} \ge \frac{c}{2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(1 - \frac{\langle \mathcal{X}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top \rangle}{\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}} \|\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\|_{\mathrm{F}}} \ge 1 - \frac{c}{2}\right) \ge 1 - \frac{1 - c}{1 - \frac{c}{2}} \ge \frac{c}{2}\,.$$

~ ~回顾在（ι 2.2）中对的选择以及在（2.3）中对 $\mathbb{P}=\mathbb{P}$的定义$\cdot\,|\,\mathcal{E}_{\diamond}$。由于总变差距离$(\mathbb{P},\ \mathbb{P})\ =o(1)$，我们随后得到

$$\widetilde{\mathbb{P}}\left(\frac{\langle\mathcal{X},\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\top}\rangle}{\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}\|\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\top}\|_{\mathrm{F}}}\geq\frac{c}{2}\right)\geq\frac{c}{2}-o(1)\,.$$

现在我们选取一个充分小的常数 $\kappa>0$ 使得（回顾（2.2））

$$F\left((1+\kappa^{2})(1+\iota)\mu,\rho,\gamma,\{\lambda_{\ell}\},\{\epsilon_{\ell}\}\right)<1-\Omega(1)\,. \tag{2.10}$$

现在，假设 $(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{G}_{1},\ldots,\boldsymbol{G}_{L})\ \sim\mathcal{S}(n,p,\mu(1+\kappa^{2})\ \rho,\{\lambda_{\ell}\},\{\epsilon_{\ell}\})$，并回顾我们引入了外部随机性 $\boldsymbol{W}$。令

$$\boldsymbol{Y}_{1}=\frac{1}{\sqrt{1+\kappa^{2}}}\left(\boldsymbol{Y}+\kappa\boldsymbol{W}\right),\quad\boldsymbol{Y}_{2}=\frac{1}{\sqrt{1+\kappa^{-2}}}\left(\boldsymbol{Y}-\kappa^{-1}\boldsymbol{W}\right). \tag{2.11}$$

式（2.11）中的定义理由如下（回顾定义 1.2）：

- 在 $(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{G}_{1},\ldots,\boldsymbol{G}_{L})\ \sim\mathbb{Q}$ 条件下，有 $(\boldsymbol{Y}_{1},\boldsymbol{Y}_{2})\ =(\boldsymbol{Z}_{1},\boldsymbol{Z}_{2})$，其中

$$\boldsymbol{Z}_{1}=\frac{1}{\sqrt{1+\kappa^{2}}}\left(\boldsymbol{Z}+\kappa\boldsymbol{W}\right),\quad\boldsymbol{Z}_{2}=\frac{1}{\sqrt{1+\kappa^{-2}}}\left(\boldsymbol{Z}-\kappa^{-1}\boldsymbol{W}\right). \tag{2.12}$$

  特别地，$\boldsymbol{Z}_{1},\boldsymbol{Z}_{2}$ 是具有独立同分布的标准正态条目的矩阵，且 $\boldsymbol{Z}_{2}$ 与 $(\boldsymbol{Z}_{1},\boldsymbol{G}_{1},\ldots,\boldsymbol{G}_{L})$ 独立。

- 在 $(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{G}_{1},\ldots,\boldsymbol{G}_{L})\ \sim\mathbb{P}$ 条件下，有

$$\boldsymbol{Y}_{1}=\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{n}}\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^{\top}+\boldsymbol{Z}_{1},\quad\boldsymbol{Y}_{2}=\frac{\sqrt{\mu(1+\kappa^{2})}}{\sqrt{n(1+\kappa^{-2})}}\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^{\top}+\boldsymbol{Z}_{2}\,, \tag{2.13}$$

  其中

$$\boldsymbol{Z}_{1}=\frac{1}{\sqrt{1+\kappa^{2}}}\left(\boldsymbol{Z}+\kappa\boldsymbol{W}\right),\quad\boldsymbol{Z}_{2}=\frac{1}{\sqrt{1+\kappa^{-2}}}\left(\boldsymbol{Z}-\kappa^{-1}\boldsymbol{W}\right).$$

  特别地，$\boldsymbol{Z}_{1}$，$\boldsymbol{Z}_{2}$ 是具有独立同分布的标准正态条目的矩阵，并且 $\boldsymbol{Z}_{2}$ 与（$\boldsymbol{Y}_{1}$，$\boldsymbol{G}_{1}$、……、$\boldsymbol{G}_{L}$）相互独立。此外，我们有（$\boldsymbol{Y}_{1}$，$\boldsymbol{G}_{1}$、……、$\boldsymbol{G}_{L}$）$\sim\mathcal{S}$（n，p；μ，ρ，γ，$\{\lambda_{\ell}\}$，$\{\epsilon_{\ell}\}$）。

现在，由于在 $\mathbb{P}_{\bullet}$下（$\boldsymbol{Y}_{1}$，$\boldsymbol{G}_{1}$、……、$\boldsymbol{G}_{L}$）$\sim\mathcal{S}$（n，p；μ，ρ，γ，$\{\lambda_{\ell}\}$，$\{\epsilon_{\ell}\}$），我们可以找到一个估计量

$$\mathcal{X}(\boldsymbol{Y}_{1},\boldsymbol{G}_{1},\ldots,\boldsymbol{G}_{L})\text{ such that }\widetilde{\mathbb{P}}_{\bullet}\left(\frac{\langle\mathcal{X},\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\top}\rangle}{\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}\|\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\top}\|_{\mathrm{F}}}\geq\frac{c}{2}\right)\geq\frac{c}{2}-o(1) \tag{2.14}$$

下一个引理表明，$\langle\mathcal{X},\ \boldsymbol{Y}_{2}\boldsymbol{Y}_{2}^{\top}-p\mathbb{I}_{n}\rangle$ 在 $\widetilde{\mathbb{P}}_{\bullet}$下是“大”的，在 $\mathbb{Q}$下是“小”的 $\bullet$.

引理 2.9. 假设我们按照 $\mathcal{X}(\boldsymbol{Y}_{1},\boldsymbol{G}_{1},\ldots,\boldsymbol{G}_{L})$ 选择 (2.14)。那么

$$\widetilde{\mathbb{P}}_{\bullet}\left(\left\langle\mathcal{X},\boldsymbol{Y}_{2}\boldsymbol{Y}_{2}^{\top}-p\mathbb{I}_{n}\right\rangle\geq\frac{c\mu(1-\iota)(1+\kappa^{2})n}{4(1+\iota)(1+\kappa^{-2})}\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}\right)\geq\frac{c}{2}-o(1)\,; \tag{2.15}$$

$$\mathbb{Q}_{\bullet}\left(\left\langle\mathcal{X},\boldsymbol{Y}_{2}\boldsymbol{Y}_{2}^{\top}-p\mathbb{I}_{n}\right\rangle\geq\frac{c\mu(1-\iota)(1+\kappa^{2})n}{4(1+\iota)(1+\kappa^{-2})}\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}\right)\leq n^{-\Omega(1)}\,. \tag{2.16}$$

引理 2.9 的证明推迟到附录的 A.3 节。现在我们可以完成引理 2.7的证明。

引理 2.7的证明。 定义 $\mu' = \mu\sqrt{1+\kappa^2}$ 和

$$f = f(\boldsymbol{W}; \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \dots, \boldsymbol{G}_L) := \mathbf{1}\left\{ \left\langle \mathcal{X}, \boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{Y}_2^\top - p\mathbb{I}_n \right\rangle \geq \frac{c\mu(1-\iota)(1+\kappa^2)n}{4(1+\iota)(1+\kappa^{-2})} \|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}} \right\}. \tag{2.17}$$

引理 2.9于是推出 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f] = \Omega(1)$，且 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f^2] \leq n^{-\Omega(1)}$。由此可得 优势$(f) \geq n^{\Omega(1)}$，从而完成引理 2.7 的证明。 □

备注 *2.10.* 很容易验证，只要 $\chi^2(\widetilde{\mathbb{P}}\|\mathbb{Q}) = n^{o(1)}$，我们的归约就仍然成立。由于命题 *2.1* 的证明推出，只要 $F(\mu, \rho, \gamma; \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\}) < 1$且 $L = o(\log n)$，就有 $\chi^2(\widetilde{\mathbb{P}}\|\mathbb{Q}) = n^{o(1)}$，因此我们的论证实际上表明，只要 $F(\mu, \rho, \gamma; \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\}) < 1$ 且 $L = o(\log n)$，恢复在信息论上不可能。

3 基于计数装饰图的高效算法

在本节中，我们证明，当 $L = O(1)$ 和 $F(\mu, \rho, \gamma; \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\}) > 1$ 时，可以通过高效算法实现强检测和弱恢复。请注意，当 $\frac{\mu^2}{\gamma} > 1$ 时，我们能够利用单次观测 $\boldsymbol{Y}$ 检测并估计潜在标记 $\boldsymbol{x}$ 。类似地，当$\epsilon_\ell^2\lambda_\ell > 1$时，我们能够利用单次观测 $\boldsymbol{G}_\ell$[1] 检测并估计标签赋值 $\boldsymbol{x}_\ell$ 。因此，在本节中我们将始终假设

$$\frac{\mu^2}{\gamma}, \epsilon_1^2\lambda_1, \dots, \epsilon_L^2\lambda_L \leq 1, \quad \frac{\mu^2}{\gamma} + \sum_{\ell=1}^{L} \frac{\rho^4(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^2}{1-(1-\rho^4)(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^2} > 1 + \epsilon \text{ for some constant } \epsilon > 0\,. \tag{3.1}$$

回忆一下，U_n 是无序对集合 (i, j)，其中 $1 \leq i < j \leq n$。我们首先介绍装饰图的概念，这是我们算法的关键。装饰图的示例见图 2 。

定义 3.1 (因子图)。 将 $\mathsf{K}_{n,\,p}$ 记为按如下方式生成的图。定义$\mathsf{K}_{n,\,p}$的顶点集为 $V_{\mathsf{a}} \cup V_{\mathsf{b}}$，其中 $V_{\mathsf{a}} = \{a_1, \dots, a_n\}$和 $V_{\mathsf{b}} = \{b_1, \dots, b_p\}$。此外，定义$\mathsf{K}_{n,\,p}$的边集为 $E^{\mathsf{a}} \cup E^{\mathsf{b}}$，其中

$$E^{\mathsf{a}} = \big\{(a_i, a_j) : (i,j) \in \mathrm{U}_n\big\}, \quad E^{\mathsf{b}} = \big\{(a_i, b_k) : i \in [n], k \in [p]\big\}\,.$$

定义 3.2 （装饰图）。 对于任意图 $H \subset \mathsf{K}_{n,\,p}$，若 χ_H: $E(H) \to \{0, 1, \dots, L\}$是 装饰 $E(H)$，则称其为该图的装饰

$$\chi_H(e) = 0 \iff e \in E^{\mathsf{b}}(\mathsf{K}_{n,p})\,.$$

我们称 $H = (V(H)\ E(H)\ \chi_H)$ 为装饰图，当且仅当 $(V(H)\ E(H))$ 是一个图，且 χ_H是 $E(H)$的装饰。我们定义

$$\begin{aligned} V^{\mathsf{a}}(H) &= V^{\mathsf{a}} \cap V(H), \quad V^{\mathsf{b}}(H) = V^{\mathsf{b}} \cap V(H)\,; \\ E^{\mathsf{a}}(H) &= E^{\mathsf{a}} \cap E(H), \quad E^{\mathsf{b}}(H) = E^{\mathsf{b}} \cap E(H)\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

[1]此外，由于 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}_\ell$ 呈正相关，因此任何与 $\boldsymbol{x}_\ell\boldsymbol{x}_\ell^\top$呈正相关的估计量 $\mathcal{X}(\boldsymbol{G}_\ell)$也与 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top$呈正相关。

对于 $0 \le \ell \le L$，定义

$$E_\ell(H) = \big\{e \in E(H) : \chi_H(e) = \ell\big\}. \tag{3.3}$$

（注意，根据定义，$E_0(H) = E^{\mathsf{b}}(H)$）。此外，对于 $0 \le \ell \le L$，定义

$$V_\ell(H) = \big\{v \in V(H) : (v,u) \in E_\ell(H) \text{ for some } u \in V(H)\big\}. \tag{3.4}$$

另定义 H_ℓ 为 H 的子图，其中

$$V(H_\ell) = V_\ell(H),\ E(H_\ell) = E_\ell(H). \tag{3.5}$$

若（$V(H)$ $E(H)$ χ_H）是装饰圈（分别地，装饰路径），且（$V(H)$ $E(H)$ 是环（分别地，路径），则称其为装饰圈（分别地，装饰路径）。最后，对于装饰圈或装饰路径 H，定义

$$\begin{aligned} \mathsf{dif}_0(H) &:= V_0(H) \cap \big(\cup_{1\le \ell \le L} V_\ell(H)\big); \\ \mathsf{dif}(H) &:= \cup_{1\le \ell<\ell'\le L}(V_\ell(H) \cap V_{\ell'}(H)). \end{aligned} \tag{3.6}$$

此外，用 $S \Cap H$ 表示由边集 $\cup_{0\le \ell \le L}$（$E_\ell(S) \cap E_\ell(H)$）诱导的图（特别地，边诱导图没有孤立顶点），并令 $S \cap H$ 为未装饰图，其中 $V(S \cap K) = V(S) \cap V(K)$，且 $E(S \cap K) = E(S) \cap E(K)$。

3.1 检测统计量与理论保证

我们首先关注检测问题。回顾（1.3）。对于每个 $1 \le \ell \le L$ 和 $(i,\ j) \in \mathrm{U}_n$，定义

$$\overline{\boldsymbol{G}}_\ell(i,j) := \frac{1}{\sqrt{\lambda_\ell/n}}\Big(\boldsymbol{G}_\ell(i,j) - \frac{\lambda_\ell}{n}\Big). \tag{3.7}$$

此外，对于任意装饰图 $S \subset \mathsf{K}_{n,\ p}$，我们定义

$$f_S := \prod_{(a_i,b_k)\in E_0(S)} \boldsymbol{Y}(i,k) \prod_{1\le \ell \le L} \prod_{(a_i,a_j)\in E_\ell(S)} \overline{\boldsymbol{G}}_\ell(i,j). \tag{3.8}$$

令 $\aleph \in \mathbb{N}$ 为稍后确定的一个参数，并定义 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\aleph$为满足 $[H]$ 的无标号装饰圈集合 $|V^{\mathsf{a}}(H)| = \aleph$。显然，对于所有 $[H] \in \mathcal{H}(\aleph$，均有（见图2a）

$$|E(H)| = \aleph + \tfrac{1}{2}|E_0(H)|, \quad |V^{\mathsf{b}}(H)| = \tfrac{1}{2}|E_0(H)|. \tag{3.9}$$

此外，定义

$$f_{\mathcal{H}} := \frac{1}{\sqrt{\beta_{\mathcal{H}}}} \sum_{[H]\in\mathcal{H}} \frac{\Xi(H)}{n^{\frac{1}{2}\aleph} p^{\frac{1}{4}|E_0(H)|}} \sum_{S\subset \mathsf{K}_{n,p}, S\cong H} f_S. \tag{3.10}$$

Here

$$\Xi(H) = \rho^{|\mathsf{dif}_0(H)|+2|\mathsf{dif}(H)|}\big(\tfrac{\mu^2}{\gamma}\big)^{\frac{1}{4}|E_0(H)|} \prod_{1\le \ell \le L} \big(\epsilon_\ell^2 \lambda_\ell\big)^{\frac{1}{2}|E_\ell(H)|} \tag{3.11}$$

and

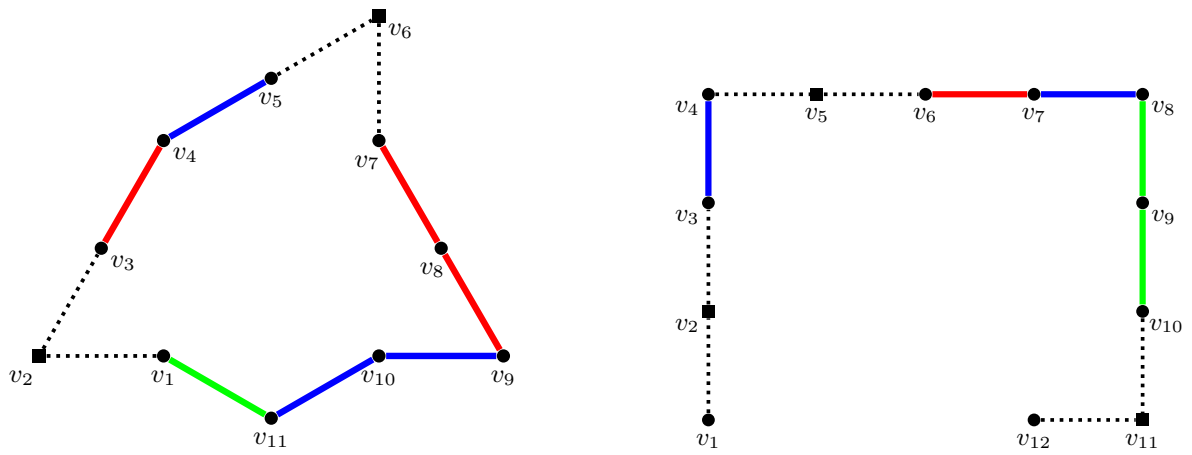
$$\beta_{\mathcal{H}} = \sum_{[H]\in\mathcal{H}} \frac{\Xi(H)^2}{|\mathsf{Aut}(H)|}. \tag{3.12}$$

(3.10)中的系数选取方式使得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_H] = [1+o(1)]\frac{\Xi(H)}{n^{\frac{1}{2}\aleph} p^{\frac{1}{4}|E_0(H)|}},$$

关于这些系数选取方式的更多细节，请参见第4节。

算法1 是 low 描述了我们提出的用于上下文多层随机块模型检测的方法 .



(a) 带有 $L = 3$ 种颜色的装饰圈 H。这里，$V^{\mathsf{b}}(H) = \{v_2, v_6\}$、$V^{\mathsf{a}}(H) = V(H) \setminus V^{\mathsf{b}}(H)$、$\mathrm{dif}_0(H) = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ 以及 $\mathrm{dif}(H) = \{v_4, v_9, v_{11}\}$。

(b) 带有 $L = 3$ 种颜色的装饰路径 H。这里，$V^{\mathsf{b}}(H) = \{v_2, v_5, v_{11}\}$、$V^{\mathsf{a}}(H) = V(H) \setminus V^{\mathsf{b}}(H)$、$\mathrm{dif}_0(H) = \{v_3, v_4, v_6, v_{10}\}$，以及 $\mathrm{dif}(H) = \{v_7, v_8\}$。

图 2：装饰圈和路径：圆盘表示 $V^{\mathsf{a}}(H)$ 中的顶点，方块表示 $V^{\mathsf{b}}(H)$ 中的顶点，而边颜色（在总共 L 种颜色中）表示绘制该边所依据的图 $\boldsymbol{G}_\ell$，$\ell \in [L]$。

算法 1 上下文多层随机块模型检测

1：输入：一个矩形矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 和 L 个邻接矩阵 $\boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L$，一个由非同构装饰图组成的族 $\mathcal{H}$，以及一个阈值 $\tau \geq 0$。2：根据 (3.10) 计算 $f_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L)$。3：若 $f_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L) \geq \tau$，则令 $\mathsf{q} = 1$；若 $f_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L) < \tau$，则令 $\mathsf{q} = 0$。4：输出：q。

现在我们证明，在满足（3.1）且参数$\aleph$取适当值时，算法 1 能够成功。关键在于：（i）给出信号均值 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_{\mathcal{H}}]$的下界；（ii）控制 $f_{\mathcal{H}}$的波动，其大小由 $\mathbb{E}_{\mathcal{Q}}[f_{\mathcal{H}}^2]$ 和 $\mathrm{Var}_{\mathbb{P}}[f_{\mathcal{H}}]$量化；这两者都依赖于界 $\beta_{\mathcal{H}}$。为此，我们首先给出以下关于 $\beta_{\mathcal{H}}$的界。

引理 3.3. 定义矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{\mu^2}{\gamma} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \epsilon_1^2\lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2^2\lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \epsilon_L^2\lambda_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho^2 & \rho^2 & \ldots & \rho^2 \\ \rho^2 & 1 & \rho^4 & \ldots & \rho^4 \\ \rho^2 & \rho^4 & 1 & \ldots & \rho^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^2 & \rho^4 & \rho^4 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

另记 $\sigma_+(\mathbf{P})$ $\mathbf{P}$的最大特征值。则存在一个常数 $D = \Theta(1)$ 使得

$$\frac{D^{-1}}{\aleph^2}\sigma_+(\mathbf{P})^{\aleph} \leq \beta_{\mathcal{H}} \leq D\sigma_+(\mathbf{P})^{\aleph}, \tag{3.14}$$

此外，若 (3.1) 成立，则存在一个常数 $\delta > 0$ 使得 $\sigma_+(\mathbf{P}) > 1 + \delta$。

引理 3.3 的证明收录于附录的 B.1 节中。我们针对上下文多层随机块模型的检测算法的主要结果可概括如下：

命题 3.4。 假设 (3.1) 成立，并选择

$$\omega(1) = \aleph = o(\tfrac{\log n}{\log\log n})\,. \tag{3.15}$$

则有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[f_{\mathcal{H}}\big] = \omega(1),\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[f_{\mathcal{H}}^2\big] = 1 + o(1),\ \textit{and}\ \ \mathrm{Var}_{\mathbb{P}}\left[f_{\mathcal{H}}\right] = o(1)\cdot\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[f_{\mathcal{H}}\big]^2\,. \tag{3.16}$$

将这些方差界与切比雪夫不等式结合起来，可得到统计量 $f_{\mathcal{H}}$ 实现强检测的以下充分条件。

定理 3.5。 假设 (3.1) 成立，并根据 $\aleph$ 选择 (3.15)。则检验错误满足

$$\mathbb{P}\big(f_{\mathcal{H}} \le \tau\big) + \mathbb{Q}\big(f_{\mathcal{H}} \ge \tau\big) = o(1)\,, \tag{3.17}$$

其中阈值选为

$$\tau = c\cdot\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[f_{\mathcal{H}}\big]$$

对于任意固定常数 $0 < c < 1$。特别地，上文所述的算法 *1*可在 $\mathbb{P}$ 与 $\mathbb{Q}$之间实现强检测。

备注 3.6. 从计算角度来看，对每一项的计算

$$\sum_{S\subset \mathsf{K}_{n,p}:S\cong H} f_S$$

在 *(3.10)* 中通过穷举搜索需要 $n^{O(\aleph)}$ 时间，当 $\aleph = \omega(1)$ 时该时间为超多项式。为解决~这一计算问题，我们可以找到一个多项式时间算法，利用彩色编码策略 *[AYZ95, AR02, HS17, MWXY24, Li25+]* 来计算 $f_{\mathcal{H}}$ 的近似 $f_{\mathcal{H}}$。与 ~*[HS17, MWXY24, Li25+]* 中类似，我们可以证明统计量 $f_{\mathcal{H}}$ 在与定理 *3.5* 相同的条件下实现强检测。由于此类分析在彩色编码文献中现已成为标准，我们省略细节，并请读者参阅例如 *[Li25+]* 以了解详情。为简洁起见，恢复算法中类似的彩色编码论证也同样省略。

3.2 恢复统计量与理论保证

回顾（3.8）。令 $\aleph \in \mathbb{N}$ 为一个稍后确定的参数。此外，定义 $\mathcal{J}_\star = \mathcal{J}_\star(\aleph)$ 为无标号装饰路径的集合 $[H]$ 使得 $|V_{\mathsf{a}}(H)| = \aleph + 1$，并定义（回顾（3.4）以及 $\mathsf{L}(H)$ 表示 H的叶子集合）

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(\aleph) := \Big\{[H] \in \mathcal{J}_\star : \mathsf{L}(H) \subset V^{\mathsf{a}}(H)\Big\}\,. \tag{3.18}$$

