arXiv:2602.08178v1 [math.DS] 9 Feb 2026

动力系统中无界观测量的大偏差

Anselmo Pontes

Abstract. 本文针对强混合马尔可夫链，建立了关于 L_p范数的一类大偏差估计。作为应用，我们推导了混合秩局部常值随机余环迭代的此类估计，以及扩张映射无界观测量的此类估计。

1. Introduction

遍历理论与概率论的一个核心主题，是研究动力系统和马尔可夫过程的统计性质。强混合通常能确保观测量时间平均呈现随机行为，这一点体现在大数定律、中心极限定理（CLT）和大偏差原理（LDP）等经典极限定理中。这些结果不仅阐明了确定性系统和随机系统的遍历行为，在应用中也发挥着基础性作用。

对于属于具有谱隙性质的巴拿赫空间的有界可观测量（例如 H¨older 函数或有界变差函数），大偏差估计如今已得到充分研究。若 φ 是一个具有指数混合性质的系统中的此类观测量，通常可以得到如下形式的指数界

$$\mu\left\{x : \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(T^k x) - \int \varphi\, d\mu\Big| > \epsilon\right\} \le Ce^{-c(\epsilon)n}, \qquad n \ge 1.$$

这一情形已得到广泛研究；例如参见 [9, 10, 12, 5]。

一个自然的问题是，这些结果能否推广到无界可观测量，这类量在具体问题中经常出现。重要例子包括奇点附近的对数可观测量，例如$\varphi(x) = -\log d(x, z)$，它们出现在回复率、熵产生、李雅普诺夫指数以及连分数展开的研究中。在这些情形下，缺乏有界性使得无法直接应用谱方法，而要获得精确的偏差估计则需要额外的技术。该方向的现有工作要么聚焦于特定系统，要么给出次优界，通常具有[1]

拉伸指数衰减率，例如 $\exp(-n^{1/5})$；参见例如[2],[13]。

贡献。 本文的主要目标是在强混合随机动力系统的背景下，为无界观测量的大偏差估计建立一个系统的框架。我们的主要贡献如下：

- 我们证明了一个适用于马尔可夫系统的通用大偏差估计（定理 3.5）（M，K，μ，$\mathcal{B}$），将已知的有界可观测量指数偏差界推广至一大类满足适当截断和尾部条件的无界可观测量。

- 作为应用，我们为扩张区间映射以及形如$\varphi(x) = |\log d(x, z)|$ 的对数可观测量建立了新的偏差界（定理 4.1）。我们利用平稳序列的极大不等式改进了此前已知的结果，证明偏差概率的衰减速度至少与 $\exp(-c\, n^{1/3})$ 一样快。

- 我们给出了包括帐篷映射在内的具体示例，以说明抽象结果如何转化为显式动力系统中的定量界。

论文结构。第 2 节回顾马尔可夫系统所需的定义和混合框架。第 3 节给出定理 3.5 的证明。第 4 节将这些结果应用于区间上的扩张映射，并证明定理 4.1 及其推论。

本节回顾我们将要用到的主要定义。

2. Preliminaries

本节回顾基本定义和框架。

设 M 是一个紧致度量空间，其博雷尔 σ-代数为 $\mathcal{F}$，并以 $\mathrm{Prob}(M)$ 表示 M 上的博雷尔概率测度空间，该空间赋予弱*拓扑。

定义 2.1。 M 上的随机动力系统（SDS）是一个连续马尔可夫核

$$K : M \to \mathrm{Prob}(M), \qquad x \mapsto K_x,$$

将每个 $x \in M$ a 概率测度 K_x 赋予 M。

定义 2.2. 测度 $\mu \in \mathrm{Prob}(M)$ 称为 K–平稳的，如果

$$\mu(A) = \int_M K_x(A)\, d\mu(x), \qquad \forall A \in \mathcal{F}.$$

注 2.1. K–平稳测度的集合是 Prob(M) 的一个非空紧凸子集。

定义 2.3。 与 K 相关联的马尔可夫算子 是线性算子

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_K : L^\infty(M) \to L^\infty(M), \qquad \mathcal{Q}\varphi(x) = \int_M \varphi(y)\, dK_x(y).$$

我们称三元组（M， K， μ）为一个马尔可夫系统。在乘积空间$X^+ = M^{\mathbb{N}}$上，令

$$Z_n(x) := x_n, \qquad x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X^+,$$

