arXiv:2602.08258v1 [math.AC] 9 Feb 2026

一维 Cohen-Macaulay 局部环上的极小重数模

ELA CELIKBAS、OLGUR CELIKBAS、NAOKI ENDO 和 SHINYA KUMASHIRO

摘要。我们研究有限生成的极小重数模。这一概念由 Puthenpurakal 引入，将经典的极小重数概念从环推广到模。我们的主要结果刻画了一维 Cohen-Macaulay 局部环上，迹理想或自反理想在何时产生极小重数模。作为推论，我们证明：对于具有典范模的一维非 Gorenstein 约化局部环，该环具有极小重数，当且仅当其典范模作为模具有极小重数。我们还构造了若干例子，并将其与 Burch 模和 Ulrich 模进行比较，着重说明极小重数与 Burch 性质或 Ulrich 性质相一致的情形。

1. 引言

本文中，除非另有说明，R 表示一个一维交换诺特局部 *Cohen-Macaulay* 环，其极大理想为 $\mathfrak{m}$，剩余域为 k。此外，假设所有 R-模均为有限生成。

本文研究极小重数模。这一类模最初由 Puthenpurakal [23] 在任意维数的 Cohen-Macaulay环上定义并研究。近来，[7] 和 [8]对极小重数模的各种性质进行了研究。

我们的主要目的是研究关于迹理想或自反理想的极小重数模。注意，给定一个环 R，R 的一个 $\mathfrak{m}$-初等理想 I 称为自反的，如果 $(R:_{\mathrm{Q}}(R:_{\mathrm{Q}} I))=I$；若 $(I:_{\mathrm{Q}} I)=(R:_{\mathrm{Q}} I)$，则称其为迹 理想，其中 Q 表示 R 的全分式环。沿着这一方向，我们证明如下结论：

定理 1.1. 设 R 是一个一维泛 *Gorenstein* 非 *Gorenstein* 环，其典范理想为 ω_R，且 I 是 R 的一个 $\mathfrak{m}$-*primary* 理想。假设 I 要么是 R 的迹理想，要么作为 R-模是自反的。那么以下条件等价：

(i) I 是稳定的，即对于某个 $x\in I$，有 $I^2=xI$。(ii) 每个无挠 R-模相对于 I 都具有极小重数。(iii) ω_R 相对于 I 具有极小重数。

定理 1.1 是一个更一般结果（即定理 4.1）的推论，并作为推论 4.2 得到证明；相关细节另见注 2.8(i) 和 3.5。

若一个（一维）Cohen–Macaulay局部环的重数等于其嵌入维数 [1]，则称其具有极小重数。利用定理 1.1 以及本文建立的其他结果，我们从某些模的重数出发刻画环的极小重数，

2020数学主题分类。 13A15, 13D02, 13C14, 13H15。关键词和短语。 极小重数模、数值半群环、理想化、稳定理想与迹理想、Burch 和 Ulrich 模。

并将这一方向上的结果概括如下；详情见命题 2.23、引理 2.28 和推论 4.3。

推论 1.2. 设 R 是一个一维泛 *Gorenstein* 非 *Gorenstein* 环，其典范理想为 ω_R。则以下条件等价：

(i) R 具有极小重数。(ii) 理想化环 $R \ltimes \mathfrak{m}$ 具有极小重数。(iii) 每个无挠 R-模都具有极小重数。(iv) ω_R 具有极小重数。(v) 自同态代数 $\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{m},\mathfrak{m})$ 作为 R-模具有极小重数。

现在我们简要介绍本文的组织结构。在第 2 节中，我们给出几个极小重数模的例子，以说明其各种性质。例如，我们利用环的导子构造新的例子，并展示一个不具有极小重数的模M，而它的子模 $\mathfrak{m}M$ 具有极小重数；参见例子 2.15 和 2.21。我们给出理想化具有极小重数的一个刻画，并指出极小重数模的（余）正合关系不一定具有极小重数；参见命题 2.23 和例 2.29。已知每个 Ulrich 模都具有极小重数；例如参见 [8, 2.8]。另一方面，也存在不属于 Ulrich 模的极小重数模；参见例 2.17。作为一项相关结果，我们在命题 2.18 中证明，若r 是给定的非主理想 $\mathfrak{m}$-初等理想I的约化数，则I^{r-1} 相对于I具有极小重数，但它不是一个I-Ulrich$R$-模。我们还将极小重数模类与 Burch 模类进行比较，并证实一般而言这两类并不相同；参见 2.30。

第 3 节致力于阐述我们的一个贡献，即找出某些模和理想类，使得 Ulrich 性质与极小重数等价；见定理 3.8。第 4 节给出定理 1.1 的证明；另见定理 4.1。在附录的 A.1 中，我们建立了一个涉及极小重数模的正合列，这似乎是新的。利用这个正合列，我们为 2.6 中给出的极小重数模刻画提供了另一种证明。该正合列的第二个应用涉及某些 Tor 模的消失，将在 A.2 中介绍。

2. 定义、例子与注记

下面回顾我们的设定：

2.1. 除非另有说明，R表示一个一维交换诺特 *Cohen–Macaulay*局部环，其极大理想为 $\mathfrak{m}$，剩余域为k。此外，我们假设所有R-模都是有限生成的。我们还假设R的每个 $\mathfrak{m}$-初等理想I 总有一个极小约化；例如，当R 的剩余域k 为无限域时，这一条件成立 [16, 8.3.7]。

PuThenpurakal [23] 引入了模的极小重数这一概念，定义如下：

2.2. 设 R 为一个环，I 为 R 的一个 $\mathfrak{m}$-准素理想，并设 M 为一个非零无挠 R-模。则称 M 关于 I 具有极小重数，当且仅当等式 $\mathrm{e}_R(\mathrm{I},\mathrm{M}) = \mathrm{length}_R(\mathrm{IM}/\mathrm{I}^2\mathrm{M})$ 成立。这里，$\mathrm{e}_R(\mathrm{I},\mathrm{M})$ 表示 M 关于 I 的（Hilbert-Samuel）重数，$\mathrm{length}_R(\mathrm{IM}/\mathrm{I}^2\mathrm{M})$ 表示 $\mathrm{IM}/\mathrm{I}^2\mathrm{M}$ 在 R 上的长度；见 [23,定义 15]。若 M 关于 $\mathfrak{m}$具有极小重数，我们简称为 M 具有极小

重数。注意，若 $M = R$ 且 M 具有极小重数，则 R的重数等于其嵌入维数，即 R 在 Abhyankar [1] 的意义下是一个极小重数环。

2.3. 设R 为一个环，I 为R的一个 $\mathfrak{m}$-primary 理想，且M 为一个无挠R-模。假设 (x) 是I的一个极小约化。

(i) 可知M 是一个 Cohen-Macaulay R-模，(x) 是M的一个参数理想，并且 $\mathrm{e}_R(I,M) = \mathrm{e}_R((x),M) =$长度$_R(M/xM)$；例如参见 [4, 4.6.5、4.7.9 和 4.7.11]。(ii) 注意到M/IM 具有有限长度，因此 $\mathrm{e}_R(I,M/IM) = 0$。于是

$$\mathrm{e}_R(I,M) = \mathrm{e}_R(I,IM) + \mathrm{e}_R(I,M/IM) = \mathrm{e}_R(I,IM).$$

此外，由(i)可知，$\mathrm{e}_R(I,IM) =$ 长度$_R(IM/xIM)$。因此，

$$\mathrm{e}_R(I,M) = \mathrm{e}_R(I,IM) = \mathrm{length}_R(IM/xIM).$$

(iii) 假设 $\mathrm{I}^2\mathrm{M} =$xIM。则长度$_R$(IM/xIM) $=$ 长度$_R$(IM/I^2M)，因此，根据(ii)，M 关于 I 具有极小重数。(iv) 假设 M 关于 I 具有极小重数。则根据定义 2.2 和 (ii)，有长度 $_R$ (IM/I^2M) $=\mathrm{e}_R$(I,M) $=$ 长度$_R$(IM/xIM)。所以，$\mathrm{I}^2\mathrm{M} =$ xIM。