参见图2b 中的装饰路径示例。显然，如果我们按照 $v_1, \ldots, v_{m+1}$ 的顺序标记 $V(H)$ 中的顶点，使得 $(v_i, v_{i+1}) \in E(H)$，那么我们有 $v_1, v_{m+1} \in V_{\mathsf{a}}(H)$。此外，对于所有 $[H] \in \mathcal{J}(\aleph)$，我们有

$$|E(H)| = \aleph + \tfrac{1}{2}|E_0(H)|,\ |V^{\mathsf{b}}(H)| = \tfrac{1}{2}|E_0(H)|\,. \tag{3.19}$$

回顾 (3.11)。定义

$$\Phi^{\mathcal{J}}_{u,v} := \sum_{[H]\in\mathcal{J}} \frac{\Xi(H)}{n^{\frac{1}{2}\aleph-1}p^{\frac{1}{4}|E_0(H)|}\beta_{\mathcal{J}}} \sum_{\substack{S\subset \mathsf{K}_{n,p}: S\cong H \\ \mathsf{L}(S)=\{a_u,a_v\}}} f_S \tag{3.20}$$

对每个 $u,\ v\in[n]$，其中 $a_u,\ a_v$ 是与 $u,\ v$ 对应的顶点。这里

$$\beta_{\mathcal{J}} = \sum_{[H]\in\mathcal{J}} \frac{\Xi(H)^2}{|\mathsf{Aut}(H)|}\,. \tag{3.21}$$

我们提出的上下文多层随机块模型恢复方法如下。

算法 2 上下文多层随机块模型中的恢复

1: **输入：** 一个矩形矩阵 $\boldsymbol{Y}$和 L 邻接矩阵 $\boldsymbol{G}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{G}_L$一族 $\mathcal{J}$两两非同构的装饰图。2: 对每一对 $u,\ v\in[n]$，按式 $\Phi^{\mathcal{J}}_{u,\,v}$ (3.20) 计算。3: 使用 HS17 第 2 节中的保持相关性的投影技术，将矩阵 [HS17，第 2 节.3] 舍入为正定矩阵 $\Phi^{\mathcal{J}}$ $\widehat{\Phi}$。4: **输出：** Φ。

与引理 3.3类似，我们需要以下关于 $\beta_{\mathcal{J}}$ 的界。

引理 3.7。 回顾 $\mathbf{P}$在 (3.13) 中的定义，并回顾我们令 $\sigma_+(\mathbf{P})$ 表示 $\mathbf{P}$的最大特征值。则存在常数 $D=\Theta(1)$ 使得

$$D^{-1}\sigma_+(\mathbf{P})^{\aleph} \le \beta_{\mathcal{J}}, \beta_{\mathcal{J}_\star} \le D\sigma_+(\mathbf{P})^{\aleph}\,, \tag{3.22}$$

此外，如果 (3.1) 成立，那么存在一个常数 $\delta>0$ 使得 $\sigma_+(\mathbf{P})\ >1+\delta$。

引理 3.7 的证明包含在附录的第 B.2 节中。与针对 $\beta_{\mathcal{H}}$ 的引理 3.3 相比，$\beta_{\mathcal{J}}$ 和 $\beta_{\mathcal{J}_\star}$ 的下界小了一个因子 $\aleph^{-2}$。这是由于自同构归一化：装饰路径至多有 2 个自同构，而长度为 $\aleph$ 的环有 $\Theta(\aleph)$ 个自同构。更多细节请参见附录B 。我们论证的关键是以下结果，它表明 $\Phi^{\mathcal{J}}_{u,v}$ 与 $\boldsymbol{x}_u\boldsymbol{x}_v$ 正相关，且方差有界。

命题 3.8。 假设 (3.1) 成立，并选择 $\aleph$ 使得

$$\aleph = \Theta_\delta(\log n),\quad (1+\delta)^{\aleph} \ge n^2\,. \tag{3.23}$$

那么我们有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\Phi^{\mathcal{J}}_{u,v}\cdot \boldsymbol{x}_u\boldsymbol{x}_v\right] \ge \rho^2 \ \textit{and}\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\left(\Phi^{\mathcal{J}}_{u,v}\right)^2\right] \le O(1)\,. \tag{3.24}$$

将这些方差界与马尔可夫不等式结合起来，我们得到以下充分条件，使算法 2能够实现弱恢复。

定理 3.9. 假设 (3.1) 成立，并按照 $\aleph$ 选择 (3.23)。那么我们有 （下文中 $\widehat{\ }$记 Φ 为算法 2的输出）

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{|\langle\widehat{\Phi}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\rangle|}{\|\widehat{\Phi}\|_{\mathrm{F}}\|\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\|_{\mathrm{F}}}\right] \ge \Omega(1)\,.$$

特别是，上述 算法 2 能够实现弱恢复。

^**注 3.10**。 注意，根据 $\Phi \succeq 0$，我们的估计量自然满足 *[HS17，引理 3。5]* 以及 *[LS23，第 5], 节*，通过考虑 $\boldsymbol{w} \sim \mathcal{N}(0, \widehat{\Phi})$ 并令 $\widehat{\boldsymbol{x}}$ 为 $\boldsymbol{w}$的逐坐标符号，我们可以得到一个估计量 $\widehat{\boldsymbol{x}} \in \{-1,+1\}^n$ 使得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{|\langle \boldsymbol{x}, \widehat{\boldsymbol{x}}\rangle|}{\|\boldsymbol{x}\|\|\widehat{\boldsymbol{x}}\|}\right] \geq \Omega(1)\,,$$

在(3.1) 成立且我们按照 $\aleph$ 根据(3.23)。

4 子图计数的统计分析

命题3.4的证明

Le引理 4.1。 假设(3.1) 成立，并按照 $\aleph$ 根据(3.15)。则 n

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f_{\mathcal{H}}] = 0\,, \tag{4.1}$$
$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_{\mathcal{H}}] = [1+o(1)]\sqrt{\beta_{\mathcal{H}}} = \omega(1)\,, \tag{4.2}$$
$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f_{\mathcal{H}}^2] = 1+o(1)\,. \tag{4.3}$$

证明。 回顾式（3.7）和（3.10）。由于 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f_S(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})] = 0$ 对所有 $S \subset \mathsf{K}_n$ 以及 $E(S) \neq \emptyset$，根据线性性可得$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f_{\mathcal{H}}] = 0$。此外，回顾式（1.3）。给定 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{x}_1$, ..., $\boldsymbol{x}_L$,

$$\big\{\boldsymbol{Y}(i,k) : i \in [n], k \in [p]\big\} \bigcup \Big(\cup_{1\leq \ell \leq L} \big\{\overline{\boldsymbol{G}}_\ell(i,j) : (i,j) \in \mathrm{U}_n\big\}\Big)$$

是一组条件独立随机变量，其中

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\boldsymbol{Y}(i,k) \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_L\big] = \tfrac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{n}}\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{u}(k),$$
$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\overline{\boldsymbol{G}}_\ell(i,j) \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_L\big] = \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_\ell/n}} \cdot \tfrac{\epsilon_\ell \lambda_\ell}{n}\boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}_\ell(j) = \tfrac{\sqrt{\epsilon_\ell^2\lambda_\ell}}{\sqrt{n}}\boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}_\ell(j)\,.$$

因此，我们有（回顾（3.8））

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[f_S\big] &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_L}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[f_S \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_L\big] \\
&= \mathbb{E}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_L}\left\{\prod_{(a_i,b_k)\in E_0(S)} \tfrac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{n}}\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{u}(k) \prod_{1\leq\ell\leq L}\prod_{(a_i,a_j)\in E_\ell(S)} \tfrac{\sqrt{\epsilon_\ell^2\lambda_\ell}}{\sqrt{n}}\boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}_\ell(j)\right\} \\
&= \frac{\mu^{\frac{1}{2}|E_0(S)|}\prod_{1\leq\ell\leq L}(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^{\frac{1}{2}|E_\ell(S)|}}{n^{\frac{1}{2}|E(S)|}}\mathbb{E}\left\{\prod_{(a_i,b_k)\in E_0(S)}\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{u}(k)\prod_{1\leq\ell\leq L}\prod_{(a_i,a_j)\in E_\ell(S)}\boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}_\ell(j)\right\} \\
&\overset{\text{(a)}}{=} \frac{\mu^{\frac{1}{2}|E_0(S)|}\prod_{1\leq\ell\leq L}(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^{\frac{1}{2}|E_\ell(S)|}}{n^{\frac{1}{2}\aleph+\frac{1}{4}|E_0(S)|}} \cdot \rho^{|\mathsf{dif}_0(S)|+2|\mathsf{dif}(S)|} \\
&\overset{\text{(b)}}{=} \frac{(\mu^2/\gamma)^{\frac{1}{4}|E_0(S)|}\prod_{1\leq\ell\leq L}(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^{\frac{1}{2}|E_\ell(S)|}\rho^{|\mathsf{dif}_0(S)|+2|\mathsf{dif}(S)|}}{n^{\frac{1}{2}\aleph}p^{\frac{1}{4}|E_0(S)|}} \overset{\text{(c)}}{=} \frac{\Xi(S)}{n^{\frac{1}{2}\aleph}p^{\frac{1}{4}|E_0(S)|}}\,.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

这里的 **(b)** 由 $\gamma = n/p$推出；**(c)** 由（3.11）得到；**(a)** 由 $\aleph = |E(S)| - \frac{1}{2}|E_0(S)|$ 中的（3.9）推出

并且（下文中，如果一个顶点 a_i 与一条边 e 相 incident，我们记作 $a_i \sim e$ ）

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big\{ \prod_{(a_i,b_k)\in E_0(S)} \boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{u}(k) \prod_{1\le \ell\le L} \prod_{(a_i,a_j)\in E_\ell(S)} \boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}_\ell(j) \Big\} \\
&= \mathbb{E}\Big\{ \prod_{b_k\in V^{\mathsf{b}}(S)} \boldsymbol{u}(k)^2 \prod_{a_i\in V^{\mathsf{a}}(S)} \boldsymbol{x}(i)^{\Lambda_0(i)}\boldsymbol{x}_1(i)^{\Lambda_1(i)}\dots\boldsymbol{x}_L(i)^{\Lambda_L(i)} \Big\} \\
&= \prod_{a_i\in V^{\mathsf{a}}(S)} \mathbb{E}\Big[\boldsymbol{x}(i)^{\Lambda_0(i)}\boldsymbol{x}_1(i)^{\Lambda_1(i)}\dots\boldsymbol{x}_L(i)^{\Lambda_L(i)}\Big], \text{ where } \Lambda_\ell(i) = \#\big\{e\in E_\ell(S) : a_i\sim e\big\},
\end{aligned}$$

因此显然，

- 若 $a_i \in \mathsf{dif}_0(S)$ ，则 $\Lambda_0(i) = 1$ 且 $\Lambda_\ell(i) = 1$ 对于某个 $1 \le \ell \le L$ （其余均为 0），因此这会为乘积贡献一个因子 ρ （回顾（1.2））；
- 若 $a_i \in \mathsf{dif}(S)$ ，则 $\Lambda_0(i) = 0$ 且 $\Lambda_\ell(i)\ \Lambda_{\ell'}(i) = 1$ 恰有两个 $1 \le \ell < \ell' \le L$，因此这会为乘积贡献一个因子 ρ^2 （回顾（1.2））；
- 对于所有其他 a_i, $\Lambda_\ell(i) = 2$ 对于某个 $1 \le \ell \le L$（其余均为 0），因此这会为乘积贡献因子 1。

因此，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_{\mathcal{H}}] &\overset{(3.10)}{=} \frac{1}{\sqrt{\beta_{\mathcal{H}}}} \sum_{[H]\in\mathcal{H}} \frac{\Xi(H)}{n^{\aleph/2}p^{|E_0(H)|/4}} \sum_{S\subset \mathsf{K}_{n,p}, S\cong H} \Xi(S) n^{-\frac{1}{2}\aleph} p^{-\frac{1}{4}|E_0(S)|} \\
&= \frac{1}{n^{\aleph}p^{|E_0(H)|/2}\sqrt{\beta_{\mathcal{H}}}} \sum_{[H]\in\mathcal{H}} \Xi(H)^2 \cdot \#\big\{S\cong \mathsf{K}_{n,p} : S\cong H\big\} \\
&= [1+o(1)]\cdot \frac{1}{\sqrt{\beta_{\mathcal{H}}}} \sum_{[H]\in\mathcal{H}} \frac{\Xi(H)^2}{|\mathsf{Aut}(H)|} \overset{(3.12)}{=} [1+o(1)]\sqrt{\beta_{\mathcal{H}}}\,,
\end{aligned}$$

其中第三个等式由下式得出

$$\begin{aligned}
\#\big\{S\cong \mathsf{K}_{n,p} : S\cong H\big\} &= \frac{\prod_{i=0}^{|V^{\mathsf{a}}(H)|-1}(n-i)\prod_{j=0}^{|V^{\mathsf{b}}(H)|-1}(p-j)}{|\mathsf{Aut}(H)|} \\
&= \frac{(1+o(1))n^{|V^{\mathsf{a}}(H)|}p^{|V^{\mathsf{b}}(H)|}}{|\mathsf{Aut}(H)|} \overset{(3.9)}{=} \frac{(1+o(1))n^{\aleph}p^{|E_0(H)|/2}}{|\mathsf{Aut}(H)|}\,. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

此外，由引理 3.3 以及我们在 ℓ （3.15）中的选择可知 $\sqrt{\beta_{\mathcal{H}}} = \omega(1)$。因此，我们有 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_{\mathcal{H}}] = \omega(1)$。最后，注意到

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[f_S^2\big] = 1+o(1) \text{ and } \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[f_S f_K\big] = 0 \text{ for } S\neq K\,, \qquad (4.6)$$

我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f_{\mathcal{H}}^2] &\overset{(3.10)}{=} [1+o(1)] \sum_{[H],[I]\in\mathcal{H}} \frac{\Xi(H)\Xi(I)}{n^{\aleph}p^{\frac{1}{4}(|E_0(H)|+|E_0(I)|)}\beta_{\mathcal{H}}} \sum_{\substack{S,K\subset \mathsf{K}_{n,p}\\ S\cong H, K\cong I}} \mathbf{1}_{\{S=K\}} \\
&= \sum_{[H]\in\mathcal{H}} \frac{\Xi(H)^2\#\{S\cong \mathsf{K}_{n,p} : S\cong H\}}{n^{\aleph}p^{\frac{1}{2}|E_0(H)|}\beta_{\mathcal{H}}} = \frac{1+o(1)}{\beta_{\mathcal{H}}} \sum_{[H]\in\mathcal{H}} \frac{\Xi(H)^2}{|\mathsf{Aut}(H)|} \overset{(3.12)}{=} 1+o(1)\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

现在，我们对 $f_{\mathcal{H}}$ 备择假设 $\mathbb{P}$下的方差进行界定，具体如下引理所述。

引理 4.2. 假设 (3.1) 成立，并按照 $\aleph$ 选择 (3.15)。则有

$$\frac{\mathrm{Var}_{\mathbb{P}}[f_{\mathcal{H}}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_{\mathcal{H}}]^2} = o(1)\,. \tag{4.7}$$

假设引理 4.2，即可完成命题3.4的证明。

在引理 *4.2* 的假设下证明命题 *4.2*。只需注意到，结合引理4.1 和4.2即可得出命题 3.4。

□

其余 本小节内容用于证明引理4.2。注意到 t

$$\frac{\mathrm{Var}_{\mathbb{P}}[f_{\mathcal{H}}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_{\mathcal{H}}]^2} \overset{(3.10),\text{Lemma } 4.1}{=} [1+o(1)] \sum_{[H],[I]\in\mathcal{H}} \frac{\Xi(H)\Xi(I)}{n^{\aleph} p^{\frac{1}{4}(|E_0(H)|+|E_0(I)|)} \beta_{\mathcal{H}}^2} \sum_{\substack{S,K\subset \mathsf{K}_n \\ S\cong H, K\cong I}} \mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(f_S, f_K\right), \tag{4.8}$$

其中 $\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(f_S,\ f_K\right) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_S f_K] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_S]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_K]$。证明的第一步是给出 $\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}(f_S,\ f_K)$ 的如下界。定义

$$\Omega(S) = n^{|E(S)|-\frac{1}{2}|E_0(S)|} p^{\frac{1}{2}|E_0(S)|}\,. \tag{4.9}$$

对于 $[H],\ [I] \in \mathcal{H}(\aleph)$，我们有 $n^{\aleph} p^{(|E_0(H)|+|E_0(I)|)/4} = \Omega(H)^{1/2}\Omega(I)^{1/2}$，因为对于所有 $H \in \mathcal{H}(\aleph),\ \aleph = |E(H)| - \frac{1}{2}|E_0(H)|$。我们还定义

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(S,K) := \left(\tfrac{\mu^2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}|E_0(S)\triangle E_0(K)|} \prod_{1\le \ell\le L} (\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^{\frac{1}{2}|E_\ell(S)\triangle E_\ell(K)|} \\ \cdot \rho^{|\mathsf{dif}_0(S)\setminus V(K)|+|\mathsf{dif}_0(K)\setminus V(S)|+2|\mathsf{dif}(S)\setminus V(K)|+2|\mathsf{dif}(K)\setminus V(S)|}\,.\end{aligned} \tag{4.10}$$

引理 4.3。 假设 $[S],[K] \in \mathcal{H}$。我们有

$$\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(f_S, f_K\right) = 0 \ \textit{if}\ V(S)\cap V(K) = \emptyset\,. \tag{4.11}$$

回顾一下，$\mathsf{L}(H)$ 表示 H 中叶子的集合。对于一般的装饰路径或装饰圈S, K，存在一个常数 $C>0$，使得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[f_S f_K\right] \le \frac{C^{|\mathsf{L}(S\Cap K)|+|\mathsf{L}(S\cap K)|+1}\mathsf{P}(S,K)\Omega(S\Cap K)}{\Omega(S)^{\frac{1}{2}}\Omega(K)^{\frac{1}{2}}}\,. \tag{4.12}$$

引理 4.3 的证明已纳入附录的 C.1 节。由（4.4），我们有$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_S] \ge 0$对于任意 $[S]\in\mathcal{H}$，因此 $\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left(f_S,\ f_K\right) \le \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[f_S f_K\right]$。利用引理 4.3，我们看到（4.8）右侧可写为（回顾（4.9））

$$[1+o(1)] \sum_{\substack{S,K\subset \mathsf{K}_{n,p}:[S],[K]\in\mathcal{H} \\ V(S)\cap V(K)\neq\emptyset}} \frac{C^{|\mathsf{L}(S\Cap K)|+|\mathsf{L}(S\cap K)|+1}\Xi(S)\Xi(K)\mathsf{P}(S,K)\Omega(S\Cap K)}{\Omega(S)\Omega(K)\beta_{\mathcal{H}}^2}\,. \tag{4.13}$$

现在我们将（4.13）分成两部分，第一部分计算来自 $S=K$ 的贡献（在这种情况下，我们有 $S\Cap K = S$ 以及$\mathsf{L}(S\Cap K) = \mathsf{L}(S\cap K) = \emptyset$）：

$$\sum_{S\in\mathsf{K}_{n,p}:[S]\in\mathcal{H}} \frac{C\Xi(S)^2\cdot\mathsf{P}(S,S)}{\Omega(S)\beta_{\mathcal{H}}^2}\,. \tag{4.14}$$

第二部分计算来自 $V(S)\cap V(K)\neq\emptyset$ 以及 $S\neq K$的贡献:

$$\sum_{\substack{S,K\subset \mathsf{K}_{n,p}:[S],[K]\in\mathcal{H}\\ V(S)\cap V(K)\neq\emptyset, S\neq K}} \frac{C^{|\mathsf{L}(S\Cap K)|+|\mathsf{L}(S\cap K)|+1}\Xi(S)\Xi(K)\mathsf{P}(S,K)\Omega(S\Cap K)}{\beta_{\mathcal{H}}^2\Omega(S)\Omega(K)}, \tag{4.15}$$

现在，我们分别通过以下引理对（4.14）和（4.15）进行界定。

引理 4　.4. 假设 (3.1) 成立，并根据 $\aleph$ 选择 (3.15)。那么我们有 e

$$(4.14)\le \frac{1+o(1)}{\beta_{\mathcal{H}}}=o(1)\,. \tag{4.16}$$

$$(4.15)\le n^{-1+o(1)}=o(1)\,. \tag{4.17}$$

引理4.4 的证明推迟到附录中的第 C.2 节。显然，将（4.16）和（4.17）代入（4.13）即可得到引理4.2。

4.2 定理 3.5 的证明

有了命题 3.4，我们现在可以证明定理3.5。

定理 *3.5* 的证明。 在条件（3.15）下，由命题 3.4可得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f_{\mathcal{H}}]=0,\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f_{\mathcal{H}}^2]=1+o(1),\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_{\mathcal{H}}]=\omega(1),\ \mathrm{Var}_{\mathbb{P}}[f_{\mathcal{H}}]=o(1)\cdot\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_{\mathcal{H}}]^2\,.$$

因此，对于任意常数 $0<c<1$，我们有

$$\mathbb{P}\Big(f_{\mathcal{H}}\le c\cdot\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_{\mathcal{H}}]\Big)\le\frac{\mathrm{Var}_{\mathbb{P}}[f_{\mathcal{H}}]}{(1-c)^2\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_{\mathcal{H}}]^2}=o(1)\,,$$

$$\mathbb{Q}\Big(f_{\mathcal{H}}\ge c\cdot\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_{\mathcal{H}}]\Big)\le\frac{\mathrm{Var}_{\mathbb{Q}}[f_{\mathcal{H}}]}{c^2\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_{\mathcal{H}}]^2}=o(1)\,.$$

□

4.3 命题 3.8 的证明

引理 4.5。 对于所有 $[S]\in\mathcal{J}$ 和 $\mathsf{L}(S)=\{a_u,a_v\}$，我们有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[f_S\cdot\boldsymbol{x}_u\boldsymbol{x}_v\big]=\frac{\Xi(S)}{n^{\frac12\aleph}p^{\frac14|E_0(S)|}}\cdot\rho^{\mathbf{1}_{u\in V_0(S)}+\mathbf{1}_{v\in V_0(S)}}\,.$$

证明。 记 $\pi_{u,\,v}$ 为在给定 $\boldsymbol{x}_u$，$\boldsymbol{x}_v$ 的条件下 $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{x}_L)$ 的分布。于是有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[f_S\cdot\boldsymbol{x}_u\boldsymbol{x}_v\big]=\mathbb{E}_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_L)\sim\pi_{u,v}}\Big[\boldsymbol{x}_u\boldsymbol{x}_v\cdot\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[f_S\mid\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_L\big]\Big]\,.$$

回顾（3.8），我们有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[f_S\mid\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_L\big]=\mathbb{E}_{\boldsymbol{u}}\Bigg\{\prod_{(a_i,b_k)\in E_0(S)}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{n}}\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{u}(k)\prod_{1\le\ell\le L}\prod_{(a_i,a_j)\in E_\ell(S)}\frac{\sqrt{\epsilon_\ell^2\lambda_\ell}}{\sqrt{n}}\boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}_\ell(j)\Bigg\}$$

$$=\frac{\mu^{\frac12|E_0(S)|}\prod_{1\le\ell\le L}(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^{\frac12|E_\ell(S)|}}{n^{\frac12|E(S)|}}\mathbb{E}_{\boldsymbol{u}}\Bigg\{\prod_{(a_i,b_k)\in E_0(S)}\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{u}(k)\prod_{1\le\ell\le L}\prod_{(a_i,a_j)\in E_\ell(S)}\boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}_\ell(j)\Bigg\}$$

$$=\frac{(\mu^2/\gamma)^{\frac14|E_0(S)|}\prod_{1\le\ell\le L}(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^{\frac12|E_\ell(S)|}}{n^{\frac12\aleph}p^{\frac14|E_0(S)|}}\mathbb{E}_{\boldsymbol{u}}\Bigg\{\prod_{(a_i,b_k)\in E_0(S)}\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{u}(k)\prod_{1\le\ell\le L}\prod_{(a_i,a_j)\in E_\ell(S)}\boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}_\ell(j)\Bigg\}\,,$$

