arXiv:2602.08184v1 [math.LO] 9 Feb 2026

⋆华沙模型的翻译

Farmer Schlutzenberg*

2026年2月10日

摘要

.....的技术 $\star$-*translation* 对于校准决定性理论与大基数的强度的论证十分重要，例如 [9]和 [1]。它也被用于分析小鼠的内部理论，例如 [5], [3], [6]。

我们详细阐述了 $\star$星号翻译，并在阐述 [1]时略微提高了大基数层级。接着，我们为华沙模型发展了一种 $\star$星号翻译的变体，其中某些与伍丁基数重叠的扩张子是全的，并被用于直接在 $\star$星号翻译的序列上诱导扩张子。[1] 这一变体曾用于 [3]和 [6]，，但当时仅作概述，未详细阐述。我们利用这些材料验证了 [5]的星号平移假设，并推导出一些关于自迭代性的结论。

目录

1 引言 21.1 约定与记号 .3

2 R 与 R 之间的精细结构对应 **3**

2.1 类型 3 R 下， R 与 R_J之间的对应.5 2.2 R 与 $R[t]$ 之间（或 R_J 与 $R_J[t]$之间）的对应.7 2.3 $R[t]$ 与 $S^R[t]$之间的对应，等等（R 未作可容许缓冲）.10 2.3.1 存在一个 R-δ-测度时.10 2.3.2 当 R 为类型 2，cr(F^R) $< \delta$，且 R 没有 δ-测度时 . . . . . 11 2.3.3 当 R 为类型 3，cr(F^R) $< \delta$，且不存在 R-δ- 测度时 . . . . 17 2.4 当 R 作了可容许缓冲时， $R[t]$ 与 $R^\star$ 之间的对应.19 2.5 当 R^+ 为被动且不存在 R^+-δ-测度时.24

3 $R^\star$ 33的可迭代性

4 自迭代性 36

5 ⋆-华沙模型的翻译（不完整）36

*afirstname dot alastname at tuwien dot acdot at, afirstname dot alastname atgmail dotcom, https://sites.google.com/site/schlutzenberg/home-1[1]这是最终论文的草稿。在此草稿中，关于这一变体的详细讨论 $\star$-翻译尚未包含在内。之后将适时补充。

1 引言

任何真类 1-小鼠都能计算出自身在其论域上的迭代策略，因此满足“我完全可迭代”。另一方面，具有伍丁基数的真类小鼠满足“我并非完全可迭代”。但通常，无论大基数如何，小鼠都能计算出自身迭代策略的重要片段。

[4], Schindler 与 Steel 针对驯服小鼠M 沿这些思路建立了一个一般性结果——其中扩张子 $E \in \mathbb{E}_+^M$ 不与局部伍丁基数重叠。那里采用的一个关键方法是 P-构造，它是一种 $L[\mathbb{E}]$-构造，但会在某个区间内使用序列上的全部扩张子（包括部分扩张子），并且只能在特殊情形下形成。一个典型的此类情形是：我们有某个 $N \triangleleft M$上的一棵极限长度 ω-极大树 $\mathcal{T}$，使得 $\rho_\omega^N = \omega$，并且$\mathcal{T} \in \mathrm{HC}^M$，令 $\delta = \delta(\mathcal{T})$，则 δ是 M的强切点，序数$^N < \delta$， $\mathcal{T}$在 $M|\delta$上可由参数定义，并且 $M|\delta$对于 $M(\mathcal{T})$在 δ处的 δ-生成元扩张子代数是泛型的（这是 $M(\mathcal{T})$的一个类迫）。在此情形下，我们可能希望在 M内部计算出穿过 $\mathcal{T}$的正确分支 b （按照 N的唯一策略）。若 M是驯服的，则我们可以做到；事实上，Q-结构 $Q = Q(\mathcal{T}, b)$（它决定 b）由 M在 $M(\mathcal{T})$之上的 P-构造给出。也就是说，我们通过设定 $M(\mathcal{T}) \trianglelefteq Q$来定义 Q，然后令 $\mathbb{E}_+^Q \restriction (\delta, \text{序数}^Q]$ 由递归地把 $\mathbb{E}^M \restriction (\delta, \text{序数}^Q]$ 中的扩张子限制到正在构造的模型的相关节段而给出。这一过程直到某个序数高度都有意义，在该高度我们得到一个预鼠 Q，它就是正确的 Q-结构。

在非驯服小鼠中，情况更加复杂。在 [4] 中建立的关于驯服小鼠的完整结果尚未推广到非驯服层次；然而，利用由 Steel、Neeman 和 Closson 发展的一种 P-构造适配，仍然可以证明非驯服小鼠具有重要的自迭代性；见 [9, §7], [1]。这些方法对于 Steel 在 [9], 中对（前）小鼠的导出模型所作的分析，以及 Closson 在 [1]中的类似分析，都至关重要。（正如我们稍后将要说明的，我们的工作基本上比 [9]和 [1],更一般，尽管在一个次要方面不如它们一般。然而，这种更一般的性质只需要对分析作一些小的调整。）我们将 P-构造的适配（针对任意短扩张子小鼠）称为黑洞构造，记作，因为它是 $\star$-翻译（“星号翻译”）的逆操作。因此，黑洞构造与 P-构造一样，是通过限制 $\mathbb{E}^M$ 以上的所有扩张子 δ而形成的，但还涉及其他步骤，这些步骤与取核有关。事实上，在某些步骤中——例如，当 δ 是当前模型的投射，且 δ 是核嵌入的临界点时——我们确实会取核。[2] 在其他类型的步骤中，则不取核，而是将当前模型N 截取到其自身的某个节段 E，并添加一个扩张子，其 $\mathrm{cr}(E) < \delta$由 N的核嵌入导出。

尽管我们用黑洞构造来构造所需的 Q-结构，但本文主要关注其逆操作 $\star$-翻译。我们将从 V 中给定的 Q-结构 $Q = Q(\mathcal{T}, b)$ 开始，应用 $\star$-翻译生成 $Q^\star$，并证明 $Q^\star \triangleleft M$。这就是我们的主要任务。$Q^\star$ 的黑洞构造不过是 Q，而且由于 M 能计算其黑洞构造，因此可知我们有 $Q \in M$，并且 M 能正确识别它（进而用它计算 b）。

[2]在我们的语境中，这将对应于 δ 是一个局部可测 Woodin 基数——而在 [9] 和 [1], 中，这一点被假定为不成立，但我们允许这种情况。

我们所用的基本定义，尤其是 $\star$-翻译和 -构造，列于 [5, §8], ，我们假定读者熟悉相关内容。（ [5] 的 §8 与该论文其余部分相互独立，可以单独阅读。）如上所述，除一处细微差别外，我们的处理方式基本上比 [9] 和 [1], 更一般。首先，在 [9] 和 [1], 中，大致假定我们是在局部可测 Woodin 基数以下工作。更确切地说，假定不存在扩张子 E ，使得 $\mathrm{cr}(E) = \delta$ ，并且满足以下条件之一：(i) $E \in \mathbb{E}_+^Q$ ；或 (ii) 存在 F ，使得 $F \in \mathbb{E}_+^Q$， $\mathrm{cr}(F) < \delta < \mathrm{lh}(F)$，且 $E \in \mathbb{E}_+(\mathrm{Ult}(Q,F))$。其次，在 [9] 和 [1], 中，实际上并未假定 $\mathcal{T}$ 可由参数在 $M|\delta$ 上定义，且 $M|\delta$ 是 $M(\mathcal{T})$ 上的扩张子代数泛型；而是假定一个稍一般的条件——存在 $\xi \leq \delta$ 和 $g \subseteq \mathrm{Coll}(\omega, \delta)$，后者是 $M_b^{\mathcal{T}}$-泛型，并且 $\Phi_\delta(\mathcal{T})$ 是 $(M(\mathcal{T})\ g)$ 上最小可容许集的一个元素，其中 $\Phi_\delta(\mathcal{T})$ 是与 $\mathcal{T}$ 相关联的自然相位组（见 [9,§7]）。另一方面，在这方面我们假定存在 $P \triangleleft M$ ，使得 $\mathcal{T}$ 对 M 是 P-最优的；见 [5, 定义 8.2]。特别是， $M|\delta \trianglelefteq P \triangleleft M$, $\rho_\omega^P \leq \delta$, $\mathcal{T}$ 可由参数在 P 上定义，而决定 P 的自然理论是 $M(\mathcal{T})$ 上的扩张子代数泛型。因此，尽管我们从 $\mathcal{T}$ 与 M 的某个节段 P 之间的精确对应出发（而在 [9] 和 [1] 中，这更像是“模去下一个可容许集”），但我们不要求 $P = M|\delta$。

1.1 约定与记号

术语概要请参见 [8]。这里仅说明几点非标准的重要内容。我们讨论具有 Mitchell-Steel 编号和精细结构的精细结构模型 M ，但允许扩张子序列 $\mathbb{E}_+^M$ 上出现超强扩张子，并采用 [7, §5] 中所解释的精细结构修正。

一个 ω-预鼠 是一个健全的预鼠 N，且具有 $\rho_\omega^N = \omega$；一个 ω-小鼠 是一个 $(\omega, \omega_1 + 1)$-可迭代的 ω-预鼠。若 N是一个 ω-小鼠，我们用 Σ_N表示 N的唯一 (ω, ω_1+1)-策略。

对于定义在一个 ω-预鼠上的极限长度迭代树 $\mathcal{T}$以及一个 $\mathcal{T}$-共尾分支 b， $Q(\mathcal{T}, b)$ 表示 $\delta(\mathcal{T})$ 的 Q- 结构 $Q \trianglelefteq M_b^{\mathcal{T}}$ （若其存在），否则表示 $Q = M_b^{\mathcal{T}}$。

2 R 与 $R^\star$之间的精细结构对应

2.1 定义。 令 Q 为 $\star$-有效。若存在一个 Q-δ-测度，令 q 满足 $\rho_{q+1}^Q \leq \delta < \rho_q^Q$；否则令 $q = 0$。我们称 Q 为 $\star$-可迭代的 ，当且仅当 $\Phi(\mathcal{T}) \frown (Q, q)$上的所有假定的 q-极大树，其临界点$\mathrm{cr}(E_\alpha^{\mathcal{T}})$对所有 $\alpha + 1 < \mathrm{lh}(\mathcal{T})$均为 $\leq \delta$，都具有有限长度且其模型良基。⊣

2.2 备注。 </style}当然，的-可迭代性取决于，尽管这一依赖关系并未在术语中明确体现。我们只会在为-可迭代的情况下考虑构造。注意，若() (, q)是$(q, \omega + 1)$-可迭代的，则 Q 是 $\star$-可迭代的；而若 Q 是 $\star$-可迭代的，则 $Q^\star$ 是通过良基递归定义的。

在 $Q = Q(\mathcal{T},\ b)$ 且 $b = \Sigma_N(\mathcal{T})$ 的情况下， $Q^\star$ 将是一个定义良好的预鼠，其精细结构对应于上述 δ 之上的 Q 的精细结构。本节将介绍各种精细结构计算，以帮助我们证明这一点。不过，除 $\star$-可迭代性外，本节不会采用任何实际的可迭代性假设，

以及由可迭代性和健全性推导出的一阶假设。最后，我们将证明，对于刚才提到的（正确的） Q ， $Q^\star$ 表现良好；对于每个 $\star$-可迭代的 $R \trianglelefteq Q$， $R^\star$ 也表现良好；这将通过对 R 进行归纳法，并运用各种引理和可迭代性来完成。

精细结构计算本质上与 [1], 相同，不过我们的组织方式略有不同。然而， [1] 中忽略了一些小问题，我们将在此澄清。谈到这些细节时，我们会逐一指出。

除此之外，我们还必须纳入§1中提到的设置中更一般的特征，不过这只需要对 [1]作少量适配。

我们的（主要）任务将分析 R 与 $R^\star$之间的精细结构与可定义性对应，其中 $R \trianglelefteq Q$为 $\star$-适宜节段。为此，我们将考察介于 R 与 $R^\star$之间的一个结构序列，并在某些假设下，建立该序列中每一对相邻结构之间的精细结构对应。我们首先描述这个序列。

2.3 定义。设 Q 为 $\star$-适宜。称 Q是 $\star$-扩张的，当且仅当 Q 是活跃的且 $\mathrm{cr}(F^Q) < \delta$ ，或者存在一个 Q-δ-测度。若对每个$\star$-扩张的（因而 $\star$-适宜的）节段 $N \trianglelefteq Q$，都存在一个可容许的 $N' \trianglelefteq Q$ 使得$N \triangleleft N'$，则称 Q 为可容许缓冲的。

现在假设 Q 是 $\star$-可迭代的。设 $m < \omega$ 以及$(\langle Q_i\rangle_{i\le m}, \langle N_i, \alpha_i\rangle_{i<m})$如下：

1. $Q_0 = Q$。
2. 如果 $i < n$ ，则 Q_i 不是可容许缓冲的，则令 $N_i \trianglelefteq Q_i$ 为 Q_i的最大 $\star$-扩张节段，则 $\alpha_i \in$ 为序数且$Q_i = \mathcal{J}_{\alpha_i}(N_i)$（可能为 $\alpha_i = 0$），并且要么：

   (i) 存在一个 N_i-δ-测度，并且 $Q_{i+1} = \mathrm{Ult}_n(N_i, \mu^{N_i}_\delta)$，其中 n 使得 $\rho^{N_i}_{n+1} \le \delta < \rho^{N_i}_n$，或者(ii) 否则，并且 $Q_{i+1} = \mathrm{Ult}_{n_\kappa}(P_\kappa, F^{N_i})$，其中 $\kappa =$临界点(F^{N_i})。[3]
3. Q_m 是可容许缓冲的。

设 $R_0 = Q_0$ ，并且对于 $i \in (0, m]$，令

$$R_i = \mathcal{J}_{\alpha_{i-1}+\alpha_{i-2}+\ldots+\alpha_0}(Q_i) = \mathcal{J}_{\alpha_0}(\mathcal{J}_{\alpha_1}(\ldots \mathcal{J}_{\alpha_{i-1}}(Q_i)\ldots)). \qquad \dashv$$

注意，由于 Q 的 $\star$-可迭代性，这样的序列存在（且唯一确定）。尽管 R_i 未必是预鼠（事实上，当且仅当 $R_i = Q_i$ 时它才是预鼠，因为 Q_i 并不健全），我们仍将定义 $(R_i)^\star = \mathcal{J}_{\alpha_{i-1}+\ldots+\alpha_0}((Q_i)^\star)$。注意，对所有 $i \le m$，都有 $Q^\star = (R_i)^\star$ 。

2.4 定义。对于一个类型 3预鼠 S，若 $\mathrm{Ult}(S, F^S)$ 是良基的，则定义 S_J为与 S等价的结构，但其活动扩展器按照 λ- 编号进行索引。（因此，$(S_J)^{\mathrm{pv}}$ 是 Mitchell-Steel 编号预鼠，但 $\mathrm{OR}^{S_J} = j(\kappa)^{+\mathrm{Ult}(S_J, F^{S_J})}$，其中 $j\colon S_J \to \mathrm{Ult}(S_J, F^{S_J})$ 是超幂映射，且 $\kappa = \mathrm{cr}(F^J)$，而 F^{S_J}则通过用于 λ-编号的标准可容许谓词进行编码。）

[3]回想一下，若存在一个 N_i-δ-测度，且 N_i 是活动型 3，则 $\delta < \nu(F^{N_i})$。因此，若 N_i 是活动型 3，且 $\delta = \nu(F^{N_i})$，则 $Q_{i+1} = \mathrm{Ult}_{n_\kappa}(P_\kappa, F^{N_i})$，其中 $\kappa = \mathrm{cr}(F^{N_i})$，并且可能存在一个 Q_{i+1}-δ-测度。

对于 $i \leq m$，若 Q_i 是类型 3，且 $\mathrm{cr}(F^S) < \delta$，则令 $(Q_i)' = (Q_i)_J$；否则令 $(Q_i)' = Q_i$，并令 $(R_i)' = \mathcal{J}_{\alpha_{i-1}+\ldots+\alpha_0}((Q_i)')$。⊣

注意，取上文定义的 Q_m，我们有 $(Q_m)' = Q_m$。

精细结构对应总结

我们将分析以下模型对之间的精细结构对应：

1. Q_i 和 $(Q_i)'$（见 §2.1），2. $(Q_i)'$ 和 $(Q_i)'[t]$[4]（见 §2.2），3. $(N_i)'[t]$ 和 $(Q_{i+1})'[t]$，对于 $i < m$（见 §2.3），4. $(Q_m)'[t]$ 和 $(Q_m)^\star$（回想一下，$(Q_m)' = Q_m$）（见 §2.4），5. $(R_i)'[t]$ 和 $(R_{i+1})'[t]$，对于 $i < m$（见 §2.5），6. $(R_m)'[t]$ 和 $(R_m)^\star$（回想一下，$(R_m)' = R_m$ 和 $(R_m)^\star = Q^\star$）（见 §2.5）。

将各项串联起来：1、2、5 对于 $i < m$以及6，我们将得到所需的精细结构对应，介于 $Q = Q_0 = R_0$ 与 $Q^\star$之间。

2.1 对于类型 3 R，R 与 R_J之间

设 R是一个类型 3预鼠，且 $\mathrm{Ult}(R, F^R)$ 是良基的。

2.5 命题。$\rho_1^{R_J} = \nu(F^R)$、$p_1^{R_J} = \emptyset$ 和 R_J 是 1-健全的。

证明。显然，$R_J = \mathrm{Hull}_1^{R_J}(\nu(F^R))$。因此，只需证明 $\rho_1^{R_J} \geq \nu(F^R)$。设 $\alpha < \nu(F^R)$，其中 $\kappa^{+R} < \alpha$。设 $H = \mathrm{Hull}_1^{R_J}(\alpha)$，且 $U_\alpha = \mathrm{Ult}(R|\kappa^{+R}, F^R \restriction \alpha)$，并且$j_\alpha$： $R|\kappa^{+R} \to U_\alpha$是超幂映射，而 E_α是 $\xi < \kappa^{+R}$上 $j_\alpha \restriction R|\xi$ 的限制所构成的集合。设 $R_{J,\alpha} = (U_\alpha, E_\alpha)$。如上所述，设 $U = \mathrm{Ult}(R|\kappa^{+R}, F^R)$。设 π_α： $U_\alpha \to U$是因子映射。注意，$\mathrm{rg}(\pi_\alpha) = H$，且 π_α： $R_{J,\alpha} \to R_J$是 Σ_1-初等的，因此 $R_{J,\alpha}$ 是 H 的传递坍缩。但由于 $F^R \restriction \alpha \in R \subseteq R_J$, $R_{J,\alpha} \in R_J$，这就足够了。□

在上述情形中，还要注意（其中 $j : R|\kappa^{+R} \to U$ 是超幂映射），

$$\begin{aligned} H = \mathrm{rg}(\pi_\alpha) &= \left\{ [b, f]_{F^R}^{R|\kappa^{+R}} \;\middle|\; b \in [\alpha]^{<\omega} \wedge f \in R|\kappa^{+R} \right\} \\ &= \left\{ j(f)(b) \;\middle|\; b \in [\alpha]^{<\omega} \wedge f \in R|\kappa^{+R} \right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

2.6 命题。对于每个 $\kappa < \nu(F^R)$和 f： $[\kappa]^{<\omega} \to R|\nu(F^R)$，我们有

$$\begin{aligned} f \in R^{\mathrm{sq}} &\iff f \text{ is } \underset{\sim}{\mathrm{r}}\Sigma_1^{R_J} \text{ and bounded in } R|\nu(F^R) \\ &\iff f \in R_J \text{ and bounded in } R|\nu(F^R). \end{aligned}$$

[4]同样的分析得出 R与 $R[t]$之间的对应，适用于 $\mathrm{cr}(F^R)$ 为 $< \delta$ 的类型 3 R），但在这种情况下，R_J与 $R_J[t]$ 之间的对应才是重要的。

证明。由于 $R|\nu(F^R) = R_J|\nu(F^R)$，这直接由以下事实得出：$\rho_1^{R_J} = \nu(F^R)$（命题 2.5）。□

2.7 命题。设 E 是一个 R_J-扩张子，且 $\mathrm{cr}(E) < \nu(F^R) = \rho_1^{R_J}$。设 $U_0 = \mathrm{Ult}_0(R_J, E)$，以及 $U_1 = \mathrm{Ult}_1(R_J, E)$，并设 $\sigma\colon U_0 \to U_1$ 因子映射，$i_0\colon R_J \to U_0$ 是超幂映射。设 $U = \mathrm{Ult}_0(R^{\mathrm{sq}}, E)$，且 $i\colon R^{\mathrm{sq}} \to U$ 是超幂映射。那么：

- $U_0 = U_1$ and $\sigma = \mathrm{id}$,
- $\nu(F^{U_0}) = \sup i_0\text{“}\nu(F^R)$,
- $F^U = F^{U_0} \restriction \nu(F^{U_0})$,
- $i = i_0 \restriction (R|\nu(F^R))$.

证明。设 $\kappa = \mathrm{cr}(E) < \nu(F^R)$。设 $\vec{x} \in R_J$ 和 $g\colon [\kappa]^{<\omega} \to \nu(F^R)$ 是 $\mathrm{r}\Sigma_1^{R_J}(\vec{x})$。设 $a \in [\nu(E)]^{<\omega}$。假设 $[a,g]^{R_J}_{E}{}^{1}$ 是 F^{U_1} 的生成元。只需证明存在某个 $X \in E_a$，使得 $g \restriction X$ 在 $\nu(F^R)$ 中有界（从而根据命题 2.5，$g \restriction X \in R|\nu(F^R)$）。但我们可以固定 α，使得 $\vec{x} \in \mathrm{rg}(\pi_\alpha)$，记号同命题 2.5 的证明及公式 (1)。然而，根据公式 (1)，如果 $g(u)$ 是一个 F^R-生成元，那么 $g(u) < \alpha$。但是，如果 $[a,g]^{R_J}_{E}{}^{1}$ 是一个 F^R-生成元，则必定存在 $X \in E_a$，使得对所有 $u \in X$ 都有 $g(u) < \alpha$，这就足够了。□

2.8 命题。$\mathrm{r}\Sigma_1^R$ 与 $\mathrm{r}\Sigma_2^{R_J}$ 递归等价，其中参数取自 $R|\nu(F^R)$。也就是说，存在递归函数 $\varphi \mapsto \psi_\varphi$ 和 $\varphi \mapsto \varrho_\varphi$，使得：

1. 对每个 $\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 φ，ψ_φ 是 $\mathrm{r}\Sigma_2$，并且对所有 $\vec{x} \in R|\nu(F^R)$，都有

$$R^{\mathrm{sq}} \models \varphi(\vec{x}) \iff R_J \models \psi_\varphi(\vec{x}),$$

2. 对每个 $\mathrm{r}\Sigma_2$ 公式 φ，ϱ_φ 是 $\mathrm{r}\Sigma_1$，并且对所有 $\vec{x} \in R|\nu(F^R)$，都有

$$R_J \models \varphi(\vec{x}) \iff R^{\mathrm{sq}} \models \varrho_\varphi(\vec{x}).$$

证明。由于 R^{sq} 的活跃扩张子编码为 $\{F^R \restriction \alpha \mid \alpha < \nu(F^R)\}$，命题 2.5 的证明展示了如何递归地将 $\mathrm{r}\Sigma_2^{R_J}(\{\vec{x}\})$ 化简为 $\mathrm{r}\Sigma_1^{R^{\mathrm{sq}}}(\{\vec{x}\})$（对于 $\vec{x} \in R|\nu(F^R)$）。反过来，注意我们可以用 $\mathrm{r}\Sigma_2^{R_J}$ 表示量词“存在 E，使得对于某个 $\alpha < \rho_1^{R_J} = \nu(F^R)$，$E = F^R \restriction \alpha$”，因为给定 $\alpha \in [\kappa^{+R}, \nu(F^R))$，$\mathrm{Th}_1^{R_J}(\alpha)$ 很容易编码 $F^R \restriction \alpha$。□

由此立即可得：

2.9 命题。对每个 $n < \omega$，R 是 n-健全当且仅当 R_J 是 $(n+1)$-健全。假设 R 是 n-健全且 $\omega < \rho_n^R$（因此 R_J 是 $(n+1)$-健全）。则：

1. $\omega < \rho_n^R = \rho_{n+1}^{R_J}$,
2. $\mathrm{r}\Sigma_{n+1}^R$ 与 $\mathrm{r}\Sigma_{n+2}^{R_J}$ 递归等价，对 $R|\nu(F^R)$ 中的参数而言，
3. $\rho_k^R = \rho_{k+1}^{R_J}$ and $p_k^R = p_{k+1}^{R_J}$ for each $k \leq n+1$,

4. R 是$(n+1)$-实的，当且仅当 R_J 是$(n+2)$-实的，

5. R 是$(n+1)$-健全，当且仅当 R_J 是$(n+2)$-健全，

6. $\mathrm{Hull}^R_{n+1}(X) = \mathrm{Hull}^{R_J}_{n+2}(X) \cap (R|\nu(F^R))$ 对所有 $X \subseteq R|\nu(F^R)$，