2.3 的 (iii) 和 (iv) 给出了刻画无挠模关于某个理想具有极小重数的一个有用方法：

2.4. 设R 为一个环，I 为R的 $\mathfrak{m}$-primary 理想，且M 为一个无挠R-模。那么，M 关于I 具有极小重数，当且仅当对于I 的每个极小约化 (x)，都有$I^2M = xIM$；当且仅当对于I的某个极小约化 (y)，都有$I^2M = yIM$。

下面，我们讨论研究极小重数模的兴趣是如何形成的，包括最初的动机和关键的启发。

讨论 2.5. 我们研究极小重数模的动机源于 Arf性质。回顾一下，如果环 R 的每个整闭 $\mathfrak{m}$-primary 理想 I 都是稳定的，则称 R 为 Arf环，也就是说，对于某个 $\mathrm{x} \in$I，有 $\mathrm{I}^2 =$xI；见 [20, 2.2]。我们的目标是将 Arf性质从环推广到模，为此我们如下定义 Arf模[1]：给定一个非零无挠 R-模 M 和 R 的一个 $\mathfrak{m}$-primary 理想 I，如果存在 I 的一个极小约化 (x)，使得 $\mathrm{I}^2\mathrm{M} =$xIM，则称 M 是 I-Arf（或称关于 I 的 Arf模）。根据我们的定义，以下蕴含关系成立：R 是 Arf环，当且仅当对于 R 的每个整闭 $\mathfrak{m}$-primary 理想 I，R 是 I-Arf R-模；当且仅当对于 R 的每个整闭 $\mathfrak{m}$-primary 理想 I，每个无挠 R-模都是 I-Arf R-模。

由 2.4 可知，M 是I-Arf 模，当且仅当M 关于I具有极小重数。若所讨论的理想I 没有极小约化，则这两个定义并不等价。例如，若$R = \mathbb{Z}_2[\![x,y]\!]/(xy(x+y))$，且$M = \mathfrak{m}^n$，其中某个$n \gg 0$，那么$M$具有极小重数（因为它是 Ulrich），但 $\mathfrak{m}$ 没有约化，因此 Arf 模性质未定义；参见 [3, 2.1], [16, 8.3.2], 和注 2.12。由于要定义关于 $\mathfrak{m}$-初等理想的 Arf 模，我们必须假设极小约化存在，因此本文只讨论极小重数模。为此，我们将继续使用先前定义的术语，即极小重数模 [23]。

[1]在我们意识到 [23], 与本研究的相关性之前，以及手稿 [7, 8]问世之前，我们最初独立地定义了 Arf 模。

引入关于理想 I 的 Arf 模这一概念时，我们指出，定义中的等式与 I 的极小约化的选取无关。这可由 [24, 定理 2.9 (4)⇔(5)] 看出（我们通过令 J =(x), $M_1 = IM$, 且 $M_2 = I^2M$ 来应用该定理）。另一方面，值得注意的是，在高维环中，等式 $I^2M = xIM$ 可能取决于 I 的极小约化的选取。例如，存在一个二维Cohen-Macaulay局部环 R 及其参数理想 $\mathfrak{q}$ 和 $\mathfrak{q}'$，使得$\mathfrak{q}$ 和 $\mathfrak{q}'$ 是 I 的约化，$I^3 = \mathfrak{q}I^2, I^3 \neq \mathfrak{q}'I^2$, 且 $I^4 = \mathfrak{q}'I^3$。因此，等式 $I^3M = \mathfrak{q}I^2M$ 取决于 $\mathfrak{q}$ 的选取；参见 [21, 3.3]。

下述事实可由 [7, 4.1、4.2 与 4.4] 看出；另见 2.2 与 2.4。

2.6. 设 M 为非零无挠R-模。则下列条件等价：

(i) $\mathfrak{m}^iM$ 对所有 $i \geq 0$ 具有极小重数。

(ii) M 具有极小重数。(iii) $e_R(M) = \mu_R(\mathfrak{m}M)$。(iv) $\mathfrak{m}^2M \cong \mathfrak{m}M$。

2.6 的一个独立证明在附录 A 中给出，其中使用了在 A.1 中建立的某个短正合列。2.6 中给出的刻画用于引理 2.28、例 2.29 以及 2.30。我们接着利用 2.6 记录一个具有极小重数的模的例子；若干进一步的此类例子将在后文中构造。

例 2.7. 令 $R = k[\![t^5,t^6,t^7]\!]$，并考虑 R 的理想 $M = (t^{10},t^{11},t^{12},t^{13})$。由此可得 $\mathfrak{m}M = (t^{15},t^{16},t^{17},t^{18},t^{19})$，因此 $\mu_R(\mathfrak{m}M) = 5$。由于 $e_R(M) = e(R) = 5$，由 2.6 可知，R-模 M 具有极小重数。

下面的注汇集了一些关于稳定理想以及无挠模的极小重数的有用观察，稍后还会再次用到。

注 2.8. 设R 是一个环。

(i) 设 I 是 R 的一个 $\mathfrak{m}$-主理想，M 是一个无挠 R-模。假设 I 是稳定理想，即对某个 $y \in I$，有 $I^2 = yI$；参见 [20, 1.3]。那么 (y) 是 I 的一个极小约化，且 $I^2M = yIM$。因此，M 关于 I 具有极小重数。(ii) 注意到 $\mathfrak{m}$ 当且仅当 R 具有极小重数时才是稳定的，也就是说，$e(R) = \mu_R(\mathfrak{m})$。因此，若 R 具有极小重数，那么每个无挠 R-模都具有极小重数；参见 (i)。(iii) 假设 R 是 Arf 环，例如 $e(R) \leq 2$。那么 R 具有极小重数，因此每个无挠 R-模都具有极小重数；参见 [20,第 664] 页及 (ii)。(iv) 若 R 作为 R-模具有极小重数，则根据定义可知 $\mathfrak{m}$ 是稳定的，因此 R 作为环具有极小重数；参见 (ii)。所以，每个无挠 R-模都具有极小重数，当且仅当 R（作为环）具有极小重数。

以下结果可用于得到稳定理想和极小重数模：

2.9. 设R 是一个环，且I 是R的一个 $\mathfrak{m}$-primary 理想。假设I^n 由某个$n \geq 2$个元素生成。那么 I^{n-1} 是一个稳定理想；参见 [10, Cor. 1]。

例 2.10. 令 $R = k[\![t^5,t^6,t^7,t^8]\!]$，且 $I = (t^5,t^7)$。则 $I^3 = (t^{15},t^{17},t^{19})$。因此，$I^2$ 是一个稳定理想，因此每个无挠 R-模相对于I^2都具有极小重数；参见注 2.8(i) 和 2.9。

接下来，我们回顾 Ulrich 模的定义，并记录一些相关事实。我们将在第 3 节中更详细地研究 Ulrich 模与具有极小重数的模之间的关系。

2.11 ([6, 4.1]). 设 R 为一个环，I 为 R 的一个 $\mathfrak{m}$-主理想，且 M 为一个非零无挠自由 R-模。若 $\mathrm{e}_R(\mathrm{I},\mathrm{M}) = \mathrm{length}_R(\mathrm{M}/\mathrm{IM})$，则称 M 为 I-Ulrich。若 M 是 $\mathfrak{m}$-Ulrich，我们就称 M 为 Ulrich R-模。注意，$\mathfrak{m}$ 是 Ulrich R-模当且仅当 $\mathrm{e}(\mathrm{R}) = \mathrm{e}_R(\mathfrak{m},\mathfrak{m}) = \mathrm{length}_R(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \mu_R(\mathfrak{m})$。因此，$\mathfrak{m}$ 是 Ulrich R-模当且仅当 R（作为一个环）具有极小重数。

正如 [8, 2.8], 中所指出的，每个 Ulrich 模都有极小重数：

注 2.12. 设R 为一个环，I 为R的一个 $\mathfrak{m}$-主理想，且M 为一个无挠R-模。假设 $(x) \subseteq I$ 是I的一个极小约化。由 2.3(i) 可得：

$$M \text{ is } I\text{-Ulrich} \iff \mathrm{length}_R(M/IM) = \mathrm{e}_R(I,M) = \mathrm{length}_R(M/xM) \iff IM = xM.$$