其中最后一个等式由 $n=\gamma p$ 和（3.19）得出。此外，回顾（3.4），并回顾对于所有 $[S]\in\mathcal{J}$满足 $\mathsf{L}(S)=\{u,v\}$，我们有 $\{u,v\}\in V_0\cap V_{\mathsf{a}}(S)$。因此，类似于（4.4），我们有

$$\prod_{(a_i,b_k)\in E_0(S)}\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{u}(k)\prod_{1\le\ell\le L}\prod_{(a_i,a_j)\in E_\ell(S)}\boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}_\ell(j)$$
$$=\prod_{b_k\in V^{\mathsf{b}}(S)}\boldsymbol{u}(k)^2\prod_{a_i\in V^{\mathsf{a}}(S)}\boldsymbol{x}(i)^{\Lambda_0(i)}\boldsymbol{x}_1(i)^{\Lambda_1(i)}\ldots\boldsymbol{x}_L(i)^{\Lambda_L(i)},$$

其中（$\Lambda_0(i)$ $\Lambda_1(i)$ ……，$\Lambda_L(i)$）的定义与（4.4）中类似。由此可得

$$\mathbb{E}_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_L)\sim\pi_{u,v}}\left\{\mathbb{E}_{\boldsymbol{u}}\left[\boldsymbol{x}_u\boldsymbol{x}_v\cdot\prod_{(a_i,b_k)\in E_0(S)}\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{u}(k)\prod_{1\le\ell\le L}\prod_{(a_i,a_j)\in E_\ell(S)}\boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}_\ell(j)\right]\right\}$$
$$=\rho^{|\mathsf{dif}_0(S)|+2|\mathsf{dif}(S)|+\mathbf{1}_{u\in V_0(S)}+\mathbf{1}_{v\in V_0(S)}},$$

从而得到所需结果（回顾（3.11））。 □

根据引理4.5，可知

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\Phi^{\mathcal{J}}_{u,v}\cdot\boldsymbol{x}_u\boldsymbol{x}_v\big]\overset{(3.20)}{=}\sum_{[H]\in\mathcal{J}}\frac{\Xi(H)}{n^{\frac12\aleph-1}p^{\frac14|E_0(H)|}\beta_{\mathcal{J}}}\sum_{\substack{S\subset\mathsf{K}_n:S\cong H\\ \mathsf{L}(S)=\{u,v\}}}\frac{\Xi(H)\rho^{\mathbf{1}_{u\in V_0(S)}+\mathbf{1}_{v\in V_0(S)}}}{n^{\frac12\aleph}p^{\frac14|E_0(H)|}\beta_{\mathcal{J}}}$$
$$\ge\rho^2\sum_{[H]\in\mathcal{J}}\frac{\Xi(H)^2}{n^{\aleph-1}p^{\frac12|E_0(H)|}\beta_{\mathcal{J}}}\cdot\#\big\{S\subset\mathsf{K}_n:S\cong H,\mathsf{L}(S)=\{u,v\}\big\}$$
$$=[1+o(1)]\cdot\rho^2\sum_{[H]\in\mathcal{J}}\frac{\Xi(H)^2}{n^{\aleph-1}p^{\frac12|E_0(H)|}\beta_{\mathcal{J}}}\cdot\frac{n^{\aleph-1}p^{\frac12|E_0(H)|}}{|\mathsf{Aut}(H)|}\overset{(3.21)}{=}(1+o(1))\rho^2. \tag{4.18}$$

现在通过以下引理来界定$\Phi^{\mathcal{J}}_i$ 的j 方差。

引理 4.6. 假设 （3.1）成立，并按照 $\aleph$ （3.23）选择。那么

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\big(\Phi^{\mathcal{J}}_{u,v}\big)^2\Big]\le O(1)\ \textit{for all}\ u\ne v,u,v\in[n]. \tag{4.19}$$

根据引理 4.6，现在可以完成命题3.8的证明。

命题的证明 *3.8* 假设引理 *4.6* 成立。 注意，(4.18) 立即推出$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Phi^{\mathcal{J}}_{u,v}\cdot\boldsymbol{x}_u\boldsymbol{x}_v]\ge\rho^2$。结合引理 4.6，我们证明了命题 3.8。 □

本小节的其余部分致力于证明引理4.6。回顾$\Phi^{\mathcal{J}}_{u,v}$（其定义见（3.20））以及 $\Omega(S)$（其定义见（4.9）），我们有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\big(\Phi^{\mathcal{J}}_{u,v}\big)^2\Big]=\sum_{\substack{[S],[K]\in\mathcal{J}\\ \mathsf{L}(S)=\mathsf{L}(K)=\{u,v\}}}\frac{n^2\Xi(S)\Xi(K)}{\Omega(S)^{\frac12}\Omega(K)^{\frac12}\beta_{\mathcal{J}}^2}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[f_Sf_K\big]. \tag{4.20}$$

此外，将引理4.3代入（4.20），我们得到

$$
\begin{aligned}
(4.20) \leq & \sum_{\substack{[S],[K]\in\mathcal{J}\\ \mathsf{L}(S)=\mathsf{L}(K)=\{u,v\}}} \frac{n^2\Xi(S)\Xi(K)}{\Omega(S)^{\frac12}\Omega(K)^{\frac12}\beta_{\mathcal{J}}^2}\cdot\frac{C^{|\mathsf{L}(S\Cap K)|+|\mathsf{L}(S\cap K)|+1}\mathsf{P}(S,K)\Omega(S\Cap K)}{\Omega(S)^{\frac12}\Omega(K)^{\frac12}} \\
= & \sum_{\substack{[S],[K]\in\mathcal{J}\\ \mathsf{L}(S)=\mathsf{L}(K)=\{u,v\}}} \frac{n^2C^{|\mathsf{L}(S\Cap K)|+|\mathsf{L}(S\cap K)|+1}\Xi(S)\Xi(K)\mathsf{P}(S,K)\Omega(S\Cap K)}{\Omega(S)\Omega(K)\beta_{\mathcal{J}}^2}\,. \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

我们首先说明，4.21) 的主要贡献来自满足 S,K 的那些 $E(S)\cap E(K)=E(S\Cap K$，如下引理所述。

引理 4.7。假设 (3.1)成立，则有

$$
(4.21)\leq[1+o(1)]\sum_{\substack{[S],[K]\in\mathcal{J}\\ \mathsf{L}(S)=\mathsf{L}(K)=\{u,v\}\\ E(S)\cap E(K)=E(S\Cap K)}}\frac{n^2C^{2|\mathsf{L}(S\cap K)|+1}\Xi(S)\Xi(K)\mathsf{P}(S,K)\Omega(S\Cap K)}{\Omega(S)\Omega(K)\beta_{\mathcal{J}}^2}\,. \qquad (4.22)
$$

证明。为方便记号，定义

$$
\mathcal{F}(S,K)=\frac{C^{|\mathsf{L}(S\cap K)|+|\mathsf{L}(S\Cap K)|+1}\Xi(S)\Xi(K)\mathsf{P}(S,K)\Omega(S\Cap K)}{\Omega(S)\Omega(K)\beta_{\mathcal{J}}^2}\,. \qquad (4.23)
$$

固定一条任意的装饰路径 S。注意，给定 $E(K)$ $V(K)$ 以及限制在 $E(K)\setminus E(S)$ 中的装饰 χ_K 后，装饰图 K 由 $E(K)\cap E(S)$ 上的装饰 χ_K 唯一确定。此外，对于边 $e\in E_0(K)\cap E_0(S)$，根据定义 3.2，必有 $\chi_K(e)=0$。总之，给定 $V(K)$ $E(K)$ 和 ζ_K（其定义见下文）后，我们有 $\varphi: K\longrightarrow(V(K)\ E(K)\ \zeta_K,\eta_K)$，其中

$$
\zeta_K: E^{\mathsf{a}}(K)\setminus E^{\mathsf{a}}(S)\to\{1,\dots,L\},\ \eta_K: E^{\mathsf{a}}(K)\cap E^{\mathsf{a}}(S)\to\{1,\dots,L\}
$$

是一个双射。将 χ_S 在 $E^{\mathsf{a}}(K)\cap E^{\mathsf{a}}(S)$ 中的限制记为 η_S。我们首先证明，对于每个固定的顶点集 $V(K)=\mathsf{V}$、边集 $E(K)=\mathsf{E}$ 以及部分装饰 $\zeta_K=\zeta$，有

$$
\sum_{\eta_K}\mathcal{F}\big(S,\varphi^{-1}(\mathsf{V},\mathsf{E},\zeta,\eta_K)\big)=[1+o(1)]\mathcal{F}\big(S,\varphi^{-1}(\mathsf{V},\mathsf{E},\zeta,\eta_S)\big)\,. \qquad (4.24)
$$

为方便起见，下文中我们将用 $\varphi^{-1}(\eta_K)$ 代替 $\varphi^{-1}(\mathsf{V},\ \mathsf{E}\ \zeta,\ \eta_K)$。令 $\|\eta_K\|_0$ 表示满足 $\eta_K(e)\neq\eta_S(e)$ 的 $e\in E^{\mathsf{a}}(K)\cap E^{\mathsf{a}}(S)$ 的数量。注意，

$$
\begin{aligned}
&|\mathsf{dif}(\varphi^{-1}(\eta_K)|-|\mathsf{dif}(\varphi^{-1}(\eta_S))|\leq 2\|\eta_K\|_0\,;\\
&|E_\ell(\varphi^{-1}(\eta_K)|-|E_\ell((\varphi^{-1}(\eta_S))|\leq\|\eta_K\|_0\,.
\end{aligned}
$$

根据 φ 的定义，我们注意到 $E_0(\varphi^{-1}(\eta_K))=E_0(\varphi^{-1}(\eta_S))$。根据（3.1），我们有 $\epsilon_\ell^2\lambda_\ell\leq1$ 对所有 $1\leq\ell\leq L$。因此，我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{\Xi(\varphi^{-1}(\eta_K))}{\Xi(\varphi^{-1}(\eta_S)))}&\overset{(3.11)}{=}\rho^{2(|\mathsf{dif}(\varphi^{-1}(\eta_K)|-|\mathsf{dif}(\varphi^{-1}(\eta_S))|)}\prod_{1\leq\ell\leq L}(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^{\frac12(|E_\ell(\varphi^{-1}(\eta_K)|-|E_\ell((\varphi^{-1}(\eta_S))|)}\\
&\leq\rho^{-4\|\eta_K\|_0}\prod_{1\leq\ell\leq L}(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^{-\frac12\|\eta_K\|_0}\,. \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

同样，利用

$$\begin{aligned}&\Big(\big|E_\ell(S)\triangle E_\ell(\varphi^{-1}(\eta_K))\big|-\big|E_\ell(S)\triangle E_\ell((\varphi^{-1}(\eta_S))\big|\Big)\\ \le\ &\big|E_\ell(\varphi^{-1}(\eta_K))\triangle E_\ell((\varphi^{-1}(\eta_S))\big|\le 2\|\eta_K\|_0\,,\end{aligned}$$

我们可以证明

$$\begin{aligned}&\frac{\mathsf{P}(S,\varphi^{-1}(\eta_K))}{\mathsf{P}(S,\varphi^{-1}(\eta_S)))}\\ =\ &\rho^{2(|\mathsf{dif}(\varphi^{-1}(\eta_K)\setminus V(S)|-|\mathsf{dif}(\varphi^{-1}(\eta_S))\setminus V(S)|)}\prod_{1\le\ell\le L}(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^{\frac12(|E_\ell(S)\triangle E_\ell(\varphi^{-1}(\eta_K)|-|E_\ell(S)\triangle E_\ell((\varphi^{-1}(\eta_S))|)}\\ \le\ &\rho^{-4\|\eta_K\|_0}\prod_{1\le\ell\le L}(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^{-\|\eta_K\|_0}\,,\end{aligned}\tag{4.26}$$

其中等式由 (4.10) 得出，而 $E_0(\varphi^{-1}(\eta_K))=E_0(\varphi^{-1}(\eta_S))$；不等式由$\rho\le1$ 以及 $\epsilon_\ell^2\lambda_\ell\le1$ 对所有 $1\le\ell\le L$均成立得出。最后，注意到

$$\frac{C^{|\mathsf{L}(S\Cap\varphi^{-1}(\eta_K))|}}{C^{|\mathsf{L}(S\Cap\varphi^{-1}(\eta_S))|}}\le C^{2\|\eta_K\|_0},\quad \frac{\Omega(S\Cap\varphi^{-1}(\eta_S))}{\Omega(S\Cap\varphi^{-1}(\eta_K))}\overset{(4.9)}{=}n^{\|\eta_K\|_0}\,.\tag{4.27}$$

由 (4.23)、(4.25)、(4.26) 和 (4.27)，可得

$$\frac{\mathcal{F}(S,\varphi^{-1}(\eta_K))}{\mathcal{F}(S,\varphi^{-1}(\eta_S))}\le C^{2\|\eta_K\|_0}n^{-\|\eta_K\|_0}\rho^{-8\|\eta_K\|_0}\prod_{1\le\ell\le L}(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^{-\frac32\|\eta_K\|_0}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{\eta_K}\mathcal{F}\big(S,\varphi^{-1}(\eta_K)\big)=\mathcal{F}\big(S,\varphi^{-1}(\eta_S)\big)+\sum_{m>0}\sum_{\|\eta_K\|_0=m}\mathcal{F}\big(S,\varphi^{-1}(\eta_K)\big)\\ \le\ &\mathcal{F}\big(S,\varphi^{-1}(\eta_S)\big)\Big(1+\sum_{m>0}C^{2m}n^{-m}\rho^{-8m}\prod_{1\le\ell\le L}(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^{-3m/2}\cdot\#\{\|\eta_K\|_0=m\}\Big)\\ \le\ &\mathcal{F}\big(S,\varphi^{-1}(\eta_S)\big)\Big(1+\sum_{m>0}C^{2m}n^{-m}\rho^{-8m}\prod_{1\le\ell\le L}(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^{-3m/2}\cdot\aleph^m\Big)=(1+o(1))\mathcal{F}\big(S,\varphi^{-1}(\eta_S)\big)\,,\end{aligned}$$

从而得到 (4.24)。注意到，当且仅当 $E(K)\cap E(S)=E(K\Cap S)$ 时，$\eta_K(e)=\eta_S(e)$ 对所有$e\in E^{\mathsf{a}}(K)\cap E^{\mathsf{a}}(S)$ 均成立。因此，我们有

$$\begin{aligned}(4.21)=n^2\sum_{\substack{[S],[K]\in\mathcal{J}\\ \mathsf{L}(S)=\mathsf{L}(K)=\{u,v\}}}\mathcal{F}(S,K)&\le[1+o(1)]n^2\sum_{\substack{[S],[K]\in\mathcal{J}\\ \mathsf{L}(S)=\mathsf{L}(K)=\{u,v\}\\ E(S)\cap E(K)=E(S\Cap K)}}\mathcal{F}(S,K)\\ &=[1+o(1)]\sum_{\substack{[S],[K]\in\mathcal{J}\\ \mathsf{L}(S)=\mathsf{L}(K)=\{u,v\}\\ E(S)\cap E(K)=E(S\Cap K)}}\frac{n^2C^{|\mathsf{L}(S\Cap K)|+|\mathsf{L}(S\cap K)|+1}\Xi(S)\Xi(K)\mathsf{P}(S,K)\Omega(S\Cap K)}{\Omega(S)\Omega(K)\beta_{\mathcal{J}}^2}\\ &\le[1+o(1)]\sum_{\substack{[S],[K]\in\mathcal{J}\\ \mathsf{L}(S)=\mathsf{L}(K)=\{u,v\}\\ E(S)\cap E(K)=E(S\Cap K)}}\frac{n^2C^{2|\mathsf{L}(S\cap K)|+1}\Xi(S)\Xi(K)\mathsf{P}(S,K)\Omega(S\Cap K)}{\Omega(S)\Omega(K)\beta_{\mathcal{J}}^2}\,,\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由 $|\mathsf{L}(S\Cap K)|\le|\mathsf{L}(S\cap K)|$ if $E(S\cap K)=E(S\Cap K)$ 得出（因为在这种情况下，$S\cap K$ 是 $S\Cap K$ 添加了一些孤立顶点）。 □

根据引理 4.7，只需对 (4.22) 的右侧进行界定。我们先引入一些记号。设 $S \cap K$ 有 $\mathtt{T}$ 个 $+1$ 连通分量 $S_1, \dots, S_{\mathtt{T}+1}$，使得$a_u \in V(S_1)$ $a_v \in V(S_{\mathtt{T}+1})$。特别地，若 $S = K$，则令 $\mathtt{T} = 0$ 且 $S_1 = S = K$。由于$E(S) \cap E(K) = E(S \Cap K)$，将 K 限制在 $V(S_i)$ 中得到的装饰图等于 S_i。注意，S 是装饰路径，因此对所有 $1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}+1$， $S_{\mathtt{t}}$ 都是一条路径（我们允许路径是一个孤立顶点）。因此，我们也有 $E(S) \setminus E(S_1 \cup S_2 \dots \cup S_{\mathtt{T}})$ 可分解为路径 $S_1, \dots, S_{\mathtt{T}}$，其中 $S_{\mathtt{t}}$ 位于 $S_{\mathtt{t}}$ 和 $S_{\mathtt{t}+1}$之间。由于 $a_u \in V(S_1)$ 且 $a_v \in V(S_{\mathtt{T}+1})$，交集 $S \cap K$ 必定比由 $E(S) \setminus E(S_1 \cup S_2 \dots \cup S_{\mathtt{T}})$ 形成的其余连通分量多包含一个连通分量。类似地， $E(K) \setminus E(S_1 \cup S_2 \dots \cup S_{\mathtt{T}})$ 可分解为互不相交的路径 $K_1, \dots, K_{\mathtt{T}}$，其中 $K_{\mathtt{t}}$ 位于 $K_{\mathtt{t}}$ 和 $K_{\mathtt{t}+1}$之间。定义

$$S_\cap := (S_1, \dots, S_{\mathtt{T}+1}), \quad S_\setminus := (\widetilde{S}_1, \dots, \widetilde{S}_{\mathtt{T}}), \quad K_\setminus := (\widetilde{K}_1, \dots, \widetilde{K}_{\mathtt{T}}) . \tag{4.28}$$

参见图 3 中的示意图。此外，定义 $\mathcal{A}_{\mathtt{T}}$ 为满足以下条件的 $S_\cap, S_\setminus, K_\setminus$ 的集合：存在 $[S], [K] \in \mathcal{J}$，$E(S) \cap E(K) = E(S \Cap K)$，且 $\mathrm{L}(S) = \mathrm{L}(K) = \{a_u, a_v\}$，并且 $S_\cap, S_\setminus, K_\setminus$分别是 $S \cap K, S \setminus K$，$K \setminus S$所需的分解。显然，所有满足 $E(S) \cap E(K) = E(S \Cap K)$ 的 S, K 均由 $S_\cap, S_\setminus, K_\setminus$唯一确定。下一个引理将说明如何利用上述量来界定 $\Xi(S)$、 $\Xi(K)$ 和 $\mathrm{P}(S, K)$。

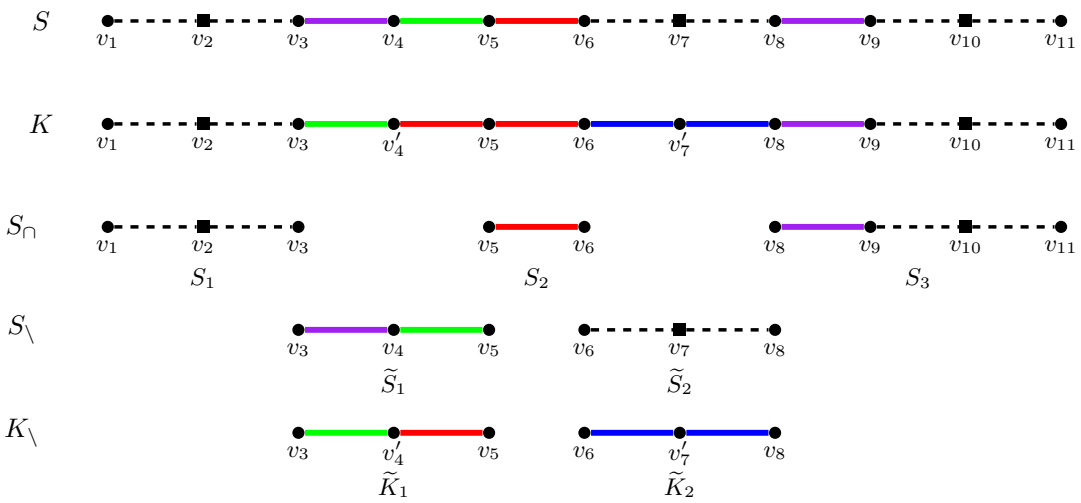


图 3：装饰路径 S 和 K 的一个示例，其中 $E(S) \cap E(K) = E(S \Cap K)$，以及 $\mathtt{T} = 2$对应的 $S_\cap$、$S_\setminus$ 和 $K_\setminus$。

Lemma 4.8. 对于所有 $E(S) \cap E(K) = E(S \Cap K)$ 以及 $S_\cap, S_\setminus, K_\setminus \in \mathcal{A}_{\mathtt{T}}$。我们有 e

$$\Xi(S) \le \rho^{-10\mathtt{T}} \cdot \prod_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}+1} \Xi(S_{\mathtt{t}}) \prod_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}} \Xi(\widetilde{S}_{\mathtt{t}}) , \tag{4.29}$$

$$\Xi(K) \le \rho^{-10\mathtt{T}} \cdot \prod_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}+1} \Xi(K_{\mathtt{t}}) \prod_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}} \Xi(\widetilde{K}_{\mathtt{t}}) , \tag{4.30}$$

$$\mathrm{P}(S, K) \le \rho^{-20\mathtt{T}} \prod_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}} \Xi(\widetilde{S}_{\mathtt{t}}) \prod_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}} \Xi(\widetilde{K}_{\mathtt{t}}) . \tag{4.31}$$

L的证明 emma 4.8 推迟至第 C.3 附录中的该节。注意 $S_{\mathtt{t}} = K_{\mathtt{t}}$ 为 r

$1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}+1$。利用引理 4.8，可得

$$\begin{aligned}\Xi(S)\Xi(K)\mathsf{P}(S,K) &\le \rho^{-40\mathtt{T}} \prod_{1\le \mathtt{t}\le \mathtt{T}+1} \Xi(S_{\mathtt{t}})^2 \cdot \prod_{1\le \mathtt{t}\le \mathtt{T}} \Xi(\widetilde{S}_{\mathtt{t}})^2 \prod_{1\le \mathtt{t}\le \mathtt{T}} \Xi(\widetilde{K}_{\mathtt{t}})^2 \\ &= \rho^{-40\mathtt{T}} \Xi(S_\cap)^2 \Xi(S_\setminus)^2 \Xi(K_\setminus)^2 \,,\end{aligned}$$

其中

$$\Xi(S_\cap) := \prod_{1\le \mathtt{t}\le \mathtt{T}+1} \Xi(S_{\mathtt{t}}), \quad \Xi(S_\setminus) := \prod_{1\le \mathtt{t}\le \mathtt{T}} \Xi(\widetilde{S}_{\mathtt{t}}), \quad \Xi(K_\setminus) := \prod_{1\le \mathtt{t}\le \mathtt{T}} \Xi(\widetilde{K}_{\mathtt{t}}).$$

我们类似地定义 $\Omega(S_\cap)$、$\Omega(S_\setminus)$ 和 $\Omega(K_\setminus)$。此外，由于 $E(S) \cap E(K) = E(S \Cap K)$，显然

$$|\mathsf{L}(S \cap K)| \le 2(\mathtt{T}+1) \text{ and } \frac{\Omega(S)\Omega(K)}{\Omega(S \Cap K)} = \Omega(S_\cap)\Omega(S_\setminus)\Omega(K_\setminus)\,.$$