7. 对每个 $\kappa < \rho^R_{n+1}$ 和 $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to R|\nu(F^R)$，$f$ 是 $\mathrm{r}\underset{\sim}{\Sigma}^R_{n+1}$，当且仅当 f 是 $\mathrm{r}\underset{\sim}{\Sigma}^{R_J}_{n+2}$。因此，若 E 是一个带有 $\mathrm{cr}(E) < \rho^R_{n+1}$ 的 R-扩张子，且 $\mathrm{Ult}_{n+1}(R, E)$ 和 $\mathrm{Ult}_{n+2}(R_J, E)$ 都是良基的，那么

$$\mathrm{Ult}_{n+1}(R,E)_J = \mathrm{Ult}_{n+2}(R_J, E)$$

且 $i \subseteq j$，其中 $i\colon R^{\mathrm{sq}} \to (\mathrm{Ult}_{n+1}(R,E))^{\mathrm{sq}}$ 和 $j\colon R_J \to \mathrm{Ult}_{n+2}(R_J, E)$ 是超幂映射。

2.10 定义。 A重新校准的鼠(重新校准鼠)是一个结构 R，其中对于某个预鼠 R，满足以下任一条件：

1. R 是非类型 3 的且 $R = \widetilde{R}$，或
2. R 是类型 3 的且 $R = \widetilde{R_J}$。 ⊣

2.2 在 R 与 $R[t]$ 之间（或 R_J 与 $R_J[t]$之间）

本节中的翻译只是预鼠与其泛型扩张之间精细结构的通常翻译。（但请注意，此处 δ 不必是切点。）在本节中，固定 R，它要么是 $\star$-有效的，要么是某个 $\star$-有效的 S的 $R = S_J$。

2.11 定义。 设 $\mathrm{OR}^R = \delta + \xi$ 且 $t = t_P$。那么 $R[t]$ 表示论域为 $\left\lfloor \mathcal{J}^{\mathbb{E}^R}_\xi(R|\delta, t) \right\rfloor$ 的结构；若 $\xi > 0$，则它带有常元 $R|\delta$ 和 t以及谓词 $\mathbb{E}^R$ 和F^R；若 $\xi = 0$，则它的论域为 $\lfloor R|\delta \rfloor$，并带有谓词 $R|\delta$ 和 t。若 $\xi > 0$，则 $R[t]$ 对于 $t \in R[t]$是可容许的。⊣

2.12 命题。 R 和 $R[t]$具有相同的基数和余终性 $\geq \delta$；特别是，δ 在 $R[t]$中是正则的。

证明。 因为 $\mathrm{card}^R(\mathbb{B}) = \delta$，并且 $R \models$ “$\mathbb{B}$ 具有 δ-链条件”。 □

2.13 命题。 我们有：

1. $R \subseteq R[t]$ 和 $\lfloor R \rfloor$、$\mathbb{E}^R$ 和 F^R 分别都是 $\Delta^{R[t]}_1$。

2. 存在一个“$R[t]$”语言中的$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 ψ，使得对于前鼠语言中的所有$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 φ以及所有 $v \in R[t]$,

$$v \in R \wedge R \models \varphi(v) \iff R[t] \models \psi(\varphi, v).$$

3. 存在一个前鼠语言的 $\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 ϱ，使得对于所有“$R[t]$”语言的 $\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式φ 以及所有 $\mathbb{B}$ 名称 $\tau \in R$，都有

$$R[t] \models \varphi(\tau_{G_t}) \iff \exists p \in G_t \ \big[R \models \varrho(\alpha_\mathcal{T}, \delta, p, \varphi, \tau)\big].$$

此外，公式 ψ, ϱ 可以在同一（前鼠）类型的 R 中统一选取。

证明。公式 ϱ 应断言存在某个 $\mathbb{B}$-名称 τ'，使得 p 强迫$\varphi'(\tau', \tau)$，其中 $\varphi(v) = \exists w \varphi'(w, v)$，且 φ'为 Σ_0。 □

2.14 定义。称 p强迫 $\varphi(\tau)$，当且仅当 $\varrho(\delta, p, \varphi, \tau)$，其中 ϱ如上。 ⊣

作为前述两个命题的推论，我们有：

2.15 命题。设 $\delta + 1 \subseteq X \subseteq$序数^R。则 $\left\lfloor \mathrm{Hull}_1^R(X) \right\rfloor = \left\lfloor \mathrm{Hull}_1^{R[t]} \right\rfloor \cap R$。

$R[t]$ 的精细结构已在上文定义（$R|\delta, t, \alpha_{\mathcal{T}}$）；因此我们将所有序数 $\xi < \delta$放入所有 Hull 中，等等。对于 $\xi \in [\delta,$序数$^R]$，$R[t]||\xi = (R|\xi)[t]$ 且 $R[t]|||\xi = (R||\xi)[t]$（因此 $R[t]|||\delta$ 在那里仍有其谓词）。根据定义，我们总是有 $\rho_0^{R[t]|\xi} = \xi$。对于使得 $R|\xi$ 为类型 3 的 ξ，我们将比较 $R|\xi$ 的 d-精细结构与$R[t]|\xi$的精细结构；在此情形下，我们对 $F^{R|\xi}$和 $F^{R[t]|\xi}$使用“类类型 2”可容许代码。拥有$\rho_n^{R[t]|\xi} = \delta$（根据定义）恰好与 $\rho_n^{R[t]|\xi} \leq \delta$含义相同。

命题 2.16。假设 R 是 1-通用且 1-实的，并且 $\delta \leq \rho_1^R$。那么：

- $\rho_1^{R[t]} = \rho_1^R$,
- *if* $\delta \notin p_1^R$ *then* $p_1^{R[t]} = p_1^R$,
- *if* $\delta \in p_1^R$ *then* $\rho_1^R = \rho_1^{R[t]} = \delta$ *and* $p_1^{R[t]} = p_1^R \backslash \{\delta\}$,
- $R[t]$ *is* 1*-universal and* 1*-solid, and*
- *if* R *is* 1*-sound then so is* $R[t]$.

证明。若 $\delta =$序数^R，则结论显然成立，因此假设 $\delta <$序数^R。令 $t^R = \mathrm{Th}_1^R(\rho_1^R \cup \{p_1^R\})$，且 $t^{R[t]} = \mathrm{Th}_1^{R[t]}(\rho_1^R \cup \{p_1^R\})$。我们断言 $t^{R[t]} \notin R[t]$；由于 $G_t \in R_t$，且由命题 2.13，只需证明 $t^R \notin R[t]$。若 $\rho_1^R =$序数^R，则显然成立，因此假设 $\rho_1^R <$序数^R，于是 $\delta \leq \rho_1^R <$序数^R。但此时，若 $t^R \in R[t]$，则由 R 的 1-普适性，存在一个满射 $\pi\colon \rho_1^R \to R \cap \mathcal{P}(\rho_1^R)$，使得 $\pi \in R[t]$。但请注意，这就得到一个满射 $\pi'\colon \rho_1^R \to R[t] \cap \mathcal{P}(\rho_1^R)$，使得 $\pi' \in R[t]$，这是不可能的。

因此 $\rho_1^{R[t]} \leq \rho_1^R$。假设 $\rho_1^{R[t]} < \rho_1^R$。因此 $\delta \leq \rho_1^{R[t]} < \rho_1^R$。令 $u = \mathrm{Th}_1^R(\rho_1^{R[t]} \cup \{p_1^{R[t]}, \delta\})$。因此 $u \in R \subseteq R[t]$。但根据命题 2.13，可得 $\mathrm{Th}_1^{R[t]}(\rho_1^{R[t]} \cup \{p_1^{R[t]}\}) \in R[t]$，这就产生了矛盾。

因此 $\rho_1^{R[t]} = \rho_1^R$ 且 $p_1^{R[t]} \leq p_1^R$。假设 $\delta \notin p_1^R$ 但 $p_1^{R[t]} < p_1^R$（尤其是，$p_1^R \neq \emptyset$）。由于 $\rho_1^R \geq \delta$，因此 $p_1^R \cap (\delta + 1) = \emptyset$。但随后，在 R中使用 1-固实性，并按照前一段的做法，我们便得到矛盾。最后，假设 $\delta \in p_1^R$。因此$\rho_1^{R[t]} = \rho_1^R = \delta$ 且 $\delta = \min(p_1^R)$。于是 $t^{R[t]}$ 等价于 $(t^{R[t]})' = \mathrm{Th}_1^{R[t]}(\delta \cup \{p_1^R \backslash (\delta + 1)\})$，因为用于 $R[t]$ 的语言可以通过一个常元引用参数 δ。因此 $(t^{R[t]})' \notin R[t]$，所以 $p_1^{R[t]} \leq p_1^R \backslash (\delta + 1)$。现在，如前所述，使用 1-固实性即可推出$p_1^{R[t]} = p_1^R \backslash (\delta + 1) = p_1^R \backslash \{\delta\}$。

要看出 $R[t]$ 是 1-坚实的，请注意，相关的固实性见证可以根据 R 的相应见证以及 G_t计算得到。

对于 1-通用性，令 $\rho = \rho_1^R = \rho_1^{R[t]}$ and $p = p_1^R$；因此 $p_1^{R[t]} = p \backslash \{\delta\}$。令 $C =$cHull$_1^R(\rho \cup \{p\})$，并令 $\pi\colon C \to R$ 为反塌缩映射。令 $C' = \mathrm{cHull}_1^{R[t]}(\rho \cup \{p \backslash \{\delta\}\})$

and $\pi' : C' \to R[t]$ 为反坍缩。假设 $\delta \in \mathrm{rg}(\pi)$。那么根据命题2.15，$\mathrm{rg}(\pi) = \mathrm{rg}(\pi') \cap R$，因此 $C \subseteq C'$ and $\pi \subseteq \pi'$，并且由 Σ_1-初等性可得 $C' = C[t]$。我们有 $R||\rho^{+R} = C||\rho^{+C}$，并注意到此时 $R[t]||\rho^{+R[t]} = (C')||\rho^{+C'}$，正如所需。现在转而假设 $\delta \notin \mathrm{rg}(\pi)$。我们确实有 $\delta \in C'$，所以 $\mathrm{rg}(\pi) \subsetneq \mathrm{rg}(\pi')$。于是 $\delta = \rho_1^R = \rho_1^{R[t]}$ and $\delta \notin p_1^R$。由 R 的 1-通用性，$R||\delta^{+R} = C||\delta^{+C}$，并注意到由于 $\mathrm{rg}(\pi) \cup \{\delta\} \subseteq \mathrm{rg}(\pi')$，$\delta^{+C} = \delta^{+C'} \subseteq \mathrm{rg}(\pi')$，这就给出了 $R[t]$ 的 1-通用性。

最后，如果 R 是 1-健全的，那么根据前面的部分和断言 2.15，$R[t]$也如此。 □

2.17 命题。设 $\rho_1^R < \delta$ 和 R 在 δ 之上是1-实的，并且在 δ处具有1-壳性质。那么：

- $\rho_1^{R[t]} = \delta$,
- $p_1^{R[t]} = p_1^R \backslash (\delta + 1)$,
- $R[t]$ *is* 1*-universal and* 1*-solid,*
- *if* R *is* δ*-sound then* R *is* 1*-sound.*

证明。 这与命题2.16的证明非常相似，只是在证明命题 δ 时，用在2.16处的 1-壳性质代替 1-通用性。 □

现在我们要将命题 2.13–2.17 推广到 $\mathbf{r}\Sigma_{n+1}^R$ 和 $\mathbf{r}\Sigma_{n+1}^{R[t]}$ 的情形，用 $\mathbf{r}\Sigma_1^R$和 $\mathbf{r}\Sigma_{n+1}^R$替换，并用 ρ_{n+1} 替换 ρ_1，等等，其中 $n > 0$，假设 $\rho_n^R > \delta$和 R 是 n-健全的。

2.18 命题。设 $n < \omega$。则存在一个$\mathrm{r}\Sigma_{n+1}$ 公式 ψ_{n+1}，其属于“$R[t]$”-语言；以及一个$\mathrm{r}\Sigma_{n+1}$ 公式 ϱ_{n+1}，其属于预鼠语言；二者均根据 R 的类型和整数 n一致地选取，使得若 R 是 n-健全的，且满足 $\delta < \rho_n^R$，则：

1. 我们有：

(a) 对于所有前鼠语言的 $\mathrm{r}\Sigma_{n+1}$ 公式 φ 以及所有 $v \in R[t]$，我们有

$$v \in R \wedge R \models \varphi(v) \iff R[t] \models \psi_{n+1}(\varphi, v).$$

(b) 对于所有“$R[t]$”语言的 $\mathrm{r}\Sigma_{n+1}$ 公式 φ 以及所有 $\mathbb{B}$-名称 $\tau \in R$，我们有

$$R[t] \models \varphi(\tau_{G_t}) \iff \exists p \in G_t \left[R \models \varrho_{n+1}(\delta, p, \varphi, \tau)\right].$$

2. 设 $\delta + 1 \subseteq X \subseteq$ 序数^R。那么 $\left[\mathrm{Hull}^R_{\mathrm{r}\Sigma_{n+1}}(X)\right] = \left[\mathrm{Hull}^{R[t]}_{\mathrm{r}\Sigma_{n+1}}\right] \cap R$。

3. 假设 R 是 $(n+1)$-普遍且 $(n+1)$-实，并且 $\delta \leq \rho_{n+1}^R$。那么：

(a) $\rho_{n+1}^{R[t]} = \rho_{n+1}^R$，($b$) 若 $\delta \notin p_{n+1}^R$ 则 $p_{n+1}^{R[t]} = p_{n+1}^R$，($c$) 若 $\delta \in p_{n+1}^R$ 则 $\rho_{n+1}^R = \rho_{n+1}^{R[t]} = \delta$ 且 $p_{n+1}^{R[t]} = p_{n+1}^R \backslash \{\delta\}$，($d$) $R[t]$ 是$(n+1)$-普遍且$(n+1)$-实，并且(e) 若 R 是$(n+1)$-健全，则 $R[t]$亦然。

4. 假设 $\rho_{n+1}^R < \delta$ 且 R 在 δ 之上为$(n+1)$-实，并且在 δ处具有$(n+1)$-船身性质。则：

(a) $\rho_{n+1}^{R[t]} = \delta$,$(b)$ $p_{n+1}^{R[t]} = p_{n+1}^R \backslash (\delta+1)$,$(c)$ $R[t]$ 是$(n+1)$-普遍且$(n+1)$-实的，(d) 若 R 是 δ- 健全的，则 R 是 $(n+1)$- 健全的。

证明。 证明通过对 n 进行归纳法得出。我们已经证明了 $n = 0$ 的情形，因此假设 $n \geq 1$。

部分 1(a)：$\mathrm{r}\Sigma_{n+1}^R$ 断言的主要见证是 T_n^R的一个元素。但由于$\delta < \rho_n^R = \rho_n^{R[t]}$并且根据 1(a) 中关于 $n-1$的结论，我们可以从对应的元素计算出 T_n^R中的元素 $T_n^{R[t]}$，从而得到适当的公式 ψ_{n+1}。（回想一下，$\mathrm{r}\,\Sigma_1$ 公式的 Σ_{n+1} 片段已由命题 2.13处理。）

第 1(b)：这与第 1(a)部分类似，对 1(b)部的 $n-1$ 应用归纳假设，在 R 中为 $T_n^{R[t]}$的元素取得标准名称，并利用命题 2.13得到最后的 $\mathrm{r}\Sigma_1$ 断言。

第 2：这是第 1 部的直接推论。

第3部分：令 $\vec{q} = \vec{p}_n^R$。我们通过归纳法得到 $\vec{q} = \vec{p}_n^{R[t]}$（并且由于 $\delta < \rho_n^R$，所以 $\delta \notin p_n^R$）。令 $t^R = \mathrm{Th}_{n+1}^R(\rho_{n+1}^R \cup \{p_{n+1}^R, \vec{q}\})$ 且 $t^{R[t]} = \mathrm{Th}_{n+1}^{R[t]}(\rho_{n+1}^R \cup \{\vec{q}, p_{n+1}^R\})$。我们断言 $t^{R[t]} \notin R[t]$；由于 $G_t \in R_t$，且根据第 1 部分，只需证明 $t^R \notin R[t]$。不过，这由 R 的 $(n+1)$-普遍性即可推出，与命题 2.16 的证明类似。而且，$\rho_{n+1}^R \leq \rho_{n+1}^{R[t]}$ 这一事实也与该断言的证明类似。因此 $\rho_{n+1}^{R[t]} = \rho_{n+1}^R$。

证明的其余部分也与命题 2.16 和 2.17的证明相同，只需注意，在验证$\vec{p}_n^R = \vec{p}_n^{R[t]}$与 p_{n+1}^R 之间的对应时，$p_{n+1}^{R[t]}$。 □

命题 2.19。 设 $n < \omega$，并假设 R 是 n-健全的，且满足 $\delta < \rho_n^R$。设 $\mu < \rho_n^R$和 f：$[\mu]^{<\omega} \to R$。设 E 是一个与 R 接近的扩张子，且 $a \in [\nu(E)]^{<\omega}$。设 E^+是将 E 加厚为 $R[t]$-扩张子所得的标准加厚。那么：

1. 存在 $X \in (E^+)_a$，使得 $f \restriction X \in R[t]$，当且仅当存在 $X \in E_a$ 使得 $f \restriction X \in R$。

2. 存在 $X \in (E^+)_a$，使得 $f \restriction X$ 是 $\mathrm{r}\underset{\sim}{\Sigma}_n^{R[t]}$，当且仅当存在 $X \in E_a$ 使得 $f \restriction X$ 是$\mathrm{r}\underset{\sim}{\Sigma}_n^R$。

2.3 $R[t]$与 $S^R[t]$之间，等等（R 不可容许缓冲）

2.3.1 当存在 R-δ-测度时

假设存在一个 R-δ-测度。由于 R 是 $\star$-适宜的，我们可以固定 $r < \omega$ 使得 $\rho_{r+1}^R \leq \delta < \rho_r^R$ R δ $S =$ $_r$ R μ_δ^R $\delta+1$ $\rho_{r+1}^S \leq$，且是 - $\delta < \rho_r^S$ j $R \to S$ $\vec{p}_{r+1}^S \backslash \delta = j\ \vec{p}_{r+1}^R \backslash \delta$ 健全的。因此，Ult (，) 是 ( )-健全的，并且 。令 : 为超幂映射，我们有 ( )。固定 $\alpha_\delta < \delta$和 $\mathrm{r}\Sigma_{r+1}$ 项 t_δ 和 t_{δ^+}，使得 $\delta = t^R(\vec{p}_{r+1}^R \backslash \delta,\ \alpha_\delta)$，并且若 $\delta^{+R} < \rho_0^R$ 则 $\delta^{+R} = t_{\delta^+}^R(\vec{p}_{r+1}^R \backslash \delta,\ \alpha_\delta)$。

2.20 命题。$\mathrm{r}\Sigma_{n+1}(\{\vec{p}^R_{r+1}\backslash\delta,\alpha_\delta\})$ 关于 $R|\delta$ 中参数的陈述，在递归意义上等价于关于这些参数的 $\mathrm{r}\Sigma_{n+1}(\{\vec{p}^S_{r+1}\backslash\delta,\delta,\alpha_\delta\})$ 陈述。也就是说，存在一个 $\mathrm{r}\Sigma_{r+1}$ 公式 ψ_{r+1}，使得对于所有 $\mathrm{r}\Sigma_{r+1}$ 公式 φ 和所有 $v\in R|\delta$，我们都有

$$R\models\varphi(\vec{p}^R_{r+1}\backslash\delta,\alpha_\delta,v)\iff S\models\psi_{r+1}(\varphi,\vec{p}^S_{r+1}\backslash\delta,\alpha_\delta,\delta,v),$$

并且存在一个$\mathrm{r}\Sigma_{r+1}$ 公式 τ_{r+1}，使得对于所有$\mathrm{r}\Sigma_{r+1}$ 公式 φ 以及所有 $v\in R|\delta$，我们都有

$$S\models\varphi(\vec{p}^S_{r+1}\backslash\delta,\alpha_\delta,\delta,v)\iff R\models\tau_{r+1}(\varphi,\vec{p}^R_{r+1}\backslash\delta,\alpha_\delta,v).$$

证明。公式 ψ_{r+1} 实际上不必提及 δ；它只需断言“$\varphi(\vec{p}^S_{r+1}\backslash\delta,\alpha_\delta,v)$”，并且由于 $j(\vec{p}^R_{r+1}\backslash\delta)=\vec{p}^S_{r+1}\backslash\delta$, $j(\alpha_\delta)=\alpha_\delta$ 以及 $j(v)=v$，这就行得通。对于 τ_{r+1}，我们使用如下陈述：“存在 $X\in\mu^R_\delta$，并且存在 $\beta<\rho^R_r$，使得对于所有 $\delta'\in X$，理论 $\mathrm{Th}^R_{\mathrm{r}\Sigma_r}(\beta\cup\{\vec{p}^R_{r+1}\backslash\delta\})$ 都编码了一个关于 $\varphi(\vec{p}^R_{r+1}\backslash\delta,\alpha_\delta,\delta',v)$ 的见证。”现在，如果 $\delta^{+R}<\rho^R_0$，那么我们确实可以按需提及 μ^R_δ，因为 $\delta^{+R}=t^R_{\delta^+}(\vec{p}^R_{r+1}\backslash\delta,\alpha_\delta)$。假设 $\delta^{+R}=\rho^R_0$。那么，要么 R 是最大基数为 δ 的主动类型 2，要么 R 是最大基数为 δ^{+R} 的活动型 3。无论哪种情况，都很容易以一种 Σ_1 的方式表达量词“存在 $X\in\mu^R_\delta$”，这就足够了。 □

2.21 命题。$\mathrm{r}\Sigma^{R[t]}_{r+1}(\{\vec{p}^{R[t]}_{r+1},\alpha_\delta\})$ 中关于参数的陈述与 $\mathrm{r}\Sigma^{S[t]}_{r+1}(\{\vec{p}^{S[t]}_{r+1},\alpha_\delta\})$ 中关于这些参数的陈述在递归意义下等价。也就是说，存在一个 $\mathrm{r}\Sigma_{r+1}$ 公式 ψ_{r+1}，使得对于所有 $\mathrm{r}\Sigma_{r+1}$ 公式 φ 和所有 $v\in R[t]|\delta$，我们有

$$R[t]\models\varphi(\vec{p}^{R[t]}_{r+1},\alpha_\delta,v)\iff S[t]\models\psi_{r+1}(\varphi,\vec{p}^{S[t]}_{r+1},\alpha_\delta,v),$$

并且存在一个 $\mathrm{r}\Sigma_{r+1}$ 公式 τ_{r+1}，使得对于所有 $\mathrm{r}\Sigma_{r+1}$ 公式 φ 和所有 $v\in R[t]|\delta$，我们有

$$S[t]\models\varphi(\vec{p}^{S[t]}_{r+1},\alpha_\delta,v)\iff R[t]\models\tau_{r+1}(\varphi,\vec{p}^{R[t]}_{r+1},\alpha_\delta,v).$$

证明。两者 $R[t]$和 $S[t]$都可以通过各自的语言直接引用参数 δ。因此，该命题只是命题 2.20 与命题 2.18（包括其陈述中提到的一致性）结合后的推论。

□

由于 $\rho^R_{r+1}\leq\delta$，对于 $R[t]$ 也同样如此；对于 S 和 $S[t]$ 亦然，并且 R 是 δ-健全的，S 是（$\delta+1$）-健全的，因此 $R[t]$、$S[t]$ 是健全的。上述事实在此情形下已足以满足我们的需要。（我们永远不会通过具有 $\mathrm{cr}(E)>\delta$ 的扩张子 E 对 R 或 $R[t]$ 取超幂，因此不需要考虑映射到 R 或 $R[t]$ 中的函数。）

2.3.2 当 R 为类型 2 时，临界点$(F^R)<\delta$ 且 R 没有 δ-测度

固定一个类型为 $2\star$ 的合适 R，满足 $\kappa=$ 临界点$(F^R)<\delta$，并假设不存在 R-δ-测度。若 M_κ 为类型 3，且临界点 $(F^{M_\kappa})<\kappa$，则令 $(P,k)=((M_\kappa)_J,n_\kappa+1)$；否则令 $(P,k)=(M_\kappa,n_\kappa)$。令 $S=\mathrm{Ult}_k(P,F^R)$，并令 j为 $P\to S$的超幂映射。因此 $\delta^{+S}<$序数^S，且不存在临界点$(E)=\delta$的 S-全 $E\in\mathbb{E}^S_+$。此外，若 $U=\mathrm{Ult}_{n_\kappa}(M_\kappa,F^R)$ 为类型 3，且临界点$(F^U)<\delta$，则 $S=U_J$；否则 $S=U$。

本节将在 $R[t]$ 的精细结构与 $S[t]$的精细结构之间进行转换。

2.22 命题。设 $z=(\vec{p}_k^{S[t]}, p_{k+1}^{S[t]}\backslash j(\kappa)\ \kappa, s_0, \alpha_0)$，其中 $s_0\in[\text{序数}]^{<\omega}$ 是满足条件 $F^R_{\downarrow}=i_{F^R}(f)(s)$ 的最小 s，对于某些 $f\in R$，f_0 是见证 s_0 的选择的最小函数，而 α_0 是 R-序中的 f_0 的位置。(因此 $\alpha_0<\kappa^{+R}<\delta$。) 存在一个$\mathrm{r}\Sigma_{k+1}$公式 ψ 以及一个$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 τ，使得：

1. $R[t]\subseteq S[t]$ *and* $\lfloor R\rfloor$, $\mathbb{E}^R$ *are* $\Sigma_1^{S[t]}(\{\nu(F^R)\})$, *and* $\mathrm{OR}^R=\nu(F^R)^{+S[t]}$.