因此，如果M 是I-Ulrich，那么$I^2M = xIM$，从而M 相对于I具有极小重数；见 2.3(iv)。

注2.13。 设R 是一个环，且M 是非零无挠R-模。若 (x) 是 $\mathfrak{m}$的极小约化，则有以下蕴含关系：

$$\begin{aligned}(2.13.1)\qquad M \text{ has minimal multiplicity} &\iff \mathfrak{m}^2M = x\mathfrak{m}M \iff \mathfrak{m}(\mathfrak{m}M) = x(\mathfrak{m}M)\\ &\iff \mathfrak{m}M \text{ is Ulrich} \iff \mathfrak{m}^2M \cong \mathfrak{m}M.\end{aligned}$$

这里，在 (2.13.1) 中，最后一个蕴含关系归因于 [6, 4.6]。接下来，我们使用 (2.13.1)，并注意到：

$$\begin{aligned}M \text{ 具有极小重数} &\implies \mathfrak{m}M \text{ 是 Ulrich} \implies \mathfrak{m}^2M \text{ 是 Ulrich} \qquad (2.13.2)\\ &\vdots\\ &\implies \mathfrak{m}^iM \text{ has minimal multiplicity.}\end{aligned}$$

接下来我们注意到，只要R 的重数至多为三，R-模 $\mathfrak{m}$就具有极小重数（相对于 $\mathfrak{m}$）。

注2.14。 设R 是一个环，并令$e = \mathrm{e}(R)$。

(i) 由此可知，$\mathfrak{m}^{e-1}$ 是一个 Ulrich R-模；见 [3, 2.1]。因此，由 2.3 可知，$\mathfrak{m}^{e-1}$ 具有极小重数。(ii) 若 $e = 3$，则 $\mathfrak{m}^2$ 是一个 Ulrich R-模，因此 $\mathfrak{m}$ 具有极小重数；见 (i) 部分和 (2.13.2)。例如，若 $R = k[\![t^3,t^5]\!],$，则 $e = 3$，且 $\mathfrak{m}$ 具有极小重数，但R 不具有极小重数。(iii) 若 $e \leq 3$，则 $\mathfrak{m}$ 具有极小重数；见 (i) 和 (ii) 部分。

与注2.14相反，存在重数为四而其极大理想不具有极小重数的环。例如，若 $R = k[\![t^4,t^5,t^{11}]\!],$，则 $\mathfrak{m}^2 = (t^8,t^9,t^{10})$，且 $\mathrm{e}(R) = 4 = \mathrm{e}_R(\mathfrak{m}) \neq 3 = \mu_R(\mathfrak{m}^2)$，因此$R$-模 $\mathfrak{m}$ 不具有极小重数。这里，R 不是 Gorenstein 环；关于涉及 Gorenstein 环的类似例子，见 2.30(iv)。

(2.13.2)中所述事实的逆命题可能不成立；也就是说，即使一个无挠R-模M 不具有极小重数，$\mathfrak{m}M$ 仍然可以具有极小重数。

例 2.15. 令 $R = k[\![t^4,t^5,t^6]\!].$

(i) 令 $\mathfrak{q}=(t^4)$。于是 $\mathfrak{m}=\mathfrak{q}+(t^5,t^6)$，因此 $\mathfrak{m}^2$ 等于

$$\mathfrak{q}\mathfrak{m}+(t^5,t^6)\mathfrak{q}+(t^5,t^6)^2=\mathfrak{q}\mathfrak{m}+(t^5,t^6)^2=(t^8,t^9,t^{10})+(t^{10},t^{11},t^{12})=(t^8,t^9,t^{10},t^{11}).$$

此外，$\mathfrak{m}^2=\mathfrak{q}\mathfrak{m}+(\mathrm{t}^{11})$，使得 $\mathfrak{m}^3=\mathfrak{q}\mathfrak{m}^2+(\mathrm{t}^{11})\mathfrak{m}$。注意，$(\mathrm{t}^{11})\mathfrak{m}=(\mathrm{t}^{15},\mathrm{t}^{16},\mathrm{t}^{17})\subseteq\mathfrak{q}\mathfrak{m}^2$。因此，$\mathfrak{m}^3=\mathfrak{q}\mathfrak{m}^2$，也就是说，$\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{m}$的一个极小约化。所以，对所有 n，$\mathfrak{m}^{n+2}=\mathfrak{q}\mathfrak{m}^{n+1}\geq 1$。因此，若 M 是无挠 R-模，则 $\mathfrak{m}^2(\mathfrak{m}^n\mathrm{M})=\mathfrak{q}\mathfrak{m}(\mathfrak{m}^n\mathrm{M})$，从而对所有 n，$\mathfrak{m}^n\mathrm{M}$ 都具有极小重数 ≥ 1；见 (2.13.1)。特别地，令 $\mathrm{M}=\mathrm{R}$ 且 $\mathrm{n}=1$，我们得出 $\mathfrak{m}$ 具有极小重数。

(ii) 令$M=R+Rt^7$。那么M不是自由R-模。注意，由于 $1\in M$，有 $\mathfrak{m}\subseteq\mathfrak{m}M\subseteq M$。此外，我们看到 $\mathfrak{m}M=(t^4,t^5,t^6)(1,t^7)\subseteq\mathfrak{m}$，因此 $\mathfrak{m}M=\mathfrak{m}$。由此，根据 (i)，$\mathfrak{m}M$ 具有极小重数。另一方面，如果M 具有极小重数，则 (2.13.2) 蕴含 $\mathfrak{m}M=\mathfrak{m}$ 是 Ulrich，从而R 具有极小重数。由于R 不具有极小重数，我们得出M 不具有极小重数。

注 2.16. 回顾一下，若R 是一个环，且R 的 $\mathfrak{m}$-primary 理想I 是稳定理想，那么每个无挠R-模相对于I都有极小重数；见 2.8(i)。这个结论的逆命题不一定成立。在例 2.15 中，$\mathfrak{m}$ 不是稳定理想，但R-模 $\mathfrak{m}$具有极小重数；见 2.8(ii)。

2.12 中指出，每个 Ulrich 模都具有极小重数。另一方面，正如下面的例子所示，存在非零的极小重数模，但它们不是 Ulrich 模。

例 2.17. 设$R=k[\![t^4,t^5,t^6]\!]$。由例 2.15 可知，$\mathfrak{m}$ 具有极小重数（相对于 $\mathfrak{m}$）。另一方面，由于R 不具有极小重数，$\mathfrak{m}$ 不是 Ulrich$R$-模；见注 2.11。

我们可以像例 2.17 那样构造各种模；下面的结果将说明如何做到这一点。

命题 2.18. 设 R 是一个环，I 是 R 的一个非主理想 $\mathfrak{m}$-初等理想，且 (x)是 I 的一个极小约化。令 $r=\min\{n\geq 0: I^{n+1}=xI^n\}$. 若 M 是一个无挠 R-模，则 $I^{r-1}M$ 关于 I 具有极小重数。此外，I^{r-1} 不是一个 I-*Ulrich* R- 模。

证明. 由于 I 不是主理想，我们有 $r\geq 1$。因此 $I^{r+1}=xI^r$，也就是说，$I^2I^{r-1}=xII^{r-1}$，所以$I^{r-1}M$ 是一个I-Arf 模。另一方面，若 I^{r-1} 是一个I-Ulrich R-模，则由 2.3 可知$I^r=II^{r-1}=xI^{r-1}$。然而，这个等式与r的极小性矛盾。因此，I^{r-1}不是一个I-Ulrich 模。□

一般而言，环R 上的无挠模M 可能相对于 $\mathfrak{m}$具有极小重数，但相对于其他 $\mathfrak{m}$-主理想则未必如此。下面给出这样一个例子：

例 2.19. 设 $R=k[\![t^3,t^7,t^{11}]\!]$。

(i) 设$I=(\overline{t^6})$为由t^6生成的R 的理想的整闭包。由 [16,1.5.2 和 1.6.1] 可得

$$I=\overline{(t^6)}=\overline{(t^6)\overline{R}}\cap R=(t^6)\overline{R}\cap R=t^6k[\![t]\!]\cap R=(t^6,t^7,t^{11}).$$

此外，

$$I^2=(t^{12},t^{13},t^{14},t^{17},t^{18},t^{22})\neq(t^{12},t^{13},t^{17})=t^6I.$$

这意味着I不是R的稳定理想。

(ii) 若 J 是R的一个 $\mathfrak{m}$-初等理想，则R 相对于J 具有极小重数，当且仅当J是稳定理想。因此，若I如 (i) 部分所述，则R相对于I不具有极小重数。另一方面，R 相对于 $\mathfrak{m}$ 具有极小重数，因为环R具有极小重数。