为典范坐标映射。根据柯尔莫哥洛夫扩张定理，对于每个 $\pi \in$ Prob(M)，存在唯一的测度 $\mathbb{P}_\pi$ 定义在 X^+上，使得 $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ 是一个转移核为 K 、初始分布为 π的马尔可夫链。如果 π 是 K–平稳的，那么 $\mathbb{P}_\pi$ 在左移位

$$\sigma : X^+ \to X^+, \qquad \sigma(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \{x_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

给定一个观测量 φ ： $M \to \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，第 n个随机比尔霍夫和 为

$$S_n\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(Z_k(x)) = \varphi(x_0) + \cdots + \varphi(x_{n-1}), \qquad x \in X^+.$$

我们希望研究的主要性质，是随机比尔霍夫和依概率收敛到该观测量积分的速率。更确切地说，我们希望以与 Hoeffding 不等式相同的方式，建立有限次的集中上界。

定义 2.4。如果对于任意 $\epsilon > 0$ 和 $\varphi \in \mathcal{B}$，都存在 $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ 和 $c(\epsilon) > 0$，使得马尔可夫系统 (M， K， μ， $\mathcal{B}$) 满足大偏差定理（*LDT*），则称该系统满足大偏差定理。

$$\mathbb{P}_\mu \left\{ x \in X^+ : \left| \tfrac{1}{n} S_n\varphi(x) - \int \varphi\, d\mu \right| > \epsilon \right\} \leq e^{-c(\epsilon)n}, \qquad n \geq n_0(\epsilon).$$

为获得这类结果，必须将可观测量的空间 φ 限制在具有适当混合性质的巴拿赫空间 $\mathcal{B} \subseteq L^\infty(M)$中。在 [8], 中，作者证明了一致遍历马尔可夫链的大偏差定理，这类链具有已知最强的混合性质。许多相关例子并非一致遍历，例如由一致双曲映射的迭代所生成的过程。对于这类映射，已有许多结果（见 [12],[1]）从某个合适巴拿赫空间中转移算子的谱隙推导出大偏差定理。然而，也存在一些马尔可夫算子不具有谱隙性质的系统，例如 φ 中所考察的随机环面平移及其上的线性余循环。

算子不具有谱隙性质，例如 [4],[5]中所考察的随机环面平移及其上的线性余循环。这促使 [5] 的作者引入以下较弱的混合概念。

定义 2.5. 若一个马尔可夫系统 $(M, K, \mu, \mathcal{B})$ 满足以下条件，则称其为以速率 $\{r_n\}$ 强混合：对所有 $\varphi \in \mathcal{B}$,

$$\left\| \mathcal{Q}^n \varphi - \int_M \varphi \, d\mu \right\|_\infty \leq r_n \, \|\varphi\|_{\mathcal{B}}, \qquad n \geq 1.$$

在 [5], 中，作者证明了速率为 $r_n \searrow 0$的强混合马尔可夫系统满足大偏差定理。本研究的主要目标是探究无界观测量的情形下能够得到什么结果。为此，我们需要将有界情形下已有的结果应用于对观测量的截断。本研究的主要创新之处在于，使用 Burkholder不等式处理观测量的余项（无界部分）。

3. Martingale Approach

本节在收敛速率具有可求和性的温和附加假设下，重新得到 [5] 的大偏差定理结果。我们先回顾鞅差的定义。

定义 3.1. 设概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上有一列 σ–代数的滤过 $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$，随机变量序列 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 若满足对所有 $i = 1, \ldots, n$， X_i 都是 $\mathcal{F}_i-$ 可测的，则称其适应于该滤过。

定义 3.2。 设在概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上给定一个 σ–代数的滤过 $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$，若一列适应随机变量 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 满足以下条件，则称其为鞅差：

(1) $\mathbb{E}[X_1] = 0$;
(2) $\mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_{i-1}] = 0$。

定理 3.1 (Azuma-Hoeffding)。 设 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 是一列鞅差。若存在 $C > 0$ 使得 $\|X_i\|_\infty \leq C$，则对所有 $\varepsilon > 0$ ，我们有

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \varepsilon \right) \leq e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2C^2}} .$$