2. 关于 $R[t]$ 中参数的$\mathrm{r}\Sigma_{k+1}^{S[t]}(\{z,\alpha_{\mathcal{T}}\})$ 陈述，与关于这些参数的$\mathrm{r}\Sigma_1^{R[t]}(\{\alpha_{\mathcal{T}}\})$ 陈述递归等价，见证为 ψ、τ。事实上，存在某个 $m<\omega$，使得对于所有$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 φ 和 $v\in R[t]$，我们有

$$R[t]\models\varphi(v,\alpha_{\mathcal{T}})\iff S[t]\models\psi(\varphi,v,z,\alpha_{\mathcal{T}})$$

并且对于所有$\mathrm{r}\Sigma_{k+1}$ 公式 φ 和 $v\in R[t]$，我们有

$$S[t]\models\varphi(v,z,\alpha_{\mathcal{T}})\iff R[t]\models\tau(m,\varphi,v,\alpha_{\mathcal{T}}).$$

ψ、τ 的选择还关于 R 保持一致。(我们也可以用参数 α_0 替换 m，从而完全一致，只需将该额外参数纳入考量。)

3. 令 z 如第 2 部分所述，且 $X\subseteq R[t]$，则有

$$R[t]\cap\mathrm{Hull}^{S[t]}_{\mathrm{r}\Sigma_{k+1}}(X\cup\{z,\alpha_{\mathcal{T}}\})=\mathrm{Hull}^{R[t]}_{\mathrm{r}\Sigma_1}(X\cup\{\alpha_{\mathcal{T}}\}).$$

4. 对于 $\kappa<\text{序数}^{R[t]}$ 和 $f\colon[\kappa]^{<\omega}\to R[t]$，有 f 是$\mathrm{r}\underset{\sim}{\Sigma}_k^{S[t]}$ 当且仅当 $f\in R[t]$。

开始证明之前，我们先指出，下面的命题 2.28 是 2.22 的一个变体，其中上文的类型 2 R 被 R_J替代，适用于类型 3预鼠 R。命题 2.28 及其证明只是对 2.22的简化，因此我们虽然给出完整陈述，但完全省略证明。

证明。我们先说明如何构造公式 $\tau(m,\varphi,v,\alpha_{\mathcal{T}})$（其中参数为 $\alpha_{\mathcal{T}}$）。在 $R[t]$中，我们可以先以 $\Sigma_1^{R[t]}$ 的方式识别参数 z的适当代表元。为了使用 F^R，我们可以识别 $\kappa=$ 临界点(F^R)；再根据 κ 和 $(t,\alpha_{\mathcal{T}})$（回想一下，t 由 $R[t]$的谓词提供），我们可以识别 $P=M_\kappa$ 和 $k=n_\kappa$，从而得到 $S=\mathrm{Ult}_k(P,F^R)$ 的一个编码版本。我们还有 j 的一个编码版本：$P\to S$。我们知道 $\vec{p}_k^{S[t]}=\vec{p}_k^S=j(\vec{p}_k^P)$ 和$p_{k+1}^{S[t]}\backslash j(\kappa)=p_{k+1}^S\backslash j(\kappa)=j(p_{k+1}^P\backslash\kappa)$，由此得到这些参数的代码。当然，$\kappa$ 由 $[\{\kappa\},\mathrm{id}]$表示。

还要注意，由任意参数 $v\in R[t]$，我们可以以 $\Sigma_1^{R[t]}$ 的方式识别出一个$\mathbb{B}_\delta$-名称 $\dot{v}$，以及 $\dot{v}$的一个标准代表 $[a_{\dot{v}},f_{\dot{v}}]$（回想一下，我们在 $R'[t]$中可以直接访问G_t）。特别地，对于 $p\in\mathbb{B}_\delta$，我们有 p的一个标准代表 $[a_p,f_p]$，以及 δ的 $[a_\delta,f_\delta]$。

为确定 $(s,\ \alpha_0)$，我们定义序列 $(t_0,\ g_0)$，$(t_1,\ g_1)\ldots$，其中 g_0是满足下述条件的最小函数：对于某个 $t\in[\nu(F^R)]^{<\omega}$，有 $F^R_{\downarrow}=[t,g_0]$，且 t_0是最小见证；随后，g_1 是满足下述条件的最小函数：对于某个 $t\in[\nu(F^R)]^{<\omega}$ 且 $t<t_0$，

有 $[t, g_1] = F^R_{\downarrow}$，且 t_1 是最小见证，等等。令 $m < \omega$ 为使 t_m 有定义的最大值，注意 $s = t_m$、$f_0 = g_m$ 和 $\alpha_0 = \alpha_{g_m}$ 是 g_m 在 R 的构造顺序中的位置。此外，序列 $\langle (t_n,\ g_n,\ \alpha_{g_n})\rangle_{n\le m}$ 是 $\mathrm{r}\Sigma_1^{R[t]}(\{F^R_{\downarrow}\})$，并且我们可通过精细结构模型语言获得 $F^R_{\downarrow}$。给定 $n \le m$，令 z_n 为 z 的一个版本，其中我们用 t_n，α_{g_n} 代替 s，$\alpha_0 = \alpha_{f_0}$。

现在，由于 $\delta < \rho^S_k$，根据 §2.2，对于 $\mathrm{r}\Sigma_{k+1}$ 公式 φ，我们有 $S[t] \models \varphi(v, z, \alpha_{\mathcal{T}})$ 当且仅当存在 $p \in G_t$，使得 p 强迫 $\varphi(\dot v, \check{}z, \check{}\alpha_{\mathcal{T}})$。因此，我们取 $\tau(n, \varphi, v, \alpha_{\mathcal{T}})$ 为断言以下内容的公式

– “(t_n, g_n) 已定义”，并且

– “存在某个 $p \in G_t$，使得

$$\mathrm{Ult}_k(P, F^R) \models \text{`}p \text{ strongly forces } \varphi(\dot v, \check z_n, \check\alpha_{\mathcal{T}}) \text{ with respect to } \mathbb{B}_\delta\text{' ''},\tag{2}$$

其中我们使用超幂编码和代表元，以适当指称这些对象。（我们只会在 $n = m$ 的情形下应用它。）这个陈述是 $\mathrm{r}\Sigma_1^{R[t]}$，因为我们已经确定了相关参数；给定 $p \in \mathbb{B}^R_\delta$ 后，我们已经确定了某个 $a \in [\nu(F^R)]^{<\omega}$、$f_p$、$f_{\dot v}$、$f_{\dot z_n}$、$f_{\check\alpha_{\mathcal{T}}}$、$f_{\mathbb{B}_\delta}$（对于 $p \in \mathbb{B}^R_\delta$），使得 $p = [a, f_p]$、$\dot v = [a, f_{\dot v}]$，等等；并且由于第 (2) 行中由 $\mathrm{Ult}_k(P, F^R)$ 建模的陈述是 $\mathrm{r}\Sigma_{k+1}$，它等价于存在一个集合 $X \in (F^R)_a$，使得 $P \models$“存在 $\beta < \rho^P_k$，对于所有 $u \in X$，理论 $\mathrm{Th}^P_{\mathrm{r}\Sigma_k}(\beta \cup \{\vec p^P_k, f(u)\ q\})$ 的代码是以下陈述的见证

$$\text{`}f_p(u) \text{ strongly forces } \varphi(f_{\dot v}(u), f_{\dot z_n}(u), f_{\check\alpha_{\mathcal{T}}}(u)) \text{ with respect to } f_{\mathbb{B}_\delta}(u)\text{' ''}.$$

反过来，我们希望复合 $\psi(\varphi,\ v,\ z,\ \alpha_{\mathcal{T}})$。为此，我们已经适当地计算了 $\lfloor R[t]\rfloor$，以及 $R^{\mathrm{pv}}[t] = S[t]$||序数^R 和序数$^R = \nu(F^R)^{+S[t]}$。为此，我们需要适当地识别 F^R 的元素，并且还要识别 $F^R_{\downarrow}$（因为这是通过在 R 中解释的一个常元来识别的）。我们将通过考察 F^R 的元素来恢复

$$\mathrm{Hull}^S_{k+1}(\kappa \cup \{\vec p^S_{k+1} \backslash j(\kappa)\}) = \mathrm{rg}(j)\tag{3}$$

其中 $j:\ P \to S$ 是超幂映射。也就是说，由于我们有 κ 可用（在 z 中），因此可以识别 P、k，进而识别满足 $\kappa = u^P(\alpha, \vec p^P_{k+1} \backslash \kappa)$ 的最小 $\alpha < \kappa$ 和第 $\mathrm{r}\Sigma_{k+1}$ 个项 u。因此，$j(\kappa) = u^S(\alpha, \vec p^S_{k+1} \backslash$序数$^R)$。现在，由于 $\mathrm{r}\Sigma^S_{k+1}$ 是一致的 $\mathrm{r}\Sigma^{S[t]}_{k+1}$，且我们有参数 z 可用，因此给定 $E \in R$，E 是 F^R 的一个片段，且在 F^R 的可容许代码中表示，当且仅当存在位于第（3）行的壳中的 λ、ξ、f，使得 $\lambda = u^S(\alpha, \vec p^S_{k+1} \backslash$序数$^R)$，并且 $\lambda < \xi$ 和 $\rho^{S|\xi}_\omega = \lambda$ 以及 $f:\ \lambda \to \mathcal{P}([\lambda]^{<\omega}) \cap S|\xi$ 是可在 $S|\xi$ 上定义的规范枚举；令 $\bar\xi$ 满足 $\rho^{S|\bar\xi}_\omega = \kappa$，并且存在初等嵌入 $\bar j:\ S|\bar\xi \to S|\xi$（注意，这要求 $j(\bar\xi) = \xi$ 且 $\bar j \subseteq j$），那么 E 就是由 $\bar j$ 导出的、测量 $\mathcal{P}([\kappa]^{<\omega}) \cap S|\bar\xi$ 的部分延拓子，其长度为 $\nu(F^R)$。（注意，$\max(s) + 1 = \nu(F^R)$，且我们在 z 中有 s 可用，因此可以引用 $\nu(F^R)$。）现在，利用这类片段 E 及参数（α_0、s），我们可以还原 $F^R_{\downarrow}$（我们从 α_0 还原 f_0，然后令 E 如上所述且足够大，使得 $i_E(f_0)(s) = F^R_{\downarrow}$）。最后，我们便有 $\varphi(v)$（它可能通过前鼠语言引用 $F^R_{\downarrow}$）在 $R[t]$ 中成立，当且仅当存在某个如上的 E 见证 $\varphi(v)$；由此可得到 $\psi(\varphi, v, z, \alpha_{\mathcal{T}})$ 的适当表述。

第 3 是前面各部分的一个简单推论。
第 4 成立，因为 $R[t]^{\mathrm{pv}} = S[t]|\nu(F^R)^{+S[t]}$ 且序数$^{R[t]} < \rho_k^{S[t]}$。 □

2.23 备注。设 R 的类型为 2，临界点$(F^R) < \delta \leq \rho_1^R$，且是 1-健全的，因此是 Dodd-可靠的。根据 [8], 则 $\rho_1^R = \tau^R$并令 s_0为满足以下条件的最小值 $F^R_\downarrow = i_{F^R}(f)(s_0, p_1^R)$ 对某个 $f \in R$，我们有 $t^R = p_1^R \cup (s_0 \backslash \tau^R)$。

2.24 定义。设 R 是 $\star$-适宜的、类型 2，临界点$(F^R) < \delta$，且 R 没有 δ-测度。我们称 $R[t]$ 是 *Dodd*-可靠的 $> \delta$ 当且仅当以下任一条件成立：

– $\rho_1^R \geq \delta$ 且 R 是 Dodd-可靠的，或者 – F^R 由 $\rho_1^{R[t]} \cup \{\delta, s\}$ 生成，其中某个 $s \in [$序数$]^{<\omega}$满足条件（因此 $t^R \backslash (\delta+1)$ 是最小的），并且 $t^R \backslash (\delta+1)$ 的 Dodd-实性见证属于 $R[t]$ （不一定属于 R! ）；也就是说，

$$F^R \restriction (\alpha \cup \{t^R \backslash (\alpha+1)\}) \in R[t]$$

对每个 $\alpha \in t^R \backslash (\delta+1)$。 ⊣

因此，如果 R 是 Dodd-可靠的，那么 $R[t]$ 也是 Dodd-可靠的 $> \delta$，但反过来未必成立。**2.25 命题**。假设 R 是 $\star$-适宜的、类型 *2* 的，且 临界点$(F^R) < \delta$，并且 R 没有 δ-测度。假设 $R[t]$ 是 1-健全的，且是 $> \delta$-*Dodd*-可靠的。那么：

1. $S[t]$ *is* $(k+1)$*-sound,*
2. $\rho_{k+1}^{S[t]} = \rho_1^{R[t]}$ *and*
3. $p_{k+1}^{S[t]} = j(p_{k+1}^P \backslash \kappa) \frown (t^R \backslash (\delta+1))$.[5]

进一步假设 $P = M_\kappa$ 是主动类型*2*，且 临界点$(F^P) < \kappa =$临界点(F^R)。那么：

4. S *is active type 2,* $\mathrm{cr}(F^S) < \delta$ *and* $S[t]$ *is* $> \delta$*-Dodd-sound, and*

5. 以下两者之一：
   (a) $\kappa < \rho_1^P$ *and* $j(\kappa) < \rho_1^S = \rho_1^{S[t]}$ *and* S *is Dodd-sound, or*
   (b) $\rho_1^P \leq \kappa$ 和 $\rho_1^{S[t]} =$最大值(ρ_1^R, δ) 以及 F^S 由下列对象生成

$$\{\delta\} \cup \rho_1^{S[t]} \cup j(t^P) \cup (t^R \backslash (\delta+1))$$

而 $j(t^P) \cup (t^R \backslash (\delta+1))$ 的 *Dodd*-实性见证属于 $S[t]$。

证明。第 1–3 部分：我们有 $S = \mathrm{Hull}^S_{k+1}(\tau^R \cup \{j(\vec{p}^{\mathcal{P}}_{k+1} \backslash \kappa)\ t^R\})$，因为这个 Hull 包含 $\mathrm{rg}(j)$ 中的每个元素，以及 $\tau^R \cup \{t^R\}$ 的每个元素，因此也包含 OR^R 中的每个元素。因此，只需证明 $\rho_{k+1}^{S[t]} = \max(\delta, \tau^R)$ 和 $S[t]$ 具有与 t^R相对应的相关实性见证。但它具有 F^R 见证 的相应片段

[5]定理1.2.9(d")中忽略了 F^R 的 Dodd 参数的片段 $t^R \backslash (\delta+1)$在 $p_{k+1}^{S[t]}$ 中的存在，并带有 $j = 1$]。采用该处使用的记号， $\mathcal{P}$ 假设为 1-健全且 Dodd-可靠，则应为 $p_{n+1}(\mathcal{P}[g]^*) = j(p_{n+1}^R \backslash \kappa) \frown q$，其中 j： $R \to \mathrm{Ult}_n(A, F^{\mathcal{P}})$是相关 A的超幂映射，且 $\kappa = \mathrm{cr}(j)$；并且 $q = t^{\mathcal{P}} \backslash \delta$，其中 $t^{\mathcal{P}}$是 $\mathcal{P}$的 Dodd 参数。

Dodd-实性，因为它们属于 $R \subseteq S$，且它具有 P，并且可由此计算出相关的实性见证。同样，若 $\delta < \tau^R$，则由于 S 具有与每个 $\alpha < \tau^R$ 对应的 F^R 片段，因此它具有相关理论，从而能够确立 $\rho_{k+1}^{S[t]} = \tau^R$。

第 4、5 部分：若 $\kappa < \rho_1^P$，则显然成立。因此假设 $\rho_1^P \leq \kappa$。于是 $k = 0$，并且我们已经知道 $\rho_1^{S[t]} = \rho_1^{R[t]} = \max(\rho_1^R, \delta)$。由于 P 是 κ-健全且 κ-Dodd-可靠的，F^P 由 $\kappa \cup t^P$ 生成。而 F^R 由 $\{\delta\} \cup \rho_1^{R[t]} \cup (t^R \backslash (\delta+1))$ 生成，因此 F^S 由 $\{\delta\} \cup \rho_1^{S[t]} \cup j(t^P) \cup t^R \backslash (\delta+1)$ 生成。并且，$t^P \backslash \kappa$ 的 F^P-Dodd-实性见证属于 P，由此得到的 $j(t^P) \backslash \kappa$ 的 F^S-Dodd-实性见证属于 S，因而也属于 $S[t]$；又由于 $t^R \backslash (\delta+1)$ 的 F^R-Dodd-实性见证属于 $R[t]$，这些见证也属于 $S[t]$；此外，既然 P 也属于 $S[t]$，便可在那里利用这些见证恢复 $t^R \backslash (\delta+1)$ 的 F^S-Dodd-实性见证。 □

2.26 命题。设 $\delta \leq \rho_1^R$ 且 $R[t]$ 是 1-健全且 $> \delta$-*Dodd*-可靠 (因此 $S[t]$是 $(k+1)$-健全)。令 s_0, α_0 如命题 2.22 中所述，且 $s_0' = s_0 \cap \tau^R$ (因此 $\alpha_0 < \delta$ 和$s_0' \in [\tau^R]^{<\omega}$)。

1. $\rho_{k+1}^{S[t]} = \rho_1^{R[t]} = \rho_1^R = \tau^R$ *and* $S[t]$ *is* $(k+1)$*-sound.*

2. 如果 S 是类型 2，那么 $S[t]$ 是 $> \delta$-*Dodd*-可靠。

3. $\mathrm{r}\Sigma_{k+1}^{S[t]}(\{\vec{p}_{k+1}^{S[t]}, s_0', \alpha_0, \alpha_{\mathcal{T}}\})$ 关于 $R[t]$ 中参数的陈述，在递归意义上等价于 $\mathrm{r}\Sigma_1^{R[t]}(\{p_1^{R[t]}, \alpha_{\mathcal{T}}\})$ 关于那些参数的陈述。也就是说，存在一个 $\mathrm{r}\Sigma_{k+1}$ 公式 ψ_{k+1}，使得对于所有 $\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 φ 和 $v \in R[t]$，我们有

$$R[t] \models \varphi(v, p_1^{R[t]}, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff S[t] \models \psi_{k+1}(\varphi, v, \vec{p}_{k+1}^{S[t]}, s_0', \alpha_0, \alpha_{\mathcal{T}}),$$

并且存在一个$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 τ_1，使得对于所有$\mathrm{r}\Sigma_{k+1}$ 公式 φ 和 $v \in R[t]$，都有

$$S[t] \models \varphi(v, \vec{p}_{k+1}^{S[t]}, s_0', \alpha_0, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff R[t] \models \tau_{n+1}(\varphi, v, p_1^{R[t]}, \alpha_{\mathcal{T}}).$$

4. $\{F_{\downarrow}^R\}$ 是$\mathrm{r}\Sigma_{k+2}^{S[t]}(\{\vec{p}_{k+1}^{S[t]}, \kappa\})$。

5. 关于 $R[t]$ 中参数的$\mathrm{r}\Sigma_{k+2}^{S[t]}(\{\vec{p}_{k+1}^{S[t]}, \kappa, \alpha_{\mathcal{T}}\})$ 陈述，与关于 $R[t]$ 中参数的$\mathrm{r}\Sigma_2^{R[t]}(\{p_1^{R[t]}, \alpha_{\mathcal{T}}\})$ 陈述递归等价。也就是说，存在一个$\mathrm{r}\Sigma_{k+2}$ 公式 ψ_{k+2}，使得对于所有 $v \in R[t]$ 和$\mathrm{r}\Sigma_2$ 公式 φ，都有

$$R[t] \models \varphi(v, p_1^{R[t]}, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff S[t] \models \psi_{k+2}(\varphi, v, \vec{p}_{k+1}^{S[t]}, \kappa, \alpha_{\mathcal{T}}),$$

并且存在一个$\mathrm{r}\Sigma_2$ 公式 τ_2，使得对于所有 $v \in R[t]$ 和$\mathrm{r}\Sigma_{k+2}$ 公式 φ，都有

$$S[t] \models \varphi(v, \vec{p}_{k+1}^{R[t]}, \kappa, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff R[t] \models \tau_2(\varphi, v, p_1^{R[t]}, \alpha_{\mathcal{T}}).$$

证明。 部分3：这几乎可由命题 2.22 和2.25推出，唯一的问题是参数并不完全匹配。我们来具体考察这一点。

首先考虑构造 ψ_{k+1}。为此，我们基本上采用命题 2.22 的证明方法，但需要以 $\mathrm{r}\Sigma_{k+1}(\{\vec{p}_{k+1}^{S[t]}, s_0', \alpha_0\})$ 的方式识别 $p_1^{R[t]}$ 和 $F_{\downarrow}^R$。（注意，我们可以从 α_0 中识别 κ，因为 $\kappa \leq \alpha_0 < \kappa^{+R}$。）但根据命题

2.25 第3部分，我们有 $p_{k+1}^{S[t]} = j(p_{k+1}^{P} \backslash \kappa)\ \hat{}\ (t^R \backslash (\delta+1))$。根据注记 2.23， $t^R = p_1^R \cup s_0'$ 和$F_{\downarrow}^R = i_{F^R}(f_{\alpha_0}^R)(s_0)$。因此，从 $p_{k+1}^{S[t]}$（并且由于 $S[t]$ 的签名给出了点 δ）我们可以恢复 p_1^R，进而恢复 $p_1^{R[t]} \subseteq p_1^R$；从 $p_{k+1}^{S[t]}$ 和 s_0'（以及可能的点 δ）我们可以恢复完整的 s_0，然后利用 α_0 以及命题 2.22 的证明方法，进而恢复 $F_{\downarrow}^R$。

反方向只需运用命题2.22 证明中的方法来识别 α_0 和 s_0'。

第4部分：根据命题2.22的证明，我们可以以一种 $\mathbf{r}\ F^R$ 的方式，识别 R 的可容许扩张子谓词中的$\Sigma_{k+1}^{S[t]}(\{\vec{p}_{k+1}^{S[t]}, \kappa\}$片段（回想一下， γ的顶生成元 F^R属于 t^R，因此 $= \delta$，或者属于 $p_{k+1}^{S[t]}$）。但这样一来， $F_{\downarrow}^R$就是 $R[t]$ 中唯一满足正确的 $\mathbf{r}\Pi_{k+1}^{S[t]}(\{\vec{p}_{k+1}^{S[t]}, \kappa\})$ 命题的扩张子（同样，我们可以使用这里的参数 γ），因此可以恰当地识别它。

第5部分：为表述 ψ_{k+2}：运用第3部分证明中的一部分，并结合第4部分，我们可以恰当地识别 $p_1^{R[t]}$ 和 $F_{\downarrow}^R$。但接着运用命题2.22证明中的方法，我们可以在相关的 $\mathbf{r}\underset{\sim}{\Sigma}_1^{R[t]}$ 命题和 $\mathbf{r}\underset{\sim}{\Sigma}_{k+1}^{S[t]}$ 命题之间进行转换，从而在见证相关 $\mathbf{r}\underset{\sim}{\Sigma}_2^{R[t]}$ 命题的理论与见证相关 $\mathbf{r}\underset{\sim}{\Sigma}_{k+2}^{S[t]}$ 命题的理论之间进行转换。 τ_2 的表述类似。

□

命题 2.27。 设 $0 < n < \omega$。假设 $R[t]$ 是 n-健全且 $> \delta$-*Dodd*-可靠的，并且 $\delta < \rho_n^{R[t]}$。那么：

1. $\rho_i^{R[t]} = \rho_{k+i}^{S[t]}$ 且 $S[t]$ 是 $(k+i)$-健全的，对所有 $i \in [1, n]$ 均成立。

2. 对所有 $i \in [2, n]$， $p_i^{R[t]} = p_{k+i}^{S[t]}$。[6]