注 2.20. 设 R 是一个具有典范理想ω_R 的泛 Gorenstein 非 Gorenstein 环，其全分式环为 Q。取 ω_R 的一个极小约化 (x)，并令 $K = x^{-1}\omega_R \subseteq Q$。则 K 是 R 的分式典范理想。现在，考虑 R 在 R[K],中的导子 $\mathfrak{c}$，即 $\mathfrak{c} = (R :_Q R[K])$。注意，由于 $R \subseteq K$，因此 $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}R \subseteq \mathfrak{c}K$。此外，$\mathfrak{c}K \subseteq (R :_Q R[K]) = \mathfrak{c}$。因此，$\mathfrak{c}K = \mathfrak{c}$，从而 $\mathfrak{c} \cdot \omega_R = \mathfrak{c} \cdot x$。于是，$\mathfrak{c}$ 是 ω_R-Ulrich。因此，$\mathfrak{c}$ 相对于 ω_R具有极小重数；参见注 2.12。

事实上，这个论证不仅适用于 ω_R，也适用于 R 的所有 $\mathfrak{m}$-主理想 I。更准确地说，若 I 是 R 的这样一个理想，(x) 是 I 的极小约化，且 $K = x^{-1}I \subseteq Q$，那么 $(R :_Q R[K])$ 是 I-Ulrich，因此相对于 I 具有极小重数。

W我们利用注 2.20，计算出新的极小重数模例子。

例子 2.21。

(i) 设 $R = k[\![t^3, t^7, t^8]\!]$。注意，$K = R + Rt \cong \omega_R$，因此 $R[K] = R[t] = k[\![t]\!] = \bar{R}$，即 R 在 Q 中的整闭包。于是 $\mathfrak{c} = (R :_Q R) = t^6\bar{R} = (\bar{t^6}, t^7, t^8)R$。因此，根据注 2.20，理想 $(t^6, t^7, t^8)R$ 是 ω_R-Ulrich，故相对于 ω_R 具有极小重数。

(ii) 令 $R = k[\![t^4, t^9, t^{11}, t^{14}]\!]$。则

$$K = R + Rt^3 + Rt^5 \cong \omega_R \text{ and } R[K] = R + Rt^3 + Rt^5 + Rt^6.$$

由此可得 $(R :_R Rt^3) = (t^8, t^9, t^{11}, t^{14})R$ 以及 $(R :_R Rt^5) = (R :_R Rt^6) = (t^4, t^9, t^{11}, t^{14})R$。这意味着:

$$\begin{aligned} \mathfrak{c} = (R :_Q R[K]) &= (R :_R Rt^3) \cap (R :_R Rt^5) \cap (R :_R Rt^6) \\ &= (t^8, t^9, t^{11}, t^{14})R \cap (t^4, t^9, t^{11}, t^{14})R \\ &= (t^8, t^9, t^{11}, t^{14})R \end{aligned}$$

因此，根据注 2.20，理想 $(t^8, t^9, t^{11}, t^{14})R$ 是 ω_R-Ulrich，并且关于 ω_R 具有极小重数。

值得注意的是，对于第 (i) 部分中的环 R，$R[K] = R$；另一方面，对于第 (ii) 部分中的环 R，我们有 $R[K] \neq R$，且 $\mathfrak{c} \neq (\bar{R} :_Q R) = (t^{11}, t^{12}, \bar{t^{13}}, t^{14})R$。

理想化中的极小重数。在本小节中，我们根据环 R 和 R-模 M的极小重数，对理想化 $A = R \ltimes M$的极小重数给出刻画。此外，我们指出，即使 M 作为 R-模具有极小重数，理想化也可能不具有极小重数。

我们回顾相关定义：给定一个 R-模 M，我们用 $R \ltimes M$ 表示 M 在 R 上的理想化。作为阿贝尔群，$R \ltimes M$ 就是 $R \oplus M$，但乘法定义为：对于所有 $(a,x), (b,y) \in R \ltimes M$，$(a, x) \cdot (b, y) = (ab, ay + bx)$。注意，$0 \ltimes M$ 是 $R \ltimes M$ 的一个理想，$(0 \ltimes M)^2 = 0$，且 $R \cong (R \ltimes M)/(0 \ltimes M)$。由于我们假设 R 是一维 Cohen-Macaulay 局部环，若 M 是无挠 R-模，则 $R \ltimes M$ 是一个一维

Cohen-Macaulay 局部环，其极大理想为 $\mathfrak{m} \ltimes M$，并且 $(R \ltimes M)/(\mathfrak{m} \ltimes M) \cong R/\mathfrak{m}$；例如，参见 [22,第 2] 页。

以下性质可由定义直接推出：

2.22. 设R是一个环，M是无挠R-模，且$A = R \ltimes M$是R上M的理想化。则有以下结论：

(i) $\operatorname{embdim}(A) = \operatorname{embdim}(R) + \mu_R(M)$。(ii) $\mathrm{e}(A) = \mathrm{e}(R) + \mathrm{e}_R(M)$。

命题 2.23. 设 R 是一个环，M 是无挠 R-模，且 $A = R \ltimes M$ 是 M 在 R 上的理想化。则以下条件等价：

(i) 环 A 具有极小重数。(ii) 每个无挠 A-模都具有极小重数。

(iii) 环 R 具有极小重数，且 M 是 *Ulrich* R-模。

证明。 (i) 和 (ii) 两部分等价，由注 2.8(ii) 可知。

为证明 (i) 推出 (iii)，我们假设 A （作为一个环）具有极小重数。于是，由 2.22 可得：

$$\operatorname{embdim}(R) + \mu_R(M) = \operatorname{embdim}(A) = \mathrm{e}(A) = \mathrm{e}(R) + \mathrm{e}_R(M).$$

由此得到：

$$0 \leq \mathrm{e}(R) - \operatorname{embdim}(R) = \mu_R(M) - \mathrm{e}_R(M) \leq 0.$$

因此，$\operatorname{embdim}(R) = \mathrm{e}(R)$ 且 $\mu_R(M) = \mathrm{e}_R(M)$，也就是说，环 R 具有极小重数，且 R-模M 是 Ulrich。

接下来，假设 (iii) 成立。则 2.22 推出

$$\mathrm{e}(A) = \mathrm{e}(R) + \mathrm{e}_R(M) = \operatorname{embdim}(R) + \mu_R(M) = \operatorname{embdim}(A).$$

因此，环A具有极小重数。 □

在下一个注中，我们使用命题 2.23 构造具有极小重数的理想化，并强调即使模 M 作为R-模具有极小重数，理想化也可能不具有极小重数。

注 2.24. 设R是一个环，并令$A = R \ltimes R$。假设R具有极小重数。那么，根据命题 2.23，环 A 具有极小重数，当且仅当R 是一个 Ulrich$R$-模；等价地，R 是正则的。因此，若R不是正则的，那么A 作为环不具有极小重数，但作为R-模具有极小重数；见注 2.8(ii)。

回想一下， $\mathfrak{m}$ 是 Ulrich$R$-模，当且仅当R 具有极小重数；见注 2.11。因此，命题 2.23 表明，环R具有极小重数，当且仅当环$R \ltimes \mathfrak{m}$ 具有极小重数。更一般地，若R 具有极小重数，则对所有$i \geq 1$，$\Omega^i_R(k)$都是 Ulrich$R$-模；见 [3, 2.5]。因此，由命题 2.23 可得：

2.25. 设R为一个环。当且仅当对所有$i \geq 1$，理想化环$R \ltimes \Omega^i_R(k)$具有极小重数时，R 具有极小重数。

极小重数模的正合关系。本小节通过一个例子说明，一般而言，极小重数模的（余）合冲模未必具有极小重数。经过一些准备后，我们将在例 2.29 中观察到这一现象。回顾一下，给定一个R-模M，我们定义$M^* = \mathrm{Hom}_R(M,R)$。