现在我们精确定义要应用 Azuma-Hoeffding不等式的鞅序列。回顾一下，我们正在考虑

我们的马尔可夫链的一个实现 $(Z_1, \ldots\ldots, Z_n)$。先来定义适当的滤过。对于每个 $i = 1, \ldots\ldots, n$，令

$$\mathcal{F}_i = \mathcal{F}(Z_1, \ldots, Z_i).$$

那么显然有 $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n$。

固定 $\varphi \in \mathcal{B}$，使得 $\int \varphi \, d\mu = 0$，并定义

$$\psi := \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{Q}^i \varphi \quad \text{note that} \quad \varphi = \psi - \mathcal{Q}\psi.$$

最后，对所有 $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$，考虑

$$X_i = \psi(Z_{i+1}) - \mathcal{Q}\psi(Z_i)\,.$$

容易看出

$$S_n\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(Z_i) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \psi(Z_1) - \mathcal{Q}\psi(Z_n)\,.$$

现在我们证明 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 是一个鞅差。

引理 3.1. $\{X_i\}_{i=0}^n$ 是关于滤过 $\{\mathcal{F}_i\}_{i=0}^n$的有限鞅差。

证明。根据马尔可夫性，$\mathscr{E}[X_i \mid \mathcal{F}_{i-1}] = \mathscr{E}[\psi(Z_i) \mid Z_{i-1}] - Q\psi(Z_{i-1}) = 0$，因此 $\{X_i\}$ 是鞅差。□

以下结果对应于 $p = \infty$ 且衰减率 r_n 可求和的情形。这里的证明将 [1] 中考虑的转移算子情形推广到一般的马尔可夫系统。

定理 3.2. 设 $\varphi \in L^\infty(\mu)$ 并假设

$$\psi := \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}^n \varphi \in L^\infty(\mu)\,.$$

那么，对每个 $\epsilon > 0$，都存在 $N(\epsilon, \varphi) = \frac{4}{\epsilon ||\psi||_\infty}$，使得对于 $n \geq N$

$$\mu\left\{x \in M : \left|\frac{1}{n} S_n\varphi - \int_M \varphi d\mu\right| > \varepsilon\right\} \leq 2e^{-c(\epsilon)\, n},$$

其中 $c(\epsilon) = 8 \quad \frac{\epsilon^2}{(||\varphi||_\infty + 2(||\sum \mathcal{Q}^n \varphi||_\infty)^2}$。

证明。不失一般性，设 $\int \varphi \, d\mu = 0$。根据 X_i 的定义，显然对于 $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$，我们有：

$$||X_i||_\infty \leq ||\varphi||_\infty + 2||\psi||_\infty \tag{3.1}$$

由前面的引理可知， $\{X_i\}_{i=0}^n$ 是鞅差。因此可以应用 Azuma-Hoeffding不等式，得到。

$$\mu\left(\frac{1}{n}\left|\sum X_i\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2 n}{8(||\varphi||_\infty + 2||\psi||_\infty)^2}\right\}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$。特别地，对于 $n \geq N$，其中 $\frac{2}{N||\psi||_\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2}$，我们得到:

$$\begin{aligned}\mu\left(\frac{1}{n}|S_n| > \varepsilon\right) &\leq \mu\left(\frac{1}{n}\left|\sum X_i\right| + \frac{2}{N}||\psi||_\infty > \varepsilon\right) \\ &\leq \mu\left(\frac{1}{n}\left|\sum X_i\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2 n}{8(||\varphi||_\infty + 2||\psi||_\infty)^2}\right\},\end{aligned}$$

由此即可证明该结果。 □

在这种情况下，我们需要用到 Peligrag等人 [14] 针对严格平稳序列给出的 Burkholder 不等式的以下推广。

定理3.3. 设 X_k 是一个严格平稳序列，满足 $\mathbb{E}[|X_1|^p] < \infty$、 $p \geq 2$。则

$$\|S_n\|_p \leq C_p\, n^{\frac{1}{2}}\, [\|X_1\|_p + 240 \sum_{k=1}^{n} k^{-1/2}\, \|\mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_0]\|_p].$$

如果 X_i 是鞅差，那么该结果就还原为经典Burkholder不等式。

定理3.4 (Burkholder不等式)。 设 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 是一个适应于滤过 $\{\mathcal{F}_i\}$ 的鞅差序列。那么，对于任意 $p \geq 2$，存在常数 C_p，使得

$$\|S_n\|_p \leq C_p\, n^{\frac{1}{2}}\, \|X_1\|_p.$$

注3.1。 一般而言， $C_p \leq p^p$，对于 $p \geq 4$ 有更好的界。

在马尔可夫系统的情形下，我们考虑 $\mathcal{F}_i = \sigma(Z_0、\ldots\ldots、 Z_i)$，并注意到 $\mathbb{E}[\varphi(Z_k)|\mathcal{F}_0] = \mathcal{Q}^k\varphi(Z_0)$。因此，我们得到以下推论，这将是我们实际采用的 Burkholder 不等式形式。