3. 关于 $R[t]$ 中参数的 $\mathrm{r}\Sigma_{k+n+1}^{S[t]}(\{\vec{p}_{k+1}^{S[t]}, \kappa, \alpha_{\mathcal{T}}\})$ 陈述，与关于这些参数的 $\mathrm{r}\Sigma_{n+1}^{R[t]}(\{p_1^{R[t]}, \alpha_{\mathcal{T}}\})$ 陈述递归等价。也就是说，存在一个 $\mathrm{r}\Sigma_{k+n+1}$ 公式 ψ_{k+n+1}，使得对所有 $\mathrm{r}\Sigma_{n+1}$ 公式 φ 以及所有 $v \in R[t]$，我们都有

$$R[t] \models \varphi(v, p_1^{R[t]}, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff S[t] \models \psi_{k+n+1}(\varphi, v, \vec{p}_{k+1}^{S[t]}, \kappa, \alpha_{\mathcal{T}})$$

并且存在一个$\mathrm{r}\Sigma_{n+1}$ 公式 τ_{n+1}，使得对于所有$\mathrm{r}\Sigma_{k+n+1}$ 公式 φ 以及所有$v \in R[t]$，我们都有

$$S[t] \models \varphi(v, \vec{p}_{k+1}^{S[t]}, \kappa, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff R[t] \models \tau_{n+1}(\varphi, v, p_1^{R[t]}, \alpha_{\mathcal{T}}).$$

（请注意，我们所指的标准参数仍然只是 $p_1^{R[t]}$ 和$\vec{p}_{k+1}^{S[t]}$，与 n无关。）

4. 对于 $X \subseteq R[t]$，我们有

$$R[t] \cap \mathrm{Hull}_{\mathrm{r}\Sigma_{k+n+1}}^{S[t]}(X \cup \{\vec{p}_{k+1}^{S[t]}, \kappa, \alpha_{\mathcal{T}}\}) = \mathrm{Hull}_{\mathrm{r}\Sigma_{n+1}}^{R[t]}(X \cup \{p_1^{R[t]}, \alpha_{\mathcal{T}}\}).$$

[6]我们不必有 $p_1^{R[t]} = p_{k+1}^{S[t]}$，但关于这一点，请参见命题 2.26 。

5. 对于 $\mu < \rho_n^{R[t]} = \rho_{n+k}^{S[t]}$ 和 $f\colon\ [\mu]^{<\omega} \to R[t]$，我们有

$$f \text{ is } \mathrm{r}\underset{\sim}{\Sigma}_{k+n}^{S[t]} \iff f \text{ is } \mathrm{r}\underset{\sim}{\Sigma}_n^{R[t]}.$$

P顶点。 以命题 2.26为基例，这是对 n进行的直接归纳法。 □

2.3.3 当 R 是类型 3 时，临界点$(F^R) < \delta$ 且不存在 R-δ-测度

固定一个类型 3 的活跃 $\star$-适配 R，使得 $\kappa =$ 临界点$(F^R) < \delta$。（注意，在这种情况下，我们先使用 §2.1 从 R 转换为 R_J。并且我们在 §2.2 中在 R_J 和 $R_J[t]$ 之间进行了转换。）本节中，我们在 $R_J[t]$ 和 $S[t]$ 之间进行转换，其中 S 的定义与 §2.3.2 开头处相同，但现在使用 R_J。令 $\kappa =$临界点(F^R)、k、P、$j\colon\ P \to S$等也与该处相同。

2.28 命题。 存在一个$\mathrm{r}\Sigma_{k+1}$ 公式 ψ 以及一个$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 τ，使得：

1. $R_J[t] \subseteq S[t]$和 $\lfloor R_J \rfloor$，$\mathbb{E}^{R_J}$是 $\Sigma_1^{S[t]}(\{\lambda(F^{R_J})\})$，并且 序数$^{R_J} = \lambda(F^{R_J})^{+S[t]}$(可能 $\lambda(F^{R_J})$ 是 $S[t]$的最大基数，在这种情况下，$R_J[t]$和 $S[t]$ 具有相同的论域，且 P、S 是主动类型 *2*)。

2. 设定 $z = (\vec{p}_k^{S[t]}, p_{k+1}^{S[t]} \backslash j\ (\kappa)\ \kappa)$。则存在一个$\mathrm{r}\Sigma_{k+1}$公式 ψ和一个$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式τ，使得关于 $R_J[t]$ 中参数的$\mathrm{r}\Sigma_{k+1}^{S[t]}(\{z, \alpha_{\mathcal{T}}\})$ 语句与关于这些参数的$\mathrm{r}\Sigma_1^{R_J[t]}(\{\alpha_{\mathcal{T}}\})$ 语句递归等价，其见证为ψ, τ。事实上，对于所有$\mathrm{r}\Sigma_1$公式 φ和 $v \in R_J[t]$，我们有

$$R_J[t] \models \varphi(v, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff S[t] \models \psi(\varphi, v, z, \alpha_{\mathcal{T}})$$

对于所有$\mathrm{r}\Sigma_{k+1}$ 公式 φ 和 $v \in R_J[t]$，我们有

$$S[t] \models \varphi(v, z, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff R_J[t] \models \tau(\varphi, v, \alpha_{\mathcal{T}}),$$

ψ, τ 的选择还关于 R 是一致的。

3. 如第 z *2* 部分所述，以及 $X \subseteq R$，我们有

$$R[t] \cap \mathrm{Hull}_{\mathrm{r}\Sigma_{k+1}}^{S[t]}(X \cup \{z, \alpha_{\mathcal{T}}\}) = \mathrm{Hull}_{\mathrm{r}\Sigma_1}^{R[t]}(X \cup \{\alpha_{\mathcal{T}}\}).$$

4. 给定 $\mu <$ 序数^R 和 $f\colon\ [\mu]^{<\omega} \to R[t]$，$f$ 当且仅当$\mathrm{r}\Sigma_k^{S[t]}$ *iff* $f \in R[t]$。

证明。 只需简化命题 2.22 的证明。（关于第4 部分有一个小小的新细节：序数可以是 $^{R[t]} = \rho_k^{S[t]}$ <序数$^{S[t]}$。但相同的结论仍然成立，因为序数$^{R[t]}$ 是一个 $S[t]$ 的正则基数。） □

下面的命题可仿照 2.25 来证明；回忆一下，根据 §2.1，R_J 是 1-健全的，且具有 $\rho_1^{R_J} = \nu(F^{R_J})$ 和 $p_1^{R_J} = \emptyset$。

2.29 命题。 假设 R 是 $\star$-适合的、类型 *3*，临界点$(F^R) < \delta$，且 R_J 没有 δ-测度。那么：

1. $S[t]$ *is* $(k+1)$*-sound,*

2. $\rho_{k+1}^{S[t]} = \rho_1^{R_J[t]}$ *and*

3. $p_{k+1}^{S[t]} = j(p_{k+1}^P \backslash \kappa)$.

进一步假设 $P = M_\kappa$ 是主动类型*2*，且 临界点$(F^P) < \kappa =$临界点(F^R)。那么：

4. S 是主动类型*2*，临界点$(F^S) < \delta$，且 $S[t]$ 是 $> \delta$-*Dodd*-可靠，并且

5. 以下两者之一：

(a) $\kappa < \rho_1^P$和 $j(\kappa) < \rho_1^S = \rho_1^{S[t]}$ 以及 S 是 *Dodd*-可靠，或者 *(b)* $\rho_1^P \leq \kappa$和 $\rho_1^{S[t]} =$最大值$(\rho_1^{R_J}, \delta)$，且 F^S 由

$$\{\delta\} \cup \rho_1^{S[t]} \cup j(t^P)$$

生成，并且 $j(t^P)$ 的 *Dodd*-实性见证位于 $S[t]$ 中。

命题 2.30。 假设 R 是 $\star$-适合的、类型 *3*，临界点$(F^R) < \delta$，且 R_J 没有 δ-测度。令 $0 < n < \omega$。假设 $R_J[t]$ 是 n-可靠的，并且 $\delta < \rho_n^{R_J[t]}$。则：

1. $\rho_i^{R_J[t]} = \rho_{k+i}^{S[t]}$ 以及 $S[t]$ 对所有 $i \in [1, n]$都是$(k+i)$-可靠的。 *2.* 对所有 $i \in [2, n]$ 和 $p_1^{R_J[t]} = \emptyset$， $p_i^{R_J[t]} = p_{k+i}^{S[t]}$ [7]

3. $\mathrm{r}\Sigma_{k+n+1}^{S[t]}(\{\vec{p}_{k+1}^{S[t]}, \kappa, \alpha_{\mathcal{T}}\})$ 关于 $R_J[t]$ 中参数的陈述递归等价于$\mathrm{r}\Sigma_{n+1}^{R_J[t]}(\{\alpha_{\mathcal{T}}\})$ 关于这些参数的陈述。也就是说，存在一个$\mathrm{r}\Sigma_{k+n+1}$ 公式 ψ_{k+n+1}，使得对所有$\mathrm{r}\Sigma_{n+1}$ 公式 φ 以及所有 $v \in R[t]$，我们有

$$R_J[t] \models \varphi(v, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff S[t] \models \psi_{k+n+1}(\varphi, v, \vec{p}_{k+1}^{S[t]}, \kappa, \alpha_{\mathcal{T}})$$

并且存在一个$\mathrm{r}\Sigma_{n+1}$ 公式 τ_{n+1}，使得对所有$\mathrm{r}\Sigma_{k+n+1}$ 公式 φ 以及所有$v \in R_J[t]$，我们有

$$S[t] \models \varphi(v, \vec{p}_{k+1}^{S[t]}, \kappa, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff R_J[t] \models \tau_{n+1}(\varphi, v, \alpha_{\mathcal{T}}).$$

(注意，此处 $p_1^{R_J[t]} = \emptyset$ 以及我们所提及的标准参数仍然只是 $\vec{p}_{k+1}^{S[t]}$，与 n无关。)

4. 对于 $X \subseteq R_J[t]$，我们有

$$R_J[t] \cap \mathrm{Hull}_{\mathrm{r}\Sigma_{k+n+1}}^{S[t]}(X \cup \{\vec{p}_{k+1}^{S[t]}, \kappa, \alpha_{\mathcal{T}}\}) = \mathrm{Hull}_{\mathrm{r}\Sigma_{n+1}}^{R_J[t]}(X \cup \{\alpha_{\mathcal{T}}\}).$$

5. 对于 $\mu < \rho_n^{R_J[t]} = \rho_{n+k}^{S[t]}$ 和 $f\colon [\mu]^{<\omega} \to R_J[t]$，我们有

$$f \text{ is } \underset{\sim}{\mathrm{r}\Sigma}_{k+n}^{S[t]} \iff f \text{ is } \underset{\sim}{\mathrm{r}\Sigma}_n^{R_J[t]}.$$

证明。 对 n进行归纳法，并在基步使用命题 2.28 和 2.29 。 □

[7] We needn't have $p_1^{R_J[t]} = p_{k+1}^{S[t]}$, but see Proposition 2.29 in this regard.

2.4 当 $R[t]$与 $R^\star$ 之间且 R 是可容许缓冲时

现在我们计算在 R and $R^\star$ 之间进行精细结构翻译的最后一步——即从 $R_m[t] = (R_m)'[t]$ 到 $(R_m)^\star$ 的步骤；或者换一种记号，即当 R 可容许缓冲时，从 $R[t]$到 $R^\star$ 的步骤。在这一步中，我们将依赖于 $R^\star$ 的可迭代性所带来的一些标准一阶推论，具体是在 $R[t]$ 投射到 δ的情况下。这意味着，我们证明 $R^\star$ 是一个预鼠时，将依赖于其真初始片段的可迭代性；此外，在 R 与 $R^\star$ 之间进行完整的精细结构翻译，也将依赖于 $R^\star$ 的可迭代性。

2.31 备注。在开始之前，我们先说明为什么接下来的计算需要格外谨慎。事实证明，R 可能不是 $\mathrm{r}\Sigma_1^{R^\star}$，甚至可能不是 $\mathrm{r}\Sigma_1^{R^\star}(\{x\})$（对于"较小"的参数 x而言），而且这里的 δ 子集也很容易是"较小"的。此外，[1, 定理 1.2.9(a)] 在一般情况下，当 $j = 1$且（沿用该处的记号） $*$-型为 $\mathcal{P}$ I 或 II 时，并不成立。假设 $\gamma > \delta$ 是一个 R-后继基数，并且存在 $E \in \mathbb{E}^R$ 使得

$$\mathrm{cr}(E) < \delta < \gamma < \gamma^{+R} < \gamma^{++R} < \mathrm{lh}(E) < \mathrm{OR}^R.$$

现在 R 是 $\mathrm{r}\Sigma_1^R$，但我们断言，对于任意 $x \in R^\star|\gamma$， R 都不是 $\mathrm{r}\Sigma_1^{R^\star}(\{x\})$。设 $x \in R^\star|\gamma$ 和 φ 是 $\mathrm{r}\Sigma_1$，并假设对每个 $N \in R^\star$，都有

$$N \triangleleft R \iff R^\star \models \varphi(x, N).$$

于是 $R^\star \models \varphi(x,\ R|\gamma^{+R})$。因此，根据凝聚， $R^\star|\gamma^{++R} \models \varphi(x,\ R|\gamma^{+R})$。令$U = \mathrm{Ult}(R,\ E)$。我们有 $\gamma^{++R^\star} = \gamma^{++R}$ 并且

$$R^\star|\gamma^{++R^\star} = (R|\gamma^{++R})^\star = (U|\gamma^{++U})^\star \models \varphi(x, R|\gamma^{+R}),$$

并且由于 $R|\gamma^{++R} = U|\gamma^{++U}$，因此

$$(U|\gamma^{++U})^\star \models \varphi(x, U|\gamma^{+U}).$$

现在令 F为 $E \restriction \gamma$的平凡完备化，因此 $F \in \mathbb{E}^R$。令 $\xi = \mathrm{lh}(F)$。令 $U_F = \mathrm{Ult}(R,\ F)$。令 $\pi\colon U \to U_F$为因子映射，因此 $\mathrm{cr}(\pi) = \xi = \gamma^{+U_F}$, $\pi(\gamma^{+U_F}) = \gamma^{+U}$并且 $\pi(\gamma^{++U_F}) = \gamma^{++U}$，所以根据初等性，

$$(U_F|\gamma^{++U_F})^\star \models \varphi(x, U_F|\xi).$$

但是 $(U_F|\gamma^{++U_F})^\star \trianglelefteq (R|\xi)^\star \trianglelefteq R^\star$（这里用到 γ是一个 R-后继基数，因此$i_F(\kappa) > \gamma$，其中 $\kappa = \mathrm{cr}(F)$，所以 U_F与 $\mathrm{Ult}_{n_\kappa}(P_\kappa,\ F)$充分一致）。并且由于 φ是 $\mathrm{r}\Sigma_1$，因此 $R^\star \models \varphi(x,\ U_F|\xi)$，所以我们有 $U_F|\xi \trianglelefteq R$。但这是错误的，因为 $R|\xi$是活跃的，且有 F，而 $\xi = \gamma^{+U_F}$。

2.32 命题。假设 R 是 $\star$-可迭代的且可容许缓冲的，并且 $R^\star$ 是定义良好的预鼠。那么：

1. $R[t]$和 $R^\star$ 具有相同的论域。
2. $R^\star$ *is* $\Delta_1^{R[t]}(\{\alpha_{\mathcal{T}}\})$ *and* $\{P\}$ *is* $\Delta_1^{R[t]}(\emptyset)$.

3. $\mathrm{r}\Sigma_1^{R^\star}(\{\alpha_{\mathcal{T}}, P\})$ 可递归归约为 $\mathrm{r}\Sigma_1^{R[t]}(\{\alpha_{\mathcal{T}}\})$。[8] 也就是说，存在一个 $\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 τ_1 使得对于所有 $\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 φ 以及所有 $v \in R[t]$ (等价地， $v \in R^\star$)，我们有

$$R^\star \models \varphi(v, \alpha_{\mathcal{T}}, P) \iff R[t] \models \tau_1(\varphi, v, \alpha_{\mathcal{T}}).$$

4. $R[t]$ 是$\mathrm{r}\Delta_2^{R^\star}(\{\alpha_{\mathcal{T}}, P\})$。

证明。 第 1：我们有 $R^\star \subseteq R[t]$ 因为在 $R[t]$中工作时，我们可以计算星号翻译，并始终处于 $R[t]$之内，因为 R 是可容许缓冲的，并且根据 [2, 定理10]， $S[t]$ 对于每个可容许的 S 且 $R|\delta \triangleleft S \trianglelefteq R$，都是可容许的。反过来，我们有$R[t] \subseteq R^\star$ 因为 $t \in R^\star$，并且由于 R 可以通过在 $R^\star$中工作、计算 -构造而恢复。由于 R 是可容许缓冲的， $R^\star$ 足够封闭，因而能够计算整个-构造。

当 R 是被动时，第 2 部分可由稍加考察前一段得出；此外，由于 P由理论 t确定，而 $\mathcal{T}$由（P， $\alpha_{\mathcal{T}}$）确定。当 R 是主动类型 2（因此 $\delta < \mathbf{cr}(F^R)$）时，这些观察足以定义（$R^\star$）$^{\mathrm{pv}}$。但是， $F^{R^\star}$的可容许代码恰好由满足以下条件的那些对（N， G）组成：$N \triangleleft R^\star$， G测量其临界点的适当子集族，支撑为 $\nu(F^R) = \nu(F^{R^\star})$，并且由 $F^{R[t]}$的可容许代码中的某个元素诱导。由于（$R^\star$）$^{\mathrm{pv}}$ 是 $\mathrm{r}\Sigma_1^{R[t]}(\{\alpha_{\mathcal{T}}\})$，这个可容许代码也是如此。当 R 是活动型 3 时，情况相当类似，但我们直接处理 R^{sq}、（$R[t]$）$^{\mathrm{sq}}$ 和（$R^\star$）$^{\mathrm{sq}}$，因此采用相应的可容许代码概念。

第4部分3：这是第1 和2部分的直接推论。

第4部分同样成立，注意到 $\mathrm{r}\Delta_2$ suffices（而根据注2.31，$\mathrm{r}\Delta_1$ 通常并不足够），因为给定一个预鼠 $N \in R^\star$，我们有 $N \triangleleft R = (R^\star)$，当且仅当存在某个$S \triangleleft R^\star$，使得对于所有满足 $S \trianglelefteq^{\oplus} S' \triangleleft R^\star$的 S'，都有 $N \trianglelefteq (S')$。（在$R = \mathcal{J}(\mathcal{N})$的特殊情形下，则有 $R^\star = \mathcal{J}(N^\star)$，且 $\{N\}$是 $\mathrm{r}\Delta_2^{R^\star}(\{\alpha_{\mathcal{T}}, P\})$，因此 R也是如此。） □

2.33 命题。假设 R 是 $\star$-可迭代的、可容许缓冲的、被动的，并且具有最大基数 γ。假设 $R^\star$ 是一个定义良好的预鼠。那么：

1. $R[t]$ 是$\mathrm{r}\Delta_1^{R^\star}(\{P, \alpha_{\mathcal{T}}, \gamma\})$。[9]

2. 关于参数的$\mathrm{r}\Sigma_1^{R[t]}(\{\alpha_{\mathcal{T}}, \gamma\})$ 语句，与关于这些参数的$\mathrm{r}\Sigma_1^{R^\star}(\{P, \alpha_{\mathcal{T}}, \gamma\})$语句递归等价。也就是说，存在一个$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 ψ_1，使得对于所有$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 φ 以及所有 $v \in R[t]$ (等价地， $v \in R^\star$)，都有

$$R[t] \models \varphi(v, \alpha_{\mathcal{T}}, \gamma) \iff R^\star \models \psi_1(\varphi, v, P, \alpha_{\mathcal{T}}, \gamma),$$

并且存在一个$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 τ_1，使得对于所有$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 φ 以及所有 $v \in R[t]$，都有

$$R^\star \models \varphi(v, P, \alpha_{\mathcal{T}}, \gamma) \iff R[t] \models \tau_1(\varphi, v, \alpha_{\mathcal{T}}, \gamma).$$

3. 对任意 $X \subseteq R[t]$，$\mathrm{Hull}_1^{R[t]}(X \cup \{\alpha_{\mathcal{T}}, \gamma\})$和$\mathrm{Hull}_1^{R^\star}(X \cup \{\alpha_{\mathcal{T}}, P, \gamma\})$具有相同的论域。

此外，见证部分 *1*和 *2*的定义和公式在 R、 P、 $\alpha_{\mathcal{T}}$ 中是一致的。

[8]请注意，这种约化仅在一个方向上成立。[9]请注意，此处我们可以使用参数 γ。

参见备注2.31。

证明。部分 1：由于 γ 是一个 $R^\star$-基数，因此我们有 $R|\gamma = \mathfrak{C}(R^\star|\gamma) \trianglelefteq R = \mathfrak{C}(R^\star)$。所以，既然我们可以使用参数 γ，就能识别 $R|\gamma$。除了 $R|\gamma$ 之外，我们还有 $R|\gamma \trianglelefteq N \triangleleft \mathfrak{C}(R^\star)$，当且仅当存在某个 $N' \in R^\star$ 和 $n < \mathring{\omega}$，使得对于某个 $S \triangleleft R^\star$，有 $N \trianglelefteq N'$、$\rho_{n+1}^{N'} = \gamma$ 和 $N' \trianglelefteq S$。这给出了 R 的一个 $\mathrm{r}\Sigma_1^{R^\star}(\{P, \alpha_{\mathcal{T}}, \gamma\})$ 定义。

第 2 部分和3是直接推论。 □

2.34 命题。假设 R 是被动的、 $\star$-可迭代的且可容许缓冲的，没有最大基数，并且 $R \models$ “我的所有真初始片段都满足凝聚”。假设 $R^\star$ 是一个定义良好的预鼠。那么：

1. $\rho_1^R = \rho_1^{R[t]} = \rho_1^{R^\star} = \mathrm{OR}^R$, *and for each* R*-cardinal* $\gamma > \delta$, *we have*
$$R|\gamma \preccurlyeq_1 R \text{ and } R[t]|\gamma \preccurlyeq_1 R[t] \text{ and } R^\star|\gamma \preccurlyeq_1 R^\star.$$
2. 关于参数的 $\mathrm{r}\Sigma_2^{R[t]}(\{\alpha_{\mathcal{T}}\})$ 语句与关于这些参数的 $\mathrm{r}\Sigma_2^{R^\star}(\{P, \alpha_{\mathcal{T}}\})$语句递归等价。也就是说，存在一个 $\mathrm{r}\Sigma_2$ 公式 ψ_2，使得对于所有 $\mathrm{r}\Sigma_2$ 公式 φ 和所有 $v \in R[t]$，我们都有
$$R[t] \models \varphi(v, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff R^\star \models \psi_2(\varphi, v, P, \alpha_{\mathcal{T}}),$$
并且存在一个 $\mathrm{r}\Sigma_2$ 公式 τ_2，使得对于所有 $\mathrm{r}\Sigma_2$ 公式 φ 和所有 $v \in R[t]$，我们都有
$$R^\star \models \varphi(v, P, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff R[t] \models \tau_2(\varphi, v, \alpha_{\mathcal{T}}).$$
3. 对任意 $X \subseteq R[t]$，$\mathrm{Hull}_2^{R[t]}(X \cup \{\alpha_{\mathcal{T}}\})$ 和 $\mathrm{Hull}_2^{R^\star}(X \cup \{\alpha_{\mathcal{T}}, P\})$ 具有相同的论域。

证明。第1部分由凝聚得到；并且对于每个 R-基数 $\gamma > \delta$，我们有 $\mathfrak{C}(R|\gamma)[t] = \mathfrak{C}(R[t])|\gamma$ 和 $\mathfrak{C}(R|\gamma)^\star = R^\star|\gamma$。第 2 部分是这一点和命题 2.32 的推论。特别地，对于公式 ψ_2，在 $R^\star$ 中工作时，可以利用第 1 部分，以 $\mathrm{r}\Sigma_2(\{P, \alpha_{\mathcal{T}}\})$ 的方式识别形如 $\mathrm{Th}^{R[t]}\mathrm{r}_{\Sigma_1}(\gamma)$ 的理论，其中 $\gamma > \delta$ 为基数。第3部分是第2部分的直接推论。 □

2.35 命题。 假设 R 是 $\star$-可迭代的、可容许缓冲的且活跃的，因此满足 $\delta < \text{临界点}(F^R)$。设 $R^\star$ 是一个定义良好的预鼠。那么：

1. $R[t]$ *is* $\mathrm{r}\Delta_1^{R^\star}(\{P, \alpha_{\mathcal{T}}\})$.
2. $\mathrm{r}\Sigma_1^{R[t]}(\{\alpha_{\mathcal{T}}\})$ 关于参数的陈述与$\mathrm{r}\Sigma_1^{R^\star}(\{P, \alpha_{\mathcal{T}}\})$关于这些参数的陈述递归等价。也就是说，存在一个$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 ψ_1，使得对于所有$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 φ 及所有 $v \in R[t]$，我们有
$$R[t] \models \varphi(v, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff R^\star \models \psi_1(\varphi, v, P, \alpha_{\mathcal{T}}),$$
并且存在一个$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 τ_1，使得对于所有$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 φ 以及所有 $v \in R[t]$，都有
$$R^\star \models \varphi(v, P, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff R[t] \models \tau_1(\varphi, v, \alpha_{\mathcal{T}}).$$
3. 对于任意 $X \subseteq R[t]$，$\mathrm{Hull}_1^{R[t]}(X \cup \{\alpha_{\mathcal{T}}\})$ 和 $\mathrm{Hull}_1^{R^\star}(X \cup \{\alpha_{\mathcal{T}}, P\})$ 具有相同的论域。