注 2.26. 设 R 是全分式环为 Q 的环，I 是 R 的一个分式理想，也就是说，I 是 Q 的有限生成 R-子模，并且 I 含有一个对 R 来说是非零因子的元素。若 $\mu_R(\mathrm{I}) = 2$，则 $\mathrm{I}^* \cong \Omega_R(\mathrm{I})$。例如，对于 I 是 R 的理想的情形，这一事实可由 [15,3.1] 得出。为证明一般情形，取一个元素 $\mathrm{s} \in \mathrm{R}$，使得 s 是 R 上的非零因子且 $\mathrm{sI} \subset \mathrm{R}$。令 $\mathrm{J} = \mathrm{sI}$。则 J 是 R 的一个理想，且$\mu_R(\mathrm{J}) = 2$。此外，由于 I 含有 R 上的非零因子，且 s 也是 R 上的非零因子，我们得出 J 含有 R 上的非零因子。因此，存在 R-模的一个短正合列 $0 \to \mathrm{J}^* \to \mathrm{R}^{\oplus 2} \to \mathrm{J} \to 0$；例如参见 [15, 3.1] 的证明。由于作为 R-模，$\mathrm{I} \cong \mathrm{J}$，我们得到 R-模的一个短正合列 $0 \to \mathrm{I}^* \to \mathrm{R}^{\oplus 2} \to \mathrm{I} \to 0$。这意味着 $\mathrm{I}^* \cong \Omega_R(\mathrm{I})$。

注 2.27. 设 R 为环，并令 $M = \mathfrak{m}^*$。

(i) 由于 $\mathfrak{m}$ 含有 R 上的一个非零因子，我们有 $M = \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{m},R) \cong (R :_{\mathrm{Q}} \mathfrak{m})$ 作为 R-模，其中 $(R:_{\mathrm{Q}} \mathfrak{m})$ 是 R 的分式理想；见 [16, 2.4.2]。(ii) 若 R 不正则，则 $(R :_{\mathrm{Q}} \mathfrak{m}) = (\mathfrak{m} :_Q \mathfrak{m}) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{m},\mathfrak{m})$。(iii) 若 R 不正则，则由 (i) 与 (ii) 可得

$$M = \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{m},R) \cong (\mathfrak{m} :_Q \mathfrak{m}) \Longrightarrow \mathfrak{m}M = \mathfrak{m}\,\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{m},R) \cong \mathfrak{m}(\mathfrak{m} :_Q \mathfrak{m}) = \mathfrak{m}.$$

引理 2.28. 设 R 为环。下列条件等价：

(i) R具有极小重数。(ii) 每个无挠 R-模具有极小重数。(iii) $\mathfrak{m}^*$ 具有极小重数。

证明. 只需假设 $\mathfrak{m}^*$ 具有极小重数，并验证R 具有极小重数；见注 2.8(ii)。令 $M = \mathfrak{m}^*$。M 的秩等于 $\mathfrak{m}$ 的秩，即为 1。因此，$\mathrm{e}_R(M) = \mathrm{e}(R)$；见 [4, 4.7.9]。于是，由 2.6 与注 2.27(iii) 可知，R-模 M 具有极小重数当且仅当 $\mathrm{e}(R) = \mathrm{e}_R(M) = \mu_R(\mathfrak{m}M) = \mu_R(\mathfrak{m})$，当且仅当环$R$ 具有极小重数。□

例 2.29. 设 R 是一个环，满足 $\mathrm{e}(\mathrm{R}) = 3$ 且 $\mathrm{embdim}(\mathrm{R}) = \mu_R(\mathfrak{m}) = 2$。例如，我们可以取 $\mathrm{R} = \mathrm{k}[\![\mathrm{t}^3,\mathrm{t}^4]\!]$。注意，$\mathfrak{m}$ 具有极小重数；见 2.14(iii)。令 $\mathrm{M} = \mathfrak{m}^*$。由于 $\mu_R(\mathfrak{m}) = 2$，存在一个 R-模的短正合列 $0 \to \mathrm{M} \to \mathrm{R}^{\oplus 2} \to \mathfrak{m} \to 0$；见注 2.26。这个正合列推出 $\mathrm{e}_R(\mathrm{M}) = 2\,\mathrm{e}(\mathrm{R}) - \mathrm{e}_R(\mathfrak{m}) = 3$。由于 R 不是正则的，我们有 $\mathfrak{m}\mathrm{M} \cong \mathfrak{m}$；见注 2.27(iii)。因此，$\mu_R(\mathfrak{m}\mathrm{M}) = 2$。这意味着 M 不具有极小重数；否则，2.6 将推出 $2 = \mu_R(\mathfrak{m}\mathrm{M}) = \mathrm{e}_R(\mathrm{M}) = 3$。

我们知道 $\mathfrak{m}^{**} \cong \mathfrak{m}$；参见 3.12。设 R 是一个（一维）Gorenstein 整环。于是，Bass 的一个结果 [2, 6.3] 表明 $\mu_R(M) \leq 2$。若 M 是循环的，则 $\mathfrak{m}$ 也为循环的（因为 $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{m}^{**} = M^*$），从而 R 是正则的。因此，M 不是循环的，也就是说，$\mu_R(M) = 2$。回想一下，$R \subseteq (R :_{\mathrm{Q}} \mathfrak{m}) \cong M$，参见注 2.27(i)。由于 $(R :_{\mathrm{Q}} \mathfrak{m})$ 是 R 的一个分式理想，且包含 R上的一个非零因子，因此存在一个 R-模的短正合列 $0 \to \mathfrak{m} \to R^{\oplus 2} \to M \to 0$；参见注 2.26。因此，尽管 R-模 $\mathfrak{m}$具有极小重数，但它的余 syzygy 模 M 不具有极小重数。

极小重数模与 Burch 模。我们已经指出，每个 Ulrich 模都具有极小重数，而这一事实的逆命题未必成立；参见命题 2.18。还有另一类模，是 Ulrich 模的一个子类，我们想在此简要介绍，即 Burch 模。若一个无挠 R-模 M 存在一个 $x \in \mathfrak{m}$，使得 x 是 M 上的非零因子，且 k 是 M/xM的一个直和项，则称该模为 *Burch*；有关例子和详细说明，参见 [9]。

下面指出，一般而言，极小重数模类与 Burch 模类（在一维 Cohen-Macaulay 环上）并不相同。我们还指出，极小重数的 Burch 模不一定是 Ulrich 模。

2.30. 设R是一个环。

(i) R-模 $\mathfrak{m}$ 总是 Burch 模；见 [9, 3.4]。(ii) 若 M 是一个无挠 R-模，且 M 是 Burch 模并且 $\mathrm{id}_R(\mathrm{M}) < \infty$，则 R 是正则的；见 [9, 3.19]。(iii) 假设 R 不是 Gorenstein，具有极小重数，并且存在典范模 ω_R。那么 ω_R 也具有极小重数，因为每个无挠 R-模都具有极小重数；见注 2.8(ii)。另一方面， ω_R 不是 Burch R-模；见 (ii)部分。例如，若 $\mathrm{R} = \mathrm{k}[\![\mathrm{t}^3,\mathrm{t}^4,\mathrm{t}^5]\!],$，则典范模 ω_R 不是 Burch 模，但作为 R-模，它具有极小重数。(iv) 设 $\mathrm{R} = \mathrm{k}[\![\mathrm{t}^4,\mathrm{t}^5]\!]$，并令 $\mathrm{M} = \mathfrak{m}$。那么 M 是 Burch R-模，但它不具有极小重数，因为 $\mathrm{e}(\mathrm{R}) = 4 \neq 3 = \mu_R(\mathfrak{m}^2)$；见(i)部分和 2.6。(v) 若 $\mathrm{R} = \mathrm{k}[\![\mathrm{t}^4,\mathrm{t}^5,\mathrm{t}^6]\!]$ 且 $\mathrm{M} = \mathfrak{m}$，则 M 是 Burch 模且具有极小重数，但它不是 Ulrich 模；见例 2.15。

3. 极小重数模与 Ulrich 模

除非另有说明，R 表示一个一维交换诺特局部 *Cohen-Macaulay* 环，其极大理想为 $\mathfrak{m}$，剩余域为k。此外，假设所有R-模均为有限生成。

相对于一个 $\mathfrak{m}$-主理想I，具有极小重数的无挠R-模不一定是I-Ulrich；参见例 2.17 和命题 2.18。本节证明定理 3.8，并确定若干类模和理想，使得 Ulrich 性质与极小重数等价；另见推论 3.11。在证明定理 3.8 之前，我们先建立几个预备结果。对于给定的环R 和元素$x \in R$，我们先约定 $(-) = - \otimes_R R/xR$。