因此，我们可以将（4.22）写成（回顾 $\mathcal{A}_{\mathtt{T}}$ 在（4.28）下方的定义）

$$\begin{aligned}(4.22) &\le \sum_{\mathtt{T}\ge 0} \sum_{S_\cap, S_\setminus, K_\setminus \in \mathcal{A}_{\mathtt{T}}} \frac{n^2 C^{4\mathtt{T}+5} \rho^{-40\mathtt{T}} \Xi(S_\cap)^2 \Xi(S_\setminus)^2 \Xi(K_\setminus)^2}{\Omega(S_\cap)\Omega(S_\setminus)\Omega(K_\setminus)\beta_{\mathcal{J}}^2} \\ &\le \sum_{\mathtt{T}\ge 0} \frac{C^{4\mathtt{T}+5}\rho^{-40\mathtt{T}} n^{-3\mathtt{T}+1}}{\beta_{\mathcal{J}}^2} \sum_{S_\cap, S_\setminus, K_\setminus \in \mathcal{A}_{\mathtt{T}}} \prod_{1\le \mathtt{t}\le \mathtt{T}+1} \frac{n\Xi(S_{\mathtt{t}})^2}{\Omega(S_{\mathtt{t}})} \prod_{1\le \mathtt{t}\le \mathtt{T}} \frac{n\Xi(\widetilde{S}_{\mathtt{t}})^2}{\Omega(\widetilde{S}_{\mathtt{t}})} \prod_{1\le \mathtt{t}\le \mathtt{T}} \frac{n\Xi(K_{\mathtt{t}})^2}{\Omega(\widetilde{K}_{\mathtt{t}})}\,.\end{aligned} \tag{4.32}$$

我们将借助以下引理来界定（4.32），从而完成引理 4.6 的证明。以下引理的证明推迟至附录第C.4 节。

引理 4.9. 假设（3.1）成立，并且我们选取 $\aleph$，其选取依据为（3.23）。则（4.32）$\le O(1)$。

4.4 定理 3.9 的证明

有了命题 3.8，我们现在可以证明定理3.9。

定理 *3.9* 的证明。注意，命题 3.8 意味着存在一个充分大的常数 $C \ge 100\rho^{-2}$，其中

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\langle \Phi^{\mathcal{J}}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\rangle\Big] \ge \rho^2 n^2 \text{ and } \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\|\Phi^{\mathcal{J}}\|_{\mathrm{F}}^2\Big] \le Cn^2\,.$$

因此，利用切比雪夫不等式，我们有 $\mathbb{P}(\|\Phi^{\mathcal{J}}\|_{\mathrm{F}} \ge C^2 n) \le C^{-3}$，从而 s

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\langle \Phi^{\mathcal{J}}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\rangle \cdot \mathbf{1}_{\{\|\Phi^{\mathcal{J}}\|_{\mathrm{F}} \ge C^2 n\}}\Big] &\overset{\text{(a)}}{\le} n\mathbb{E}\Big[\|\Phi^{\mathcal{J}}\|_{\mathrm{F}} \cdot \mathbf{1}_{\{\|\Phi^{\mathcal{J}}\|_{\mathrm{F}} \ge C^2 n\}}\Big] \\ &\overset{\text{(b)}}{\le} n\mathbb{P}\Big(\|\Phi^{\mathcal{J}}\|_{\mathrm{F}} \ge C^2 n\Big)^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\Big[\|\Phi^{\mathcal{J}}\|_{\mathrm{F}}^2\Big]^{\frac{1}{2}} \le C^{-1} n^2\,,\end{aligned}$$

其中，(a) 和 (b) 根据柯西-施瓦茨不等式和 $\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{F}}^2 = n^2$ 得出。因此，我们有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\langle \Phi^{\mathcal{J}}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\rangle \cdot \mathbf{1}_{\{\|\Phi^{\mathcal{J}}\|_{\mathrm{F}} \le C^2 n\}}\Big] \ge (\rho^2 - C^{-1})n^2\,.$$

根据马尔可夫不等式，我们得到

$$\mathbb{P}\left(\langle \Phi^{\mathcal{J}}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\rangle \geq \frac{\rho^2 n^2}{2}\right) \geq C^{-2}\,.$$

结合 $\mathbb{P}(\|\Phi^{\mathcal{J}}\|_{\mathrm{F}} \geq C^2 n) \leq C^{-3}$ 这一事实，我们得到

$$\mathbb{P}\left(\langle \Phi^{\mathcal{J}}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\rangle \geq \frac{\rho^2}{2C^4}\|\Phi^{\mathcal{J}}\|_{\mathrm{F}}^2\right) \geq \Omega(1)\,.$$

^与 [HS17第 2 节类似，3], 我们计算 Φ满足以下约束且弗罗贝尼乌斯范数最小的矩阵（下文用 $\mathsf{ddiag}(M)$ 表示方阵 M 的对角部分）：

$$\mathsf{ddiag}(\widehat{\Phi}) = \mathbb{I}_n\,; \quad \frac{\langle \widehat{\Phi}, \Phi^{\mathcal{J}}\rangle}{n\|\Phi^{\mathcal{J}}\|_{\mathrm{F}}} \geq \frac{\rho^2}{4C^4}\,; \quad \widehat{\Phi} \succeq 0\,.$$

我们看到

$$\mathbb{P}\left(\langle \widehat{\Phi}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\rangle \geq \frac{\rho^2}{4C^4}\|\widehat{\Phi}\|_{\mathrm{F}}\|\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\|_{\mathrm{F}}\right) \geq \Omega(1)\,.$$

因此，我们有（注意 $\langle \widehat{\Phi}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\rangle \geq 0$ 因为 $\widehat{\Phi} \succeq 0$）

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{\langle \widehat{\Phi}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\rangle}{\|\widehat{\Phi}\|_{\mathrm{F}}\|\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\|_{\mathrm{F}}}\right] \geq \frac{\rho^2}{4C^4}\cdot\mathbb{P}\left(\frac{\langle \widehat{\Phi}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\rangle}{\|\widehat{\Phi}\|_{\mathrm{F}}\|\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\|_{\mathrm{F}}} \geq \frac{\rho^2}{4C^4}\right) = \Omega(1)\,,$$

^即， Φ 实现了定义1.4中所定义的弱恢复。 □

5 数值实验

在本节中，我们通过合成数据上的数值结果来验证理论结果。首先，我们在上下文非齐次双层模型上运行算法1 ，研究检测问题；该模型在定义1.2中有形式化定义。为此，我们从$\mathbb{Q}_{n,p,\lambda_1,\lambda_2}$中生成 100 个独立同分布元组（$\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{G}_2$），并从上下文双层随机块模型 $\mathbb{P}_{n,p;\mu,\rho,\lambda_1,\lambda_2,\epsilon_1,\epsilon_2}$中再生成 100 个独立同分布元组。

为比较不同设置下检验统计量与单通道统计量的性能，我们通过改变检测阈值并绘制真正率（1 减去第二类错误率）相对于假阳性率（第一类错误率）的曲线，得到接收者操作特征（ROC）曲线。作为比较，我们还绘制了单通道方法和随机分类器的 ROC 曲线，后者就是对角线。最后，我们计算曲线下面积（AUC），它可以解释为：从相关模型中抽取的图对的检验统计量大于从独立模型中抽取的图对的检验统计量的概率。

在图4中，对于每幅图，我们固定 $n = 100, p = 50, \gamma = 2, L = 2, \rho = 0.6, \mu = 0.5, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.5$，并改变 $\lambda_1 = \lambda_2 \in \{3, 5, 7, 9\}$。得到的 $F(\mu, \rho, \gamma; \{\lambda_1, \lambda_2\}, \{\epsilon_1, \epsilon_2\})$ 值如 $\{0.75, 1.25, 1.75, 2.25\}$所示。正如 [MNS15] 中所示，单层随机块模型中的最优检验由环计数给出，因此我们关注所有装饰圈（如本研究提出的）和单色环（对应于单通道方法）的计数，其长度为 $\aleph = 4$。我们观察到，随着 F 增大，ROC 曲线向左上角移动，AUC 随之增大，这表明我们的检验统计量性能有所提升。此外，我们观察到，我们的检验统计量在 $F < 1$ 和 $F > 1$之间的性能差异显著。这与理论结果一致，表明只要 $F > 1$，我们的检验统计量就能发挥作用。

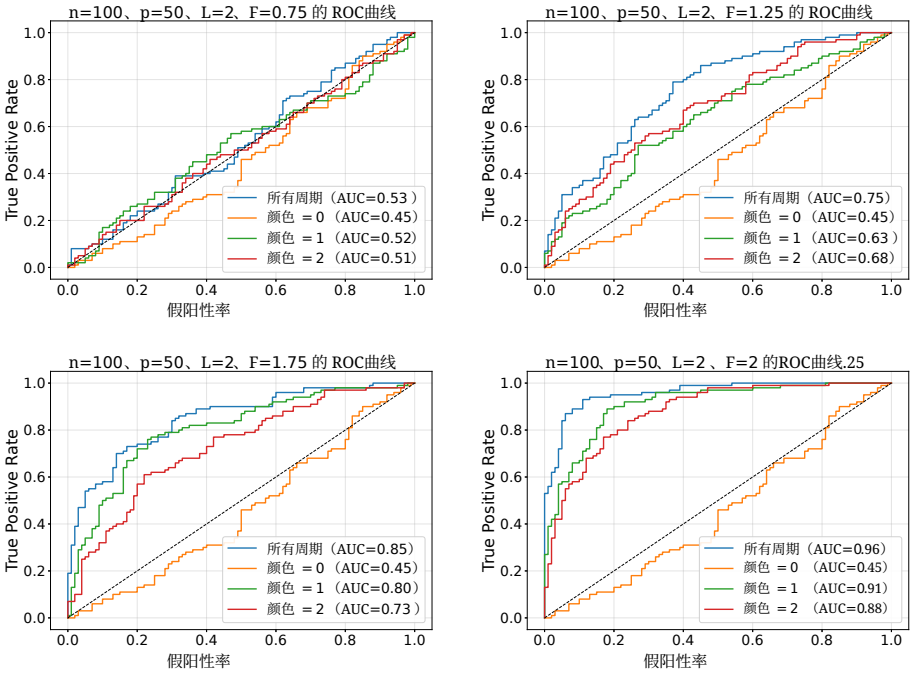


图4：上下文双层随机块模型的ROC曲线，其中 $n = 100$, $p = 50$, $\gamma = 2$和$F(\mu, p, \gamma; \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\}) \in \{0.75, 1.25, 1.75, 2.25\}$。

接下来，我们通过在双层上下文随机块模型上运行算法 2来研究恢复问题。具体而言，我们使用装饰路径族 $\mathcal{J}$，它由所有长度为 $\aleph = 4$ 的装饰路径组成。为了比较我们的恢复估计量 Φ 与单通道基线方法的性能，我们报告 Frobenius余弦相似度 $\frac{|\langle \Phi, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top \rangle|}{\|\Phi\|_{\mathrm{F}} \|\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\|_{\mathrm{F}}}$，关于聚合信号强度$F(\mu, p, \gamma; \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\})$ 的函数图。我们还绘制了算法 2中构造的原始统计量 $\Phi^{\mathcal{J}}$的相同余弦相似度。

在图 5 中，我们固定 $n = 100, p = 50, \gamma = 2, \rho = 0.5, \mu = 0.75$，并为所有 ℓ设定 $\epsilon_\ell = 0.5$。我们进一步对所有 ℓ施加 $\lambda_\ell = \lambda$，并改变 λ，使得 $F(\mu, p, \gamma; \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\}) \in \{0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7\}$。我们同时考察基于所有装饰路径的统计量，以及满足 $\aleph = 4$ 的单色变体。随着 F 增加，余弦相似度通常也会提高，表明恢复性能有所改善；相较之下，“Color=0”基线基本保持平坦，因为我们只改变 λ（因此也改变了 F），同时保持 μ 不变。此外，我们观察到 $F < 1$ 和$F > 1$这两种情形之间存在明显的定性差异，这与定理1.5所示的相变一致。

致谢

S. Gong 和 Z. Li 获得了国家重点研发计划（项目编号：2023YFA1010103）和国家自然科学基金重点项目（项目编号：12231002）的部分资助。

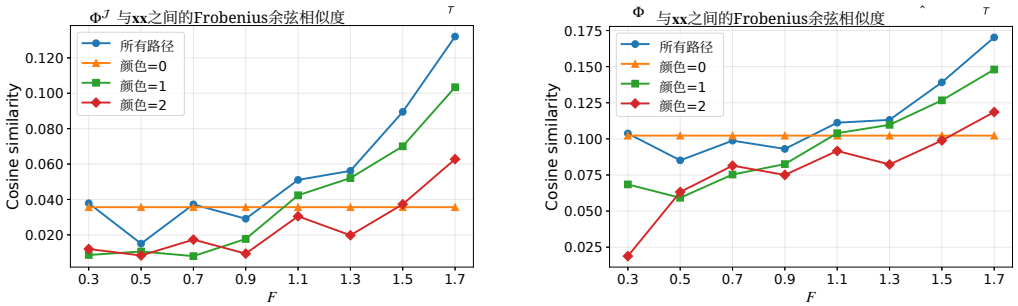


图 5：余弦相似度 $\frac{|\langle \Phi\, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\rangle|}{\|\Phi\|_{\mathrm{F}}\|\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\|_{\mathrm{F}}}$，与 $n = 100$、$p = 50$、$L = 2$ 和 $F(\mu,\ p,\ \gamma;\ \{\lambda_\ell\},\ \{\epsilon_\ell\}) \in \{0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7\}$。

第 2 节的补充证明2

A.1 引理 2.4的证明

我们通过直接计算证明引理 2.4。记 $\mathbb{P}_{t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_L} := \mathbb{P}_t(\cdot \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_L)$。显然，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_t}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L) &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_L}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_L}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_L)\right] \\ &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_L}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{t,\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{Y}) \prod_{1\le\ell\le L} \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{x}_\ell}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{G}_\ell)\right].\end{aligned}$$

由于给定 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{x}_1$、……、$\boldsymbol{x}_L$ 后，$\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{G}_1$、……、$\boldsymbol{G}_L$ 条件独立，应用复制技巧可得

$$\begin{aligned}\chi^2(\mathbb{P}_t\|\mathbb{Q}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left\{\mathbb{E}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_L}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{t,\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{Y}) \prod_{1\le\ell\le L} \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{x}_\ell}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{G}_\ell)\right]^2\right\} \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left\{\mathbb{E}_{\substack{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_L \\ \boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'_1,\ldots,\boldsymbol{x}'_L}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{t,\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{Y}) \prod_{1\le\ell\le L} \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{x}_\ell}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{G}_\ell) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{t,\boldsymbol{x}'}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{Y}) \prod_{1\le\ell\le L} \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{x}'_\ell}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{G}_\ell)\right]\right\} \\ &= \mathbb{E}_{\substack{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_L \\ \boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'_1,\ldots,\boldsymbol{x}'_L}}\left\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{t,\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{Y})\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{t,\boldsymbol{x}'}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{Y})\right] \prod_{1\le\ell\le L} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{x}_\ell}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{G}_\ell)\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{x}'_\ell}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{G}_\ell)\right]\right\}. \qquad \text{(A.1)}\end{aligned}$$

现在我们计算（A.1）的右侧。注意，在 $\mathbb{P}_t$ 下，我们有 $\boldsymbol{u}$ 在 p维球面 $\sqrt{(1+t)\,p}\cdot\mathbb{S}^{p-1}$上均匀分布。因此，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{t,\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{Y}) &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{u}\sim\mathrm{Unif}(\sqrt{(1+t)p}\cdot\mathbb{S}^{p-1})}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{Y})\right] \\ &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{u}\sim\mathrm{Unif}(\sqrt{(1+t)p}\cdot\mathbb{S}^{p-1})}\left[\exp\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{n}}\langle\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^\top\rangle - \frac{\mu}{2n}\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{u}\|^2\right)\right] \\ &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{u}\sim\mathrm{Unif}(\sqrt{(1+t)p}\cdot\mathbb{S}^{p-1})}\left[\exp\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{n}}\langle\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^\top\rangle - \frac{(1+t)\mu p}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{t,\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{Y})\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{t,\boldsymbol{x}'}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{Y})\right] \\
&= \mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}\sim\mathbb{Q}}\mathbb{E}_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\sim\mathrm{Unif}(\sqrt{(1+t)p}\cdot\mathbb{S}^{p-1})}\left[\exp\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{n}}\langle\boldsymbol{Y},\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^\top+\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{u}')^\top\rangle-(1+t)\mu p\right)\right] \\
&\overset{(a)}{=} \mathbb{E}_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\sim\mathrm{Unif}(\sqrt{(1+t)p}\cdot\mathbb{S}^{p-1})}\left[\exp\left(\frac{\mu}{2n}\|\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^\top+\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{u}')^\top\|_{\mathrm{F}}^2-(1+t)\mu p\right)\right] \\
&\overset{(b)}{=} \mathbb{E}_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\sim\mathrm{Unif}(\sqrt{(1+t)p}\cdot\mathbb{S}^{p-1})}\left[\exp\left(\frac{\mu}{n}\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\rangle\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\rangle\right)\right], \qquad (A.2)
\end{aligned}$$

其中，(a) 由 $\mathbb{E}[\exp(cZ)]=\exp(\frac{1}{2}c^2)$ 对于 $Z\sim\mathcal{N}(0,1)$ 和任意 $c\in\mathbb{R}$ 成立可得，而 (b) 由 $\|\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^\top\|_F^2=\|\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{u}')^\top\|_F^2=n(1+t)p$可得。令 $\xi=\xi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')=\frac{1}{(1+t)p}\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'\rangle$，其中 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}'$ 服从均匀分布 $\mathrm{Unif}(\sqrt{(1+t)p}\,\mathbb{S}^{p-1})$。于是 $\xi\in[-1,1]$，且其概率密度函数为

$$f_\xi(x)=\frac{\Gamma(p/2)}{\Gamma((p-1)/2)\Gamma(1/2)}(1-x^2)^{(p-3)/2}.$$

对于任意整数 $k\geq 1$，我们有 $\mathbb{E}[\xi^{2k-1}]=0$，并且

$$\mathbb{E}[\xi^{2k}]=\frac{(2k-1)!!}{p(p+2)\cdots(p+2k-2)}\leq\frac{(2k-1)!!}{p^k}.$$

因此，对于任意 $c\in\mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[\exp(c\xi)]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^{2k}}{(2k)!}\mathbb{E}[\xi^{2k}]\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^{2k}}{(2k)!}\cdot\frac{(2k-1)!!}{p^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big(\frac{c^2}{2p}\Big)^k=\exp\Big(\frac{c^2}{2p}\Big).$$

将其与 (A.2) 结合，我们得到（回顾 $n=\gamma p$）

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{t,\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{Y})\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{t,\boldsymbol{x}'}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{Y})\right]\leq\exp\left(\frac{1}{2p}\left(\frac{\mu(1+t)p}{n}\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\rangle\right)^2\right)=\exp\left(\frac{(1+t)^2\mu^2}{2\gamma n}\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\rangle^2\right). \qquad (A.3)$$

此外，对于任意 $1\leq\ell\leq L$，根据 [MNS15，第 5] 节，我们有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{x}_\ell}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{G}_\ell)\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{x}'_\ell}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}(\boldsymbol{G}_\ell)\right]=[1+O(n^{-1})]\exp\left(-\frac{\epsilon_\ell^2\lambda_\ell}{2}-\frac{(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^2}{4}+\frac{\epsilon_\ell^2\lambda_\ell}{2}\left(\frac{\langle\boldsymbol{x}_\ell,\boldsymbol{x}'_\ell\rangle}{\sqrt{n}}\right)^2\right). \qquad (A.4)$$

将（A.3）和（A.4）代入（A.1），得到引理 2.4。

A.2 引理 2.5的证明

定义 ζ，η_1，…，$\eta_L\in\mathbb{R}^n$，使得对于 $1\leq i\leq n$，有

$$\big(\zeta(i),\eta_1(i),\ldots,\eta_L(i)\big)\overset{i.i.d.}{\sim}\big(U,V_1,\ldots,V_L\big).$$

那么，只需证明对于任意的 α，α_1，…，$\alpha_L\in\mathbb{N}$，我们都有

$$\mathbb{E}\left[\big(\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\rangle\big)^{2\alpha}\big(\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}'_1\rangle\big)^{2\alpha_1}\ldots\big(\langle\boldsymbol{x}_L,\boldsymbol{x}'_L\rangle\big)^{2\alpha_L}\right]\leq\mathbb{E}\left[\big(\langle\zeta,\mathbb{1}_n\rangle\big)^{2\alpha}\big(\langle\eta_1,\mathbb{1}_n\rangle\big)^{2\alpha_1}\ldots\big(\langle\eta_L,\mathbb{1}_n\rangle\big)^{2\alpha_L}\right],$$

其中， $\mathbb{1}_n \in \mathbb{R}^n$ 表示全一向量（即，对所有 $1 \le i \le n$， $\mathbb{1}_n(i) = 1$ ）。回忆一下，元组$(\boldsymbol{x}(i)\ \boldsymbol{x}'(i)\ \boldsymbol{x}_1(i)\ \boldsymbol{x}'_1(i)\dots,\ \boldsymbol{x}_L(i)\,\boldsymbol{x}'_L(i))$，$1 \le i \le n$ 相互独立（即，对于不同的指标 i，它们相互独立）。因此，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\big(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'\rangle\big)^{2\alpha}\big(\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}'_1\rangle\big)^{2\alpha_1}\dots\big(\langle \boldsymbol{x}_L, \boldsymbol{x}'_L\rangle\big)^{2\alpha_L}\Big]\\ =&\sum_{\substack{\beta,\beta_1,\dots,\beta_L\in\mathbb{N}^n\\ |\beta|=2\alpha,|\beta_\ell|=2\alpha_\ell}}\prod_{1\le i\le n}\mathbb{E}\Big[\big(\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{x}'(i)\big)^{\beta(i)}\big(\boldsymbol{x}_1(i)\boldsymbol{x}'_1(i)\big)^{\beta_1(i)}\dots\big(\boldsymbol{x}_L(i)\boldsymbol{x}'_L(i)\big)^{\beta_L(i)}\Big].\end{aligned}$$

同理，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\big(\langle \zeta, \mathbb{1}\rangle\big)^{2\alpha}\big(\langle \eta_1, \mathbb{1}\rangle\big)^{2\alpha_1}\dots\big(\langle \zeta_L, \mathbb{1}\rangle\big)^{2\alpha_L}\Big]\\ =&\sum_{\substack{\beta,\beta_1,\dots,\beta_L\in\mathbb{N}^n\\ |\beta|=2\alpha,|\beta_\ell|=2\alpha_\ell}}\prod_{1\le i\le n}\mathbb{E}\Big[\big(\zeta(i)\big)^{\beta(i)}\big(\eta_1(i)\big)^{\beta_1(i)}\dots\big(\eta_L(i)\big)^{\beta_L(i)}\Big].\end{aligned}$$

因此，只需证明对于所有 $1 \le i \le n$ 和所有 β， β_1、…、 $\beta_L \in \mathbb{N}$，我们有 e

$$0 \le \mathbb{E}\Big[\big(\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{x}'(i)\big)^{\beta}\big(\boldsymbol{x}_1(i)\boldsymbol{x}'_1(i)\big)^{\beta_1}\dots\big(\boldsymbol{x}_L(i)\boldsymbol{x}'_L(i)\big)^{\beta_L}\Big] \le \mathbb{E}\Big[\big(\zeta(i)\big)^{\beta}\big(\eta_1(i)\big)^{\beta_1}\dots\big(\eta_L(i)\big)^{\beta_L}\Big]. \quad \text{(A.5)}$$

回顾 (1.2)， $\boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}'_\ell(i) = \boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{x}'(i)\boldsymbol{z}_\ell(i)\boldsymbol{z}'_\ell(i)$，其中 $\{\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{x}'(i)\ \boldsymbol{z}_1(i)\boldsymbol{z}'_1(i)\dots,\boldsymbol{z}_L(i)\boldsymbol{z}'_L(i)\}$ 是 $\{-1,+1\}$ 中的独立变量（另请回顾 (1.1)）

$$\mathbb{P}\big(\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{x}'(i)=1\big)=\frac{1}{2},\quad \mathbb{P}\big(\boldsymbol{z}_\ell(i)\boldsymbol{z}'_\ell(i)=1\big)=\frac{1+\rho^2}{2}.$$