推论3.2. 设$(M, K, \mu, \mathcal{B})$ 是一个收敛速率为 $\{r_n\}$的强混合马尔可夫系统，考虑一个满足 $\int \varphi\, d\mu = 0$的观测量 $\varphi \in \mathcal{B}$。那么

$$\|S_n\varphi\|_p \leq C_p\, n^{\frac{1}{2}}\, [(\|\varphi\|_p + 240 \sum_{k=1}^{n} \tfrac{\|\mathcal{Q}^k\varphi\|_2}{\sqrt{k}})].$$

3.1. **某些无界观测量的大偏差**。 现在，我们准备将前面的结果推广到尾部分布衰减良好的无界可观测量。

定理 3.5 (无界观测量的大偏差估计)。设 $(M, K, \mu, \mathcal{B})$ 是一个强混合马尔可夫系统，并设 $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ 是满足以下条件的观测量：

(1)（截断后的正则性）对每个 $M > 0$，截断观测量 $\varphi \cdot \mathbb{1}_{\{\varphi \le M\}}$ 属于 $\mathcal{B}$。*(2)*（指数尾部）存在常数 $C_1, \alpha > 0$ 使得

$$\mu(\varphi > t) \le C_1 e^{-\alpha t}, \quad \forall t > 0.$$

(3)（L^2-尾部控制）存在常数 $C_2 > 0$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-1/2} \left\| Q^k \left(\varphi \cdot \mathbb{1}_{\{\varphi > M\}} \right) \right\|_2 \le C_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

那么，对每个 $\epsilon > 0$，存在常数 $c = c(\alpha) > 0$ 以及

$$n_0(\epsilon) := \left\lceil \frac{16C\|\varphi^2\|_2}{\epsilon} \right\rceil \in \mathbb{N}$$

使得，对所有 $n \ge n_0(\epsilon)$，伯克霍夫和

$$S_n\varphi := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(Z_k)$$

满足大偏差界

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} S_n\varphi > \epsilon \right) \le 2\exp\left(-c\epsilon^{2/3} n^{1/3} \right).$$

证明。 不失一般性，假设 $\int \varphi \, d\mu = 0$。对于截断水平 $M > 0$，将 φ 分解为

$$\varphi = \varphi_M + R_M, \quad \text{where} \quad \varphi_M := \varphi \cdot \mathbb{1}_{\{\varphi \le M\}}, \quad R_M := \varphi \cdot \mathbb{1}_{\{\varphi > M\}}.$$

然后，由三角不等式和概率的次可加性，

$$\mathbb{P}\left(S_n\varphi > n\epsilon \right) \le \mathbb{P}\left(S_n\varphi_M > \frac{n\epsilon}{2} \right) + \mathbb{P}\left(S_n R_M > \frac{n\epsilon}{2} \right).$$

由于 φ_M 受 M 限制且属于 $\mathcal{B}$，强混合意味着具有足够的正则性，可以应用定理3.2：

$$\mathbb{P}\left(S_n\varphi_M > \frac{n\epsilon}{2} \right) \le \exp\left(-\frac{n\epsilon^2}{8M^2} \right).$$

利用适应序列的 Burkholder不等式（见 [3]），我们控制尾和的 L^2范数：

$$\begin{aligned}\|S_n R_M\|_2^2 &\le 4nC \left\|\varphi \cdot \mathbb{1}_{\{\varphi > M\}}\right\|_2^2 \\ &\le 4nC \left\|\varphi^2\right\|_2 \cdot \mu(\varphi > M)^{1/2} \\ &\le 4nC \left\|\varphi^2\right\|_2 \cdot e^{-\alpha M/2},\end{aligned}$$

其中我们在最后一步使用了指数尾假设。应用切比雪夫不等式：

$$\mathbb{P}\left(S_n R_M > \frac{n\epsilon}{2}\right) \le \frac{4\|S_n R_M\|_2^2}{n^2\epsilon^2} \le \frac{16C\|\varphi^2\|_2}{n\epsilon^2} e^{-\alpha M/2}.$$