引理 3.1. 设R 为一个环，I 为R的一个 $\mathfrak{m}$-主理想，$(x) \subseteq I$ 为I的一个极小约化，并设M 为一个无挠R-模。则以下条件等价：

(i) M 关于 I具有极小重数。(ii) IM 是 I-Ulrich。(iii) $I \subseteq \mathrm{Ann}_R\left(IM\right)$。

证明。由 2.4 可知，$I^2M = xIM$ 当且仅当 M 关于 I具有极小重数。此外，注 2.12 表明，$I \cdot IM = x \cdot IM$ 当且仅当 IM 是 I-Ulrich。因此，这些等价关系成立。□

以下观察的证明留给读者。

引理 3.2. 设 R 是一个环，且 M 和 N 是无挠 R 模。若$x \in \mathfrak{m}$ 是 R 上的非零因子，则存在如下单射R-模同态：

$$\overline{\mathrm{Hom}_R(M,N)} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{R}}\left(\overline{M},\overline{N}\right).$$

下一个命题在定理 3.8 的证明中起着重要作用。

命题 3.3. 设 R 是一个环，I 是 R 的一个 $\mathfrak{m}$-准素理想，M 是一个无挠 R-模。假设 M 关于 I 具有极小重数。那么，对于每个无挠 R-模 N，$\mathrm{Hom}_R(IM, N)$ 都是 I-*Ulrich*。

证明。 设 N 是一个无挠 R-模。那么 $\mathrm{Hom}_R(IM,N)$ 是一个无挠 R-模。此外，IM 是无挠的，因为它是无挠 R-模M的子模。取一个极小约化 $(x) \subseteq I$；参见 2.1。于是，由于 x 是~~R 上的非零~~因子，根据~~引~~理 3.2，存在单射 $\mathrm{Hom}_R(IM,N) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(IM,N\right)$。由于 M关于 I 具有极小重数，引理 3.1 表明 $I \subseteq \mathrm{Ann}_{\overline{R}}\left(\overline{IM}\right)$。因此，我们有

$$I \subseteq \mathrm{Ann}_R\left(\overline{IM}\right) \subseteq \mathrm{Ann}_R\left(\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{IM},\overline{N})\right).$$

这意味着$I \cdot \overline{\mathrm{Hom}_R(IM,N)} = 0$，也就是说，$I \cdot \mathrm{Hom}_R(IM,N) = x \cdot \mathrm{Hom}_R(IM,N)$。因此，由注 2.12 可知，$\mathrm{Hom}_R(IM,N)$ 是I-Ulrich。□

将命题 3.3 应用于$I = \mathfrak{m}$ 和$N = R$，得到：

推论 3.4. 设 R 是一个环，M 是一个非零无挠 R-模。如果 M 具有极小重数，那么$(\mathfrak{m}M)^*$ 是一个 *Ulrich* R-模。

我们回顾一些性质，这些性质将在定理 3.8 和 4.1 的证明中用到。

3.5. 设R 是一个全分式环为 Q 的环，且I 是R的 $\mathfrak{m}$-主理想。则有以下结论：

(i) $\mathrm{I}\,(\mathrm{I} :_{\mathrm{Q}} \mathrm{I}) = \mathrm{I}$. (ii) I 是自反的，也就是说，作为 R-模有 $\mathrm{I} \cong \mathrm{I}^{**}$，当且仅当 $(\mathrm{R} :_{\mathrm{Q}} (\mathrm{R} :_{\mathrm{Q}} \mathrm{I})) = \mathrm{I}$；例如，参见 [19, 2.4(4)]。(iii) 回顾一下，I 称为稳定的，当且仅当对某个 $\mathrm{z} \in \mathrm{I}$，有 $\mathrm{I}^2 = \mathrm{zI}$。如果对某个 $\mathrm{x} \in \mathrm{I}$，有 $\mathrm{I} = \mathrm{x}\,(\mathrm{I} :_{\mathrm{Q}} \mathrm{I})$，那么 $(\mathrm{x}^{-1}\mathrm{I})^2 = \mathrm{x}^{-1}\mathrm{I}$，因此 $\mathrm{I}^2 = \mathrm{xI}$，也就是说，I 是稳定的；参见 [20, 1.11]。(iv) 如果 I 等于某个 R-模的迹，则称 I 为迹理想。由此可知，I 是 R 的迹理想，当且仅当 $(\mathrm{I} :_{\mathrm{Q}} \mathrm{I}) = (\mathrm{R} :_{\mathrm{Q}} \mathrm{I})$；参见 [13, 2.2]。例如，如果 R 非正则，那么 $\mathfrak{m}$是 R 的迹理想；参见 [14, 3.15]。此外，每个 Ulrich 理想都是迹理想；参见 [11, 第 4] 页。

3.6. 设 R 是一个以 Q 为全分式环的环。

(i) 若 I、J 与 K 均为 R 的分式理想，则 $(I :_{\mathrm{Q}} JK) = ((I :_{\mathrm{Q}} J) :_{\mathrm{Q}} K)$。(ii) 若 I 是 R 的一个理想，且包含一个在 R 上为非零因子的元素，而 J 是 Q 的一个R-子模，则 $(J :_{\mathrm{Q}} I) \cong \mathrm{Hom}_R(I,J)$；例如参见 [16, 2.4.2]。

我们接下来给出的观察对于定理 3.8 和 4.1 的证明至关重要。

3.7. 设R 是一个具有典范理想 ω_R 的非 Gorenstein 环，并设I 是R的一个 $\mathfrak{m}$-primary 理想。下列等式与同构成立：

$$\mathrm{Hom}_R(I \cdot \omega_R, \omega_R) \cong (\omega_R :_{\mathrm{Q}} I \cdot \omega_R) = ((\omega_R :_{\mathrm{Q}} \omega_R) :_{\mathrm{Q}} I) \cong (R :_{\mathrm{Q}} I) \cong I^*. \tag{3.7.1}$$

这里，同构来自 3.6(ii)，因为I 和 ω_R 都是R的 $\mathfrak{m}$-primary 理想，因此都包含R上的非零因子。此外，该等式来自 3.6(i)。

接下来给出本节的主要结果：

定理 3.8。 设 R 是一个带有典范理想ω_R 的泛 *Gorenstein* 非 *Gorenstein* 环，并设 I 是一个 $\mathfrak{m}$-主理想。

(i) 若 R-模 I 关于 ω_R具有极小重数，则 I^* 是 ω_R-*Ulrich*。(ii) 假设 I 是 R 的一个迹理想。若 I^* 是 ω_R-*Ulrich*，则 I 是 ω_R-*Ulrich*。

证明。 对于 (i)，假设I 关于 ω_R具有极小重数。由命题 3.3 可知，$\mathrm{Hom}_R(I \cdot \omega_R, \omega_R)$ 是 ω_R-Ulrich。因此，(3.7.1) 表明I^* 是 ω_R-Ulrich，从而证明了 (i)。

对于 (ii)，假设 I 是R 的迹理想，且I^* 是 ω_R-Ulrich。于是，由于 $(R :_{\mathrm{Q}} I) \cong I^*$，可知 $(R :_{\mathrm{Q}} I) \cdot \omega_R = (R :_{\mathrm{Q}} I) \cdot x$，其中某个极小约化为 $(x) \subseteq \omega_R$；见 (3.7.1) 和注 2.12。这给出等式 $I \cdot \omega_R = I \cdot x$，因为

$$I \cdot (R :_{\mathrm{Q}} I) \cdot \omega_R = I \cdot (R :_{\mathrm{Q}} I) \cdot x \Longrightarrow I \cdot (I :_{\mathrm{Q}} I) \cdot \omega_R = I \cdot (I :_{\mathrm{Q}} I) \cdot x \Longrightarrow I \cdot \omega_R = I \cdot x.$$

这里，第一个和第二个蕴含分别由 3.5(iv) 和 3.5(i) 得出。因此，I 是ω_R-Ulrich；见注 2.12。□

若I 是 ω_R-Ulrich，则由注 2.12，I 相对于 ω_R具有极小重数。当I 是迹理想时，定理 3.8 立即给出这一事实的逆命题。

推论 3.9。 设 R 是一个带有典范理想ω_R 的泛 *Gorenstein* 非 *Gorenstein* 环，并设 I 是 R 的一个 $\mathfrak{m}$-*primary* 迹理想。那么，I 相对于ω_R 具有极小重数，当且仅当 I 是 ω_R-*Ulrich*。