证明。 部分 1：由于 $R^\star$ 是活跃的， $R^\star$-基数的类是 $\mathrm{r}\Delta_1^{R^\star}$，因此命题 2.33 的证明可调整为得出，在此情形下 $(R[t])^{\mathrm{pv}}$ 是 $\mathrm{r}\Delta_1^{R^\star}(\{P,\alpha_{\mathcal{T}}\})$。但这样一来， $F^{R[t]}$ （其可容许代码）也是 $\mathrm{r}\Sigma_1^{R^\star}(\{P,\alpha_{\mathcal{T}}\})$，正如命题 2.32第2部分的证明中逆向论证的情形一样。

通常，第 2 部分和 3 部分都是第 1 部分和命题 2.32的推论。 □

命题 2.36。 设 $n<\omega$。假设 $R[t]$ 是 n-健全的， $\delta<\rho_n^{R[t]}$且 $R^\star$ 是一个定义良好的预鼠。假设 $R\models$ “我的所有真初始段都满足凝聚”。那么：

1. $R^\star$ 是 n-健全的， $\rho_i^{R[t]}=\rho_i^{R^\star}$ 且对所有 $i\leq n$都成立。

2. 如果 R 是被动的且具有最大基数，则假设 $0<n$。[10] 那么（一般而言），$\mathrm{r}\Sigma_{n+1}^{R[t]}(\{\alpha_{\mathcal{T}}\})$ 关于参数的陈述递归等价于$\mathrm{r}\Sigma_{n+1}^{R^\star}(\{P,\alpha_{\mathcal{T}}\})$ 关于这些参数的陈述。也就是说，存在一个$\mathrm{r}\Sigma_{n+1}$ 公式 ψ_{n+1}，使得对于所有$\mathrm{r}\Sigma_{n+1}$ 公式 φ 以及所有 $v\in R[t]$ （等价地， $v\in R^\star$），我们有

$$R[t]\models\varphi(v,\alpha_{\mathcal{T}})\iff R^\star\models\psi_{n+1}(\varphi,v,P,\alpha_{\mathcal{T}}),$$

并且存在一个$\mathrm{r}\Sigma_{n+1}$ 公式 τ_1，使得对于所有$\mathrm{r}\Sigma_{n+1}$ 公式 φ以及所有 $v\in R[t]$，我们都有

$$R^\star\models\varphi(v,P,\alpha_{\mathcal{T}})\iff R[t]\models\tau_{n+1}(\varphi,v,\alpha_{\mathcal{T}}).$$

3. 如果 R 是具有最大基数的被动，则假设 $0<n$。 [11] 那么(一般而言)，对于任意 $X\subseteq R[t]$，$\mathrm{Hull}_{n+1}^{R[t]}(X\cup\{\alpha_{\mathcal{T}}\})$ 和$\mathrm{Hull}_{n+1}^{R^\star}(X\cup\{\alpha_{\mathcal{T}},P\})$ 具有相同的论域。

4. 假设 $\rho_{n+1}^{R[t]}>\delta$。那么：

   (a) $\rho_{n+1}^{R[t]}=\rho_{n+1}^{R^\star}$，$(b)$ $p_{n+1}^{R[t]}=p_{n+1}^{R^\star}$，$(c)$ $R[t]$ 是 $(n+1)$-实的，当且仅当 $R^\star$ 是$(n+1)$-实的；并且
   (d) $R[t]$ 是$(n+1)$-健全的，当且仅当 $R^\star$ 是$(n+1)$-健全的。

5. 假设 $\rho_{n+1}^{R[t]}=\delta$。令 $R_P^\star$ 为 P-预鼠，其扩张子序列仅为 $\mathbb{E}_+^{R^\star}\restriction($序数^P, 序数$^{R^\star}]$。那么：

   (a) $\rho_{n+1}^{R_P^\star}=$序数^P,(b) $p_{n+1}^{R[t]}=p_{n+1}^{R^\star}$, 且 $p_{n+1}^{R[t]}\cap($序数$^P+1)=\emptyset$,(c) $R[t]$ 是 $(n+1)$-实的，当且仅当 $R_P^\star$ 是 $(n+1)$-实的；而(d) $R[t]$ 是 $(n+1)$-健全的，当且仅当 $R_P^\star$ 是 $(n+1)$-健全的。

6. 假设 $\rho_{n+1}^{R[t]}=\delta=\rho_{n+1}^{R^\star}$ 和 $R^\star$ 是$(n+1)$-普遍且是$(n+1)$-实的。那么：

   (a) *If* $P\in\mathrm{Hull}_{n+1}^{R^\star}(\delta\cup\{\vec{p}_n^{R^\star},p_{n+1}^{R[t]}\})$ *then* $p_{n+1}^{R[t]}=p_{n+1}^{R^\star}$.

[10]参见命题 2.33，其中给出了以下情形的变体： R 是具有最大基数的被动预鼠，且 $n=0$。[11]参见命题 2.33，其中给出了以下情形的变体： R 是具有最大基数的被动预鼠，且 $n=0$。

(b) 如果 $P \notin \mathit{Hull}_{n+1}^{R^\star}(\delta \cup \{\vec{p}_n^{R^\star}, p_{n+1}^{R[t]}\})$，那么存在 $\zeta \in [\delta, \text{序数}^P]$ 使得 $p_{n+1}^{R[t]} \cup \{\zeta\} = p_{n+1}^{R^\star}$。*(c)* $R[t]$ 是$(n+1)$-普遍且是$(n+1)$-实的。*(d)* $R[t]$ 是$(n+1)$-健全的，当且仅当 $R^\star$ 是$(n+1)$-健全的。*(e)* 如果 $R[t]$是$(n+1)$-健全的，那么$p_{n+1}^{R^\star}$ 是满足 $p_{n+1}^{R[t]} \trianglelefteq q$且$\text{序数}^P \in \mathit{Hull}_{n+1}^{R^\star}(\delta \cup \{\vec{p}_n^{R^\star}, q\})$的最小 $q \in [\text{序数}^{R[t]}]^{<\omega}$。

证明。 第 1 部分在 $n = 0$时是平凡的；当 $n > 0$ 时，由归纳法（使用第 4 部分）可得。

第 2 部分：当 $n = 0$ 时，由命题 2.34 和 2.35 得出。当 $n > 0$ 时，由归纳法（使用第 2 部分）得出，但情况 $n = 1$ 且 R 是具有最大基数 γ的被动模型时除外。在后一种情况下，由于 $\{\gamma\}$ 是 $\mathrm{r}\Delta_2^{R[t]}$ 且 $\mathrm{r}\Delta_2^{R^\star}$，故可由命题 2.33 得出。

第 3 部分是第 2 部分的推论。

第4和第5部分：由于 P 被编码进 t，且 $R[t]$ 的语言可以直接引用 t，因此我们有 $p_{n+1}^{R[t]} \cap (\text{序数}^P + 1) = \emptyset$。所以，第4和第5部分是第2和第3部分的直接推论，但 $n = 0$ 且 R 是具有最大基数 γ的被动模型时除外。下面考虑第4部分中的后一种情况。由命题 2.33，$\rho =_{\mathrm{def}} \rho_1^R = \rho_1^{R[t]} = \rho_1^{R^\star} > \delta$。如果 $\rho_1^R = \text{序数}^R$，则无需证明；因此假设$\rho_1^R <$序数^R。于是$\delta < \rho_1^R \leq \gamma$。所以 $p_1^R = p_1^{R[t]}$。现在我们断言 $p_1^{R^\star} = p_1^{R[t]}$。对于 $p_1^{R[t]} = p_1^R \not\subseteq \gamma$，由凝聚性可知 $R|\gamma \preccurlyeq_1 R$。因此 $p_1^R = (p_1^R \cap \gamma) \cup \{\xi\}$，其中 $\xi = \max(p_1^R)$。但 $R|\xi \preccurlyeq_1 R$，因为否则 $\xi \in \mathrm{Hull}_1^R(\xi)$，这与 p_1^R的极小性矛盾。特别地，$\xi = \gamma$ 或 γ 是 $R|\xi$的最大基数。无论哪种情况，$\{\gamma\}$ 都是 $\mathrm{r}\Sigma_1^{R^\star}(\{\xi\})$（因为若 $\gamma < \xi$，则 γ 只是满足某个 $m < \omega$、使得 $\gamma' = \rho_{m+1}^N$ 对某个 $N \triangleleft R^\star$成立的唯一序数$\gamma' < \xi$）。因此由命题 2.33，理论 $t = \mathrm{Th}_1^{R^\star}(\rho \cup \{p_1^{R[t]}\})$编码了理论 $\mathrm{Th}_1^{R[t]}(\rho \cup \{p_1^{R[t]}\})$，所以 $t \notin R[t]$，进而 $t \notin R^\star$。这表明 $p_1^{R^\star} \leq p_1^{R[t]}$。反过来，若 $p_1^{R^\star} < p_1^{R[t]}$，则仅由$p_1^{R[t]}$ 的极小性可知，我们有 $t' = \mathrm{Th}_1^{R[t]}(\rho \cup \{p_1^{R^\star}\}) \in R[t]$，因此 $t' \in R^\star$；但根据命题 2.32 第3部分（这里甚至不需要考虑参数 γ），$t'' = \mathrm{Th}_1^{R^\star}(\rho \cup \{p_1^{R^\star}\})$可由 t'计算得出，因此 $t'' \in R^\star$，矛盾。所以 $p_1^{R^\star} = p_1^{R[t]}$。关于子句 (c)（实性），如上所述，对于两个模型，我们自动拥有 $\xi = \max(p_1^{R[t]}) = \max(p_1^{R^\star})$的1-固实性见证。但其余的1-固实性见证可以访问参数 γ，所以由命题 2.33 可得等价性。子句 (d)（健全性）由子句 (c) 和命题 2.33 得出。至此，当前情形下第4部分的证明完成。第5部分非常相似。若 $\gamma > \delta$，则本质上相同。若 $\gamma = \delta$，两个模型都可以通过各自的语言轻易定义参数 δ（以及P、t）。利用该参数，我们可以像之前一样继续。

部分 6：我们在此将证明分情况讨论：

Case 1. 并非如此：$n = 0$ 和 R 是具有最大基数的被动。

Subcase 1.1. $P \in \mathrm{Hull}_{n+1}^{R^\star}(\delta \cup \{\vec{p}_n^{R^\star}, p_{n+1}^{R[t]}\})$.

根据第 2 和第 3 部分，$p_{n+1}^{R[t]} = p_{n+1}^{R^\star}$；此外，由于 $R^\star$ 是（$n+1$）-普遍的，根据第 2 和第 3 部分，$R[t]$ 也是（$n+1$）-普遍的。类似地，$R[t]$ 的（$n+1$）-实性也成立；注意，由于对所有 $\alpha \in p_{n+1}^{R[t]}$ 都有 $\mathrm{OR}^P < \alpha$，$R^\star$ 的（$n+1$）-实性见证都可以引用参数 OR^P，因此足以计算相应的 $R[t]$的（$n+1$）-实性见证。再次使用第 2 和第 3 部分可得，$R[t]$ 是（$n+1$）-健全的，当且仅当 $R = R_P^\star$

是（$n+1$）-健全的。最后，由于 $P \in \mathrm{Hull}_{n+1}^{R^\star}(\delta \cup \{\vec{p}_n^{R^\star}, p_{n+1}^{R[t]}\})$ 且 $p_{n+1}^{R^\star} = p_{n+1}^{R[t]}$，子句（e）在当前情形下是直接成立的。

Subcase 1.2. $P \notin \mathrm{Hull}_{n+1}^{R^\star}(\delta \cup \{\vec{p}_n^{R^\star}, p_{n+1}^{R[t]}\})$.

我们断言 $p_{n+1}^{R^\star} \neq p_{n+1}^{R[t]}$。假设 $p_{n+1}^{R^\star} = p_{n+1}^{R[t]}$。那么根据 $R^\star$ 的（$n+1$）-普遍性，$\delta \notin \mathrm{Hull}_{n+1}^{R^\star}(\delta \cup \{\vec{p}_n^{R^\star}, p_{n+1}^{R^\star}\})$，但由于 δ 是 $R^\star$ 的后继基数（根据我们对 P 的原始假设），因此 $n = 0$ 且 $\mathrm{Hull}_1^{R^\star}(\delta \cup \{p_1^{R^\star}\}) = R^\star|\delta$，而这属于 $R^\star$，矛盾。

（再次利用第 2 和第 3 部分）可知，对于某个 $\zeta \in [\delta, \mathrm{OR}^P]$，$p_{n+1}^{R^\star} = p_{n+1}^{R[t]} \cup \{\zeta\}$。现在，$R^\star$ 的（$n+1$）-普遍性推出 $R[t]$ 的普遍性；同样，（$n+1$）-实性也成立，因为 $p_{n+1}^{R[t]} \cap (\mathrm{OR}^P + 1) = \emptyset$。和之前一样，可得 $R[t]$ 是（$n+1$）-健全的，当且仅当 $R^\star$ 是（$n+1$）-健全的。最后，对于条款 (e)，假设 $R[t]$ 是（$n+1$）-健全的，因此如我们所见，$R^\star$ 也是如此。因此 $P \in \mathrm{Hull}_{n+1}^{R^\star}(\delta \cup \{\vec{p}_{n+1}^{R^\star}\})$。反过来，假设存在 $\zeta' < \zeta$，使得 $P \in \mathrm{Hull}_{n+1}^{R^\star}(\delta \cup \{\vec{p}_n^{R^\star}, p_{n+1}^{R[t]}, \zeta'\})$。那么请注意，由于 $R[t]$ 是（$n+1$）-健全的，这个 Hull 就是 $R^\star$，这与 $p_{n+1}^{R^\star}$ 的极小性矛盾。

Case 2. $n = 0$ 且 R 是被动的，并具有一个最大基数 γ。

如果 $\gamma > \delta$ 则根据第5部分的论证，γ 可轻易由$\max(p_1^{R[t]}) = \max(p_1^{R^\star})$定义，并且因此并根据命题2.33，我们可以像情形1那样论证。假设 $\gamma = \delta$。则要么 $p_1^{R[t]} = \emptyset$ 要么 $p_1^{R[t]} = \{\xi\}$，对某个 $\xi \in (\delta,$ 序数$^R)$（因为 $R[t]$可以识别 t 通过其语言，从而定义参数 δ）。

假设 $p_1^{R[t]} = \{\xi\}$。则 $\xi >$ 序数^P，因为 P 可由 t识别，因此δ，$P \in \mathrm{Hull}_1^{R^\star}(\delta \cup \{p_1^{R[t]}\})$。但随后与之前大致相同，$p_1^{R^\star} \leq p_1^{R[t]}$。但如果 $p_1^{R^\star} < p_1^{R[t]}$ 则$t = \mathrm{Th}_1^{R[t]}(\delta \cup \{p_1^{R^\star}\}) \in R[t]$，所以 $t \in R^\star$，而这给出了与之前类似的矛盾。因此$p_1^{R[t]} = \{\xi\} = p_1^{R^\star}$，其余部分现在就清楚了。

现在改为假设 $p_1^{R[t]} = \emptyset$。如果 $P \in \mathrm{Hull}_1^{R^\star}(\delta)$，那么 $\delta \in \mathrm{Hull}_1^{R^\star}(\delta)$ 也成立；于是如前所述，可得 $p_1^{R^\star} = \emptyset$，其余条件显然成立。反之，若 $P \notin \mathrm{Hull}_1^{R^\star}(\delta)$，则该 Hull 在 $\mathrm{OR}^{R^\star}$ 中有界，因此是 $R^\star$ 的一个元素，从而 $p_1^{R^\star} \neq \emptyset$，并可推出对于某个 $\zeta \in [\delta, \mathrm{OR}^P]$，有 $p_1^{R^\star} = \{\zeta\}$，等等。 □

命题 2.37。设 $n < \omega$。假设 $R[t]$ 是 n-健全的，$\delta < \rho_n^{R[t]}$ 且 $R^\star$ 是定义良好的预鼠。设 $\mu < \rho_n^{R[t]}$ 且 $f : [\mu]^{<\omega} \to R[t]$（等价地，$f : [\mu]^{<\omega} \to R^\star$）。那么 f 是 $\mathrm{r}\underset{\sim}{\Sigma}_n^{R[t]}$ 当且仅当 f 是 $\mathrm{r}\underset{\sim}{\Sigma}_n^{R^\star}$。

证明。如果 $n = 0$，这是因为 $R[t]$ 和 $R^\star$ 具有相同的论域，而如果 $n > 0$，则这是 2.33 和 2.36 第 2部分的直接推论。 □

2.5 当 R^+ 是被动的且不存在 R^+-δ-测度时

设 N 是 $\star$-可迭代的。假设以下情况之一成立：

(i) N是主动类型2，其临界点为 $F^N < \delta$，且不存在 N-δ-测度；或

(ii) N 是活动型 3，其临界点为 $F^N < \delta$，且不存在 N-δ- 测度；或

(iii) 存在一个 N-δ-测度，且 $\rho_\omega^N = \delta$；或

(iv) $N = Q_m$ （其可容许缓冲）。

还假设我们具备前面各节中关于 N 和 $N^\star$ 的所有额外假设，例如，$N^\star$ 是定义良好的预鼠、是 1-坚实的，等等；这些假设保证了前文确立的精细结构对应关系。

设 $0 < \xi \in$ 序数使得 $\mathcal{J}_\xi(N[t])$ 是一个 t-预鼠，且 $\rho^{\mathcal{J}_\alpha(N[t])}_1 \leq$ 序数^N 对所有$\alpha \in (0, \xi]$；并且若 (iv) 成立，则 $\xi \leq \alpha_{m-1} + \ldots + \alpha_0$（见定义 2.3）。

2.38 命题。设 R, S 满足以下条件之一：

(a) *(i)* 成立，$R = N$ 且 S 是 §§2.3.2中定义的相应结构，

(b) $R = N$是活动型 3，且 临界点$(F^R) < \delta$和 $S = N_J = R_J \neq R = N$，或者

(c) *(ii)* 成立，$R = N_J$ 且 S 是 §§2.3.3中定义的相应结构。

令 $0 < \alpha \leq \xi$ 和 $n < \omega$。假设 $\mathcal{J}_\alpha(R[t])$ 是一个 n-健全的 t-预鼠，且是1-实的。令 $r \in [\mathrm{OR}]^{<\omega}$ 为满足以下条件的最小序数：$\mathrm{OR}^R \in \mathrm{Hull}^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1(\{r, p^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_1\})$，并令$r' = r \backslash \rho^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1$。[12] 那么：

1. $\mathcal{J}_\alpha(R[t]) \subseteq \mathcal{J}_\alpha(S[t])$，

2. $\mathcal{P}(\beta) \cap \mathcal{J}_\alpha(R[t]) = \mathcal{P}(\beta) \cap \mathcal{J}_\alpha(S[t])$ 对所有 $\beta \in \mathrm{OR}^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}$。

3. $\mathcal{J}_\alpha(S[t])$是一个 t-预鼠，

4. $\mathrm{r}\Sigma^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1(\{R[t], \alpha_\mathcal{T}\})$ 关于 $\mathcal{J}_\alpha(R[t])$ 中参数的陈述，与关于这些参数的$\mathrm{r}\Sigma^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_1(\{\alpha_\mathcal{T}\})$ 陈述递归等价。也就是说，存在一个$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 ψ_1，使得对所有$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 φ 以及所有 $v \in \mathcal{J}_\alpha(R[t])$，都有

$$\mathcal{J}_\alpha(R[t]) \models \varphi(v, R[t], \alpha_\mathcal{T}) \iff \mathcal{J}_\alpha(S[t]) \models \psi_1(\varphi, v, \alpha_\mathcal{T}),$$

并且存在一个$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 τ_1，使得对于所有$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 φ以及所有 $v \in \mathcal{J}_\alpha(R[t])$，都有

$$\mathcal{J}_\alpha(S[t]) \models \varphi(v, \alpha_\mathcal{T}) \iff \mathcal{J}_\alpha(R[t]) \models \tau_1(\varphi, v, R[t], \alpha_\mathcal{T}).$$

5. $\rho^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1 = \rho^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_1$，

6. 我们有：
   - $p^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1 = p^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_1 \cup r'$
   - $\mathrm{OR}^R \in \mathrm{Hull}^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1(\eta \cup \{p^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1 \backslash (\eta + 1)\})$ *for each* $\eta \in p^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_1$, *and*
   - $\mathcal{J}_\alpha(S[t])$ *is* 1*-solid.*

7. $\mathcal{J}_\alpha(S[t])$ 是 n健全的。

[12]注释 $r' \cap (\delta + 1) = \emptyset$，因为根据定义，$\rho^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1 \geq \delta$，且参数 δ 可以通过 t-预鼠语言定义。

8. 对所有 $i \in [1,n]$，关于 $\mathcal{J}_\alpha(R[t])$ 中参数的 $\mathrm{r}\Sigma^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_{i+1}(\{\alpha_{\mathcal{T}}\})$ 陈述，都递归等价于关于那些参数的 $\mathrm{r}\Sigma^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_{i+1}(\{\alpha_{\mathcal{T}}\})$ 陈述。也就是说，存在一个 $\mathrm{r}\Sigma_{i+1}$ 公式 ψ_{i+1}，使得对于所有 $\mathrm{r}\Sigma_{i+1}$ 公式 φ以及所有$v \in \mathcal{J}_\alpha(R[t])$，我们有

$$\mathcal{J}_\alpha(R[t]) \models \varphi(v, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff \mathcal{J}_\alpha(S[t]) \models \psi_{i+1}(\varphi, v, \alpha_{\mathcal{T}}),$$

并且存在一个$\mathrm{r}\Sigma_{i+1}$ 公式 τ_{i+1}，使得对于所有$\mathrm{r}\Sigma_{i+1}$ 公式 φ 以及所有$v \in \mathcal{J}_\alpha(R[t])$，都有

$$\mathcal{J}_\alpha(S[t]) \models \varphi(v, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff \mathcal{J}_\alpha(R[t]) \models \tau_{i+1}(\varphi, v, \alpha_{\mathcal{T}}).$$

9. $\rho^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_{i+1} = \rho^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_{i+1}$ 对于所有 $i \in [1,n]$,

10. $p^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_{i+1} = p^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_{i+1}$

11. $\mathcal{J}_\alpha(R[t])$ 是$(i+1)$-实的，当且仅当 $\mathcal{J}_\alpha(S[t])$ 是$(i+1)$-实的，对所有 $i \in [1,n]$均成立。

12. 设 $\mu < \rho^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_n = \rho^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_n$，并设 $f\colon [\mu]^{<\omega} \to R[t]$。则

$$f \text{ is } \underset{\sim}{\mathrm{r}\Sigma}^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_n \iff f \text{ is } \underset{\sim}{\mathrm{r}\Sigma}^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_n.$$

证明。 我们对 (α, n) 运用归纳法，基于 §2.3.2 的结果。特别地，由于 $\mathcal{J}(R)$ 是一个预鼠， R 是健全的，因此 是一个健全的 t-预鼠，因此 是一个健全的t-预鼠，因此 $(S[t])$ 是一个 t-预鼠（尽管 (S) 不是预鼠，因为 并不健全）。

第4部分：在 $\mathcal{J}_\alpha(S[t])$ 中工作， $S[t]$是满足以下任一条件的最小节段 $Q[t]$ ： Q 不健全（在假设(a) 和(c)下），或 Q 不是 Mitchell-Steel 编号（在假设(b)下）。这使我们能够以一种 Σ_1 的方式识别 $S[t]$，进而识别 S，从而计算出 R 和 $R[t]$。根据归纳法，我们还有 $\mathcal{J}_\alpha(R[t]) \subseteq \mathcal{J}_\alpha(S[t])$，并且 $R[t]$ 上方的 $\mathcal{J}_\alpha(R[t])$ 层级是 $\mathrm{r}\Sigma^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_1$，这足以表述 ψ_1。

为了表述 τ_1，由于我们是从参数 $R[t]$ 出发的，因此很容易计算出编码版本 $S[t]$ 以及 $\mathcal{J}_\alpha(S[t])$ 层级，并将 $\mathcal{J}_\alpha(R[t])$ 的元素忠实地嵌入这些代码中。这就得到了 τ_1。

Part5：这是 pa 的直接推论
第 6 部分：令 $\rho = \rho^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1 = \rho^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_1$。由于 $\{R[t]\}$ 是 $\mathrm{r}\Sigma^{S[t]}_1(\emptyset)$，

$$\mathcal{P}(\rho) \cap \mathcal{J}_\alpha(R[t]) = \mathcal{P}(\rho) \cap \mathcal{J}_\alpha(S[t])$$