因此我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\big(\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{x}'(i)\big)^{\beta}\big(\boldsymbol{x}_1(i)\boldsymbol{x}'_1(i)\big)^{\beta_1}\dots\big(\boldsymbol{x}_L(i)\boldsymbol{x}'_L(i)\big)^{\beta_L}\Big]\\ =&\mathbb{E}\Big[\big(\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{x}'(i)\big)^{\beta+\beta_1+\dots+\beta_L}\Big]\cdot\prod_{k=1}^{L}\mathbb{E}\Big[\big(\boldsymbol{z}_k(i)\boldsymbol{z}'_k(i)\big)^{\beta_k}\Big]\\ =&\mathbf{1}_{\beta+\beta_1+\ldots+\beta_L\text{ is even}}\cdot\prod_{k=1}^{L}\big(\mathbf{1}_{\beta_k\text{ is even}}+\rho^2\mathbf{1}_{\beta_k\text{ is odd}}\big)\\ =&\mathbf{1}_{\beta+\beta_1+\ldots+\beta_L\text{ is even}}\cdot\rho^{2N_{\text{odd}}},\end{aligned}\quad \text{(A.6)}$$

其中 $N_{\text{odd}} = \#\{k:\ \beta_k$ 为奇数$\}$。现在我们转向高斯对应项。由于我们有$\eta_\ell(i) = \rho^2\zeta(i) + \sqrt{1-\rho^4}\zeta_\ell(i)$，其中 $\zeta(i)\ \zeta_1(i)\dots,\ \zeta_\ell(i)$ 是独立同分布的标准正态变量，容易验证对于所有 β， β_1、…、 $\beta_L \in \mathbb{N}$，我们有

$$\mathbb{E}\Big[\zeta(i)^2\cdot\big(\zeta(i)\big)^{\beta}\big(\zeta_1(i)\big)^{\beta_1}\dots\big(\zeta_L(i)\big)^{\beta_L}\Big] \ge \mathbb{E}\Big[\zeta(i)^2\Big]\mathbb{E}\Big[\big(\zeta(i)\big)^{\beta}\big(\zeta_1(i)\big)^{\beta_1}\dots\big(\zeta_L(i)\big)^{\beta_L}\Big] \ge 0; \quad \text{(A.7)}$$

$$\mathbb{E}\Big[\zeta_\ell(i)^2\cdot\big(\zeta(i)\big)^{\beta}\big(\zeta_1(i)\big)^{\beta_1}\dots\big(\zeta_L(i)\big)^{\beta_L}\Big] \ge \mathbb{E}\Big[\zeta(i)^2\Big]\mathbb{E}\Big[\big(\zeta(i)\big)^{\beta}\big(\zeta_1(i)\big)^{\beta_1}\dots\big(\zeta_L(i)\big)^{\beta_L}\Big] \ge 0. \quad \text{(A.8)}$$

确实，由于 $\zeta(i)\ \zeta_1(i)\dots,\zeta_L(i)$ 相互独立，期望可以分解；此外，对于 $\zeta \sim \mathcal{N}(0,1)$，奇数 β 时有 $\mathbb{E}[\zeta^\beta] = 0$，偶数 β 时有 $\mathbb{E}[\zeta^\beta] \ge 0$。特别地，当 $\mathbb{E}[\zeta^2] = 1$ 时， $\mathbb{E}[\zeta^{\beta+2}] = (\beta+1)\mathbb{E}[\zeta^\beta] \ge \mathbb{E}[\zeta^2]\,\mathbb{E}[\zeta^\beta]$ ，由此得到上面列出的不等式。回顾一下，对于任意 $1 \le \ell \le L$，有 $\eta_\ell(i) = \rho^2\zeta(i) + \sqrt{1-\rho^4}\zeta_\ell(i)$，其中 $\zeta(i)\ \zeta_1(i)\dots,\zeta_\ell(i)$ 是独立同分布的标准正态变量。将每个 $(\eta_\ell(i))^{\beta_\ell}$ 按二项式定理展开，可将 $\zeta(i)^\beta\prod_{\ell=1}^{L}(\eta_\ell(i))^{\beta_\ell}$ 表示为有限个

独立变量中的单项式 $\zeta(i)\ \zeta_1(i)\ldots,\zeta_L(i)$ 的系数均为非负数。逐项应用此前证明的不等式（A.7）和（A.8），并求和，可得关于 $\eta_\ell(i)$ 的以下不等式：

$$\mathbb{E}\Big[\zeta(i)^2\cdot\big(\zeta(i)\big)^{\beta}\big(\eta_1(i)\big)^{\beta_1}\ldots\big(\eta_L(i)\big)^{\beta_L}\Big]\geq\mathbb{E}\Big[\zeta(i)^2\Big]\mathbb{E}\Big[\big(\zeta(i)\big)^{\beta}\big(\eta_1(i)\big)^{\beta_1}\ldots\big(\eta_L(i)\big)^{\beta_L}\Big]\geq 0\,;$$
$$\mathbb{E}\Big[\eta_\ell(i)^2\cdot\big(\zeta(i)\big)^{\beta}\big(\eta_1(i)\big)^{\beta_1}\ldots\big(\eta_L(i)\big)^{\beta_L}\Big]\geq\mathbb{E}\Big[\eta_\ell(i)^2\Big]\mathbb{E}\Big[\big(\zeta(i)\big)^{\beta}\big(\eta_1(i)\big)^{\beta_1}\ldots\big(\eta_L(i)\big)^{\beta_L}\Big]\geq 0\,.$$

事实上，这也可由 Wick公式推出（例如参见 [Jan97，定理 1。28]）：将相关的高斯矩展开为对所有配对求和，匹配 $\zeta(i)$（分别为 $\eta_\ell(i)$）的两个额外副本的配对项贡献 $\mathbb{E}[\zeta(i)^2]\mathbb{E}[\cdots]$（分别为 $\mathbb{E}[\eta_\ell(i)^2]\mathbb{E}[\cdots]$），而其余所有配对项都是（非负）协方差的乘积，因此非负，从而得到所需的下界。令 $\lfloor x\rfloor$ 为不超过 x的最大整数。由于 $\mathbb{E}[\eta_1(i)^2]=1$，因此我们可以反复将指数减小 2：

$$\mathbb{E}\Big[\big(\zeta(i)\big)^{\beta}\big(\eta_1(i)\big)^{\beta_1}\ldots\big(\eta_L(i)\big)^{\beta_L}\Big]\geq\mathbb{E}\Big[\big(\zeta(i)\big)^{\beta}\big(\eta_1(i)\big)^{\beta_1-2\lfloor\beta_1/2\rfloor}\ldots\big(\eta_L(i)\big)^{\beta_L}\Big].$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\big(\zeta(i)\big)^{\beta}\big(\eta_1(i)\big)^{\beta_1}\ldots\big(\eta_L(i)\big)^{\beta_L}\Big]\\&\geq\mathbb{E}\Big[\big(\zeta(i)\big)^{\beta}\big(\eta_1(i)\big)^{\beta_1-2\lfloor\beta_1/2\rfloor}\ldots\big(\eta_L(i)\big)^{\beta_L-2\lfloor\beta_L/2\rfloor}\Big]=\mathbb{E}\Big[\big(\zeta(i)\big)^{\beta}\prod_{1\leq\ell\leq L:\beta_\ell\text{ is odd}}\eta_\ell(i)\Big]\\&\overset{\text{(a)}}{\geq}\mathbb{E}\Big[\big(\zeta(i)\big)^{\beta}\prod_{1\leq\ell\leq L:\beta_\ell\text{ is odd}}\big(\rho^2\zeta(i)\big)\Big]\overset{\text{(b)}}{\geq}\mathbf{1}_{\beta+\beta_1+\ldots+\beta_L\text{ is even}}\cdot\rho^{2N_{\text{odd}}}\,,\end{aligned}$$

其中，(a) 由对所有 $1\leq\ell\leq L$ 均成立的 $\eta_\ell(i)\overset{=}{}\rho^2\zeta(i)+\sqrt{1-\rho^4}\zeta_\ell(i)$ 以及 (A.7) 得出；(b) 由当 ζ为 $i\sim\mathcal{N}(0,1)$ 且 k为任意整数时的$\mathbb{E}\big[(\zeta(i))^{2k}\big]\geq 1$得出。结合 (A.6)，我们完成了 (A.5) 的证明，进而完成了引理 2.5 的证明。

A.3 引理2.9 的证明

我们首先证明（2.16）。回顾（2.12），在 $\mathbb{Q}_\bullet$ 下，我们有 $\boldsymbol{Y}_2=\boldsymbol{Z}_2$，它是一个与（$\boldsymbol{Y}_1$，$\boldsymbol{G}_1$，...，$\boldsymbol{G}_L$）独立的标准高斯矩阵（因此也与 $\mathcal{X}$ 独立）。令 $\boldsymbol{Z}_2:=(\boldsymbol{Z}_{2,\ 1},\ldots\ldots,\boldsymbol{Z}_{2,\ p})$，其中 $\{\boldsymbol{Z}_{2,i}\}_{i=1}^p$ 服从相互独立的多元高斯分布 $\mathcal{N}(0,\ \mathbb{I}_n)$。因此，在给定 $\mathcal{X}$ 的条件下，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\bullet}\Big[\big\langle\mathcal{X},\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{Y}_2^\top-p\mathbb{I}_n\big\rangle^2\mid\mathcal{X}\Big]&=\mathbb{E}_{\boldsymbol{Z}_2}\Big[\big\langle\mathcal{X},\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{Z}_2^\top-p\mathbb{I}_n\big\rangle^2\Big]\\&=\mathbb{E}_{\boldsymbol{Z}_2}\Big[\big\langle\mathcal{X},\sum_{i=1}^p(\boldsymbol{Z}_{2,i}\boldsymbol{Z}_{2,i}^\top-\mathbb{I}_n)\big\rangle^2\Big]=p\mathbb{E}_{\boldsymbol{Z}_2}\Big[\big\langle\mathcal{X},\boldsymbol{Z}_{2,1}\boldsymbol{Z}_{2,1}^\top-\mathbb{I}_n\big\rangle^2\Big]\,.\end{aligned}$$

注意到

$$\big\langle\mathcal{X},\boldsymbol{Z}_{2,1}\boldsymbol{Z}_{2,1}^\top-\mathbb{I}_n\big\rangle=\boldsymbol{Z}_{2,1}^\top\mathcal{X}\boldsymbol{Z}_{2,1}-\mathsf{tr}(\mathcal{X})=\boldsymbol{Z}_{2,1}^\top\left(\frac{\mathcal{X}+\mathcal{X}^\top}{2}\right)\boldsymbol{Z}_{2,1}-\mathsf{tr}\left(\frac{\mathcal{X}+\mathcal{X}^\top}{2}\right)$$

和 $\mathbb{E}_{\boldsymbol{Z}_2}\Big[\big\langle\mathcal{X},\boldsymbol{Z}_{2,1}\boldsymbol{Z}_{2,1}^\top-\mathbb{I}_n\big\rangle\Big]=0$。因此，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\bullet}\Big[\big\langle\mathcal{X},\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{Y}_2^\top-p\mathbb{I}_n\big\rangle^2\mid\mathcal{X}\Big]&=p\mathbb{E}_{\boldsymbol{Z}_2}\left[\mathrm{Var}\left(\boldsymbol{Z}_{2,1}^\top\left(\frac{\mathcal{X}+\mathcal{X}^\top}{2}\right)\boldsymbol{Z}_{2,1}\right)\right]\\&\overset{(a)}{=}2p\left\|\frac{\mathcal{X}+\mathcal{X}^\top}{2}\right\|_{\mathrm{F}}^2\leq 2p\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}^2\,,\end{aligned}\tag{A.9}$$

其中 (a) 根据高斯二次型的方差公式得出（例如，参见 [MN19，定理 12。12]）。因此，由简单的切比雪夫不等式可知 (2.16) 成立。

接下来我们证明（2.15）。回顾（2.13），我们可以将 $\langle \mathcal{X}, \boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{Y}_2^\top - p\mathbb{I}_n\rangle$ 分解为如下各项：

$$\langle \mathcal{X}, \boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{Y}_2^\top - p\mathbb{I}_n\rangle = \frac{\mu(1+\kappa^2)\|u\|^2}{n(1+\kappa^{-2})}\cdot\langle \mathcal{X}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\rangle \tag{A.10}$$

$$+ 2\frac{\sqrt{\mu(1+\kappa^2)}}{\sqrt{n(1+\kappa^{-2})}}\cdot\langle \mathcal{X}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^\top\boldsymbol{Z}_2^\top\rangle \tag{A.11}$$

$$+ \langle \mathcal{X}, \boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{Z}_2^\top - p\mathbb{I}_n\rangle\,. \tag{A.12}$$

注意到 $\widetilde{\mathbb{P}}_\bullet = \widetilde{\mathbb{P}}(\cdot \mid \mathcal{E}_\diamond)$，其中 $\mathcal{E}_\diamond$ 定义于（2.3）。因此，在 $\widetilde{\mathbb{P}}_\bullet$ 下我们总有 $\|\boldsymbol{u}\|^2 \ge (1-\iota)p = (1-\iota)n/\gamma$。结合（2.14），我们看到

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbb{P}}_\bullet\left((\text{A.10}) \ge \frac{c\mu(1-\iota)(1+\kappa^2)n}{2\gamma(1+\kappa^{-2})}\cdot\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}\right)\\
&= \widetilde{\mathbb{P}}_\bullet\left((\text{A.10}) \ge \frac{c\mu(1-\iota)(1+\kappa^2)}{2\gamma(1+\kappa^{-2})}\cdot\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}\|\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\|_{\mathrm{F}}\right)\\
&\ge \widetilde{\mathbb{P}}_\bullet\left(\frac{\mu(1+\kappa^2)}{n(1+\kappa^{-2})}\cdot\frac{(1-\iota)n}{\gamma}\cdot\langle \mathcal{X}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\rangle \ge \frac{c\mu(1-\iota)(1+\kappa^2)}{2\gamma(1+\kappa^{-2})}\cdot\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}\|\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top\|_{\mathrm{F}}\right)\\
&\overset{(2.14)}{\ge} \frac{c}{2} - o(1)\,.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

此外，利用（A.9）和切比雪夫不等式，我们看到

$$\widetilde{\mathbb{P}}_\bullet\left(|(\text{A.12})| \ge \frac{c\mu(1-\iota)(1+\kappa^2)n}{8\gamma(1+\kappa^{-2})}\cdot\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}\right) \le n^{-\Omega(1)}\,. \tag{A.14}$$

最后，注意到在以 $\mathcal{X}$ 为条件时，我们有 $\langle \mathcal{X}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^\top\boldsymbol{Z}_2^\top\rangle \sim \mathcal{N}(0, \|\boldsymbol{u}\boldsymbol{x}^\top\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}^2)$。同样，由于在$\widetilde{\mathbb{P}}_\bullet$下我们总有 $\|\boldsymbol{u}\|^2 \le (1+\iota)p = (1+\iota)n/\gamma$，我们有

$$\big\|\boldsymbol{u}\boldsymbol{x}^\top\mathcal{X}\big\|_{\mathrm{F}} \le \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{x}\|\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}} \le \sqrt{(1+\iota)/\gamma}\cdot n\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}\,.$$

因此，我们有

$$\widetilde{\mathbb{P}}_\bullet\left(|(\text{A.11})| \ge \frac{c\mu(1-\iota)(1+\kappa^2)n}{8\gamma(1+\kappa^{-2})}\cdot\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}\right) \le n^{-\Omega(1)}\,. \tag{A.15}$$

结合（A.13）、（A.14）和（A.15），我们得到

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbb{P}}_\bullet\left(\langle \mathcal{X}, \boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{Y}_2^\top - p\mathbb{I}_n\rangle \ge \frac{c\mu(1-\iota)(1+\kappa^2)n}{4(1+\iota)(1+\kappa^{-2})}\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}\right)\\
&\ge \widetilde{\mathbb{P}}_\bullet\left((\text{A.10}) \ge \frac{c\mu(1-\iota)(1+\kappa^2)n}{2\gamma(1+\kappa^{-2})}\cdot\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}\right)\\
&+ \widetilde{\mathbb{P}}_\bullet\left(|(\text{A.12})| < \frac{c\mu(1-\iota)(1+\kappa^2)n}{8\gamma(1+\kappa^{-2})}\cdot\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}\right)\\
&+ \widetilde{\mathbb{P}}_\bullet\left(|(\text{A.11})| < \frac{c\mu(1-\iota)(1+\kappa^2)n}{8\gamma(1+\kappa^{-2})}\cdot\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}\right) \ge \frac{c}{2} - o(1)\,.
\end{aligned}$$

我们看到，(2.15) 成立。引理2.9的证明至此完成。

B 第 3 节的补充证明

B.1 引理 3.3 的证明

对于所有 $[H] \in \mathcal{H}$，令 $H \subset \mathbb{K}_{n,\ p}$ 为 $[H]$ 的一个代表元，并按逆时针顺序列出 $V^{\mathsf{a}}(H)$ $= V_{\mathsf{a}}(H) = \{a_{v_1}, \dots, a_{v_\aleph}\}$。我们按如下方式构造一个图 H。定义 $V(H) = V_{\mathsf{a}}(H)$。此外，对于每个 $1 \le i \le \aleph$（下文采用约定 $a_{v_{\aleph+1}} = a_{v_1}$）

- 若 $(a_{v_i}, a_{v_{i+1}}) \in E(H)$，则 $\chi_H((a_{v_i}, a_{v_{i+1}})) \in \{1, \dots, L\}$。令 $(a_{v_i}, a_{v_{i+1}}) \in E(H)$，并令 $\gamma_{\widetilde{H}}((a_{v_i}, a_{v_{i+1}})) = \chi_H((a_{v_i}, a_{v_{i+1}}))$；
- 若 $(a_{v_i}, a_{v_{i+1}}) \notin E(H)$，则存在 $b_{u_i} \in V_{\mathsf{b}}$ 使得 $(a_{v_i}, b_{u_i}), (a_{v_{i+1}}, b_{u_i}) \in E_0(H)$。我们令 $(a_{v_i}, a_{v_{i+1}}) \in E(H)$，并令 $\chi_{\widetilde{H}}((a_{v_i}, a_{v_{i+1}})) = 0$。

令 $\mathcal{H}(\aleph)$ 为满足以下条件的无标记 $[H] = (V(H), E(H), \gamma_{\widetilde{H}})$ 的集合：$(V(H), E(H))$ 是一个长度为 $\aleph$ 且 $\chi_{\widetilde{H}}$ 将 $E(H)$ 映射到 $\{0, 1, \dots, L\}$ 的无标记环。显然，

$$\varphi : \mathcal{H}(\aleph) \to \widetilde{\mathcal{H}}(\aleph) \quad \varphi(H) = \widetilde{H}$$

是 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{H}$之间的双射。此外，显然

$$\begin{aligned} &|\mathsf{Aut}(H)| = |\mathsf{Aut}(\varphi(H))|, \quad |\mathsf{dif}_0(H)| = |\mathsf{dif}_0(\varphi(H))|, \quad |\mathsf{dif}(H)| = |\mathsf{dif}(\varphi(H))|, \\ &|E_0(H)| = 2|E_0(\varphi(H))|, \quad |E_\ell(H)| = |E_\ell(\varphi(H))| \text{ for } 1 \le \ell \le L. \end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} \beta_{\mathcal{H}} &\overset{(3.11),(3.12)}{=} \sum_{[H] \in \mathcal{H}} \frac{\rho^{2|\mathsf{dif}_0(H)|+4|\mathsf{dif}(H)|} (\mu^2/\gamma)^{\frac{1}{2}|E_0(H)|} (\epsilon_1^2 \lambda_1)^{|E_1(H)|} \dots (\epsilon_L^2 \lambda_L)^{|E_L(H)|}}{|\mathsf{Aut}(H)|} \\ &= \sum_{[H] \in \widetilde{\mathcal{H}}} \frac{\rho^{2|\mathsf{dif}_0(H)|+4|\mathsf{dif}(H)|} (\mu^2/\gamma)^{|E_0(H)|} (\epsilon_1^2 \lambda_1)^{|E_1(H)|} \dots (\epsilon_L^2 \lambda_L)^{|E_L(H)|}}{|\mathsf{Aut}(H)|}. \end{aligned} \tag{B.1}$$

现在我们对（B.1）的右侧进行界定。定义 $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\aleph)$ 为 $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_\aleph) \in \{0, 1, \dots, L\}^\aleph$。此外，对于 $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_\aleph) \in \mathcal{W}$，我们类似地记作

$$\begin{aligned} &E_\ell(\omega) = \big\{1 \le i \le \aleph : \omega_i = \ell\big\} \text{ for } 1 \le \ell \le L; \\ &\mathsf{dif}_0(\omega) = \big\{1 \le i \le \aleph - 1 : \{\omega_i, \omega_{i+1}\} = \{0, \ell\} \text{ for some } \ell \ne 0\big\}; \\ &\mathsf{dif}(\omega) = \big\{1 \le i \le \aleph - 1 : \{\omega_i, \omega_{i+1}\} = \{\ell, \ell'\} \text{ for some } 1 \le \ell < \ell' \le L\big\}. \end{aligned}$$

定义

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\bullet = \big\{(v, [H]) : [H] \in \mathcal{H}, v \in V(H)\big\}. \tag{B.2}$$

考虑映射 $\varphi : \ \mathcal{H}_\bullet \to \mathcal{W}$，定义如下：对于所有 $(v, H) \in \mathcal{H}_\bullet$，将 $V(H)$ 按 $V(H) = \{v_1, \dots, v_\aleph\}$ 的逆时针顺序排列，其中 $v_1 = v$，并令 $\varphi(v, H) = \omega = (\omega_1, \dots, \omega_\aleph)$，其中 $\omega_i = \chi_H((v_i, v_{i+1}))$（记作 $v_{\ell+1} = v_1$）。显然，φ 是一个双射，并且

$$\begin{aligned} &|E_\ell(H)| = |E_\ell(\varphi(v, H))| \text{ for } 0 \le \ell \le L, \\ &|\mathsf{dif}(H)| - 1 \le |\mathsf{dif}(\varphi(v, H))| \le |\mathsf{dif}(H)|, \\ &|\mathsf{dif}_0(H)| - 1 \le |\mathsf{dif}_0(\varphi(v, H))| \le |\mathsf{dif}_0(H)|. \end{aligned}$$

~此外，由于对于所有 $H \in \mathcal{H}$，$1 \le |\mathsf{Aut}(H)| \le \aleph$，我们有

$$\begin{aligned}(\text{B.1}) &\le \sum_{[H]\in\widetilde{\mathcal{H}}} \rho^{2|\mathsf{dif}_0(H)|+4|\mathsf{dif}(H)|}(\mu^2/\gamma)^{|E_0(H)|}(\epsilon_1^2\lambda_1)^{|E_1(H)|}\dots(\epsilon_L^2\lambda_L)^{|E_L(H)|}\\ &\le \sum_{(v,[H])\in\widetilde{\mathcal{H}}_\bullet} \rho^{2|\mathsf{dif}_0(\varphi(v,H))|+4|\mathsf{dif}(\varphi(v,H))|}(\mu^2/\gamma)^{|E_0(\varphi(v,H))|}(\epsilon_1^2\lambda_1)^{|E_1(\varphi(v,H))|}\dots(\epsilon_L^2\lambda_L)^{|E_L(\varphi(v,H))|}\\ &= \sum_{\omega\in\mathcal{W}} \rho^{2|\mathsf{dif}_0(\omega)|+4|\mathsf{dif}(\omega)|}(\mu^2/\gamma)^{|E_0(\omega)|}(\epsilon_1^2\lambda_1)^{|E_1(\omega)|}\dots(\epsilon_L^2\lambda_L)^{|E_L(\omega)|}\,; \end{aligned} \tag{B.3}$$

并且

$$\begin{aligned}\beta_{\mathcal{H}} &\ge \frac{1}{\aleph}\sum_{[H]\in\widetilde{\mathcal{H}}} \rho^{2|\mathsf{dif}_0(H)|+4|\mathsf{dif}(H)|}(\mu^2/\gamma)^{|E_0(H)|}(\epsilon_1^2\lambda_1)^{|E_1(H)|}\dots(\epsilon_L^2\lambda_L)^{|E_L(H)|}\\ &\overset{\text{(a)}}{\ge} \frac{\rho^6}{\aleph^2}\sum_{(v,[H])\in\widetilde{\mathcal{H}}_\bullet} \rho^{2|\mathsf{dif}_0(\varphi(v,H))|+4|\mathsf{dif}(\varphi(v,H))|}(\mu^2/\gamma)^{|E_0(\varphi(v,H))|}(\epsilon_1^2\lambda_1)^{|E_1(\varphi(v,H))|}\dots(\epsilon_L^2\lambda_L)^{|E_L(\varphi(v,H))|}\\ &\ge \frac{\rho^6}{\aleph^2}\sum_{\omega\in\mathcal{W}} \rho^{2|\mathsf{dif}_0(\omega)|+4|\mathsf{dif}(\omega)|}(\mu^2/\gamma)^{|E_0(\omega)|}(\epsilon_1^2\lambda_1)^{|E_1(\omega)|}\dots(\epsilon_L^2\lambda_L)^{|E_L(\omega)|}\,, \end{aligned} \tag{B.4}$$