Set

$$M := \frac{\epsilon^{2/3} n^{1/3}}{\sqrt[3]{4}},$$

从而两个误差项以相同的次指数速率衰减。将其代入先前的界，可得：

$$\mathbb{P}\left(S_n\varphi > n\epsilon\right) \le \exp\left(-c_1\epsilon^{2/3}n^{1/3}\right) + \frac{c_2}{n\epsilon^2}\exp\left(-c_3\epsilon^{2/3}n^{1/3}\right),$$

对某些依赖于 ϵ 和 $\|\varphi^2\|_2$的常数 $c_1, c_2, c_3 > 0$ 。对于 $n \ge n_0(\epsilon)$:= $\left\lceil \frac{16C\|\varphi^2\|_2}{\epsilon} \right\rceil$，第二项被第一项所控制，从而得到所需的界：

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}S_n\varphi > \epsilon\right) \le 2\exp\left(-c\epsilon^{2/3}n^{1/3}\right).$$

□

注记 3.2. 定理 3.5 将 [11]的定理 3.2 推广至可表示为鞅差序列与余边界之和的无界可观测量情形。这一表述涵盖了动力系统与随机系统中更广泛的一类过程。

注记 3.3. 一个有趣的研究方向是弄清采用如 [6]中那样的自归一化方法能够得到何种界。

4. 应用

4.1. 混合秩余循环的李雅普诺夫指数的大偏差。 在 [7], 中，作者证明了具有正向绕行性质和固定奇异矩阵的余循环族 $t \to A_t$ 中，对于勒贝格几乎处处的参数，都成立（次指数级）大₁偏差估计，其衰减率为 e^{-n^3} 。他们的证明采用了谨慎的

截断论证；也可以通过应用定理 3.5 得到另一种证明，因为他们在研究中验证了所关注的观测量满足定理 3.5 的条件，参见引理 3.4 和 3.7。

4.2. **扩张映射的无界观测量的大偏差**。我们首先回顾扩张映射的概念。

定义 4.1 ($C^{1+\alpha}$ 扩张映射**).** 设 M 为一个紧致 C^∞黎曼流形。一个 $C^{1+\alpha}$ 映射 $T\colon\ M \to M$ 称为扩张，如果存在常数 $\lambda > 1$ 使得:

$$\inf \|DT_x\| > \lambda.$$

我们的主要应用如下。

定理 4.1。 设 $(T、\ X、\ \mu)$ 是一个动力系统，其中 $X = [0,1]$，且 μ 是关于 T 不变的绝对连续不变概率测度（*a.c.i.p.*），其密度有上界，即 $\frac{d\mu}{dLeb} \le C_\mu$。

考虑观测量 $\varphi\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}$，定义为

$$\varphi(x) := |\log d(x,z)|,$$

对于某个固定的 $z \in X$。

假设 $\mathcal{L}$（关于 μ的转移算子）在 α-赫尔德函数空间中呈指数衰减。也就是说，存在常数 $\theta > 0$ 和 $C_{\mathcal{L}} > 0$，使得

$$\|\mathcal{L}^n f\|_\alpha \le C_{\mathcal{L}} e^{-\theta n} \|f\|_\alpha, \quad \textit{provided that } \int f\, d\mu = 0.$$

那么对于每个 $\varepsilon > 0$，存在常数 $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ 和 $c(\epsilon) > 0$，使得对于 $n \ge n_0$

$$\mu\left(\left|S_n\left(\varphi - \int \varphi\, d\mu\right)\right| > n\varepsilon\right) \le \exp(-c\,\epsilon\, n^{1/3}),$$

其中 $S_n(\psi)\colon = \sum_{k=0}^{n-1} \psi \circ T^k$ 表示伯克霍夫和。

证明。 策略是验证观测量 $\varphi(x) = |\log d(x,z)|$在将巴拿赫空间$\mathcal{B}$取为赫尔德空间 $C^\alpha([0,1])$（其范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 控制上确界与赫尔德半范数）且 $Q = \mathcal{L}$ 为作用于函数的转移算子时，满足定理 3.5 的三个假设。

（1）截断后的正则性。固定 $M > 0$，并考虑截断观测量

$$\varphi_M(x) := \varphi(x) \cdot \mathbf{1}_{\{\varphi \le M\}}(x) = |\log d(x,z)| \cdot \mathbf{1}_{\{d(x,z) \ge e^{-M}\}}(x).$$