且 $\mathcal{J}_\alpha(R[t])$ 是 $\mathrm{r}\Sigma^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_1$，显然 $p^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_1 \leq p^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1$。并且 $r' \leq p^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1$，否则 $R[t] \notin \mathrm{Hull}^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1(\rho \cup \{p^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1\})$，这意味着该 Hull 在 $\mathcal{J}_\alpha(R[t])$ 中有界，因此是 $\mathcal{J}_\alpha(R[t])$的一个元素，不可能。令 r'_0 为 r' 中满足 $r'_0 \trianglelefteq p^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1$ 的最长（顶端）节段。注意， $r'_0 \in \mathrm{Hull}^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_1(\emptyset)$。因此，若 $r'_0 = p^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1$，则 $p^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_1 = \emptyset$，问题便解决了。于是设 $r'_0 \subsetneq p^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1$，并令 $\gamma_0 = \max(p^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1 \setminus r'_0)$。我们断言 $\gamma_0 = \max(p^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_1)$。注意，要么是 $r' = r'_0$，要么 $\max(r' \setminus r'_0) < \gamma_0$，因此 $R[t] \in \mathrm{Hull}^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1(\gamma_0 \cup \{r'_0\})$。由 $\mathcal{J}_\alpha(R[t])$ 的 1-固实性可知， $t = \mathrm{Th}^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1(\gamma_0 \cup \{r'_0\}) \in \mathcal{J}_\alpha(R[t])$。但由于 $R[t]$ 属于该 Hull，因此可得

$t' = \mathrm{Th}^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_1(\gamma_0 \cup \{r'_0\})$ 可由 t计算得到，因此 $t' \in \mathcal{J}_\alpha(R[t]) \subseteq \mathcal{J}_\alpha(S[t])$。既然我们已经知道 $p^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_1 \subseteq \gamma_0 + 1$，便可推出 $\gamma_0 = \max(p^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_1)$，且$\mathcal{J}_\alpha(S[t])$ 关于该参数是 1-坚实的。以参数 γ_0 为参照（接着以 $\{\gamma_0, \gamma_1\}$等为参照）重复这一论证，便可轻易完成证明。P

部分 7由归纳法和前面内容立即得出。部分。

部分 8：由归纳法可得，并利用以下事实：$\{R[t]\}$ is $\mathrm{r}\Sigma^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_2$。

部分 9 由第 8 部分立即得出，而第 10 部分和 11 部分则由这两部分共同推出。

部分 12 由前面的部分推出。 □

2.39 命题。假设 *(iii)* 成立，$R = N$ 且 S 是 *§§2.3.1* 中定义的对应结构。令 (α, r, r') 如命题 *2.38* 中对 (R, S)所述，并假设$\mathcal{J}_\alpha(R[t])$是一个 t-预鼠。则：

1. $\rho^{R[t]}_\omega = \delta = \rho^{S[t]}_\omega$和 $R[t]$、$S[t]$ 是健全的 t-预鼠。
2. $\mathcal{P}(\delta) \cap \mathcal{J}_\alpha(R[t]) = \mathcal{P}(\delta) \cap \mathcal{J}_\alpha(S[t])$。
3. $\mathcal{J}_\alpha(S[t])$ 是一个 t-预鼠，并且 $\mathcal{J}_\alpha(R[t])$ 和 $\mathcal{J}_\alpha(S[t])$ 都具有最大基数 δ。
4. $\mathrm{r}\Sigma^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1(\{R[t]\})$中关于参数的陈述与 $\mathrm{r}\Sigma^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_1$ 中关于这些参数的陈述递归等价。也就是说，存在一个$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 ψ_1，使得对于所有$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 φ 以及所有 $v \in \delta$，我们都有

$$\mathcal{J}_\alpha(R[t]) \models \varphi(v, R[t]) \iff \mathcal{J}_\alpha(S[t]) \models \psi_1(\varphi, v),$$

并且存在一个$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 τ_1，使得对于所有$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 φ 以及所有 $v \in \delta$，我们都有

$$\mathcal{J}_\alpha(S[t]) \models \varphi(v) \iff \mathcal{J}_\alpha(R[t]) \models \tau_1(\varphi, v, R[t]).$$

5. $\rho^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1 = \rho^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_1 = \delta$,
6. $p^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1 = r'$ 和 $p^{\mathcal{J}_\alpha(S[t])}_1 = \emptyset$.
7. $\mathcal{J}_\alpha(R[t])$ 和 $\mathcal{J}_\alpha(S[t])$ 是健全的 t-精细结构模型。

证明。这类似于命题 2.38 的证明，但在此情形下，根据 §2.3.1，$R[t]$ 和 $S[t]$ 投影到δ，且是健全的，因此整体上比 2.38 中的情况简单得多。不过，有一点不同：我们不一定有 $\mathcal{J}_\alpha(R[t]) \subseteq \mathcal{J}_\alpha(S[t])$，甚至不一定有 $R \subseteq \mathcal{J}_\alpha(S[t])$。（这是因为 δ^{+R} 中可能存在一些子集（例如 μ^R_δ）属于 R，由此还能进一步构造出属于 R的集合，而构造这些集合需要一定的距离。）但 $R[t]$和 $S[t]$都能通过代码相互计算，这就足够了。$p^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1 = r'$ 这一事实成立，是因为如果 $\mathrm{Hull}^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1(\rho^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1 \cup \{p^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1\})$ 在 $\mathcal{J}_\alpha(R[t])$中共尾，但由于 δ 是 $\mathcal{J}_\alpha(R[t])$的最大基数，这个 Hull 就是 $\mathcal{J}_\alpha(R[t])$本身。但注意，若 $p^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1 \neq \emptyset$，则对某个 ζ，有 $p^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1 = \{\zeta\}$，且 $\mathrm{Hull}^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1(\zeta) = \mathcal{J}_\alpha(R[t])|\zeta$；但若 $\zeta >$ 序数^R，则 $\mathcal{J}_\zeta(R[t]) \preccurlyeq_1 \mathcal{J}_\alpha(R[t])$，所以 $\rho^{\mathcal{J}_\zeta(R[t])}_1 = \zeta$，这就导出矛盾。因此 $\zeta \leq$ 序数^R，所以 $R[t] \notin \mathrm{Hull}^{\mathcal{J}_\alpha(R[t])}_1(\zeta)$。 □

2.40 命题。假设 *(iv)* 成立，因此 $N = Q_m$ 是可容许缓冲的（并满足 *§2.5* 开头提到的其他假设，尤其是 $\alpha \leq \alpha_{m-1} + \ldots + \alpha_0$）。令 $\alpha = \alpha_{m-1} + \alpha_{m-2} + \ldots + \alpha_i + \beta$，其中 $0 < \beta \leq \alpha_{i-1}$。回忆一下，$Q_{i-1} = \mathcal{J}_{\alpha_{i-1}}(N_{i-1})$。令 γ 为 $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$的最大基数。令 $n < \omega$ 满足：$\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$是一个 n-健全的 t-预鼠，且 $\delta < \rho_n^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])}$。令 $N_P^\star$为由 $N^\star$给出的 P-预鼠（回忆 $P \trianglelefteq N^\star$，且 OR^P是 $N^\star$的强切点；$N_P^\star$与 $N^\star$具有相同的论域）。那么：

1. γ 是 $\mathcal{J}_\alpha(N^\star)$的最大基数。
2. $\mathcal{P}(\gamma) \cap \mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t]) = \mathcal{P}(\gamma) \cap \mathcal{J}_\alpha(N^\star)$.
3. 假设 $\delta < \gamma$。那么：
   - $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t]) \subseteq \mathcal{J}_\alpha(N^\star)$.
   - *For all* $\mu < \gamma$, *all* $\lambda < \beta$, *all* $\ell < \omega$ *and all* $f : [\mu]^{<\omega} \to \mathcal{S}_\ell(\mathcal{J}_\lambda(N_{i-1}))$,[13]
   $$f \in \mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t]) \iff f \in \mathcal{J}_\alpha(N^\star).$$
4. $\gamma < \gamma^{+N_{i-1}} \leq$序数$^{N_{i-1}}$ 和 $\gamma^{+N_{i-1}} <$序数$^{N^\star}$，并且
   $$\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t]) = \mathrm{Hull}_1^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])}(\gamma \cup \{\gamma^{+N_{i-1}}\}).$$
5. 假设 $\delta < \gamma$。那么 $p^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])}{}_1 \neq \emptyset$，并且$\gamma \leq \xi \leq \gamma^{+N_{i-1}}$ 其中 $\xi = \max(p_1^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])})$，且以下二者之一成立：$\xi = \gamma$，或者 $N_{i-1}||\xi \models$“γ 是最大基数”。
6. 假设 $\delta = \gamma$ 且 $p^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])}{}_1 \neq \emptyset$。那么 $p^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])}{}_1 = \{\xi\}$，其中 $\delta < \xi \leq \delta^{+N_{i-1}}$，并且“$\delta$ 是最大基数”。
7. 关于参数 $v \leq \gamma^{+N_{i-1}}$ (或者若 $\delta < \gamma$，$v \in \mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$) 的$\mathrm{r}\Sigma^{\mathcal{J}_\alpha(N_P^\star)}{}_1(\{\alpha_\mathcal{T}\})$ 语句可递归归约为关于v的$\mathrm{r}\Sigma^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])}{}_1(\{\alpha_\mathcal{T}\})$ 语句；也就是说，存在一个$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 τ_1，使得对于所有$\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 φ 以及所有$v \leq \gamma^{+N_{i-1}}$ (或者若 $\delta < \gamma$，$v \in \mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$)，都有
   $$\mathcal{J}_\alpha(N_P^\star) \models \varphi(v, \alpha_\mathcal{T}) \iff \mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t]) \models \tau_1(\varphi, v, \alpha_\mathcal{T}).$$
8. $\mathrm{r}\Sigma^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])}{}_1(\{\gamma, \alpha_\mathcal{T}\})$ 关于参数 $v \leq \gamma^{+N_{i-1}}$ (或若 $\delta < \gamma$, $v \in \mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$) 的陈述，与关于 v 的 $\mathrm{r}\Sigma^{\mathcal{J}_\alpha(N_P^\star)}{}_1(\{\gamma, \alpha_\mathcal{T}\})$ 陈述递归等价。也就是说，存在一个 $\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 ψ_1，使得对于所有 $\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 φ 以及所有 $v \leq \gamma^{+N_{i-1}}$ (或若 $\delta < \gamma$, $v \in \mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$)，都有
   $$\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t]) \models \varphi(v, \gamma, \alpha_\mathcal{T}) \iff \mathcal{J}_\alpha(N_P^\star) \models \psi_1(\varphi, v, \gamma, \alpha_\mathcal{T}),$$
   并且存在一个 $\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 τ_1，使得对于所有 $\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 φ 以及所有 $v \leq \gamma^{+N_{i-1}}$(或若 $\delta < \gamma$, $v \in \mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$)，都有
   $$\mathcal{J}_\alpha(N_P^\star) \models \varphi(v, \gamma, \alpha_\mathcal{T}) \iff \mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t]) \models \tau_1(\varphi, v, \gamma, \alpha_\mathcal{T}).$$

[13]这些函数与构造 $\mathrm{Ult}_0(\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t]), E)$ 以及作为 $\mathrm{Ult}_0(\mathcal{J}_\alpha(N^\star), E)$ 的子模型的“$i_E(\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t]))$”有关。那里 *can* 可能存在函数 $f \in \mathcal{J}_\alpha(N^\star)$，使得 $f : [\mu]^{<\omega} \to \mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$，甚至只需 $f : [\mu]^{<\omega} \to$ 序数$^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])}$，使得 $f \notin \mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$，因为这类 f 在那些序数中可能无界。而且那些序数在 $\mathcal{J}_\alpha(N^\star)$中的余终性甚至可能是 $\mu =$临界点(E)。但计算“$i_E(\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t]))$”时，应当忽略这类函数。

9. $\rho_1^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])} = \rho_1^{\mathcal{J}_\alpha(N_P^\star)}$

10. $p_1^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])} = p_1^{\mathcal{J}_\alpha(N_P^\star)}$

11. $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$ 是 1-实，当且仅当 $\mathcal{J}_\alpha(N_P^\star)$ 是 1-实。

12. $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$ 是 1-健全，当且仅当 $\mathcal{J}_\alpha(N_P^\star)$ 是 1-健全。

13. $\mathcal{J}_\alpha(N_P^\star)$ 是一个 n-健全的 P-预鼠。

14. $\rho_\ell^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])} = \rho_\ell^{\mathcal{J}_\alpha(N_P^\star)}$ 对所有 $\ell \in (0、\ n]$ 以及 $p_\ell^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])} = p_\ell^{\mathcal{J}_\alpha(N_P^\star)}$ 均成立，对所有 $\ell \leq n$ 也成立。

15. 若 $0 < n$，则对所有 $\mu < \rho_n^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])}$ 以及所有 $f : [\mu]^{<\omega} \to \rho_n^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])}$，$f$ 是 $\mathrm{r}\underset{\sim}{\Sigma}_n^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])}$，当且仅当 f 是 $\mathrm{r}\underset{\sim}{\Sigma}_n^{\mathcal{J}_\alpha(N^\star)}$。

16. 如果 $0 < n$，那么 $\mathrm{r}\Sigma_{n+1}^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])}(\{\alpha_{\mathcal{T}}\})$ 关于参数 $v \leq \gamma^{+N_{i-1}}$ (或如果 $\delta < \gamma$，$v \in \mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$) 的陈述与 $\mathrm{r}\Sigma_{n+1}^{\mathcal{J}_\alpha(N_P^\star)}(\{\alpha_{\mathcal{T}}\})$ 关于 v 的陈述递归等价。也就是说，存在一个 $\mathrm{r}\Sigma_{n+1}$ 公式 ψ_{n+1}，使得对于所有 $\mathrm{r}\Sigma_{n+1}$ 公式 φ 以及所有 $v \leq \gamma^{+N_{i-1}}$ (或如果 $\delta < \gamma$，$v \in \mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$)，我们都有

$$\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t]) \models \varphi(v, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff \mathcal{J}_\alpha(N_P^\star) \models \psi_1(\varphi, v, \alpha_{\mathcal{T}}),$$

并且存在一个 $\mathrm{r}\Sigma_{n+1}$ 公式 τ_{n+1}，使得对于所有 $\mathrm{r}\Sigma_{n+1}$ 公式 φ 以及所有 $v \leq \gamma^{+N_{i-1}}$ (或如果 $\delta < \gamma$，$v \in \mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$)，我们都有

$$\mathcal{J}_\alpha(N_P^\star) \models \varphi(v, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff \mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t]) \models \tau_1(\varphi, v, \alpha_{\mathcal{T}}).$$

17. $\rho_{n+1}^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])} = \rho^{\mathcal{J}_\alpha(N_P^\star)}$

18. $p_{n+1}^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])} = p^{\mathcal{J}_\alpha(N_P^\star)}$ 19. $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$ 是 $(n+1)$-实，当且仅当 $\mathcal{J}_\alpha(N_P^\star)$ 是 $(n+1)$-实。20. $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$ 是 $(n+1)$-健全，当且仅当 $\mathcal{J}_\alpha(N_P^\star)$ 是 $(n+1)$-健全。

证明。我们对 (α, n) 使用归纳法。第 1、2 和 3 部分由归纳法以及前面各节中精细结构的对应关系得出（例如，在 $N_{i-1}[t]$ 与 $Q_i[t]$ 之间进行转换，等等）。关于第 3 部分：只需通过在 $\mathcal{J}_\alpha(N^\star)$ 上计算 $\underset{\sim}{\mathcal{J}}_\alpha(N^\star)$，即可得到 $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t]) \subseteq \mathcal{J}_\alpha(N^\star)$；这一构造具有足够的局部性，因为 $\delta < \gamma$。并且，对于第二个子句中的所有函数 f，$f \in \mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$ 当且仅当 $f \in \mathcal{J}_\alpha(N^\star)$，这一事实源于这些模型在 $\mathcal{P}(\gamma)$ 上的一致性，因为 $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t]) \models$ “每个集合都是 γ 的满射像”。

第4部分：我们有 $\gamma <$ 序数$^{N_{i-1}}$，因为 $\rho_\omega^{N_{i-1}} <$ 序数$^{N_{i-1}}$，而且不存在 $\zeta \leq \beta$ 使得 $\mathcal{J}_\zeta(N_{i-1})$是可容许的。我们有 $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}) = \mathrm{Hull}_1^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1})}($序数$^{N_{i-1}} + 1)$（因为不存在 $\zeta \leq \beta$ 使得 $\mathcal{J}_\zeta(N_{i-1})$是可容许的）。但存在某个 $\zeta < \beta$ 使得 $\mathcal{J}_\zeta(N_{i-1})$投射到 γ，并且注意，对于最小的此类 ζ，$\{\zeta, N_{i-1}\}$ 是 $\mathrm{r}\Sigma_1^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1})}(\{\gamma^{+N_{i-1}}\})$，因此 $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}) = \mathrm{Hull}_1^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1})}(\gamma \cup \{\gamma^{+N_{i-1}}\})$。

我们有 $\gamma^{+N_{i-1}} <$序数$^{N^\star}$，因为要么不存在 N_{i-1}-δ-测度，且序数$^{N_{i-1}} <$序数$^{N^\star}$；要么存在一个 N_{i-1}-δ-测度，$\gamma = \delta$ 且 $\delta^{+N_{i-1}} <$ 序数$^{N^\star}$。

第 5 部分：假设 $\delta < \gamma$。那么，根据 $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1})$ 的真初始段凝聚，$p^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1})}_1 \not\subseteq \gamma$。因此，令 $\xi = \max(p^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1})}_1)$，由第 4 部分可得 $\gamma \leq \xi \leq \gamma^{+N_{i-1}}$。（还要注意，由于 $H = \mathrm{Hull}^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1})}_1(\gamma \cup \{\xi\})$ 在 $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1})$ 中共尾，实际上 $N_{i-1} \in H$，因此 $H = \mathcal{J}_\beta(N_{i-1})$。）

第 6 部分：假设 $\delta = \gamma$ 且 $p^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1})}_1 \neq \emptyset$。那么存在 ξ，使得 $p^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1})}_1 = \{\xi\}$。我们有 $\delta < \xi$，因为参数 δ 可以通过前鼠语言 t 定义。（另请注意，$\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t]) = \mathrm{Hull}^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])}_1(\delta \cup \{\xi\})$，因为这个 Hull 是共尾的。）

第7部分：这需要在 $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$ 上、于代码中计算 $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1})^\star$，并将嵌入参数 $\leq \gamma^{+N_{i-1}}$ 适当地嵌入这些代码中（若 $\delta < \gamma$，则将 $v \in \mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$ 嵌入代码中），同时注意到这可以通过 $\mathrm{r}\Sigma_1(\{\alpha_\mathcal{T}\})$ 的方式完成。（大致思路如下。为简单起见，假设 $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1})$ 没有最大真初段。于是，在 $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$ 上进行工作时，给定一个 $\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 φ 和 $v \leq \gamma^{+N_{i-1}}$（或者若 $\delta < \gamma$，则给定 $v \in \mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$），$\mathcal{J}_\beta(N^\star)$ 当且仅当存在某个 $\star$-适当的 $R \triangleleft \mathcal{J}_\beta(N_{i-1})$，使得$R^\star \models \varphi(v)$。因此，只需以 $\mathrm{r}\Sigma_1(\{\alpha_\mathcal{T}\})$ 的方式，关于这样的 R 一致地定义 $R^\star$ 的编码版本，以及参数 v 的代码。为此，我们遵循定义 2.3 中的过程（但从给定的 R 开始，而不是其中的 Q），并以合理的方式进行编码。定义 $\star$-平移时涉及的超幂确实可以编码，因为我们可以使用 t 和 $\alpha_\mathcal{T}$，从而得到 $\mathcal{T}$ 和 P，以及其中涉及的扩张子的代码（递归地）。而且，由于我们在 $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1})$ 中工作，确实有足够多大于 N_{i-1} 的序数来计算 $R^\star$ 的编码版本。参数 $v \leq \gamma^{+N_{i-1}}$ 所需的代码来自它们通常的超幂表示，并沿着所形成的超幂序列迭代；例如，v 在第一个超幂中由 $[\{v\}, \mathrm{id}]$，表示，等等。若 $\delta < \gamma$ 且 $v \in \mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$ 更为任意，我们可以先（一致地关于 v）确定某个 $\mathrm{r}\Sigma_1$ 项 t 和某个 $\eta < \gamma^{+N_{i-1}}$，使得$v = t^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])}(\eta, \gamma^{+N_{i-1}})$，然后根据 t 以及 η 和 γ^{+Ni-1}的代码，为 v 编制适当的代码。细节留给读者。在 $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1})$ 有最大真初段 R（它必定是 $\star$-适当的）的情况下，我们只需像往常一样使用 Jensen 的 $\mathcal{S}$-层级来分层 $\mathrm{r}\Sigma^{\mathcal{J}_\beta(N^\star)}_1$。)

第8部分：我们讨论了如何在 τ_1 第7 部分中表述（对于那个方向，我们不依赖参数 γ）。对于 ψ_1（将 $\mathcal{J}_\beta(N[t])$ 真值归约为 $\mathcal{J}_\beta(N^\star)$ 真值），我们只需直接计算 $\mathcal{J}_\beta(N^\star)$，并在 $\mathcal{J}_\beta(N^\star)$ 中工作，只接受延伸 $(N^\star|\gamma)$ 且投影到 γ 的阶段。（更多讨论请参见命题 2.33 的证明。）

第9部分：这由第 2 部分和第8部分推出。

第10部分：令 $\rho = \rho^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])}_1(\mathcal{J}_\alpha)$。则 $t = \mathrm{Th}^{\mathcal{J}_\beta(N^\star)}_1(\rho \cup \{p^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1})}_1\})$ 计算 $t' = \mathrm{Th}^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1})}_1(\rho \cup \{p^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1})}_1\})$，由第8部分和第5部分可得（并且由于若 $\gamma = \delta$，那么参数 γ 无论如何都可以通过 t-前鼠语言直接定义），因此由第2部分可得，$t \notin \mathcal{J}_\beta(N^\star)$。所以 $p^{\mathcal{J}_\beta(N^\star)}_1 \leq p^{\mathcal{J}_\beta}_1(\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}))$。但由第7部分以及类似的论证可知，$p^{\mathcal{J}_\beta(N^\star)}_1 = p^{\mathcal{J}_\beta}_1(\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}))$。

第11部分：假设 $p^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])}_1 \neq \emptyset$，并令 $\xi = \max(p^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])}_1)$。根据 ξ 的极小性，我们有 $\xi \notin \mathrm{Hull}^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])}_1(\xi)$，因此实际上 $\mathrm{Hull}^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1})}_1(\xi) = N_{i-1} || \xi \in J_\beta(N_{i-1})$，从而得到所需的 ξ 处的 1-固实性见证。对于 $\mathcal{J}_\beta(N^\star)$，同理。其他实性见证的等价性则由第 8 部分推出。

第 12 部分：通过第 8–11 部分，以及由于 1-可靠性所涉及的 Hull 包含 γ 和 $\alpha_\mathcal{T}$。第 13、14 和 15 部分由对 n的归纳法得出；第 15 部分使用阶段8 和 16 的部分

$n-1$，注意到只需使用 $\rho_n \cup \{\vec{p}_n\}$ 内的参数来定义此类函数f）。

第 16 部分由第 8 部分及归纳法（对 n）得出，并且由于 $\{\gamma\}$ 在两个模型上都是 $\mathrm{r}\Sigma_2$-可定义的。

第 17–20 部分以通常方式由第2 部分和16部分推出；由第5 部分和6部分，$\vec{p}^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])}_{n+1} \subseteq \gamma^{+N_{i-1}}+1$ 和 $\vec{p}^{\mathcal{J}_\alpha(N^\star)}_{n+1} \subseteq \gamma^{+N_{i-1}}+1$，因此第 16 部分适用于所有相关参数。□

在上述设定下，我们现在可以推出$\mathcal{J}_\alpha(N[t])$与 $\mathcal{J}_\alpha(N^\star)$之间的精细结构对应。

2.41 命题。假设命题 2.40中的假设和记号成立。令 $r \in$[序数]$^{<\omega}$ 为满足以下条件的最小者：序数$^N \in \mathrm{Hull}^{\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)}_1(\{r, p^{\mathcal{J}_\alpha(N[t])}_1\})$，并令 $r' = r\backslash\rho_1^{N^\star_P}$。令$n<\omega$，且假设 $\mathcal{J}_\alpha(N[t])$ 是一个 n-健全的 t-预鼠。那么：</output>