其中（a）由 $|\mathsf{dif}(H)|-1 \le |\mathsf{dif}(\varphi(v,\ H))|$, $|\mathsf{dif}_0(H)|-1 \le |\mathsf{dif}_0(\varphi(v,\ H))|$ 和 $\rho \le 1$ 得出。因此，只需证明存在一个常数 $D=\Theta(1)$，使得

$$D^{-1}\sigma_+(\mathbf{P})^{\aleph} \le \sum_{\omega\in\mathcal{W}} \rho^{2|\mathsf{dif}_0(\omega)|+4|\mathsf{dif}(\omega)|}(\mu^2/\gamma)^{|E_0(\omega)|}(\epsilon_1^2\lambda_1)^{|E_1(\omega)|}\dots(\epsilon_L^2\lambda_L)^{|E_L(\omega)|} \le D\sigma_+(\mathbf{P})^{\aleph}\,. \tag{B.5}$$

现在我们给出一个关于.....的归纳公式

$$\sum_{\omega\in\mathcal{W}(\aleph)} \rho^{2|\mathsf{dif}_0(\omega)|+4|\mathsf{dif}(\omega)|}(\mu^2/\gamma)^{|E_0(\omega)|}\prod_{1\le\ell\le L}(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^{|E_\ell(\omega)|}\,.$$

记

$$\begin{aligned}\mathsf{X}(\aleph) &= \sum_{\omega\in\mathcal{W}(\aleph),\omega_\aleph=0} \rho^{2|\mathsf{dif}_0(\omega)|+4|\mathsf{dif}(\omega)|}(\mu^2/\gamma)^{|E_0(\omega)|}\prod_{1\le\ell\le L}(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^{|E_\ell(\omega)|}\,;\\ \mathsf{Y}_\ell(\aleph) &= \sum_{\omega\in\mathcal{W}(\aleph),\omega_\aleph=\ell} \rho^{2|\mathsf{dif}_0(\omega)|+4|\mathsf{dif}(\omega)|}(\mu^2/\gamma)^{|E_0(\omega)|}\prod_{1\le\ell\le L}(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell)^{|E_\ell(\omega)|} \text{ for } 1\le\ell\le L\,. \end{aligned} \tag{B.6}$$

对于一个 任意 $\omega\in\mathcal{W}(\aleph)$，其中 $\omega_\aleph=0, \omega=(\omega',\ 0)$，且满足 $\omega'\in\mathcal{W}(\aleph-1)$。分为两种情况 s:

- 情形 1. $\omega_{\aleph-1}=0$. 我们有 $|\mathsf{dif}_0(\omega)|=|\mathsf{dif}_0(\omega')|$, $|\mathsf{dif}(\omega)|=|\mathsf{dif}(\omega')|$, $|E_0(\omega)|=|E_0(\omega')|+1$, 并且 $|E_\ell(\omega)|=|E_\ell(\omega')|$ 对所有 $1\le\ell\le L$均成立。这会带来一个 $\frac{\mu^2}{\gamma}$-因子。
- 情形 2. $1\le\omega_{\aleph-1}=\ell\le L$. 我们有 $|\mathsf{dif}_0(\omega)|=|\mathsf{dif}_0(\omega')|+1$, $|\mathsf{dif}(\omega)|=|\mathsf{dif}(\omega')|$, $|E_0(\omega)|=|E_0(\omega')|+1$, 并且 $|E_\ell(\omega)|=|E_\ell(\omega')|$ 对所有 $1\le\ell\le L$均成立。这会带来一个 $\frac{\rho^2\mu^2}{\gamma}$-因子。

因此，我们有

$$\mathsf{X}(\aleph)=\frac{\mu^2}{\gamma}\cdot\mathsf{X}(\aleph-1)+\sum_{1\le\ell\le L}\frac{\rho^2\mu^2}{\gamma}\cdot\mathsf{Y}_\ell(\aleph-1)\,.$$

类似地，对于任意 $1 \le \ell \le L$,

$$\mathsf{Y}_\ell(\aleph) = \epsilon_\ell^2 \lambda_\ell \cdot \mathsf{Y}_\ell(\aleph-1) + \rho^2 \epsilon_\ell^2 \lambda_\ell \cdot \mathsf{X}(\aleph-1) + \sum_{\ell' \neq \ell} \rho^4 \epsilon_\ell^2 \lambda_\ell \cdot \mathsf{Y}_{\ell'}(\aleph-1)\,.$$

因此，我们有

$$\begin{pmatrix} \mathsf{X}(\aleph) \\ \mathsf{Y}_1(\aleph) \\ \mathsf{Y}_2(\aleph) \\ \vdots \\ \mathsf{Y}_L(\aleph) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu^2}{\gamma} & \frac{\rho^2\mu^2}{\gamma} & \frac{\rho^2\mu^2}{\gamma} & \dots & \frac{\rho^2\mu^2}{\gamma} \\ \rho^2\epsilon_1^2\lambda_1 & \epsilon_1^2\lambda_1 & \rho^4\epsilon_1^2\lambda_1 & \dots & \rho^4\epsilon_1^2\lambda_1 \\ \rho^2\epsilon_2^2\lambda_2 & \rho^4\epsilon_2^2\lambda_2 & \epsilon_2^2\lambda_2 & \dots & \rho^4\epsilon_2^2\lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^2\epsilon_L^2\lambda_L & \rho^4\epsilon_L^2\lambda_L & \rho^4\epsilon_L^2\lambda_L & \dots & \epsilon_L^2\lambda_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{X}(\aleph-1) \\ \mathsf{Y}_1(\aleph-1) \\ \mathsf{Y}_2(\aleph-1) \\ \vdots \\ \mathsf{Y}_L(\aleph-1) \end{pmatrix} \overset{(3.13)}{=} \mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathsf{X}(\aleph-1) \\ \mathsf{Y}_1(\aleph-1) \\ \mathsf{Y}_2(\aleph-1) \\ \vdots \\ \mathsf{Y}_L(\aleph-1) \end{pmatrix}.$$

注意，$\mathbf{P}$ 相似于一个正定矩阵 $\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{U}^\top \mathbf{V} \mathbf{U}$，其中

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\mu^2}{\gamma}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\epsilon_1^2\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\epsilon_2^2\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\epsilon_L^2\lambda_L} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & \rho^2 & \rho^2 & \dots & \rho^2 \\ \rho^2 & 1 & \rho^4 & \dots & \rho^4 \\ \rho^2 & \rho^4 & 1 & \dots & \rho^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^2 & \rho^4 & \rho^4 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{B.7}$$

容易验证$\mathbf{P}$ 是半正定的。因此，记 $\sigma_+(\mathbf{P}) = \sigma_1(\mathbf{P}) \ge \ldots \ge \sigma_{L+1}(\mathbf{P}) \ge 0$ 为$\mathbf{P}$的特征值，由标准结果可知，存在$\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{(L+1)*(L+1)}$，满足$\mathbf{D}_{l,1} > 0$ 使得

$$\begin{pmatrix} \mathsf{X}(\aleph) \\ \mathsf{Y}_1(\aleph) \\ \mathsf{Y}_2(\aleph) \\ \vdots \\ \mathsf{Y}_L(\aleph) \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} \sigma_1(\mathbf{P})^\aleph \\ \sigma_2(\mathbf{P})^\aleph \\ \sigma_3(\mathbf{P})^\aleph \\ \vdots \\ \sigma_{L+1}(\mathbf{P})^\aleph \end{pmatrix}. \tag{B.8}$$

因此，只需证明 $\sigma_+(\mathbf{P}) > 1$ 若（3.1）成立。为此，注意$\mathbf{P}$ 恰好是.....的协方差矩阵

$$\left(\sqrt{\tfrac{\mu^2}{\gamma}} U, \sqrt{\epsilon_1^2\lambda_1} V_1, \ldots, \sqrt{\epsilon_L^2\lambda_L} V_L \right), \text{ where } (U, V_1, \ldots, V_L) \text{ is defined in (2.7)}.$$

对于 $X \sim \mathcal{N}(0,\ \Sigma_X)$，其中 $\Sigma_X = \widetilde{\mathbf{P}}$，众所周知 $\mathbb{E}[\exp(X^\top X/2)] < \infty$ 当且仅当$\lambda_{\max}(\Sigma_X) < 1$，且期望发散，当 $\lambda_{\max}(\Sigma_X) \ge 1$（参见，例如，[Mui09，第1.4]）。因此，

$$\begin{aligned} \sigma_+(\mathbf{P}) \ge 1 \iff \sigma_+(\widetilde{\mathbf{P}}) \ge 1 \iff \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\mu^2}{\gamma} U^2 + \epsilon_1^2\lambda_1 V_1^2 + \ldots + \epsilon_L^2 \lambda_L V_L^2 \right) \right) \right] = \infty \\ \iff F(\mu, \rho, \gamma, \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\}) \ge 1\,, \end{aligned}$$

其中，最后一步转移可由命题 2.1 的证明推出。最后，由于 $\sigma_+(\mathbf{P})$ 和$F(\mu, \rho, \gamma, \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\})$ 关于 $(\mu, \rho, \gamma, \{\lambda_\ell\}, \{\epsilon_\ell\})$ 均连续且严格单调，因此我们可以看出，只要满足 $\sigma_+(\mathbf{P}) > 1$，3.1) 即成立。

B.2 引理的证明3.7

引理 3.7 的证明与引理 3.3 的证明非常相似，因此我们只概述主要差异，并借鉴引理 3.3 中的论证，而不详述完整细节。我们只证明关于 $\beta_{\mathcal{J}}$ 的界；关于 $\beta_{\mathcal{J}_\star}$ 的界也可以用同样的方法证明。记 $\mathcal{J}$ 为由无标记 $[H] = (V(H),\ E(H), \gamma_{\tilde{H}})$ 构成的集合，其中 $\gamma_{\tilde{H}}$ 将 E 映射到 $\{0, 1, \ldots, L\}$。与 B.1 节类似，只需证明 $(V(H),\ E(H))$ 是长度为 $\aleph$ 的无标记路径，且

$$D^{-1}\sigma_+(\mathbf{P})^{\aleph} \le \sum_{[H]\in\widetilde{\mathcal{J}}} \frac{\Xi(H)^2}{|\mathsf{Aut}(H)|} \le D\sigma_+(\mathbf{P})^{\aleph} \text{ for some } D = \Theta(1)\,. \tag{B.9}$$

回顾一下，我们将 $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\aleph)$ 定义为 $\omega = (\omega_1, \ldots\ldots, \omega_{\aleph}) \in \{0, 1, \ldots, L\}^{\aleph}$ 的集合。另记

$$\widetilde{\mathcal{J}}_\bullet = \big\{(v, [H]) : [H] \in \widetilde{\mathcal{J}}, v \in \mathsf{L}(H)\big\}\,.$$

显然，存在一个双射 $\psi : \mathcal{J}_\bullet \to \mathcal{W}$，它保持量 $|E_\ell(\cdot)|$、$|\mathsf{dif}_0(\cdot)|$ 和 $|\mathsf{dif}(\cdot)|$ 不变。回顾 (B.3) 和 (B.4)。由于 $1 \le |\mathsf{Aut}(H)| \le 2$ 且 $|\mathsf{L}(H)| \le 2$，我们有

$$\frac{\rho^6}{4} \sum_{\omega\in\mathcal{W}} \Xi(\omega)^2 \le \beta_{\mathcal{J}} \le \sum_{\omega\in\mathcal{W}} \Xi(\omega)^2.$$

回顾一下，$\rho > 0$ 是一个常数。因此，类似于 (B.5)，只需证明存在一个常数 $D = \Theta(1)$，使得（回顾 (3.11)）

$$D^{-1}\sigma_+(\mathbf{P})^{\aleph} \le \sum_{\omega\in\mathcal{W}} \Xi(\omega)^2 = \mathsf{X}(\aleph) + \sum_{1\le\ell\le L} \mathsf{Y}_\ell(\aleph) \le D\sigma_+(\mathbf{P})^{\aleph}\,. \tag{B.10}$$

(B.10) 可直接由 (B.8) 得出。

C 第 4 节的补充证明4

C.1 引理的证明4.3

回顾（3.7）。在给定 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{x}_1$，……，$\boldsymbol{x}_L$ 的条件下，我们有

$$\big\{\boldsymbol{Y}(i,k) : i \in [n], k \in [p]\big\} \bigcup \Big(\cup_{1\le\ell\le L} \big\{\overline{\boldsymbol{G}}_\ell(i,j) : (i,j) \in \mathrm{U}_n \big\}\Big)$$

是一组条件独立随机变量，其中

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\boldsymbol{Y}(i,k) \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_L\big] = \tfrac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{n}} \boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{u}(k)\,;\\
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\boldsymbol{Y}(i,k)^2 \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_L\big] = 1 + \tfrac{\mu}{n} \boldsymbol{x}(i)^2\boldsymbol{u}(k)^2\,;\\
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\overline{\boldsymbol{G}}_\ell(i,j) \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_L\big] = \tfrac{\sqrt{\epsilon_\ell^2\lambda_\ell}}{\sqrt{n}} \boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}_\ell(j)\,;\\
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\overline{\boldsymbol{G}}_\ell(i,j)^2 \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_L\big] = (1 + O(n^{-1}))(1 + \epsilon_\ell \boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}_\ell(j))\,.
\end{aligned}$$

因此，我们有（回顾（3.8））

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[f_S f_K\big] &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_L}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[f_S f_K \mid \boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_L\big] \\ &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_L}\Bigg\{ \prod_{(a_i,b_k)\in E_0(S)\triangle E_0(K)} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{n}}\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{u}(k) \prod_{(a_i,b_k)\in E_0(S)\cap E_0(K)} \big(1+\tfrac{\mu}{n}\boldsymbol{x}(i)^2\boldsymbol{u}(k)^2\big) \\ &\quad \prod_{1\le\ell\le L}\prod_{(a_i,a_j)\in E_\ell(S)\triangle E_\ell(K)} \frac{\sqrt{\epsilon_\ell^2\lambda_\ell}}{\sqrt{n}}\boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}_\ell(j) \\ &\quad \prod_{1\le\ell\le L}\prod_{(a_i,a_j)\in E_\ell(S)\cap E_\ell(K)} (1+O(n^{-1})\big(1+\epsilon_\ell\boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}_\ell(j)\big)\Bigg\}.\end{aligned}$$

我们首先证明（4.11）。注意，如果 $V(S)\cap V(K)=\emptyset$ 那么 $E_\ell(S)\cap E_\ell(K)=\emptyset$ 对所有 $0\le\ell\le L$ 均成立。因此，在这种情况下，我们有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[f_S f_K\big] = \mathbb{E}\Bigg\{ \prod_{(a_i,b_k)\in E_0(S)\cup E_0(K)} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{n}}\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{u}(k) \prod_{1\le\ell\le L}\prod_{(a_i,a_j)\in E_\ell(S)\cup E_\ell(K)} \frac{\sqrt{\epsilon_\ell^2\lambda_\ell}}{\sqrt{n}}\boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}_\ell(j)\Bigg\}.$$

与（4.4）类似，我们可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Bigg\{ \prod_{(a_i,b_k)\in E_0(S)\cup E_0(K)} \boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{u}(k) \prod_{1\le\ell\le L}\prod_{(a_i,a_j)\in E_\ell(S)\cup E_\ell(K)} \boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}_\ell(j)\Bigg\} \\ &= \rho^{|\mathsf{dif}_0(S)|+|\mathsf{dif}_0(K)|+2|\mathsf{dif}(S)|+2|\mathsf{dif}(K)|}.\end{aligned}$$

因此，当 $V(S)\cap V(K)=\emptyset$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[f_S f_K\big] &= \frac{\gamma^{\frac14(|E_0(S)|+|E_0(K)|)}}{n^{\frac12(|E(S)|+|E(K)|)}}\big(\tfrac{\mu^2}{\gamma}\big)^{\frac14(|E_0(S)|+|E_0(K)|)} \prod_{1\le\ell\le L}\big(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell\big)^{\frac12(|E_\ell(S)|+|E_\ell(K)|)} \\ &\quad\cdot \rho^{|\mathsf{dif}_0(S)|+|\mathsf{dif}_0(K)|+2|\mathsf{dif}(S)|+2|\mathsf{dif}(K)|} \\ &\overset{(3.11)}{=} \frac{\Xi(S)\Xi(K)}{n^{\frac12(|E(S)|-\frac12|E_0(S)|)}p^{\frac14|E_0(S)|}n^{\frac12(|E(K)|-\frac12|E_0(K)|)}p^{\frac14|E_0(K)|}} \\ &\overset{(3.9)}{=} \frac{\Xi(S)\Xi(K)}{n^{\frac12\aleph}p^{\frac14|E_0(S)|}n^{\frac12\aleph}p^{\frac14|E_0(K)|}} \overset{\text{Lemma 4.1}}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_S]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_K].\end{aligned}$$

现在我们转向（4.12）。回顾一下，$S\Cap K$ 表示由边集诱导的图 $\cup_{0\le\ell\le L}(E_\ell(S)\cap E_\ell(K))$。注意，

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{n}}\Big)^{|E_0(S)\triangle E_0(K)|}\prod_{1\le\ell\le L}\Big(\frac{\sqrt{\epsilon_\ell^2\lambda_\ell}}{\sqrt{n}}\Big)^{|E_\ell(S)\triangle E_\ell(K)|} \\ &= \frac{\gamma^{\frac14|E_0(S)\triangle E_0(K)|}}{n^{\frac12(|E(S)|+|E(K)|)-|E(S\Cap K)|}}\Big(\frac{\mu^2}{\gamma}\Big)^{\frac14|E_0(S)\triangle E_0(K)|}\prod_{1\le\ell\le L}\big(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell\big)^{\frac12|E_\ell(S)\triangle E_\ell(K)|} \\ &= \frac{\Omega(S\Cap K)}{\Omega(S)^{\frac12}\Omega(K)^{\frac12}}\Big(\frac{\mu^2}{\gamma}\Big)^{\frac14|E_0(S)\triangle E_0(K)|}\prod_{1\le\ell\le L}\big(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell\big)^{\frac12|E_\ell(S)\triangle E_\ell(K)|},\end{aligned}$$

其中第二个等式由 $n=\gamma p$ 和（4.9）得出：

$$\frac{\Omega(S\Cap K)}{\Omega(S)^{\frac12}\Omega(K)^{\frac12}}=\frac{n^{|E(S\Cap K)|-\frac12|E_0(S\Cap K)|}(n/\gamma)^{\frac12|E_0(S\Cap K)|}}{\big(n^{|E(S)|-\frac12|E_0(S)|}(n/\gamma)^{\frac12|E_0(S)|}\big)^{1/2}\big(n^{|E(K)|-\frac12|E_0(K)|}(n/\gamma)^{\frac12|E_0(K)|}\big)^{1/2}}$$
$$=\frac{\gamma^{\frac14(|E_0(S)|+|E_0(K)|-2|E_0(S\Cap K)|)}}{n^{\frac12(|E(S)|+|E(K)|-2|E(S\Cap K)|)}}=\frac{\gamma^{\frac14|E_0(S)\triangle E_0(K)|}}{n^{\frac12(|E(S)|+|E(K)|)-|E(S\Cap K)|}}\,.$$

由于 $\aleph=o(\log n\log\log n)$，我们有

$$\prod_{1\le\ell\le L}\prod_{(a_i,a_j)\in E_\ell(S)\cap E_\ell(K)}(1+O(n^{-1}))\le(1+O(n^{-1}))^{L\aleph}=1+o(1)\,.$$

因此，为了证明引理 4.3，只需证明

$$\mathbb{E}\Big\{\prod_{(a_i,b_k)\in E_0(S)\triangle E_0(K)}\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{u}(k)\prod_{1\le\ell\le L}\prod_{(a_i,a_j)\in E_\ell(S)\triangle E_\ell(K)}\boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}_\ell(j)$$
$$\prod_{(a_i,b_k)\in E_0(S)\cap E_0(K)}\big(1+\tfrac{\mu}{n}\boldsymbol{x}(i)^2\boldsymbol{u}(k)^2\big)\prod_{(a_i,a_j)\in E_\ell(S)\cap E_\ell(K)}\big(1+\epsilon_\ell\boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}_\ell(j)\big)\Big\}\tag{C.1}$$
$$\le\frac12 C^{|\mathsf{L}(S\Cap K)|+|\mathsf{L}(S\cap K)|+1}\rho^{|\mathsf{dif}_0(S)\setminus V(K)|+|\mathsf{dif}_0(K)\setminus V(S)|+2|\mathsf{dif}(S)\setminus V(K)|+2|\mathsf{dif}(K)\setminus V(S)|}\,.\tag{C.2}$$

与引理 4.1 的证明类似，我们将计算每个顶点的贡献，但此处的证明将困难得多。将所有 $(a_i,b_k)\in E_0(S)\cap E_0(K)$ 对应的项 $\big(1+\frac{\mu}{n}\boldsymbol{x}(i)^2\boldsymbol{u}(k)^2\big)$ 以及所有 $(a_i,a_j)\in E_\ell(S)\cap E_\ell(K)$ 对应的项 $\big(1+\epsilon_\ell\boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}_\ell(j)\big)$ 展开后，我们可以将 (C.1) 写为（注意 $\epsilon_\ell\in(0,1)$）

$$\sum_{\substack{\mathtt{E}\subset E_0(S)\cap E_0(K)\\ \mathtt{F}_\ell\subset E_\ell(S\Cap K)}}\big(\tfrac{\mu}{n}\big)^{|\mathtt{E}|}\prod_{1\le\ell\le L}\epsilon_\ell^{|\mathtt{F}_\ell|}\mathbb{E}\Big\{\prod_{(a_i,b_k)\in E_0(S)\triangle E_0(K)}\boldsymbol{x}(i)\boldsymbol{u}(k)\prod_{(a_i,b_k)\in\mathtt{E}}\boldsymbol{x}(i)^2\boldsymbol{u}(k)^2$$
$$\prod_{1\le\ell\le L}\prod_{(a_i,a_j)\in\mathtt{F}_\ell\cup(E_\ell(S)\triangle E_\ell(K))}\boldsymbol{x}_\ell(i)\boldsymbol{x}_\ell(j)\Big\}$$
$$\le\sum_{\substack{\mathtt{E}\subset E_0(S)\cap E_0(K)\\ \mathtt{F}_\ell\subset E_\ell(S\Cap K)}}\big(\tfrac{\mu}{n}\big)^{|\mathtt{E}|}\mathbb{E}\Big\{\prod_{b_k\in V^{\mathsf{b}}(S)\cup V^{\mathsf{b}}(K)}\boldsymbol{u}(k)^{\Delta(k)}\prod_{a_i\in V^{\mathsf{a}}(S)\cup V^{\mathsf{a}}(K)}\boldsymbol{x}(i)^{\Lambda_0(i)}\boldsymbol{x}_1(i)^{\Lambda_1(i)}\dots\boldsymbol{x}_L(i)^{\Lambda_L(i)}\Big\}\,.\tag{C.3}$$

此处（下文中，若顶点 v 与一条边 e 相关联，则记 $v\sim e$）

$$\Delta(k)=\#\big\{e\in E_0(S)\triangle E_0(K):b_k\sim e\big\}+2\#\big\{e\in\mathtt{E}:b_k\sim e\big\}\,;\tag{C.4}$$
$$\Lambda_0(i)=\#\big\{e\in E_0(S)\triangle E_0(K):a_i\sim e\big\}+2\#\big\{e\in\mathtt{E}:a_i\sim e\big\}\,;\tag{C.5}$$
$$\Lambda_\ell(i)=\#\big\{e\in E_\ell(S)\triangle E_\ell(K):a_i\sim e\big\}+\#\big\{e\in\mathtt{F}_\ell:a_i\sim e\big\}\,.\tag{C.6}$$