在紧集 $\{x \in [0,1] \text{ 上: } d(x,\ z) \geq e^{-M}\}$ 函数 $|\log\ d(x,\ z)|$有界，且在远离 z 的区域内是利普希茨/赫尔德连续的：事实上，示性函数消除了 z 处的奇异性。因此， φ_M 是有界赫尔德函数，即 $\varphi_M \in C^\alpha([0,1])$。这验证了第一个假设。

(2) 指数尾部。对于 $t > 0$,

$$\{\varphi > t\} = \{|\log d(x,z)| > t\} = \{d(x,z) < e^{-t}\}.$$

这是一个区间（或边界附近至多两个区间的并），其勒贝格长度至多为 $2e^{-t}$。由于 $d\mu/d\text{Leb} \leq C_\mu$，我们得到

$$\mu(\varphi > t) \leq C_\mu \cdot \text{Leb}(\{d(x,z) < e^{-t}\}) \leq 2C_\mu e^{-t}.$$

因此，定理 3.5 的指数尾部假设成立，其中 $C_1 = 2C_\mu$ 且 $\alpha = 1$。

(3) L^2-尾部控制（中心化）。我们定义尾函数（截断水平为 $M > 0$）

$$\tau_M(x) := \varphi(x)\mathbf{1}_{\{\varphi > M\}}(x) = |\log d(x,z)|\mathbf{1}_{\{d(x,z) < e^{-M}\}}(x).$$

我们将对中心化尾部应用谱隙假设

$$\tilde{\tau}_M := \tau_M - \mu(\tau_M),$$

其均值为零。首先注意， $\tau_M \in L^2(\mu)$ 及其 L^2-范数关于 M 指数级小。事实上，利用标准的尾积分公式和 (2) 中建立的尾部界,

$$\begin{aligned}\|\tau_M\|_2^2 \ &= \int_{\{\varphi > M\}} \varphi^2\, d\mu = \int_M^\infty 2t\, \mu(\varphi > t)\, dt \leq \int_M^\infty 2t \cdot (2C_\mu e^{-t})\, dt \\ &= 4C_\mu \int_M^\infty te^{-t}\, dt = 4C_\mu(M+1)e^{-M}.\end{aligned}$$

因此

$$\|\tau_M\|_2 \leq C'(M+1)^{1/2}e^{-M/2}$$

对某个仅依赖于 C_μ 的显式常数 C' ，尤其是，$\|\tau_M\|_2 \to 0$ 以 $M \to \infty$ 的速度指数级趋近。

接下来，只需利用转移算子不会增大 L^2 中范数这一事实，并利用 φ 的指数尾部。因此，定理 3.5 的假设 (3) 中对中心化尾部所要求的 L^2-控制得以满足（该界关于 n 一致，并依赖于截断水平 M；这正是应用一般定理所需的条件）。

定理 3.5 的应用。 在验证了截断的正则性、指数尾界以及（中心化）尾部的 L^2 控制后,

我们可以将定理 3.5 应用于由动力系统 $(T,\ X,\ \mu)$ 生成的随机变量序列（等价地，应用于由赫尔德空间上的转移算子 $\mathcal{L}$ 所诱导的马尔可夫系统）。定理 3.5 表明，对于每个 $\epsilon > 0$，存在常数 $c_0(\epsilon) > 0$ 和 $n_0(\epsilon)$，使得对所有 $n \geq n_0(\epsilon)$，

$$\mu\Big(\frac{1}{n}S_n\big(\varphi - \mu(\varphi)\big) > \epsilon\Big) \leq 2\exp\big(-c_0\,\epsilon^{2/3}n^{1/3}\big).$$

将同一界应用于观测量 $-\varphi$（或者等价地，应用于对称偏差），可得到负尾部的相同上界；利用并集界合并两个尾部后，得到

$$\mu\Big(\big|S_n(\varphi - \mu(\varphi))\big| > n\epsilon\Big) \leq 4\exp\big(-c_0\,\epsilon^{2/3}n^{1/3}\big).$$

最后请注意，对于 $\epsilon \in (0,1]$，我们有 $\epsilon^{2/3} \geq \epsilon$（实际上 $\epsilon^{2/3}/\epsilon = \epsilon^{-1/3} \geq 1$），因此

$$4\exp\big(-c_0\,\epsilon^{2/3}n^{1/3}\big) \leq 4\exp\big(-c_0\,\epsilon n^{1/3}\big).$$