我们继续讨论定理 3.8 的进一步推论。与定理中一样，假设R是一个泛 Gorenstein 非 Gorenstein 环，其全分式环为 Q，且有一个典范理想 ω_R。回顾一下，R的导子，即 $\mathfrak{c} = (R :_Q R[K])$，相对于 ω_R具有极小重数；参见注 2.20。因此，定理 3.8(i) 表明 $\mathfrak{c}^*$ 是 ω_R-Ulrich。由$\mathfrak{c}^* \cong (R :_Q \mathfrak{c}) \cong R[K],$，根据注 2.12 可得：

推论 3.10. 设 R 是一个泛 *Gorenstein* 非 *Gorenstein* 环，且有一个典范理想ω_R。那么，R-模 $R[K]$相对于 ω_R具有极小重数。

下面我们指出，在一个泛 Gorenstein 非 Gorenstein 环上，若一个 $\mathfrak{m}$-主理想I 作为模是自反的，那么它相对于 ω_R具有极小重数，当且仅当它的代数对偶I^* 也具有极小重数。

推论 3.11。 设 R 是一个具有典范理想ω_R的泛 *Gorenstein* 非 *Gorenstein* 环，且 I 是一个 R-理想。考虑以下条件：

(i) I 是 ω_R-*Ulrich*。 *(ii)* 关于 ω_R，I 具有极小重数。 *(iii)* I^* 是 ω_R-*Ulrich*。 *(iv)* 关于 ω_R，I^* 具有极小重数。

则（i）$\Rightarrow$（ii）$\Rightarrow$（iii）$\Rightarrow$（iv）。此外，若 I 是自反 R-模，则

$$(i) \Longleftrightarrow (ii) \Longleftrightarrow (iii) \Longleftrightarrow (iv).$$

证明。 由注 2.12 可得蕴含关系 (i)$\Longrightarrow$ (ii) 和 (iii)$\Longrightarrow$ (iv)，而定理 3.8(i) 给出 (ii)$\Longrightarrow$ (iii)。

现在假设I 是一个自反的R-模。只需证明蕴含关系 (iv)$\Longrightarrow$(i}。为此，假设I^* 相对于 ω_R具有极小重数。令$J = I^* = \mathrm{Hom}_R(I,R)$。回顾一下，$J \cong (R\!:_{\mathrm{Q}} I)$ 是R的一个分式理想；见 3.6(ii)。因此，定理 3.8(i) 蕴含J^* 是 ω_R-Ulrich。由于I 是自反的，我们有$J^* = I^{**} \cong I$。证明完毕。 □

以下事实用于推论 3.13 和 4.3 的证明。

3.12. 若R 是一个（一维 Cohen-Macaulay 局部）环，则R 的极大理想 $\mathfrak{m}$是一个自反的R-模；例如，参见 [12, 4.1]。

根据 3.12，推论 3.11 立即推出：

推论 3.13。 设 R 是一个带有典范理想ω_R的泛 *Gorenstein* 非 *Gorenstein* 环。则以下条件等价：

(i) $\mathfrak{m}$是 ω_R-*Ulrich*。(ii) $\mathfrak{m}$ 相对于 ω_R具有极小重数。(iii) $\mathfrak{m}^*$ 是 ω_R-*Ulrich*。(iv) $\mathfrak{m}^*$ 相对于 ω_R具有极小重数。

推论 3.13 刻画了几乎戈伦斯坦环。虽然我们不定义几乎戈伦斯坦环，也不详细讨论其性质，但读者可参阅 [14]，了解这类环的定义及更多信息。特别地，带有典范理想 ω_R 的泛 Gorenstein 非正则环是几乎戈伦斯坦环，当且仅当其极大理想 $\mathfrak{m}$ 是 ω_R-Ulrich；见 [14, 3.11]。这一事实与推论 3.13 表明：

推论 3.14。 设 R 是一个具有典范理想 ω_R 的泛 *Gorenstein* 非正则环。当且仅当 $\mathfrak{m}$ 关于 ω_R 具有极小重数，当且仅当 $\mathfrak{m}^*$ 关于 ω_R具有极小重数时，R 是几乎 *Gorenstein* 的。

4. 定理 1.1 的证明

本节旨在研究典范模关于某个迹理想或自反理想具有极小重数的情形。我们的主要结果定理 4.1 需要一些预备工作，并导出若干推论，其中包括引言中所述结果的一部分；参见推论 4.2 和 4.3。

回顾一下，若 R 是一个环，则称一个 $\mathfrak{m}$-准素理想 I 是自反的，如果 $(R\!:_{\mathrm{Q}} (R\!:_{\mathrm{Q}} I)) = I$；如果 $(I\!:_{\mathrm{Q}} I) = (R\!:_{\mathrm{Q}} I)$，则称其为迹，其中 Q 是$R$的全分式环；参见 3.5。

定理 4.1. 设 R 是一个带有典范理想ω_R的泛 *Gorenstein* 非 *Gorenstein* 环，且 I 是 R 的一个 $\mathfrak{m}$-初等理想。假设 I 是迹理想或作为 R-模是自反的。若 ω_R 相对于 I 具有极小重数，则 I 是稳定理想。

证明。 假设 ω_R 相对于I具有极小重数，并取I的一个极小约化 (x)。由命题 3.3，令$M = N = \omega_R$，可知 $\mathrm{Hom}_R(I\omega_R, \omega_R)$ 是 I-Ulrich。因此，由 (3.7.1) 可得 $(R\!:_{\mathrm{Q}} I)$ 是 I-Ulrich，因而 $x(R\!:_{\mathrm{Q}} I) = I(R\!:_{\mathrm{Q}} I)$；见注 2.12。

假设I 是迹理想。那么 $(I\!:_{\mathrm{Q}} I) = (R\!:_{\mathrm{Q}} I)$，因此有以下等式：

$$x(I :_{\mathrm{Q}} I) = x(R :_{\mathrm{Q}} I) = I(R :_{\mathrm{Q}} I) = I(I :_{\mathrm{Q}} I) = I.$$

这里，第四个等式是由于 3.5(i)。因此，I 是稳定的；参见 3.5(iii)。

Next 假设I是自反的，即 $(R :_{\mathrm{Q}} (R :_{\mathrm{Q}} I)) = I$。下列等式成立：

$$x^{-1}I = x^{-1} \circ \big(R :_{\mathrm{Q}} (R :_{\mathrm{Q}} I)\big) = \big(R :_{\mathrm{Q}} x(R :_{\mathrm{Q}} I)\big) = \big(R :_{\mathrm{Q}} I(R :_{\mathrm{Q}} I)\big) = \big((R :_{\mathrm{Q}} (R :_{\mathrm{Q}} I)) :_{\mathrm{Q}} I\big) = (I :_{\mathrm{Q}} I)$$

这里，第一个和第五个等式成立是因为I 是自反的；第二个和第四个等式由冒号理想的定义可得；第三个等式成立是因为，如前所述，$(R:_{\mathrm{Q}} I)$是I-Ulrich。因此，我们有$x^{-1}I = (I :_{\mathrm{Q}} I)$，也就是说，$I = x(I :_{\mathrm{Q}} I)$。这意味着$I$ 是稳定的；见 3.5(iii)。□

推论 4.2. 设 R 是一个具有典范理想ω_R的泛 *Gorenstein* 非 *Gorenstein* 环，且 I 是 R 的一个 $\mathfrak{m}$-初等理想。假设 I 是迹理想或作为 R-模是自反的。则以下条件等价：

(i) I 是稳定的。(ii) 每个无挠 R-模关于 I 都具有极小重数。(iii) ω_R 关于 I 具有极小重数。

证明。 由注 2.8(i) 可得蕴含关系 (i) $\Longrightarrow$ (ii)，而 (ii) $\Longrightarrow$ (iii) 显然。此外，由定理 4.1 可得 (iii) $\Longrightarrow$(i)。□