我们现在如下分析（C.3）：显然，

- 如果 $a_i \in \mathsf{dif}_0(S) \setminus V(K)$，（因为 S 是装饰圈或装饰路径）则存在 $a_j \in \{a_1, \dots, a_n\}$ 和 $b_k \in \{b_1, \dots, b_p\}$，使得 $(a_i, a_j) \in E_\ell(S) \setminus E(K)$，且 $(a_i, b_j) \in E_0(S) \setminus E(K)$。此外，显然对于所有 $e \in E(S \Cap K)$，都有 $a_i \not\sim e$。因此，我们有

$$\Lambda_0(i) = \Lambda_\ell(i) = 1, \Lambda_{\ell'}(i) = 0 \text{ for all } \ell' \neq \ell\,.$$

这意味着（回顾（1.2））

$$\mathbb{E}\Big[\boldsymbol{x}(i)^{\Lambda_0(i)} \boldsymbol{x}_1^{\Lambda_1(i)} \dots \boldsymbol{x}_L(i)^{\Lambda_L(i)}\Big] = \rho\,.$$

类似地，如果 $a_i \in \mathsf{dif}_0(K) \setminus V(S)$，则有

$$\mathbb{E}\Big[\boldsymbol{x}(i)^{\Lambda_0(i)} \boldsymbol{x}_1^{\Lambda_1(i)} \dots \boldsymbol{x}_L(i)^{\Lambda_L(i)}\Big] = \rho\,.$$

- 如果 $a_i \in \mathsf{dif}(S) \setminus V(K)$，（因为 S 是一个装饰圈或装饰路径）则存在 $a_j,\ a_k \in \{a_1, \dots, a_n\}$，使得 $(a_i,\ a_j) \in E_\ell(S) \setminus E(K)$ 且 $(a_i,\ a_k) \in E_{\ell'}(S) \setminus E(K)$。此外，显然对于所有 $e \in E(S \Cap K)$，都有 $a_i \not\sim e$。因此，我们有

$$\Lambda_\ell(i) = \Lambda_{\ell'}(i) = 1, \Lambda_0(i) = \Lambda_{\ell''}(i) = 0 \text{ for all } \ell'' \neq \ell, \ell'\,.$$

这意味着（回顾（1.2））

$$\mathbb{E}\Big[\boldsymbol{x}(i)^{\Lambda_0(i)} \boldsymbol{x}_1^{\Lambda_1(i)} \dots \boldsymbol{x}_L(i)^{\Lambda_L(i)}\Big] = \rho^2\,.$$

类似地，如果 $a_i \in \mathsf{dif}(K) \setminus V(S)$，则有

$$\mathbb{E}\Big[\boldsymbol{x}(i)^{\Lambda_0(i)} \boldsymbol{x}_1(i)^{\Lambda_1(i)} \dots \boldsymbol{x}_L(i)^{\Lambda_L(i)}\Big] = \rho^2\,.$$

- 对于所有其他 a_i，由于 $\boldsymbol{x}(i)\ \boldsymbol{x}_\ell(i) \in \{-1, +1\}$，我们有（回顾（1.2））

$$0 \leq \mathbb{E}\Big[\boldsymbol{x}(i)^{\Lambda_0(i)} \boldsymbol{x}_1^{\Lambda_1(i)} \dots \boldsymbol{x}_L(i)^{\Lambda_L(i)}\Big] \leq 1\,.$$

- 若 $b_k \in V(S) \setminus V(K)$，则（由于 S 是一个装饰圈或装饰路径）存在$a_j,\ a_k \in \{a_1, \dots, a_n\}$，使得（$a_i,\ b_k$），（$a_j,\ b_k$）$\in E_0(S) \setminus E(K)$。因此，我们有 $\Delta(k) = 2$。这表明

$$\mathbb{E}\Big[\boldsymbol{u}(k)^{\Delta(k)}\Big] = 1\,.$$

类似地，若 $b_k \in V(K) \setminus V(S)$，则有

$$\mathbb{E}\Big[\boldsymbol{u}(k)^{\Delta(k)}\Big] = 1\,.$$

- 若 $b_k \in V(S) \cap V(K)$ 且 $b_k \notin \mathrm{L}(S \cap K) \cup V(\mathrm{E})$，则存在 $a_j, a_k \in \{a_1, \dots, a_n\}$ 使得 (a_i, b_k),$(a_j, b_k) \in E_0(S) \cap E_0(K)$。由于 (a_i, b_k),$(a_j, b_k) \notin \mathrm{E}$，因此显然 $\Delta(k) = 0$。由此可得

$$\mathbb{E}\Big[\boldsymbol{u}(k)^{\Delta(k)}\Big] = 1\,.$$

• 若 $b_k \in V(S) \cap V(K)$ 且 $b_k \in \mathsf{L}(S \cap K) \cup V(\mathsf{E})$，由于 b_k 在 S 和 K 中的度不超过 2，因此有 $\Delta(k) \le 8$。由此可得

$$0 \le \mathbb{E}\Big[\boldsymbol{u}(k)^{\Delta(k)}\Big] \le C' .$$

结合以上论证，我们可以看到，对于所有的 $\mathsf{E} \subset E_0(S) \cap E_0(K)$ 和 $\mathsf{F}_\ell \subset E_\ell(S \Cap K)$，都有（注意，$|V(\mathsf{E})| \le 2|\mathsf{E}|$）

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Bigg\{ \prod_{b_k \in V^{\mathsf{b}}(S) \cup V^{\mathsf{b}}(K)} \boldsymbol{u}(k)^{\Delta(k)} \prod_{a_i \in V^{\mathsf{a}}(S) \cup V^{\mathsf{a}}(K)} \boldsymbol{x}(i)^{\Lambda_0(i)} \boldsymbol{x}_1^{\Lambda_1(i)} \dots \boldsymbol{x}_L(i)^{\Lambda_L(i)} \Bigg\} \\
&\le \rho^{|\mathsf{dif}_0(S) \setminus V(K)| + |\mathsf{dif}_0(K) \setminus V(S)| + 2|\mathsf{dif}(S) \setminus V(K)| + 2|\mathsf{dif}(K) \setminus V(S)|} \cdot (C')^{|\mathsf{L}(S \cap K)| + 2|\mathsf{E}|} .
\end{aligned} \tag{C.7}$$

此外，记 $\mathsf{F} = \mathsf{F}_1 \cup \ldots \cup \mathsf{F}_\ell$。注意，当固定 F 时，$\mathsf{F} \subset E(S \Cap K)$ 和 $(\mathsf{F}_1, \ldots, \mathsf{F}_\ell)$ 也随之固定。现在我们说明，如果 $\mathsf{L}(\mathsf{F}) \not\subset \mathsf{L}(S \Cap K) \cup V(\mathsf{E})$，那么

$$\mathbb{E}\Bigg\{ \prod_{b_k \in V^{\mathsf{b}}(S) \cup V^{\mathsf{b}}(K)} \boldsymbol{u}(k)^{\Delta(k)} \prod_{a_i \in V^{\mathsf{a}}(S) \cup V^{\mathsf{a}}(K)} \boldsymbol{x}(i)^{\Lambda_0(i)} \boldsymbol{x}_1^{\Lambda_1(i)} \dots \boldsymbol{x}_L(i)^{\Lambda_L(i)} \Bigg\} = 0 . \tag{C.8}$$

为此，注意如果 $\mathsf{L}(\mathsf{F}) \not\subset \mathsf{L}(S \Cap K) \cup V(\mathsf{E})$，那么存在一个顶点 $a_i \in \mathsf{L}(\mathsf{F}) \setminus (\mathsf{L}(S \Cap K) \cup V(\mathsf{E}))$。因此，以下两种情形必有一种成立：

情形 1： 存在 $a_j, a_k \in \{a_1, \ldots, a_n\}$，使得 $(a_i, a_j) \in \mathsf{F} \subset E_\ell(S \Cap K)$ 且 $(a_i, a_k) \in E_{\ell'}(S \Cap K) \setminus \mathsf{F}$。在这种情形下，我们有

$$\Lambda_\ell(i) = 1, \ \Lambda_0(i) = \Lambda_{\ell'}(i) = 0 \text{ for all } \ell' \ne \ell .$$

由此可得

$$\mathbb{E}\Big[\boldsymbol{x}(i)^{\Lambda_0(i)} \boldsymbol{x}_1(i)^{\Lambda_1(i)} \dots \boldsymbol{x}_L(i)^{\Lambda_L(i)}\Big] = 0 .$$

情形 2： 存在 $a_j \in \{a_1, \ldots, a_n\}$ 和 $b_k \in \{b_1, \ldots, b_p\}$ 使得 $(a_i, a_j) \in \mathsf{F} \subset E_\ell(S \Cap K)$ 且 $(a_i, b_k) \in E_0(S \Cap K) \setminus \mathsf{F}$。在这种情况下，我们有

$$\Lambda_0(i) \in \{0, 2\}, \ \Lambda_\ell(i) = 1, \Lambda_{\ell'}(i) = 0 \text{ for all } \ell' \ne \ell .$$

由此可得

$$\mathbb{E}\Big[\boldsymbol{x}(i)^{\Lambda_0(i)} \boldsymbol{x}_1(i)^{\Lambda_1(i)} \dots \boldsymbol{x}_L(i)^{\Lambda_L(i)}\Big] = 0 .$$

结合上述两种情形可得 (C.8)。将 (C.7) 和 (C.8) 代入 (C.3)，可得

$$\begin{aligned}
(\text{C.3}) \le \sum_{\mathsf{E} \subset E_0(S) \cap E_0(K)} & \#\big\{\mathsf{F} \subset E^{\mathsf{a}}(S \Cap K) : \mathsf{L}(\mathsf{F}) \subset \mathsf{L}(S \Cap K) \cup V(\mathsf{E})\big\} \Big(\frac{\mu}{n}\Big)^{|\mathsf{E}|} \cdot (C')^{|\mathsf{L}(S \cap K)| + 2|\mathsf{E}|} \\
& \cdot \rho^{|\mathsf{dif}_0(S) \setminus V(K)| + |\mathsf{dif}_0(K) \setminus V(S)| + 2|\mathsf{dif}(S) \setminus V(K)| + 2|\mathsf{dif}(K) \setminus V(S)|} .
\end{aligned} \tag{C.9}$$

注意，由于 S, K 是路径或环，因此 $S \Cap K$ 要么是一个环，要么是一组路径（我们允许路径由单个顶点构成）。因此，$\mathsf{L}(S \Cap K)$ 和 $V(\mathsf{E})$ 会将 $S \Cap K$ 切分为至多 $|\mathsf{L}(S \Cap K)| + |V(\mathsf{E})| + 1$ 条互不相交的路径，从而我们有

$$\#\big\{\mathsf{F} \subset E^{\mathsf{a}}(S \Cap K) : \mathsf{L}(\mathsf{F}) \subset \mathsf{L}(S \Cap K) \cup V(\mathsf{E})\big\} \le 2^{|\mathsf{L}(S \Cap K)| + |V(\mathsf{E})| + 1} \le 2^{|\mathsf{L}(S \Cap K)| + 2|\mathsf{E}| + 1} .$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}(\text{C.9}) &\le \sum_{\mathtt{E}\subset E_0(S)\cap E_0(K)} \big(\tfrac{\mu}{n}\big)^{|\mathtt{E}|}\cdot (C')^{|\mathsf{L}(S\cap K)|+2|\mathtt{E}|}\cdot 2^{|\mathsf{L}(S\circledcirc K)|+2|\mathtt{E}|+1} \\ &\quad\cdot \rho^{|\mathsf{dif}_0(S)\setminus V(K)|+|\mathsf{dif}_0(K)\setminus V(S)|+2|\mathsf{dif}(S)\setminus V(K)|+2|\mathsf{dif}(K)\setminus V(S)|} \\ &\le (C')^{|\mathsf{L}(S\cap K)|}2^{|\mathsf{L}(S\circledcirc K)|+1}\rho^{|\mathsf{dif}_0(S)\setminus V(K)|+|\mathsf{dif}_0(K)\setminus V(S)|+2|\mathsf{dif}(S)\setminus V(K)|+2|\mathsf{dif}(K)\setminus V(S)|}. \end{aligned} \tag{C.10}$$

显然，(C.10) 通过取 $C=2C'$，即可立即推出 (C.2) 中的界。

C.2 引理4.4的证明

我们首先证明 (4.16)。由 (4.10) 注意到 $\mathtt{P}(S,S)=1$。因此，

$$\begin{aligned}(4.14) &\overset{(4.9)}{=} \sum_{S\in\mathsf{K}_{n,p}:[S]\in\mathcal{H}} \frac{C\Xi(S)^2}{n^{\aleph}p^{\frac12|E_0(S)|}\beta_{\mathcal{H}}^2} = \sum_{[H]\in\mathcal{H}} \frac{C\Xi(H)^2}{n^{\aleph}p^{\frac12|E_0(H)|}\beta_{\mathcal{H}}^2}\cdot \#\{S\in\mathsf{K}_{n,p}: S\cong H\} \\ &= [1+o(1)]\cdot\sum_{[H]\in\mathcal{H}} \frac{C\Xi(H)^2}{n^{\aleph}p^{\frac12|E_0(H)|}\beta_{\mathcal{H}}^2}\cdot\frac{n^{\aleph}p^{\frac12|E_0(H)|}}{|\mathsf{Aut}(H)|} \overset{(3.12)}{=} \frac{C(1+o(1))}{\beta_{\mathcal{H}}} \overset{\text{Lemma 3.3}}{=} o(1),\end{aligned}$$

从而得到 (4.16)。现在我们证明 (4.17)。回忆 $\Xi(S)$、$\Omega(K)$ 以及 $\mathtt{P}(S,K)$ 分别在 (3.11)、(4.9) 和 (4.10) 中定义。利用 (3.15)，我们看到

$$C^{|\mathsf{L}(S\cap K)|+|\mathsf{L}(S\circledcirc K)|}=n^{o(1)},\quad \mathtt{P}(S,K)=n^{o(1)}\cdot\Xi(S)\Xi(K),\quad \Omega(K)\overset{(3.9)}{=}n^{|E(K)|+o(1)}.$$

因此，我们有（注意 $|E(S)|=|V(S)|$ 和 $|E(K)|=|V(K)|$）

$$(4.15)=\sum_{\substack{S,K\subset\mathsf{K}_{n,p}:[S],[K]\in\mathcal{H}\\ V(S)\cap V(K)\neq\emptyset, S\neq K}} \frac{\Xi(S)^2\Xi(K)^2}{n^{|V(K)|-|E(S\circledcirc K)|-o(1)}\Omega(S)\beta_{\mathcal{H}}^2}. \tag{C.11}$$

注意，对于 $S\neq K$ 和 $V(S)\cap V(K)\neq\emptyset$，我们必有

$$|E(S\circledcirc K)|\le |E(S)\cap E(K)|\le |V(S)\cap V(K)|-1.$$

因此，我们有

$$(\text{C.11})=\sum_{\substack{S\in\mathsf{K}_{n,p}:[S]\in\mathcal{H}\\ 0\le r\le\aleph\\ r+1\le t\le\aleph}}\sum_{[H]\in\mathcal{H}} \frac{\Xi(S)^2\Xi(H)^2}{\Omega(S)n^{|V(H)|-r-o(1)}\beta_{\mathcal{H}}^2}\cdot\mathsf{ENUM}(S,[H];t), \tag{C.12}$$

其中

$$\mathsf{ENUM}(S,[H];t)=\#\big\{K\in\mathsf{K}_n: K\cong H, |V(K)\cap V(S)|=t\big\}. \tag{C.13}$$

我们现在将 $\mathsf{ENUM}(S,[H];t)$ 上界估计如下。注意，我们至多有 $\binom{|V(S)|}{t}$ 种方式来选择 $V(K)\cap V(S)$，并至多有 $\binom{n+p-|V(H)|}{|V(H)|-t}$ 种方式来选择 $V(K)\setminus V(S)$。此外，给定 $V(K)$，我们至多有 $\frac{|V(H)|!}{|\mathsf{Aut}(H)|}$ 种方式来选择 K。因此，（注意 $|V(H)|\le 2\aleph$）

$$\mathsf{ENUM}(S,[H];t)\le\binom{|V(S)|}{t}\binom{n+p-|V(S)|}{|V(H)|-t}\cdot\frac{|V(H)|!}{|\mathsf{Aut}(H)|}\le\frac{n^{|V(H)|-t+o(1)}}{|\mathsf{Aut}(H)|}.$$

将此上界代入（C.12），可得

$$
\begin{aligned}
(\text{C.12}) &\le \sum_{\substack{S\in \mathsf{K}_{n,p}:[S]\in\mathcal{H}\\ 0\le r\le \aleph \\ r+1\le t\le \aleph}} \sum_{[H]\in\mathcal{H}} \frac{\Xi(S)^2\Xi(H)^2}{\Omega(S)n^{|V(H)|-r-o(1)}\beta_{\mathcal{H}}^2}\cdot \frac{n^{|V(H)|-t+o(1)}}{|\mathsf{Aut}(H)|} \\
&\overset{(3.12)}{=} \sum_{\substack{S\in \mathsf{K}_{n,p}:[S]\in\mathcal{H}\\ 0\le r\le \aleph \\ r+1\le t\le \aleph}} \frac{\Xi(S)^2}{\Omega(S)n^{t-r-o(1)}\beta_{\mathcal{H}}} = \sum_{S\in \mathsf{K}_{n,p}:[S]\in\mathcal{H}} \frac{\Xi(S)^2}{\Omega(S)n^{1-o(1)}\beta_{\mathcal{H}}} \\
&= \frac{1}{n^{1-o(1)}\beta_{\mathcal{H}}} \sum_{[H]\in\mathcal{H}} \frac{\Xi(H)^2}{\Omega(H)}\cdot \#\{S\subset \mathsf{K}_{n,p}: S\cong H\} \\
&\overset{(4.9)}{=} \frac{1}{n^{1-o(1)}\beta_{\mathcal{H}}} \sum_{[H]\in\mathcal{H}} \frac{\Xi(H)^2}{\Omega(H)}\cdot \frac{\Omega(H)}{|\mathsf{Aut}(H)|} \overset{(3.12)}{=} n^{-1+o(1)}\,,
\end{aligned}
$$

从而得到（4.17）。

C.3 引理的证明4.8

回顾（3.11），

$$
\Xi(H) = \rho^{|\mathsf{dif}_0(H)|+2|\mathsf{dif}(H)|}\big(\tfrac{\mu^2}{\gamma}\big)^{\frac14|E_0(H)|}\prod_{1\le \ell\le L}\big(\epsilon_\ell^2\lambda_\ell\big)^{\frac12|E_\ell(H)|}.
$$

对于所有 $0\le \ell\le L$，不难验证

$$
|E_\ell(S)| = \sum_{1\le \mathtt{t}\le \mathtt{T}+1}|E_\ell(S_{\mathtt{t}})| + \sum_{1\le \mathtt{t}\le \mathtt{T}}|E_\ell(\widetilde{S}_{\mathtt{t}})|\,. \tag{C.14}
$$

此外，对于所有 $v\in V(S)$，我们有

$$
\sum_{1\le \mathtt{t}\le \mathtt{T}+1}\mathbf{1}(v\in \mathsf{dif}_0(S_{\mathtt{t}})) + \sum_{1\le \mathtt{t}\le \mathtt{T}}\mathbf{1}(v\in \mathsf{dif}_0(\widetilde{S}_{\mathtt{t}})) \le \mathbf{1}(v\in \mathsf{dif}_0(S)) + 1\,.
$$

因此，我们有

$$
\begin{aligned}
|\mathsf{dif}_0(S)| &= \sum_{v\in V(S)}\mathbf{1}(v\in \mathsf{dif}_0(S)) \\
&\ge \sum_{v\in V(S)}\Big(\sum_{1\le \mathtt{t}\le \mathtt{T}+1}\mathbf{1}(v\in \mathsf{dif}_0(S_{\mathtt{t}})) + \sum_{1\le \mathtt{t}\le \mathtt{T}}\mathbf{1}(v\in \mathsf{dif}_0(\widetilde{S}_{\mathtt{t}}))\Big) - 2\mathtt{T} \\
&= \sum_{1\le \mathtt{t}\le \mathtt{T}+1}|\mathsf{dif}_0(S_{\mathtt{t}}))| + \sum_{1\le \mathtt{t}\le \mathtt{T}}|\mathsf{dif}_0(S_{\mathtt{t}})| - 2\mathtt{T}\,.
\end{aligned} \tag{C.15}
$$

同样，我们有

$$
|\mathsf{dif}(S)| \ge \sum_{1\le \mathtt{t}\le \mathtt{T}+1}|\mathsf{dif}(S_{\mathtt{t}}))| + \sum_{1\le \mathtt{t}\le \mathtt{T}}|\mathsf{dif}(S_{\mathtt{t}})| - 2\mathtt{T}\,. \tag{C.16}
$$

将（C.14）–（C.16）代入（3.11），得到（4.29）。类似地，我们可以证明（4.30）。现在我们来看（4.31）。注意，由于 $E(S) \cap E(K) = E(S \Cap K)$，对于所有 $0 \le \ell \le L$，我们有

$$|E_\ell(S) \triangle E_\ell(K)| \ge \sum_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}} |E_\ell(\widetilde{S}_\mathtt{t})| + \sum_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}} |E_\ell(\widetilde{K}_\mathtt{t})| \,. \tag{C.17}$$

此外，注意到 $\mathsf{dif}_0(S_\mathtt{t}) \backslash \mathsf{L}(S_\mathtt{t}) \subset \mathsf{dif}_0(S) \backslash V(K)$ 两两不相交（$\mathsf{dif}_0(K) \backslash V(S)$ 的情况也类似），我们有

$$|\mathsf{dif}_0(S) \setminus V(K)| \ge \sum_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}} |\mathsf{dif}_0(\widetilde{S}_\mathtt{t})| - 2\mathtt{T} \,; \tag{C.18}$$

$$|\mathsf{dif}_0(K) \setminus V(S)| \ge \sum_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}} |\mathsf{dif}_0(\widetilde{K}_\mathtt{t})| - 2\mathtt{T} \,. \tag{C.19}$$

同理，我们有

$$|\mathsf{dif}(S) \setminus V(K)| \ge \sum_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}} |\mathsf{dif}(\widetilde{S}_\mathtt{t})| - 2\mathtt{T} \,; \tag{C.20}$$

$$|\mathsf{dif}(K) \setminus V(S)| \ge \sum_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}} |\mathsf{dif}(\widetilde{K}_\mathtt{t})| - 2\mathtt{T} \,. \tag{C.21}$$

将 (C.17)–(C.21) 代入 (4.10) 可得 (4.31)。

C.4 引理 4.9 的证明

在证明引理 4.9 之前，我们先证明下面这个引理，它将在后续证明中反复用到。回顾一下，$\mathcal{J}_\star(\aleph)$ 表示满足 $|V_\mathsf{a}(H)| = \aleph + 1$ 的无标号装饰路径 $[H]$集合。

引理 C.1。对于所有 $\mathsf{a} \ge 0$ 以及给定的 u, v，我们有

$$\sum_{S : [S] \in \mathcal{J}_\star(\mathsf{a}), \mathsf{L}(S) = \{u,v\}} \frac{n \Xi(S)^2}{\Omega(S)} \le O(1) \cdot \sigma_+(\mathbf{P})^\mathsf{a} \cdot n^{\mathbf{1}(u=v)} \,. \tag{C.22}$$