重新命名常数（如有需要，可通过减小指数中的常数，将前因子 4 吸收到指数中），即可得到所需形式：存在常数 $n_0(\epsilon)$ 和 $c(\epsilon) > 0$，使得对所有 $n \geq n_0(\epsilon)$，

$$\mu\Big(\big|S_n(\varphi - \mu(\varphi))\big| > n\epsilon\Big) \leq \exp\big(-c(\epsilon)\,n^{1/3}\big).$$

定理 4.1 的证明至此完成。 □

推论 4.1 (帐篷映射应用)。对于帐篷映射 $T:\ [0,1] \to [0,1]$，其中 $\varphi(x) =$ 对数 $|x| - \int$ 对数 $|x| d\mu$，且取 μ 勒贝格测度，令 $\alpha = 1$、$C_1 = 1$、$C_2 = 4$，则对于 $n \geq \lceil 512/\epsilon^3 \rceil$:

$$\mathbb{P}_\mu\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log|T^k x|\right| > 1 + \epsilon\right) \leq 4\exp\left(-\frac{\epsilon^{4/3}n^{1/3}}{24}\right)$$

注 4.1. 如 [13] 所述，上述观测量不具有指数速率函数的大偏差。如果点 $z \in X$ 是周期点，[13]得到了具有速率 $\exp(-n^{1/2})$ 的最优拉伸指数衰减。如果 z 不是周期点，定理 4.1 改进了 [13] 先前得到的估计，其衰减率为 $\exp(-n^{1/5})$ 量级。

致谢。 这项工作是作者在里约热内卢天主教宗座大学攻读博士学位期间所完成的博士论文的一部分。作者感谢导师 Silvius Klein 的指导与支持。作者获得了 CAPES 资助，项目代码为 001。

References

1. J. F. Alves, 《非双曲系统中具有多维′扩张的 *SRB* 测度》，博士论文, IMPA，1997年，即将在《高等师范学校科学年刊》第2卷刊出。2. José F. Alves、Jorge M. Freitas、Stefano Luzzatto 和 Sandro Vaienti, 《从混合速率到回归时间：通过大偏差》，Adv. Math. **228**（2011），第2期，1203–1236页。MR 2822221。3. D. L. Burkholder, 《鞅的分布函数不等式》，Ann. Probability **1** （1973），19–42页。MR 365692。4. Ao Cai、Pedro Duarte 和 Silvius Klein, 《混合随机准周期余循环》，预印本 arXiv:2109.09544 [math.DS], 2021。5., 《混合马尔可夫链的统计性质及其在动力系统中的应用》，2024年。6. Victor H. de la Peña, 《一类适用于鞅和比率的广义指数不等式》，Ann. Probab.**27** （1999），第1期，537–564页。MR 1681153˜ ˜7. Pedro Duarte、Marcelo DurA£es、TomA© Graxinha 和 Silvius Klein, 《随机二维线性余循环 *II*：统计性质》，2025年。8. Peter W. Glynn 和 Dirk Ormoneit, 《一致遍历马尔可夫链的 *Hoeffding* 不等式》，Stat. Probab. Lett. **56** （2002），第2期，143–146页（英文）。9. M. I. Gordin, 《平稳过程的中心极限定理》，苏联科学院通报 **188** （1969），1174–1176页。10. M. I. Gordin 和 B. A. Lifshits, 《平稳马尔可夫过程的中心极限定理》，Sov. Math., Dokl.**19** （1978），392–394页（英文）。11. Emmanuel Lesigne 和 Dalibor Volný, 《鞅的大偏差》，Stochastic Process. Appl. **96** （2001），第1期，143–159页。MR 1856684。12. Ian Melbourne 和 Matthew Nicol, 《非一致双曲系统的大偏差》，Trans. Amer. Math. Soc. **360** （2008），第12期，6661–6676页。MR 2434305。13. Matthew Nicol 和 Andrew T¨or¨ok, 《关于无界观测量大偏差的说明》，Stoch. Dyn. **20** （2020），第5期，2050030，21页。MR 4133687。14. Magda Peligrad、Sergey Utev 和 Wei Biao Wu, 《平稳序列的一个最大 $\mathbb{L}_p$ 不等式及其应用》，Proc. Amer. Math. Soc.**135** （2007），第2期，541–550页。MR 2255301。

Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), Brazil电子邮箱地址：aspjunior2011@mat.puc-rio.br