1. $\mathcal{J}_\alpha(N[t])$与 $\mathcal{J}_\alpha(N^\star)$具有相同的论域，且最大基数为 γ。
2. $\mathrm{r}\Sigma^{\mathcal{J}_\alpha(N[t])}_1(\{$序数$^N, \alpha_{\mathcal{T}}\})$关于参数 $v \in \mathcal{J}_\alpha(N[t])$的陈述与 $\mathrm{r}\Sigma^{\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)}_1(\{$序数$^N, \alpha_{\mathcal{T}}\})$关于 v的陈述递归等价。也就是说，存在一个 $\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 ψ_1，使得对于所有 $\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 φ 以及所有 $v \in \mathcal{J}_\alpha(N[t])$，都有
$$\mathcal{J}_\alpha(N[t]) \models \varphi(v, \mathrm{OR}^N, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff \mathcal{J}_\alpha(N^\star_P) \models \psi_1(\varphi, v, \mathrm{OR}^N, \alpha_{\mathcal{T}}),$$
并且存在一个 $\mathrm{r}\Sigma_1$ 公式 τ_1，使得对于所有 $v \in \mathcal{J}_\alpha(N[t])$，都有
$$\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P) \models \varphi(v, \mathrm{OR}^N, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff \mathcal{J}_\alpha(N[t]) \models \tau_1(\varphi, v, \mathrm{OR}^N, \alpha_{\mathcal{T}}).$$
3. $\rho^{\mathcal{J}_\alpha(N[t])}_1 = \rho_1^{\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)}$
4. 我们有：
   - $p_1^{\mathcal{J}_\alpha(N[t])} \cup r' = p_1^{\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)} = p_1^{\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])}$.
   - $\mathrm{OR}^N \in \mathrm{Hull}_1^{\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)}(\eta \cup \{p_1^{\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)}\backslash(\eta+1)\})$ *for each* $\eta \in p_1^{\mathcal{J}_\alpha(N[t])}$.
5. $\mathcal{J}_\alpha(N[t])$是 1-实的，当且仅当 $\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)$是 1-实的。
6. $\mathcal{J}_\alpha(N[t])$是1-健全的，当且仅当 $\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)$是1-健全的。
7. $\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)$是一个 n-健全的 t-预鼠。
8. 对所有 $\ell \leq n$，$\rho^{\mathcal{J}_\alpha(N[t])}_\ell = \rho_\ell^{\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)}$，且对所有满足$2 \leq \ell \leq n$的 ℓ，$p^{\mathcal{J}_\alpha(N[t])}_\ell = p_\ell^{\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)}$。
9. 假设 $0<n$。那么，关于参数 $v \in \mathcal{J}_\alpha(N[t])$的 $\mathrm{r}\Sigma^{\mathcal{J}_\alpha(N[t])}_{n+1}(\{\alpha_{\mathcal{T}}\})$ 陈述与关于 v 的 $\mathrm{r}\Sigma^{\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)}_{n+1}(\{\alpha_{\mathcal{T}}\})$ 陈述递归等价。也就是说，存在一个$\mathrm{r}\Sigma_{n+1}$ 公式 ψ_{n+1}，使得对所有$\mathrm{r}\Sigma_{n+1}$ 公式 φ 以及所有 $v \in \mathcal{J}_\alpha(N[t])$，我们有
$$\mathcal{J}_\alpha(N[t]) \models \varphi(v, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff \mathcal{J}_\alpha(N^\star_P) \models \psi_{n+1}(\varphi, v, \alpha_{\mathcal{T}}),$$
并且存在一个$\mathrm{r}\Sigma_{n+1}$ 公式 τ_{n+1}，使得对于所有 $v \in \mathcal{J}_\alpha(N[t])$，我们都有
$$\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P) \models \varphi(v, \alpha_{\mathcal{T}}) \iff \mathcal{J}_\alpha(N[t]) \models \tau_{n+1}(\varphi, v, \alpha_{\mathcal{T}}).$$

10. $\rho^{\mathcal{J}_\alpha}(N[t]_{n+1}) = \rho^{\mathcal{J}_\alpha}(N^\star_P)_{n+1}$。*11.* 如果 $0 < n$ 那么 $p^{\mathcal{J}_\alpha}(N[t]_{n+1}) = p^{\mathcal{J}_\alpha}(N^\star_P)_{n+1}$。*12.* $\mathcal{J}_\alpha(N[t])$ 是 $(n+1)$-实，当且仅当 $\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)$ 是 $(n+1)$-实。*13.* $J_\alpha(N[t])$ 是 $(n+1)$-健全，当且仅当 $\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)$ 是 $(n+1)$-健全。*14.* 设 $\mu < \rho_n^{\mathcal{J}_\alpha}(N[t])$ 和 $f\colon [\mu]^{<\omega} \to \mathcal{J}_\alpha(N[t])$。那么 f 是 $r\Sigma_n^{\mathcal{J}_\alpha}(N[t])$，当且仅当 f 是 $r\Sigma_n^{\mathcal{J}_\alpha}(N^\star_P)$。

证明。第 1 可由归纳法以及 $N[t]$ 与 $N^\star$ 之间的对应直接得到。

第2部分：注意到 $\mathcal{J}_\alpha(N[t])$ 是 $\mathrm{r}\Sigma_1^{\mathcal{J}_\alpha}(N[t])$，且上文 N，因此 $N[t]$，我们只需构造至 $\mathcal{J}_\alpha(N[t])$。（我们不想仅仅计算 $\mathcal{J}_\alpha(N^\star)$，因为这样可能会过度向下取核。）反过来，$\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)$ 只是 $\mathrm{r}\Sigma_1^{\mathcal{J}_\alpha(N[t])}(\{\alpha_{\mathcal{T}}\})$（不需要参数 序数^N）。

第 3 可由第 1 和 2部分直接推出。

第4部分：由命题2.40，$\rho = \rho^{\mathcal{J}_\alpha}(N[t]) = \rho_1^{\mathcal{J}_\beta}(N^\star_P)$ 以及 $p^{\mathcal{J}_\alpha}(N^\star_P)_1 = p_1^{\mathcal{J}_\beta}(N_{i-1}[t])$。同样由命题 2.38 及其证明，$p^{\mathcal{J}_\beta}(N_{i-1}[t])_1 = p_1^{\mathcal{J}_\alpha}(N[t])_1 \cup \{s'\}$，其中$s$ 是满足以下条件的最小者：序数$^{N_{i-1}} \in \mathrm{Hull}_1^{\mathcal{J}_\beta}(N_{i-1}[t])(\rho \cup \{p^{\mathcal{J}_\alpha}(N[t])_1\})$，且 $s' = s \backslash \rho$。然而，根据命题2.40和一些直接计算，$s' = r'$。（注意，{序数^N} 是 $\mathrm{r}\Sigma_1^{\mathcal{J}_\alpha}(N[t])$，因为可通过其不健全性识别 N。因此可得 $p^{\mathcal{J}_\alpha}(N[t])_1 \subseteq \gamma$。假设 $\delta < \gamma$；那么 $p = p^{\mathcal{J}_\beta}(N_{i-1}[t] = p^{\mathcal{J}_\alpha}(N^\star_P)_1 \neq \emptyset$；令 $\xi =$ 为 $\max(p)$。那么，根据 $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$ 中的凝聚，$\xi \geq \gamma$。此外，由于 ξ 的极小性，$\xi \notin \mathrm{Hull}_1^{\mathcal{J}_\beta}(N_{i-1}[t])(\xi)$，所以$\xi \leq \max(s')$；对 $\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)$ 也同样如此，因此 $\xi \leq \max(r')$。然而，$H = \mathrm{Hull}_1^{\mathcal{J}_\alpha}(N^\star_P)(\xi+1)$ 在 $\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)$ 中共尾，由此可得序数$^N \in H$。（因为对任意给定的 $\eta \in [0,\alpha)$，都存在某个 $\ell \leq m$，使得 $N^\star$ 是唯一的节段 $N' \trianglelefteq \mathcal{J}_\eta(N^\star)$，满足恰有 ℓ 个节段 N'' 具有 $N' \trianglelefteq N'' \trianglelefteq \mathcal{J}_\eta(N^\star)$，且 (N'') 不健全。）因此 $\max(r') \leq \xi$，所以我们已经证明 $\max(r') = \xi$。此外，由命题2.40，并且由于我们可以引用参数 ξ，从而也可以引用 γ，我们可以以足够简单的方式，在 $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$ 上的 r 真值与$\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)$ 之间转换（参数取自 $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$），从而现在可以得到 $s' = r'$。（我们可以在定义 $\mathcal{J}_\beta(N_{i-1}[t])$ 上的点 序数$^{N_{i-1}}$ 与定义 $\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)$ 上的点 序数^{N}之间来回转换，因为它们可以通过 $\star$-翻译和-构造相互计算。）

第5部分：这与命题 2.38 的证明所采用的论证类似。由于{序数^N} 是 $\mathrm{r}\Sigma_1^{\mathcal{J}_\alpha}(N[t])$，因此我们得到 $r' \in \mathrm{Hull}_1^{\mathcal{J}_\alpha}(N[t])(\rho \cup \{p^{\mathcal{J}_\alpha}(N[t])_1\})$（其中 $\rho = \rho_1^{\mathcal{J}_\alpha}(N[t])$），所以如果 $\mathcal{J}_\alpha(N[t])$ 是 1-坚实的，那么它对 $\eta \in p_1^{\mathcal{J}_\alpha}(N[t])$ 的见证就编码了对 $\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)$ 和 α 的见证。我们会自动得到这些 $\alpha \in r'$ 的见证，因为相应的 Hull 不包含序数^N，因此它们在 $\mathcal{J}_\alpha(N[t])$ 中有界。反过来，如果 $\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)$ 是 1-坚实的，并且 $\eta \in p^{\mathcal{J}_\alpha}(N[t])_1$，那么由于序数$^N \in \mathrm{Hull}_1^{\mathcal{J}_\alpha}(N^\star_P)(\eta \cup \{p^{\mathcal{J}_\alpha}(N^\star_P)_1 \setminus (\eta+1)\})$，它在 η 处的实性见证编码了一个在 η 处关于 $\mathcal{J}_\alpha(N[t])$ 的见证。

部分 6：这直接由第 2、4 和 5 部分得出。

第 7 和 8部分仅由归纳法即可得出。

第4部分 9：如果 $n = 1$，则这由第3部分和第2部分推出；注意到 {序数^N} 是 $\mathrm{r}\Sigma_1^{\mathcal{J}_\alpha}(N[t])$，而 $\mathrm{r}\Sigma_1^{\mathcal{J}_\alpha}(N^\star_P)$，因此确实可以应用第2部分。（要看出 {序数^N} 是 $\mathrm{r}\Sigma_1^{\mathcal{J}_\alpha}(N^\star_P)$，只需注意，我们可以像上面对序数所作的第4部分证明中那样识别 OR^N，即从 OR^N开始。）如果 $n > 1$，则通过归纳法直接推出，使用第8部分和第9部分。

第 10、11、12 和13部分现在按照通常方式由第9部分推出；由于 $p_1^{\mathcal{J}_\alpha(N[t])}$ 与 $p_1^{\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)}$ 之间的区别不影响 p_{n+1} 的值，因为 $p^{\mathcal{J}_\alpha(N^\star_P)1} \in H = \mathrm{Hull}^{\mathcal{J}_\alpha(N[t])\ 1}(\{p^{\mathcal{J}_\alpha(N[t])}{}_1\})$，因为 $p^{\mathcal{J}_\alpha(N[t])\ 1}$，序数 $^N \in H$。（采用通常的技巧：为 r （原始的 r，而不是 r'）寻找候选项的递降序列，并令 r_∞ 为找到的最后一个；注意 $r' \trianglelefteq r_\infty$。）

部分14是由部分1、2 和9 （后者处于前一个归纳层级）直接推出的。

□

3 R 的可迭代性

设 $b = \Sigma(\mathcal{T})$、$Q = Q(\mathcal{T},\ b)$ 和 $q < \omega$ 满足 $\rho_{q+1}^Q \leq \delta < \rho_q^Q$（如果 $Q = M_b^{\mathcal{T}}|\delta$，则无需进行 $\star$-translation，因此我们可以忽略这种情况）。设 $\Phi(\mathcal{T})\ ^\frown((Q,\ q)\ \delta)$ 是由 $\mathcal{T}$ 后接 $(Q,\ q)$ 构成的相系，交换序数 δ 与 $\mathcal{T}$ 相关联。（该相系上的度极大树 $\mathcal{U}$ 满足 $\deg_0^{\mathcal{U}} = q$ 且 $\delta < \mathrm{lh}(E_0^{\mathcal{U}})$。）固定该相系的一个度极大策略 Σ。

称定义在 $\Phi(\mathcal{T})\ ^\frown((Q,\ q)\ \delta)$ 上的度极大树 $\mathcal{U}$ 是 -有效的，当且仅当对于每个 $\alpha+1 < \mathrm{lh}(\mathcal{U})$，都不出现以下情况：$\delta^{+M_\alpha^{\mathcal{U}}|\mathrm{lh}(E_\alpha^{\mathcal{U}})} < \mathrm{lh}(E_\alpha^{\mathcal{U}})$ 且 $M_\alpha^{\mathcal{U}}|\mathrm{lh}(E_\alpha^{\mathcal{U}})$ “存在一个 δ-测度”，

我们将证明，通过 Σ，$\star$-有效树 $\mathcal{U}$on $\Phi(\mathcal{T})^\frown Q$ 与（推定的）高于 δ 的 $\deg^\star(Q)$-极大树 $\mathcal{U}'$ on $Q^\star$ 通过（推定的）策略 Σ' 精确对应，其中：

1. $\mathcal{U}'$ 中使用的扩张子，恰好是 $\mathcal{U}$ 中临界点为 $> \delta$ 的那些扩张子。2. $\mathcal{U}'$ 是填充的，仅当 $\mathrm{cr}(E_\alpha^{\mathcal{U}}) \leq \delta$ 时才设置 $E_\alpha^{\mathcal{U}'} = \emptyset$。（因此请注意，对于每个极限 $\eta < \mathrm{lh}(\mathcal{U})$，$\eta$ 都是 $\mathcal{U}'$ 中非填充阶段的极限，因为 $\mathcal{U}$ 连续使用的临界点为 $\leq \delta$ 的扩张子只能有有限多个。）3. 将 $\nu_\alpha^{\mathcal{U}}$ 和 $\nu_\alpha^{\mathcal{U}'}$ 记为与 $\mathcal{U},\ \mathcal{U}'$ 的节点相关联的交换序数。对于 $\mathcal{U}$，它们通常是 $\nu_\alpha^{\mathcal{U}} = \nu(E_\alpha^{\mathcal{U}})$。对于 $\mathcal{U}'$，它们就是 $\nu_\alpha^{\mathcal{U}'} = \nu_\alpha^{\mathcal{U}}$（因此当 $E_\alpha^{\mathcal{U}'} \neq \emptyset$ 时，$\nu_\alpha^{\mathcal{U}'} = \nu(E_\alpha^{\mathcal{U}'})$）。然后，按照通常的方法，利用交换序数 $\nu_\alpha^{\mathcal{U}} = \nu_\alpha^{\mathcal{U}'}$ 确定 $\mathrm{pred}^{\mathcal{U}}$ 和 $\mathrm{pred}^{\mathcal{U}'}$。

4. 若 $E_\alpha^{\mathcal{U}'} = \emptyset$，则（为便于记账）令 $M_{\alpha+1}^{\mathcal{U}'} = R^\star$，且 $\deg_{\alpha+1}^{\mathcal{U}'} = \deg^\star(R)$，其中：

– 若 $\mathrm{cr}(E_\alpha^{\mathcal{U}}) < \delta$，则 $R =$ 出口$_\alpha^{\mathcal{U}}$，且 – 若 $\mathrm{cr}(E_\alpha^{\mathcal{U}}) = \delta$，则 $R \trianglelefteq M_\alpha^{\mathcal{U}}$ 是满足 $\mathrm{exit}_\alpha^{\mathcal{U}} \trianglelefteq R$ 且 $R = M_\alpha^{\mathcal{U}}$ 或 $\rho_\omega^R = \delta$ 的最小值。

（我们将看到，这确实是 $M_\alpha^{\mathcal{U}'}$ 的一个节段，并且不会限制 $\mathcal{U}'$ 的可能性。）

5. 对每个极限 $\eta < \mathrm{lh}(\mathcal{U})$，$[0,\eta)^{\mathcal{U}'}$ 在一个尾段上与 $[0,\eta)^{\mathcal{U}}$ 一致。

这由 $\mathcal{U}$ 确定 $\mathcal{U}'$，反之亦然。我们还有：

1. $\mathrm{pred}_{\alpha+1}^{\mathcal{U}'} = \mathrm{pred}_{\alpha+1}^{\mathcal{U}}$ 对于所有满足 $\mathrm{cr}(E_\alpha^{\mathcal{U}}) > \delta$（此处 $E_\alpha^{\mathcal{U}'} = E_\alpha^{\mathcal{U}}$）的 $\alpha+1 < \mathrm{lh}(\mathcal{U})$。

2. 令 $\eta < \mathrm{lh}(\mathcal{U})$。令填充支撑 $P^{\mathcal{U}'}_\eta$ *of* η 为所有满足$E^{\mathcal{U}'}_\alpha = \emptyset$的 $\alpha <^{\mathcal{U}'} \eta$ 所构成的集合。于是， $P^{\mathcal{U}'}_\eta$可递归地刻画如下：令 $\gamma = \mathrm{root}^{\mathcal{U}}(\eta)$。若 $\gamma = \mathrm{lh}(\mathcal{T})$（即 $M^{\mathcal{U}}_\eta$位于 Q之上），则 $P^{\mathcal{U}'}_\eta = \emptyset$。设 $\gamma < \mathrm{lh}(\mathcal{T})$，并令$\alpha+1 = \mathrm{succ}^{\mathcal{U}}(\gamma,\eta)$。则 $P^{\mathcal{U}'}_\eta = \{\alpha\} \cup P^{\mathcal{U}'}_\alpha$。由此可知， $P^{\mathcal{U}'}_\eta$是有限的。此外，令 $\langle \alpha_i \rangle_{i\le n}$为 $P^{\mathcal{U}'}_\eta \cup \{\eta\}$的递增枚举，则 $\vec{E}^{\mathcal{U}'}_{0\eta}$（沿着 $[0,\eta]^{\mathcal{U}'}$使用的扩张子序列）正是

$$\vec{E}^{\mathcal{U}}_{0\alpha_0} \frown \vec{E}^{\mathcal{U}}_{\alpha_0+1,\alpha_1} \frown \cdots \frown \vec{E}^{\mathcal{U}}_{\alpha_{n-1}+1,\eta}.$$

3. 对每个 $\alpha < \mathrm{lh}(\mathcal{U})$， $M^{\mathcal{U}'}_\alpha = (M^{\mathcal{U}}_\alpha)^\star$且 $\deg^{\mathcal{U}'}_\alpha = \deg^\star(M^{\mathcal{U}}_\alpha)$。

4. 对每个满足 $\delta < \mathrm{cr}(E^{\mathcal{U}}_\alpha)$ 的 $\alpha+1 < \mathrm{lh}(\mathcal{U})$，令 $\kappa = \mathrm{cr}(E^{\mathcal{U}}_\alpha)$ 且 $\beta = \mathrm{pred}^{\mathcal{U}}(\alpha+1)$，则有：

   - $M^{*\mathcal{U}'}_\beta = (M^{\mathcal{U}}_\beta)^\star$,
   - $\mathcal{P}(\kappa) \cap (M^{\mathcal{U}'}_\beta[t]) = \mathcal{P}(\kappa) \cap M^{\mathcal{U}}_\beta$, so $\kappa^{+M^{\mathcal{U}'}_\beta} = \kappa^{+M^{\mathcal{U}}_\beta}$,
   - $\alpha+1 \in \mathscr{D}^{\mathcal{U}'}$ iff $\alpha+1 \in \mathscr{D}^{\mathcal{U}}$,
   - $M^{*\mathcal{U}'}_{\alpha+1} = (M^{*\mathcal{U}}_{\alpha+1})^\star$ and $\deg^{\mathcal{U}'}_{\alpha+1} = \deg^\star(M^{*\mathcal{U}}_{\alpha+1}, \deg^{\mathcal{U}}_{\alpha+1})$.[14]

我们将对 $\mathrm{lh}(\mathcal{U}) = \mathrm{lh}(\mathcal{U}')$ 运用归纳法证明：对于按上述方式构造的 $\mathcal{U},\mathcal{U}'$（其中 $\mathcal{U}'$ 是一棵假定的树），有：

– $\mathcal{U}'$ 实际上是一棵迭代树（模型定义良好且良基），并且上述性质成立，– $\mathcal{U}'$ 可以自由延拓（作为一棵假定的 $\deg^\star(Q)$-次数极大树），同时对 $\mathcal{U}$ 进行相应延拓（作为一棵次数极大树），– $\mathcal{U}$ 可以自由延拓（作为一棵次数极大树），同时对 $\mathcal{U}'$ 进行相应延拓（作为一棵假定的 $\deg^\star(Q)$-次数极大树）。

由此可得， Σ' 这是一个针对 $Q^\star$ 的 $\deg^\star(Q)$-极大于-δ 策略，正如所需。

如果 $\mathcal{U}$、$\mathcal{U}'$ 都是平凡的（不使用扩张子），那么所需性质显然成立。现在考虑一个后继步。设 $\mathrm{lh}(\mathcal{U}) = \mathrm{lh}(\mathcal{U}') = \alpha+1$，且 $\mathcal{U}'$ 的最后模型是良基的，并且上述性质对这一对成立。因此 $M^{\mathcal{U}'}_\alpha = (M^{\mathcal{U}}_\alpha)^\star$，考察这些模型之间扩张子序列的对应关系后，可知我们确实可以适当地扩展 $\mathcal{U}$、$\mathcal{U}'$。在此阶段，我们只通过选择满足对所有 $\beta < \alpha$ 均有 $\mathrm{lh}(E^{\mathcal{U}}_\beta) \le \mathrm{lh}(E)$ 的 $E \in \mathbb{E}(M^{\mathcal{U}}_\alpha)$ 来扩展。如果存在 $\beta < \alpha$，使得对所有 $\gamma \in [\beta,\alpha$ 都有 $E^{\mathcal{U}'}_\gamma = \emptyset)$，而我们想用 $E \in \mathbb{E}^{\mathcal{U}'}_\alpha$ 扩展 $\mathcal{U}'$，其中对某个 $\gamma \in [\beta,\alpha$ 有 $\mathrm{lh}(E) < \mathrm{lh}(E^{\mathcal{U}}_\gamma)$，那么我们不应扩展 $\mathcal{U}'$；相反，应扩展 $\mathcal{U}'$ 的某个真初始片段。因此，给定满足对所有$\beta < \alpha$ 均有 $\mathrm{lh}(E^{\mathcal{U}}_\beta) \le \mathrm{lh}(E)$ 的 $E \in \mathbb{E}_+(M^{\mathcal{U}}_\alpha)$，如果 $\mathrm{cr}(E) > \delta$，那么 $E \in \mathbb{E}_+((M^{\mathcal{U}}_\alpha)^\star) = \mathbb{E}_+(M^{\mathcal{U}'}_\alpha)$，所以我们可以同时扩展 $\mathcal{U}$ 和

[14]定义 $\deg^\star(M^{*\mathcal{U}}_{\alpha+1})$ 为满足以下条件的极大次数 n：$(M^{\mathcal{U}}_{\alpha+1})^\star$ 是 n-健全的，且 $\delta < \rho_n((M^{\mathcal{U}}_{\alpha+1})^\star)$；并且，如果 $M^{\mathcal{U}}_{\alpha+1}$ 是 j-健全的，且 $\delta \le \mu < \rho_j(M^{\mathcal{U}}_{\alpha+1})$，那么 $\deg^\star(M^{*\mathcal{U}}_{\alpha+1}, \mu)$ 就是满足以下条件的极大次数 n：$(M^{\mathcal{U}}_{\alpha+1})^\star$ 是 n-健全的，且 $\mu < \rho_n((M^{\mathcal{U}}_{\alpha+1})^\star)$。

$\mathcal{U}'$ 和 E。反过来，给定满足对所有 $\beta<\alpha$ 均有 $\mathrm{lh}(E^{\mathcal{U}}_\beta)<\mathrm{lh}(E)$ 的 $E\in\mathbb{E}_+(M^{\mathcal{U}'}_\alpha)$，并令 $(F_0、\ldots\ldots、F_{m-1})$ 为 E 关于 $M^{\mathcal{U}}_\alpha$ 的 $\star$-支撑，则对 $i<m$ 有 $E^{\mathcal{U}}_{\alpha+i}=F_i$，并且 $E^{\mathcal{U}}_{\alpha+m}=E$（因此对 $i<m$ 和 $E^{\mathcal{U}'}_{\alpha+m}=E$ 有 $E^{\mathcal{U}'}_{\alpha+i}=\emptyset$）。

假设我们用具有 $\mathrm{cr}(E)\leq\delta$ 的 $E^{\mathcal{U}}_\alpha=E$ 扩展 $\mathcal{U}$。注意到 $(M^{\mathcal{U}}_{\alpha+1})^\star\trianglelefteq(M^{\mathcal{U}}_\alpha)^\star=M^{\mathcal{U}'}_\alpha$，并令 $n=\mathrm{deg}^\star(M^{\mathcal{U}}_{\alpha+1})$，则有 $\rho_{n+1}((M^{\mathcal{U}}_{\alpha+1})^\star)\leq\nu^{\mathcal{U}}_\alpha<\rho_n((M^{\mathcal{U}}_{\alpha+1})^\star)$，因此令 $M^{\mathcal{U}'}_{\alpha+1}=(M^{\mathcal{U}}_{\alpha+1})^\star$ 且 $\mathrm{deg}^{\mathcal{U}'}_{\alpha+1}=n$ 只是一个记账工具；它不会人为限制 $\mathcal{U}'$ 的可能性（鉴于我们已经施加了通过设定 $E^{\mathcal{U}}_\alpha=E$ 所给出的限制）。