证明。当 $u = v$时，显然，左侧求和仅涉及 $S = \{u\}$ 是一个单个顶点，因此等于 n，所以在此情形下（C.22）成立（$\mathsf{a} = 0$ 和 $n^{\mathbf{1}(u=v)} = n$）。对于 $u \ne v$的情形，显然，式（C.22）的左侧等于

$$\begin{aligned} &\sum_{[H] \in \mathcal{J}_\star(\mathsf{a})} \frac{n \Xi(H)^2}{\Omega(H)} \cdot \#\big\{S \subset \mathsf{K}_{n,p} : S \cong H, \mathsf{L}(S) = \{u,v\}\big\} \\ &= [1 + o(1)] \sum_{[H] \in \mathcal{J}_\star(\mathsf{a})} \frac{n \Xi(H)^2}{\Omega(H)} \cdot \frac{n^{|V^\mathsf{a}(H) \setminus \mathsf{L}(H)|} p^{|V^\mathsf{b}(H) \setminus \mathsf{L}(H)|}}{|\mathsf{Aut}(H)|} \,. \end{aligned} \tag{C.23}$$

注意，我们有

$$\begin{aligned} &|V^\mathsf{a}(H) \setminus \mathsf{L}(H)| - |E(H)| + \tfrac{1}{2}|E_0(H)| = O(1) \,, \\ &|V^\mathsf{b}(H) \setminus \mathsf{L}(H)| - \tfrac{1}{2}|E_0(H)| = O(1) \,, \\ &|V^\mathsf{a}(H) \setminus \mathsf{L}(H)| + |V^\mathsf{b}(H) \setminus \mathsf{L}(H)| = |E(H)| - 1 \,. \end{aligned}$$

因此，

$$n \cdot n^{|V^{\mathsf{a}}(H)\setminus \mathsf{L}(H)|} p^{|V^{\mathsf{b}}(H)\setminus \mathsf{L}(H)|} = n \cdot n^{|V^{\mathsf{a}}(H)\setminus \mathsf{L}(H)|} (n/\gamma)^{|V^{\mathsf{b}}(H)\setminus \mathsf{L}(H)|} = O(1) \cdot n^{|E(H)|}.$$

由（4.9），我们有

$$\Omega(H) = n^{|E(H)|-\frac{1}{2}|E_0(H)|} p^{\frac{1}{2}|E_0(H)|} = n^{|E(H)|-\frac{1}{2}|E_0(H)|} (n/\gamma)^{\frac{1}{2}|E_0(H)|} = O(1) \cdot n^{|E(H)|}.$$

因此，我们有

$$\frac{n \cdot n^{|V^{\mathsf{a}}(H)\setminus \mathsf{L}(H)|} p^{|V^{\mathsf{b}}(H)\setminus \mathsf{L}(H)|}}{\Omega(H)} = O(1)$$

从而

$$(\text{C.23}) = O(1) \cdot \sum_{[H]\in\mathcal{J}_\star(\mathsf{a})} \frac{\Xi(H)^2}{|\mathsf{Aut}(H)|} \overset{(3.21)}{=} O(1) \cdot \beta_{\mathcal{J}_\star(\mathsf{a})} \overset{\text{Lemma 3.7}}{=} O(1) \cdot \sigma_+(\mathbf{P})^{\mathsf{a}},$$

因此（C.22）在这种情况下也成立。 □

现在回到引理 4.9的证明。我们将把（4.32）分成若干部分，并分别对每一部分进行界定。注意到 C 和 ρ是常数，我们在下文将 $C^{4\mathsf{T}+5}\rho^{-40\mathsf{T}}$ 记为 $O(1)^{\mathsf{T}}$。只需证明

$$\sum_{\mathsf{T}\ge 0} \frac{O(1)^{\mathsf{T}} n^{-3\mathsf{T}+1}}{\beta_{\mathcal{J}}^2} \sum_{S_\cap, S_\setminus, K_\setminus \in \mathcal{A}_{\mathsf{T}}} \prod_{1\le \mathsf{t}\le \mathsf{T}+1} \frac{n\Xi(S_{\mathsf{t}})^2}{\Omega(S_{\mathsf{t}})} \prod_{1\le \mathsf{t}\le \mathsf{T}} \frac{n\Xi(\widetilde{S}_{\mathsf{t}})^2}{\Omega(\widetilde{S}_{\mathsf{t}})} \prod_{1\le \mathsf{t}\le \mathsf{T}} \frac{n\Xi(K_{\mathsf{t}})^2}{\Omega(\widetilde{K}_{\mathsf{t}})} \le O(1).$$

我们将分别考虑以下三种情况：$\mathsf{T}=0$、$\mathsf{T}=1$ 和 $\mathsf{T}\ge 2$。注意，对于 $\mathsf{T}=0$ 和 $\mathsf{T}=1$ 的情况，我们可以直接将 $O(1)^{\mathsf{T}}$ 写为 $O(1)$。

第 1 部分：情形 $\mathsf{T}=0$。 在这种情形下，我们有 $V(S)=V(K)$，因此

$$S_\setminus = K_\setminus = \emptyset, \quad S_\cap = S_1 = S.$$

因此，这一部分对式（4.32）的贡献有如下上界：

$$\begin{aligned} &O(1) \cdot \frac{n}{\beta_{\mathcal{J}}^2} \sum_{[S]\in\mathcal{J}_\star(\aleph):\mathsf{L}(S)=\{a_u,a_v\}} \frac{\Xi(S)^2}{\Omega(S)} \\ &\le O(1) \cdot \frac{n\sigma_+(\mathbf{P})^{\aleph}}{\beta_{\mathcal{J}}^2} \overset{\text{Lemma 3.7}}{\le} O(1) \cdot n\sigma_+(\mathbf{P})^{-\aleph} \overset{(3.23)}{=} o(1), \end{aligned} \tag{C.24}$$

其中，第一个不等式由在引理 C.1中取 $\mathsf{a}=\aleph$ 得到。

第 2 部分：情形 $\mathsf{T}=1$。 在这种情形下，我们有

$$S_\cap = S_1 \cup S_2, \quad \widetilde{S}_\setminus = \widetilde{S}_1, \quad K_\setminus = \widetilde{K}_1.$$

记 $\mathfrak{v}(S) = \mathbf{1}_{\{S \text{ 是单个顶点}\}}$。我们至多有 4 种 $\mathfrak{v}(S_1)$ $\mathfrak{v}(S_2)$ 的选择。此外，给定$\mathfrak{v}(S_1)$ $\mathfrak{v}(S_2)$，我们有

$$(n+p)^{2-\mathfrak{v}(S_1)-\mathfrak{v}(S_2)} = O(1) \cdot n^{2-\mathfrak{v}(S_1)-\mathfrak{v}(S_2)}$$

$\mathsf{L}(S_1)$，$\mathsf{L}(S_2)$ 的选择（注意 $a_u \in \mathsf{L}(S_1)$、 $a_v \in \mathsf{L}(S_2)$，并且其他叶子有 $n+p$ 种选择）。此外，假设 $|V^{\mathtt{a}}(S_1)| = \mathtt{a}$ 且 $|V_{\mathtt{a}}(S_2)| = \mathtt{b}$，我们有

$$|V^{\mathtt{a}}(\widetilde{S}_1)|, |V^{\mathtt{a}}(\widetilde{K}_1)| \in \{\aleph - \mathtt{a} - \mathtt{b}, \aleph - \mathtt{a} - \mathtt{b} + 1, \aleph - \mathtt{a} - \mathtt{b} + 2\}.$$

这里，$|V^{\mathtt{a}}(S_1) \cap V^{\mathtt{a}}(S_1)|$，$|V^{\mathtt{a}}(S_1) \cap V^{\mathtt{a}}(S_2)| \in \mathtt{a}(\,)$，$\mathtt{a}(\,)$ 的确切取值取决于 $(\,)(\,)(\,)(\,)V\mathtt{a}(S)$ 和 $V(S_1) \cap V(K_1)$ $V(K_1) \cap V(S_2) \in V\mathtt{a}(K)$。因此，根据引理 C.1，在给定 $\mathsf{L}(S_1), \mathsf{L}(S_2)$（从而 $\mathsf{L}(S_1), \mathsf{L}(K_1)$ 也已固定）以及 $|V\mathtt{a}(S_1)|, |V\mathtt{a}(K_1)| \le \aleph - \mathtt{a} - \mathtt{b} + 2$ 的情况下，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{S_\cap, S_\setminus, K_\setminus} \frac{n\Xi(S_1)^2}{\Omega(S_1)} \cdot \frac{n\Xi(S_2)^2}{\Omega(S_2)} \cdot \frac{n\Xi(\widetilde{S}_1)^2}{\Omega(\widetilde{S}_1)} \cdot \frac{n\Xi(\widetilde{K}_1)^2}{\Omega(\widetilde{K}_1)} \\
&\le O(1) \cdot n^{\mathfrak{V}(S_1)+\mathfrak{V}(S_2)} \cdot \sigma_+(\mathbf{P})^{\mathtt{a}} \cdot \sigma_+(\mathbf{P})^{\mathtt{b}} \cdot \sigma_+(\mathbf{P})^{\aleph-\mathtt{a}-\mathtt{b}+2} \cdot \sigma_+(\mathbf{P})^{\aleph-\mathtt{a}-\mathtt{b}+2} \\
&= O(1) \cdot n^{\mathfrak{V}(S_1)+\mathfrak{V}(S_2)} \cdot \sigma_+(\mathbf{P})^{2\aleph-\mathtt{a}-\mathtt{b}+4}.
\end{aligned}$$

因此，这部分对（4.32）的贡献有如下界

$$\begin{aligned}
&O(1) \cdot \frac{n^{-2}}{\beta_{\mathcal{J}}^2} \sum_{\mathtt{a}+\mathtt{b} \le \aleph} n^{2-\mathfrak{V}(S_1)-\mathfrak{V}(S_2)} \cdot n^{\mathfrak{V}(S_1)+\mathfrak{V}(S_2)} \cdot \sigma_+(\mathbf{P})^{2\aleph-\mathtt{a}-\mathtt{b}+4} \\
&\overset{\text{Lemma 3.7}}{\le} O(1) \cdot \sum_{\mathtt{a}+\mathtt{b} \le \aleph} \sigma_+(\mathbf{P})^{-\mathtt{a}-\mathtt{b}+4} = O(1),
\end{aligned} \tag{C.25}$$

其中最后一个不等式由 $\sigma_+(\mathbf{P}) > 1$ 根据引理 3.7 结合（3.1）得出。**第 3 部分：情形 $\mathtt{T} \ge 2$。** 在此情形下，我们有

$$S_\cap = \cup_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}+1} S_{\mathtt{t}}, \quad S_\setminus = \cup_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}} \widetilde{S}_{\mathtt{t}}, \quad K_\setminus = \cup_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}} \widetilde{K}_{\mathtt{t}}.$$

同样，定义 $\mathfrak{V}(S) = \mathbf{1}_{\{S \text{ 是单个顶点}\}}$，我们有至多 $2^{\mathtt{T}+1}$ 种 $\{\mathfrak{V}(S_{\mathtt{t}}) \text{ 的选择：} 1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}+1\}$。此外，给定 $\{\mathfrak{V}(S_{\mathtt{t}})\text{：} 1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}+1\}$，我们有

$$(n+p)^{2\mathtt{T}-\mathfrak{V}(S_1)-\ldots-\mathfrak{V}(S_{\mathtt{T}+1})} \le (1+\gamma^{-1})^{2\mathtt{T}} n^{2\mathtt{T}-\mathfrak{V}(S_1)-\ldots-\mathfrak{V}(S_{\mathtt{T}+1})}$$

S_1 的 L 取值选择数 $\ldots, \mathsf{L}(S_{\mathtt{T}+1})$。此外，至多有 $\aleph^{3\mathtt{T}+1}$ 种选择

$$(p_{\mathtt{t}}, \widetilde{p}_{\mathtt{t}}, \widetilde{q}_{\mathtt{t}}) = \Big(|V^{\mathtt{a}}(S_{\mathtt{t}})|, |V^{\mathtt{a}}(\widetilde{S}_{\mathtt{t}})|, |V^{\mathtt{a}}(\widetilde{K}_{\mathtt{t}})|\Big).$$

并且我们必须有

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}+1} p_{\mathtt{t}} + \sum_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}} \widetilde{p}_{\mathtt{t}} &\le \aleph + 2\mathtt{T}; \\
\sum_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}+1} p_{\mathtt{t}} + \sum_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}} \widetilde{q}_{\mathtt{t}} &\le \aleph + 2\mathtt{T}.
\end{aligned} \tag{C.26}$$

最后，利用引理 C.1，给定上文的 $\mathsf{L}(S_1) \ldots, \mathsf{L}(S_{\mathtt{T}+1})$ 和 $(p_{\mathtt{t}}, \widetilde{p}_{\mathtt{t}}, \widetilde{q}_{\mathtt{t}})$，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{S_\cap, S_\setminus, K_\setminus \in \mathcal{A}_{\mathtt{T}}: \\ \text{given } \mathsf{L}(S_1), \ldots, \mathsf{L}(S_{\mathtt{T}+1}) \text{ and } (p_{\mathtt{t}}, \widetilde{p}_{\mathtt{t}}, \widetilde{q}_{\mathtt{t}})}} \prod_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}+1} \frac{n\Xi(S_{\mathtt{t}})^2}{\Omega(S_{\mathtt{t}})} \prod_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}} \frac{n\Xi(\widetilde{S}_{\mathtt{t}})^2}{\Omega(\widetilde{S}_{\mathtt{t}})} \prod_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}} \frac{n\Xi(K_{\mathtt{t}})^2}{\Omega(\widetilde{K}_{\mathtt{t}})} \\
&\le O(1)^{\mathtt{T}} n^{\mathfrak{V}(S_1)+\ldots+\mathfrak{V}(S_{\mathtt{T}+1})} \prod_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}+1} \sigma_+(\mathbf{P})^{p_{\mathtt{t}}} \prod_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}} \sigma_+(\mathbf{P})^{\widetilde{p}_{\mathtt{t}}} \prod_{1 \le \mathtt{t} \le \mathtt{T}} \sigma_+(\mathbf{P})^{\widetilde{q}_{\mathtt{t}}} \\
&\overset{\text{(C.26)}}{\le} O(1)^{\mathtt{T}} \cdot n^{\mathfrak{V}(S_1)+\ldots+\mathfrak{V}(S_{\mathtt{T}+1})} \sigma_+(\mathbf{P})^{2\aleph}.
\end{aligned}$$

剩下的工作是对 L($S_1 \ \dots \ S_{T+1}$ $p_t \ \widetilde{p}_t \ \widetilde{q}_t$ $1+$)、L( ) 和 (,,) γ^{-1} $2T$ $n^{2T-\mathfrak{V}(S_1)-\dots-\mathfrak{V}(S_{T+1})}$ $S_1 \ \dots \ S_{T+1}$ $\aleph^{3T+1}$ ()()) 求和。回想一下，() 有至多 L()种可能的选择，L( ) 有至多 种可能的选择，而 $(p_t, \widetilde{p}_t, \widetilde{q}_t)$ 的选择至多有 种。因此，式 (4.32) 中这部分的贡献有界于

$$\begin{aligned}
&\sum_{T\geq 2} \frac{n^{-3T+1}}{\beta_{\mathcal{J}}^2} O(1)^{T+1} \cdot n^{2T-\mathfrak{V}(S_1)-\dots-\mathfrak{V}(S_{T+1})} \cdot \aleph^{3T+1} \cdot n^{\mathfrak{V}(S_1)+\dots+\mathfrak{V}(S_{T+1})} \sigma_+(\mathbf{P})^{2\aleph} \\
&\leq \sum_{T\geq 2} \frac{n^{-T+1}}{\beta_{\mathcal{J}}^2} \cdot O(1)^{T+1} \cdot \aleph^{3T+1} \cdot \sigma_+(\mathbf{P})^{2\aleph} \\
&\overset{\text{Lemma 3.7}}{\leq} O(1) \cdot \sum_{T\geq 2} O(1)^{T+1} \cdot \aleph^{3T+1} \cdot n^{-T+1} = n^{-1+o(1)} . \qquad \text{(C.27)}
\end{aligned}$$

结合（C.24）、（C.25）和（C.27）得到引理 4.9。

参考文献

[Abbe18] Emmanuel Abbe。社区检测与随机区块模型：近期进展。机器学习研究期刊，18(177):1–86，2018年。

[AS15] Emmanuel Abbe 和 Colin Sandon。一般随机区块模型中的社区检测：恢复的基本极限与高效算法。载于*IEEE* 第*56*届计算机科学基础年度研讨会论文集（*FOCS*），第670–688页。IEEE，2015年。

[AS18] Emmanuel Abbe和 Colin Sandon。一般随机块模型可达性猜想的证明。纯粹与应用数学通讯，71(7):1334–1406，2018年。

[ADH+08] Noga Alon、PhuongDao、ImanHajirasouliha、Fereydoun Hormozdiari 和 S¨uleyman Cenk Sahi- nalp。通过彩色编码进行生物分子网络基序计数与发现。生物信息学，24(13):i241– i249，2008年。

[AYZ95] Noga Alon、Raphael Yuster 和 Uri Zwick。颜色编码。*ACM*学报，42(4)：844–856，1995年。

[AR02] Vikraman Arvind 和 Venkatesh Raman。关于一些参数化计数问题的近似算法。载于第 *13* 届国际算法与计算研讨会（*ISAAC*）论文集，第 453–464 页。Springer，2002 年。

[Ban18] Debapratim Banerjee。植入划分模型的连续性与不可重构性结果：稠密情形。概率电子期刊，23：1–28，2018年。

[BM17] Debapratim Banerjee 和 Zongming Ma。具有增长度数的随机块模型的最优假设检验。arXiv 预印本，arXiv:1705.05305。

[BBP05] G´erard Ben Arous、Jinho Baik 和 Sandrine P´ech´e。非零复样本协方差矩阵最大特征值的相变。概率年刊，33(5)：1643–1697，2005 年。

[BC20+] Sharmodeep Bhattacharyya 和 Shirshendu Chatterjee。具有依赖层的多关系稀疏网络中的通用社区检测与最优恢复条件。arXiv 预印本，arXiv:2004.03480。

[BLM15] Charles Bordenave、Marc Lelarge 和 Laurent Massouli´e。随机图的非回溯谱：社区检测与非正则拉马努金图。载于 *IEEE* 第 *56* 届计算机科学基础年会（*FOCS*）论文集，第 1347–1357 页。IEEE，2015年。

[BDER16] S´Sebastien Bubeck、Jian Ding、Ronen Eldan 和 Mikl´os Z R´acz。随机图中的高维几何检验。随机结构与算法，49(3):503–532，2016年。

[CLM22] Shuxiao Chen、Sifan Liu 和 Zongming Ma。非齐次多层网络中的全局与个体化社区检测。统计学年刊，50(5):2664–2693，2022年。[DKMZ11] Aurelien Decelle、Florent Krzakala、Cristopher Moore 和 Lenka Zdeborov´a。模块化网络随机块模型的渐近分析及其算法应用。物理评论E，84:066106，2011年。[DAM17] Yash Deshpande、Emmanuel Abbe 和 Andrea Montanari。平衡二元随机块模型的渐近互信息。信息与推断：数学及其应用研究所期刊，6(2):125–170，2017年。[DMMS18] Yash Deshpande、Andrea Montanari、Elchanan Mossel 和 Subhabrata Sen。上下文随机块模型。载于《神经信息处理系统大会（NIPS）论文集》，第31卷，第8581–8593页，2018年。[DHSS25] Jingqiu Ding、Yiding Hua、Lucas Slot 和 David Steurer。随机块模型中恢复率计算相变的低阶证据。载于《神经信息处理系统大会（NIPS）论文集》，2025年。[GMZZ17] Chao Gao、Zongming Ma、Anderson Y. Zhang 和 Harrison H. Zhou。在随机块模型中实现最优误分类比例。机器学习研究期刊，18(60):1–45，2017年。[HLL83] Paul W. Holland、Kathryn B. Laskey 和 Samuel Leinhardt。随机块模型：初步探索。社会网络，5(2):109–137，1983年。[HS17] Samuel B. Hopkins 和 David Steurer。利用少量样本进行高效贝叶斯估计：社区检测及相关问题。载于 IEEE 第58届计算机科学基础年度研讨会（FOCS）论文集，第379–390页。IEEE，2017年。[Jan97] Svante Janson。高斯希尔伯特空间。剑桥数学丛书，第129卷。剑桥大学出版社，1997年。[KS66] Harry Kesten 和 Bernt P. Stigum。关于不可约多维 Galton-Watson过程的附加极限定理。数理统计年刊，37:1463–1481，1966年。[KMM+13] Florent Krzakala、Cristopher Moore、Elchanan Mossel、Joe Neeman、Allan Sly、Lenka Zdeborov´a 和 Pan Zhang。稀疏网络聚类中的谱救赎。美国国家科学院院刊，110(52):20935–20940，2013年。[LR05] Erich L. Lehmann 和 Joseph P. Romano。统计假设检验。Springer，2005年。[LCL20] Jing Lei、Kehui Chen 和 Brian Lynch。多层网络数据中的一致社区检测。生物计量学，107(1):61–73，2020年。[LZZ24] Jing Lei、Anru R. Zhang 和 Zihan Zhu。多层随机块模型中的计算阈值与统计阈值。统计学年刊，52(5):2431–2455，2024年。[Li25+] Zhangsong Li。相关尖峰模型中的算法相变。arXiv预印本，arXiv:2511.06040。[LS23] Chen Lu 和 Subhabrata Sen。上下文随机块模型：尖锐阈值与连续性。机器学习研究期刊，24(54):1–34，2023年。[MN23] Zongming Ma 和 Sagnik Nandy。利用上下文多层网络进行社区检测。IEEE信息论汇刊，69(5):3203–3239，2023年。[MN19] Jan R. Magnus 和 Heinz Neudecker。矩阵微分学及其在统计学和计量经济学中的应用。John Wiley & Sons，2019年。[MWXY24] Cheng Mao、Yihong Wu、Jiaming Xu 和 Sophie H. Yu。通过树计数高效检验网络相关性。统计学年刊，52(6):2483–2505，2024年。

[Mas14] Laurent Massouli´e. 社区检测阈值与弱拉马努金性质。载于第*46*届 *ACM* 计算理论年度研讨会（*STOC*）论文集，第 694–703 页。ACM，2014年。[MNS15] Elchanan Mossel、Joe Neeman 和 Allan Sly。植入划分模型中的重构与估计。概率论及相关领域，162(3)：431–461，2015年。[MNS18] Elchanan Mossel、Joe Neeman 和 Allan Sly。区块模型阈值猜想的证明。组合数学，38(3)：665–708，2018年。[MSS25a] Elchanan Mossel、Allan Sly 和 Youngtak Sohn。随机区块模型与树上重构的精确相变。概率年刊，53(3)：967–1018，2025年。[MSS25b] Elchanan Mossel、Allan Sly 和 Youngtak Sohn。随机区块模型与植入因子图中的弱恢复、假设检验和互信息。载于第*57*届 *ACM* 计算理论年度研讨会（*STOC*）论文集，第 2062–2073 页。ACM，2025年。[Mui09] Robb J. Muirhead。多元统计理论概论。Wiley 概率与统计丛书。John Wiley & Sons，2009年。[PC20] Subhadeep Paul 和 Yuguo Chen。用于多层网络中一致社区检测的谱方法与矩阵分解方法。统计学年刊，48(1)：230–250，2020年。[PWBM18] Amelia Perry、Alexander S. Wein、Afonso S. Bandeira 和 Ankur Moitra。主成分分析的最优性与次优性 I：尖峰随机矩阵模型。统计学年刊，46(5)：2416–2451，2018年。[RPS+21] Pedro Ribeiro、Pedro Paredes、Miguel E.P. Silva、David Aparicio 和 Fernando Silva。子图计数综述：概念、算法及其在网络模体和图元中的应用。*ACM* 计算调查，54(2)：1–36，2021年。[Tsy09] A. B. Tsybakov。非参数估计导论。Springer 统计学丛书。Springer，2009年。[VMGP16] Toni Valles-Catala、Francesco A. Massucci、Roger Guimera 和 Marta Sales-Pardo。多层随机块模型揭示复杂网络的多层结构。《物理评论*X*》，6(1)：011036，2016年。[YLS25] Xiaodong Yang、Buyu Lin 和 Subhabrata Sen。多视图数据中的社区检测基本极限：多层、动态和部分标记区块模型。统计学年刊，53(6)：2728–2756，2025年。[ZZ16] Anderson Y. Zhang 和 Harrison H. Zhou。随机区块模型中社区检测的极小极大速率。统计学年刊，44(5)：2252–2280，2016年。