现在反过来假设 $E^{\mathcal{U}}_\alpha=E$，且 $\mathrm{cr}(E)>\delta$。于是 $E^{\mathcal{U}'}_\alpha=E$。令 $\beta=\mathrm{pred}^{\mathcal{U}}(\alpha+1)=\mathrm{pred}^{\mathcal{U}'}(\alpha+1)$。我们有 $M^{\mathcal{U}'}_\beta=(M^{\mathcal{U}}_\beta)^\star$ 且 $\mathrm{deg}^{\mathcal{U}'}_\beta=\mathrm{deg}^\star(M^{\mathcal{U}}_\beta)$。根据 $M^{\mathcal{U}}_\beta$ 与 $(M^{\mathcal{U}}_\beta)^\star$ 之间逐层的精细结构对应（包括基数等的对应），可知 $M^{*\mathcal{U}'}_{\alpha+1}=(M^{*\mathcal{U}}_{\alpha+1})^\star$ 且 $\mathrm{deg}^\star(M^{*\mathcal{U}}_{\alpha+1})$。令 $\mu=\mathrm{cr}(E)$ 和 $a\in[\nu(E)]^{<\omega}$。令 $n=\mathrm{deg}^{\mathcal{U}}_{\alpha+1}$ 且 $n+k=\mathrm{deg}^{\mathcal{U}'}_{\alpha+1}$。根据 §2，对每个 $f:[\mu]^{<\omega}\to M^{*\mathcal{U}}_{\alpha+1}$,

$$f\text{ is }\underset{\sim}{\mathrm{r}\Sigma}_n^{M^{*\mathcal{U}}_{\alpha+1}[t]}\iff f\text{ is }\underset{\sim}{\mathrm{r}\Sigma}_{n+k}^{M^{*\mathcal{U}'}_{\alpha+1}}.$$

But

$$f\text{ is }\underset{\sim}{\mathrm{r}\Sigma}_n^{M^{*\mathcal{U}}_{\alpha+1}[t]}\implies\exists X\in E_a\,\left[f\restriction X\text{ is }\underset{\sim}{\mathrm{r}\Sigma}_n^{M^{*\mathcal{U}}_{\alpha+1}}\right],$$

反过来,

$$f\text{ is }\underset{\sim}{\mathrm{r}\Sigma}_n^{M^{*\mathcal{U}}_{\alpha+1}}\implies f\text{ is }\underset{\sim}{\mathrm{r}\Sigma}_n^{M^{*\mathcal{U}}_{\alpha+1}}.$$

由此可知，这些超幂

$$\mathrm{Ult}_n(M^{*\mathcal{U}}_{\alpha+1},E),$$

$$\mathrm{Ult}_n(M^{*\mathcal{U}}_{\alpha+1}[t],E),$$

$$\mathrm{Ult}_{n+k}((M^{*\mathcal{U}}_{\alpha+1})^\star,E)$$

都以相同的方式作用于 $M^{*\mathcal{U}}_{\alpha+1}\subseteq M^{*\mathcal{U}}_{\alpha+1}[t]\subseteq(M^{*\mathcal{U}}_{\alpha+1})^\star$，因此很容易看出

$$(\mathrm{Ult}_n(M^{*\mathcal{U}}_{\alpha+1},E))^\star=\mathrm{Ult}_{n+k}(M^{*\mathcal{U}}_{\alpha+1},E)=\mathrm{Ult}_{n+k}(M^{*\mathcal{U}'}_{\alpha+1},E)=M^{\mathcal{U}'}_{\alpha+1}$$

and

$$\mathrm{deg}^\star(M^{\mathcal{U}}_{\alpha+1})=\mathrm{deg}^{\mathcal{U}'}_{\alpha+1}.$$

因此可知，$M^{\mathcal{U}'}_{\alpha+1}$ 是良基的。也就是说，由于 $(\mathcal{T}^\frown b)^\frown(\mathcal{U}^\frown\langle E\rangle)$ 是通过 Σ 得到的，我们可以扩展 $\mathcal{U}^\frown\langle E\rangle$ 及其初始节段，并在构造 $(M^{\mathcal{U}}_{\alpha+1})^\star$ 时使用扩张子，从而表明 $M^{\mathcal{U}'}_{\alpha+1}=(M^{\mathcal{U}}_{\alpha+1})^\star$ 是良基的。

在极限阶段 η 传递归纳假设很直接，只需对前面的计算稍作适配，即可看出 $(M^{\mathcal{U}}_\eta)^\star=M^{\mathcal{U}'}_\eta$。（注意，令 $\gamma=\mathrm{root}^{\mathcal{U}}(\eta)$ 且 $\alpha+1=\mathrm{succ}^{\mathcal{U}}(\gamma,\eta)$，那么对每个 $\beta+1\in(\alpha+1,\eta]^{\mathcal{U}}=(\alpha+1,\eta]^{\mathcal{U}'}$，我们都有 $\delta<\mathrm{cr}(E^{\mathcal{U}}_\eta)$，所以 $E^{\mathcal{U}'}_\beta=E^{\mathcal{U}}_\beta\neq\emptyset$。因此，$(\alpha+1,\eta)^{\mathcal{U}'}$ 上不存在仅由填充导致的模型中的下降。（可能有 $\mathrm{cr}(E^{\mathcal{U}}_\gamma)\leq\delta$，其中 $\gamma\in[\alpha+1,\eta)^{\mathcal{U}}$，但此时 $\gamma+1\notin[\alpha+1,\eta)^{\mathcal{U}}$。）因此，由性质 4，$\mathscr{D}^{\mathcal{U}'}\cap(\alpha+1,\eta)^{\mathcal{U}'}=\mathscr{D}^{\mathcal{U}}\cap(\alpha+1,\eta)^{\mathcal{U}}$，尤其是，这个集合是有限的。现在越过这些分支上的所有下降，就可以很容易地将后继步的计算适配到阶段 η。）

4 自迭代性

令 R 为所有 ω-小鼠的堆叠（也就是说，要求具有 $(\omega,\ \omega_1+1)$-可迭代性）。那么 $R \models$ “我是 $(\omega,\ \omega_1)$-可迭代的”，并且计算出正确策略的正确限制。这是通过对树进行泛型性膨胀，使用 $\star$-翻译实现的。我们只需证明这个过程不会经历 OR^R 个阶段。如果 $\mathrm{OR}^R = \omega_1^V$，那么它不可能如此，因为在这种情况下，我们只需在 V 中利用 $(\omega,\ \omega_1+1)$-可迭代性，就会得到矛盾。因此，假设 $\mathrm{OR}^R < \omega_1^V$。令 R^+ 为 $(\omega,\ \omega_1+1)$-可迭代小鼠的堆叠 S，满足 $R \triangleleft S$ 且 $\rho_\omega^S \leq \mathrm{OR}^R$。那么事实上不存在满足 $\rho_\omega^S = \omega$ 的此类 S（因为这会与 R 的定义矛盾），所以这些 S 有 $\rho_\omega^S = \mathrm{OR}^R$，且 $S \models \mathrm{ZFC}^-$。但现在，R 中该过程未能终止，意味着由此得到的 Q-结构 Q 具有 $Q^\star \triangleleft R^+$，因此 $Q \in R^+$，这会在 R^+ 中导致矛盾。

假设 $\mathrm{OR}^R < \omega_1^V$。令 R^+ 如上所述。那么在 $R^+ \models$ “R 是 (ω, ω_1+1)-可迭代的”；这可通过对前述证明作相对化得到；也就是说，$R^+ \models$ “我是 OR-可迭代的”。

5 $\star$-华沙模型的翻译（未完成）

注意：目前，本节概述了将 $\star$-翻译调整为论文 [3] 和 [6]（以及相当多其他内容）所需的主要思路，但目前尚未详细讨论 $\star$-翻译的细节。之后会补上这些内容；缺少的部分本质上与 §2 和§3中的材料非常相似。

本节将发展上一节所述 $\star$-翻译的一种变体，这种变体源自论文 [3]和 [6]。这里的一大区别是，背景模型 M 可以有与 $\delta = \delta(\mathcal{T})$ 重叠的扩张子。不过，这类重叠及其与 Q- 结构 Q（或其变体）中 δ 对应重叠之间的关系将受到严格限制，而这些限制对于处理它们十分重要。在构造 $\star$-翻译时，当我们遇到在我们的 $\star$-适宜模型 Q的序列上与 δ 重叠的扩张子 E 时，我们不会像通常的 $\star$-翻译那样取 E的超幂。相反，我们将（尝试）利用它们来确定一个重叠扩张子 F，并将其放到 $\star$-翻译的序列上。这个 F 在序数上可能与 E不一致，但由于下文将说明的其他情形细节，F 的 OR 仍可由 E 的 OR 轻易确定。

另一个区别在于，如果我们有如上所述的 E，并且 F 序数由如上所述的 E确定（细节尚未充分说明），那么对作者而言，我们总能得到一个扩张子 F，它延拓 F 序数，并且当它被加入 $\star$-翻译的序列时实际上产生一个预鼠，这一点似乎并非立即显而易见。这使得用于正则 $\star$-翻译的证明变得复杂。因为在那个证明中，我们首先证明 $Q^\star$ 是一个预鼠，其精细结构与 Q的精细结构紧密对应，然后证明 $Q^\star$ 是适当可迭代的，由此，一个标准的比较论证表明 $Q^\star$必须与“$\star$”一侧的相关小鼠对齐。但在这里，如果我们遇到刚才提到的有问题的 E 和 F 序数，并且带有 $E \in \mathbb{E}^Q$，似乎无法直接证明 $Q^\star$ 甚至是一个预鼠。为了绕过这一点，我们现在将改为一次性完成所有步骤。为了证明 $Q^\star$ 确实与“$\star$”一侧的相关小鼠 N 对齐，我们将直接通过比较来论证，而无需事先知道 $Q^\star$ 甚至是一个预鼠。如果它有任何不是精细结构模型的初始节段，那么由于 N 是一个

预鼠，并且 $R \trianglelefteq Q^\star$ 是最小非精细鼠，那么要么 $N \triangleleft R \trianglelefteq Q^\star$ （于是我们就完成了），要么 $Q^\star$ 与 N之间存在分歧，并且最小的这种分歧位于 R 与 N之间。比较的第一步将消除这一最小分歧。（更精确地说，在 $\Phi(\mathcal{T})\ ^\frown(Q,q)$上的树 $\mathcal{U}$中，一般会有一个由与 δ 重叠的扩张子组成的有限序列$E^{\mathcal{U}}_0$，.....，$E^{\mathcal{U}}_{n-1}$，它们首先在 $\mathcal{U}$中被使用，以便揭示最小分歧，并且我们设定 $E^{\mathcal{V}}_0 = \ldots = E^{\mathcal{V}}_{n-1}$，其中 $\mathcal{V}$是 N上的树。于是$E^{\mathcal{U}}_n$、$E^{\mathcal{V}}_n$是在最小分歧处被索引的扩张子。（也许是 $E^{\mathcal{U}}_n = \emptyset$或 $E^{\mathcal{V}}_n = \emptyset$。如果 $E^{\mathcal{U}}_n \neq \emptyset$，我们在此规定 $E^{\mathcal{U}}_n$ 不是“$\star$-重叠型”，这意味着在形成 $\star$-翻译时它不会被迭代掉。（回想一下，“$\star$-重叠型”不再等同于与 δ重叠。）可能出现长度$(E^{\mathcal{V}}_n)$ = 长度$(E^{\mathcal{U}}_{n-1})$，但此时 $E^{\mathcal{U}}_n = \emptyset$。[15] 否则，长度$(E^{\mathcal{U}}_{n-1})$ < 长度$(E^{\mathcal{U}}_n)$，或长度$(E^{\mathcal{U}}_{n-1})$ < 长度$(E^{\mathcal{V}}_n)$，以已定义者为准，并且这些中可能非空的那些（至少有一个非空）。对于“强重叠”扩张子（那些重叠但不是 $\star$-重叠型的扩张子），我们相对于前面提到的 E 与 F之间的适当转换来确定“差异”。然后可以证明该比较必定终止。但随后我们利用如下事实：$\mathcal{U}$ 的最终模型的 $\star$-翻译直到 $\mathcal{V}$ 的最终模型都表现良好（是一个预鼠，并且具有适当的精细结构），从而现在通过精细结构等达到通常的矛盾。

还有一个细微的区别是，基鼠将采用 λ-索引，因此所有内容都将采用 λ-索引。所以，$\star$-翻译中的一些细节需要稍作修改。

现在让我们更详细地讨论。设 M 是一个采用 λ-索引的真类鼠。假设 M 没有强基数 κ 是强基数的极限。我们假设 M 具有适当的精细结构，使我们能够分析 Varsovian 模型背景下出现的那类比较论证 [3], [6]；我们确实会使用这类比较论证中的一种，只是表述得更抽象一些，并采用完整发展的 $\star$-翻译。[16] 假设 M 只有集合多个可测基数，并且存在某个序数 λ^M 大于 M 的所有可测基数，使得 $M|\lambda^M \subseteq \mathrm{Hull}^M(\Gamma)$ 对任意由序数组成的真类 Γ 都成立。

设 $\vec{\kappa}^M = \langle \kappa^M_\alpha \rangle_{\alpha<\theta}$ 枚举 M 在某个界限以下的强基数。设 W是 M通过其正确策略得到的一个真类迭代，且 $i: M \to W$ 是迭代映射，并且 $\kappa^W_\alpha = i(\kappa^M_\alpha)$。设 $\vec{j} = \langle j_\alpha \rangle_{\alpha<\theta}$ 满足：对每个 $\alpha < \theta$，$j_\alpha : (\kappa^M_\alpha)^{+M} \to (\kappa^W_\alpha)^{+W}$ 都是共尾映射。注意，j_α 不必与 i一致，而且对于 $\alpha < \beta$，j_α 也不必与 j_β 一致。在 Varsovian 模型论文中，[3], [6], 相关映射j_α 是通过限制作用于直接极限“处”的迭代而得到的，其中“处”为 $(\kappa^M_\alpha)^{+M}$（例如，若$\alpha = 0$，那么我们就有第一个直接极限 M_∞，而 j_0 是作用于 M_∞ 上的迭代映射）。我们暂且不详述对这些 j_α具体需要哪些性质，只指出它们届时需要发挥什么作用。（它们将发挥与 [3] 和 [6]中相应论证里相同的通常作用。）

令 $\sup_{\alpha<\theta}(\kappa^W_\alpha)^{+W} \leq \lambda < \eta$，其中 ζ 是 W中的一个正则基数，并且 W 没有满足 $\lambda < \delta < \zeta$ 的伍丁基数 δ。假设对于所有满足$E \in \mathbb{E}^W$，且 E 是 W-全的、$\mathrm{cr}(E) = \kappa < \zeta$、$\mathrm{lh}(E)$ $\lambda <$、$\mathrm{lh}(E)$ $\kappa < \delta' <$，并且 δ'在 W|lh(E)中是伍丁基数的$(\kappa,\ \delta',\ E)$，都有 $\kappa = \kappa^W_\alpha$对某个 $\alpha < \theta$成立。

[15]我们现在采用 Jensen 编号，这与前一节有所不同。这是因为华沙模型的论文采用 Jensen 编号。[16]这种 $\star$-翻译的细节尚未写下，但与前一节中的内容非常接近。

假设 $W|\zeta \in M$。令 $\mathcal{T}$为 W上的一棵正确的正规树，其长度为极限长度，在 λ之上且基于 $W|\zeta$。令 $\delta = \delta(\mathcal{T})$，并且还假设 $W|\zeta \in M|\delta$和$\mathcal{T} \in M$。假设存在 $\eta < \delta$使得 $W|\zeta \in M|\eta$，且 η是 M的一个强 $\vec{\kappa}^M$-切点，这意味着对于每个 $E \in \mathbb{E}^M$，若$\mathrm{cr}(E) \leq \eta < \mathrm{lh}(E)$，则对某个 $\alpha < \theta$，$E = \kappa_\alpha^M$成立。假设 $\vec{j} \in M|\delta$。假设 $M|\delta \models$“存在一个最大基数，且它是 $\leq \eta$”。假设 $\mathcal{T}'$（它就是 $\mathcal{T}$，但作为 $W' = W|\zeta$上的一棵树），可由 $M|\delta$上的参数定义，并且 $M|\delta$是 $M(\mathcal{T})$上的扩张子代数泛型。

令 Q为满足 $M(\mathcal{T}) \trianglelefteq Q$ 的预鼠。我们尝试像 [5, §8], 中那样定义 $\star$-翻译 $Q^\star$，即定义 Q（它还依赖于 $\mathcal{T}$、$\vec{\kappa}^M$、$\vec{\kappa}^W$ 和 $\vec{j}$）；不同之处在于，我们采用 λ-索引（因为 Q 采用 λ-索引），并作如下修改。对于满足 $\mathrm{cr}(E) = \kappa_\alpha^W < \delta < \mathrm{lh}(E)$（其中某个 $\alpha < \theta$）的扩张子 $E \in \mathbb{E}_+^Q$，我们称 E 强重叠于 δ；在此我们不通过 E 构造超幂，而是令 $(Q|\mathrm{lh}(E))^\star$ 为唯一的活跃小鼠 N，使得 $N^{\mathrm{pv}} = (Q||\mathrm{lh}(E))^\star$，且 $\mathrm{cr}(F^N) = \kappa_\alpha^M$ 以及 $F^N \restriction (\kappa_\alpha^M)^{+M} = E \circ j_\alpha$，如果这些条件确实确定了一个预鼠；否则，$(Q|\mathrm{lh}(E))^\star$ 就简单地定义为 $((Q||\mathrm{lh}(E))^\star, E \circ j_\alpha)$（这不是一个预鼠）。

因此，我们比较尝试进行的 $\star$-平移与 M，范围在 δ 之上；若两边都有强重叠扩张子，则比较扩张子对序数的作用，直到模去与 j_α 复合后的等价为止。基于此，假设比较最终在两边都不发生下降，从而产生真类模型 N_W 和 N_M（请记住，它们彼此不同，因为我们没有进行“完全”比较；它们只是在“δ之上”“一致”）。设 Γ 是一个序数真类，且两个迭代映射 $j_W : W \to N_W$ 和 $j_M : M \to N_M$ 都逐点固定它。我们要证明主分支没有使用与 δ 重叠的扩张子；由此，利用 $\star$-平移得到的常规精细结构计算会导出矛盾。

设 E 是沿着 W 一侧使用的第一个扩张子，F 是沿着 M 一侧使用的第一个扩张子。设 $\kappa_E =$ 为 $\mathrm{cr}(E)$，$\kappa_F =$ 为 $\mathrm{cr}(F)$。那么请注意，根据我们的反大基数假设（即 M 没有强基数的强极限），$j_W(\kappa_E)$ 是 N_W 的最小强基数，且该基数 $> \delta$；同理，$j_M(\kappa_F)$ 是 N_M 的最小强基数，且该基数为 $> \delta$。但是，由于关于临界点为 $> \delta$ 的扩张子，N_W 在 δ 之上与 N_M 一致，因此可得 $j_W(\kappa_E) = j_M(\kappa_F)$。

令 α 满足 $\kappa_E = \kappa_\alpha^W$，并令 β 满足 $\kappa_F = \kappa_\beta^M$。我们断言 $\alpha = \beta$。对于 α，它是 N_W 中满足 $< \delta$ 的强基数的序型，而这一点编码在 $\mathbb{E}^{N_W} \restriction (\delta, j_W(\kappa_E))$ 中。为此，令 $\gamma^W \in (\delta, j_W(\kappa_E))$ 是相对于 $\vec{\kappa}^W \restriction \alpha$ 的一个切点；也就是说，$\mathbb{E}^{N_W}$ 中与 γ^W 重叠的扩张子，其临界点都属于 $\vec{\kappa}^W \restriction \alpha$。（这样的 γ 在 $j_W(\kappa_E)$ 中共尾。）令 γ^M 以类似方式针对 M 和 β 定义。令 $\gamma = \max(\gamma^W, \gamma^M)$。那么，如果 $E \in \mathbb{E}^{N_W}$ 且 $\mathrm{cr}(E) < \delta < \gamma$，则 E 与 γ^W 重叠，因此对于某个 $\xi < \alpha$，$\mathrm{cr}(E) = \kappa_\xi^W$；类似地，取 $E' \in \mathbb{E}^{N_M}$ 使得 $\mathrm{lh}(E') = E$，则 $\mathrm{cr}(E') < \gamma^M < \mathrm{lh}(E')$，所以对于某个 $\xi' < \beta$，$\mathrm{cr}(E') = \kappa_{\xi'}^M$。但是 $\xi = \xi'$。另一方面，对于每个 $\xi < \alpha$，我们都能找到共尾多个 $E \in \mathbb{E}^{N_W} \restriction j_W(\kappa_E)$，使得 $\mathrm{cr}(E) = \kappa_\xi^W$；对 M 也同样如此。因此 $\alpha = \beta$。

现在我们有 $i_E^W(\kappa_E) \leq j_W(\kappa_E)$ 和 $i_F^M(\kappa_F) \leq j_M(\kappa_F)$。如果 $i_E^W(\kappa_E) = i_F^M(\kappa_F)$，那么我们在同一阶段的比较中使用了 E和 F，因此必然有 $E \circ j_\alpha \neq F$。现在这正是我们的映射的性质需要给出矛盾之处：在当前情形下，我们应当知道必然有 $E \circ j_\alpha = F$。（也就是说，我们有 M 上的树 $\mathcal{T}$，其最后模型为 W，随后是一个正规延续 $\mathcal{U}$（由比较产生，并来自 $\star$-平移可迭代性证明），以及一个正规

树 $\mathcal{V}$ 在 M 上，其中 $\mathcal{T}$ 位于 M 之内，以及我们一开始所具有的扩张子代数泛型性等等，还有最终模型，连同由比较产生的、直至 E 和 F 的指标为止的一致性，它们 都 被标在同一点；在这些情形下，我们假定事实上 $E \circ j_\alpha = F \restriction$ 为序数。这唯一地确定 F 由 E，或 E 由 F。这正是由 [3] 和 [6] 中的情形所得到的结果。）

因此，要么 $\lambda(E) < \lambda(F)$，要么反之。假设 $\lambda(E) < \lambda(F)$；否则情形对称。我们声称，$F \restriction \lambda(E)$ 是 F 的一个完整真初始片段，而它不属于 N_M，这就产生了矛盾。因为

$$\mathrm{OR} \cap \mathrm{Hull}^{N_W}(\Gamma \cup \lambda(E)) = \mathrm{OR} \cap \mathrm{Hull}^{N_M}(\Gamma \cup \lambda(E)),$$

因为 $\delta < \lambda(E)$，且 N_M 对于 δ 处的扩张子代数而言是 N_W 上的泛型。但由于 $j_W(\kappa_E) = i_{UN_W}(\lambda(E)) = j_M(\kappa_E) \geq \lambda(F)$，其中 $U = \mathrm{Ult}(W, E)$，且 $i_{UN_W} \colon U \to N_W$ 是迭代映射的尾段，这些船体不包含区间 $[\lambda(E)\ \lambda(F))$ 中的序数，这意味着 $F \restriction \lambda(E)$ 是完整的。

致谢

由奥地利科学基金（FWF）资助 [10.55776/Y1498]。

参考文献

[1] E. Closson。《鼠相关导出模型中的索洛维序列》。博士论文，加州大学伯克利分校，2008 年。[2] Jan Kruschewski 和 Farmer Schlutzenberg。关于黄鼠狼的鼠序猜想。《符号逻辑杂志》，90(1):364–390，2025 年。[3] Grigor Sargsyan、Ralf Sc hindler 和 Farmer Schlutzenberg。华沙模型 II。arXiv:2110.12051v2。[4] Ralf Schindler 和 John Steel。$L[E]$ 的自迭代性。《符号逻辑杂志》，74(3):751–779，2009 年。[5] Farmer Schlutzenberg。$L[\mathbb{E}]$中的序数可定义性。arXiv:2012.07185v2。[6] Farmer Schlutzenberg。华沙模型 ω。arXiv:2212.14878v2。[7] Farmer Schlutzenberg。由 $\mathbb{E} \restriction \aleph_1$ 在$L[\mathbb{E}]$中对扩张子序列 $\mathbb{E}$ 的可定义性。《符号逻辑杂志》，89(2):427–459，2024 年。[8] Farmer Schlutzenberg。正规可迭代性导出的精细结构。《数学逻辑杂志》，0(0):2550014，2025 年。[9] John R. Steel。与小鼠相关的导出模型。载于《无穷的计算前景。第一部分：教程》，新加坡国立大学数学科学研究所讲义丛书第 14 卷，第 105–193 页。World Sci. Publ.，新泽西州哈肯萨克，2008 年。可在作者网站查阅。