推论 4.2 的以下特殊情形给出了极小重数环的一种新刻画。

推论 4.3。 设 R 是一个具有典范理想ω_R的泛 *Gorenstein* 非 *Gorenstein* 环。那么以下条件等价：

(i) R 具有极小重数。(ii) 每个无挠 R-模都具有极小重数。(iii) ω_R 具有极小重数。

证明。 只需注意蕴含关系 (iii) $\Longrightarrow$ (i) 成立；见注 2.8(ii)。回想一下， $\mathfrak{m}$ 是一个自反的R-模；见 3.12。因此，若 ω_R 具有极小重数，则由推论 4.2 在$I = \mathfrak{m}$的情形下可知，$\mathfrak{m}$ 是稳定的。然而， $\mathfrak{m}$ 的稳定性等价于R 具有极小重数；见注 2.8(ii)。□

第 3 节研究关于 ω_R 具有极小重数的 $\mathfrak{m}$-初等理想 I 。不过，值得注意的是，即使满足这一条件，也不意味着 ω_R 关于 I 具有极小重数。

注 4.4. 设 $R = k[\![t^4, t^5, t^7]\!]$。那么 R 是一个几乎戈伦斯坦环；见 [5, 4.7]。因此，根据推论 3.14， $\mathfrak{m}$ 关于 ω_R 具有极小重数。另一方面， ω_R 不具有极小重数（关于 $\mathfrak{m}$），因为 R 不具有极小重数；见推论 4.3。

附录 A. 涉及极小重数模的一个正合列

本附录的主要目的是证明存在一个由极小重数模诱导的特定短正合列；参见 A.1(1)。我们将说明这一正合列的两个应用。首先，它使我们能够给出第 2 节中命题 2.6 的证明，为方便读者起见，此处将其重述为 A.1(2)。其次，我们的论证可用于证明当M 是极小重数模时，$\mathrm{Tor}_i^R(M, N)$消失的相关结果；A.2 中给出了这样的证明。

回顾一下，我们假设R是一个一维 Cohen-Macaulay 局部环，并假设所有R-模都是有限生成的。我们还假设R的 $\mathfrak{m}$-初等理想存在极小约化；参见 2.1。

A.1. 设M是一个非零无挠R-模。置$e = \mathrm{e}_R(M)$及$v = \mu_R(M)$。
(1) 假设M具有极小重数（关于 $\mathfrak{m}$）。则$e = \mu_R(\mathfrak{m}M)$。此外，如果(x)是 $\mathfrak{m}$的一个极小约化，则存在一个R-模正合列

$$0 \to k^{\oplus(e-v)} \to M/xM \to k^{\oplus v} \to 0.$$

(2) 以下条件等价：
(i) 对所有$i \geq 0$，$\mathfrak{m}^i M$ 都具有极小重数。
(ii) M 具有极小重数。(iii) $e = \mu_R(\mathfrak{m}M)$。
(iv) $\mathfrak{m}^2 M \cong \mathfrak{m}M$。

证明。 (1) 取 $\mathfrak{m}$的一个极小约化(x)，并考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{m}M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/\mathfrak{m}M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle x} & & \downarrow{\scriptstyle x} & & \downarrow{\scriptstyle x} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{m}M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/\mathfrak{m}M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由于x 对$M/\mathfrak{m}M$ 的乘法映射为零，对该图应用蛇引理可得以下正合列：

$$0 \to M/\mathfrak{m}M \to \mathfrak{m}M/x\mathfrak{m}M \xrightarrow{\varphi} M/xM \to M/\mathfrak{m}M \to 0. \tag{A.1.1}$$

由于我们假设M 具有极小重数，故$x\mathfrak{m}M = \mathfrak{m}^2 M$；见 2.4。因此，$\mathfrak{m}M/x\mathfrak{m}M \cong k^{\oplus \mu_R(\mathfrak{m}M)}$。于是，由于$M/\mathfrak{m}M \cong k^{\oplus v}$，(A.1.1) 推出 $\operatorname{im}(\varphi) \cong k_{\oplus}\left(\mu_R(\mathfrak{m}M)-v\right)$。因此，(A.1.1) 给出以下短正合列

$$0 \to k^{\oplus\left(\mu_R(\mathfrak{m}M)-v\right)} \to M/xM \to k^{\oplus v} \to 0, \tag{A.1.2}$$

这表明 $\operatorname{length}_R(M/xM) = \mu_R(\mathfrak{m}M)$。此外，我们知道$e = \operatorname{length}_R(M/xM)$。因此，我们得到$e = \mu_R(\mathfrak{m}M)$，故 (A.1.2) 正是我们所需的正合列。

(2) 由注2.13中的 (2.13.1) 和 (2.13.2) 可知，(i)、(ii) 和 (iv) 部分中的条件等价。此外，若M 具有极小重数，则第 (1) 部分给出等式$e = \mu_R(\mathfrak{m}M)$。因此，我们假设$e = \mu_R(\mathfrak{m}M)$，并继续证明M 具有极小重数。

令 (y) 为 $\mathfrak{m}$ 的极小约化。则 y 是 R 上的非零因子，因此也是无挠R-模 M 和 $\mathfrak{m}M$ 上的非零因子。因此，我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{m}M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/\mathfrak{m}M & \longrightarrow & 0 \\ & & \cong\downarrow{\scriptstyle y} & & \cong\downarrow{\scriptstyle y} & & \downarrow{\scriptstyle y} & & \\ 0 & \longrightarrow & y\mathfrak{m}M & \longrightarrow & yM & \longrightarrow & yM/y\mathfrak{m}M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由蛇引理可知，该图表明 $M/\mathfrak{m}M \cong yM/y\mathfrak{m}M$。因此，

$$\text{length}_R(M/\mathfrak{m}M) = \text{length}_R(yM/y\mathfrak{m}M). \tag{A.1.3}$$

第 (1) 部分表明存在正合列 $0 \to k^{\oplus(e-v)} \to M/yM \to k^{\oplus v} \to 0$。由长度的可加性可得，$\text{length}_R(M/yM) = (e-v)+v = e$。因此，假设$e = \mu_R(\mathfrak{m}M)$ 蕴含：

$$\text{length}_R(M/yM) = e = \mu_R(\mathfrak{m}M) = \text{length}_R(\mathfrak{m}M/\mathfrak{m}^2M). \tag{A.1.4}$$

注意，我们有：

$$\text{length}_R(M/y\mathfrak{m}M) = \text{length}_R(yM/y\mathfrak{m}M) + \text{length}_R(M/yM). \tag{A.1.5}$$

现在我们使用 (A.1.3) 和 (A.1.4)，并由 (A.1.5) 推得

$$\text{length}_R(M/y\mathfrak{m}M) = \text{length}_R(M/\mathfrak{m}M) + \text{length}_R(\mathfrak{m}M/\mathfrak{m}^2M) = \text{length}_R(M/\mathfrak{m}^2M). \tag{A.1.6}$$

再次利用长度的可加性，我们还有以下等式：

$$\text{length}_R(M/y\mathfrak{m}M) = \text{length}_R(M/\mathfrak{m}^2M) + \text{length}_R(\mathfrak{m}^2M/y\mathfrak{m}M).$$

因此，我们使用 (A.1.6) 并推得 $\text{length}_R(\mathfrak{m}^2M/y\mathfrak{m}M) = 0$，也就是说，$\mathfrak{m}^2M = y\mathfrak{m}M$。因此，$M$ 具有极小重数；参见 2.4。□

关于涉及极小重数模的任意维数环上的 Ext 和 Tor 函子的消失，文献 [7] 对此进行了详细研究。例如，设 M 是一个具有极小重数的非零无挠 R-模，满足 $\mathrm{e}_R(\mathrm{M}) > 2\mu_R(\mathrm{M})$，或等价地满足 $\mu_R(\mathfrak{m}\mathrm{M}) = \mathrm{e}_R(\mathrm{M}) > 2\mu_R(\mathrm{M})$，且 N 是一个 R-模，那么 $\mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{N}, \mathrm{M}) = 0$ 对所有 $\mathrm{i} \gg 0$ 均成立，当且仅当 $\mathrm{pd}_R(\mathrm{N}) < \infty$；见 [7, 定理 B(1)(iii)]。在 A.1(1) 中构造的短正合列可用于获得类似结果。尽管它在此处所讨论情形之外的多种背景下也有潜在应用，本附录聚焦于一个特定情形：我们考察 $\mu_R(\mathfrak{m}\mathrm{M}) = \mathrm{e}_R(\mathrm{M}) > 2\mu_R(\mathrm{M})$ 时 $\mathrm{Tor}^R_i(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 的消失，并给出 A.1(1) 的一个简要应用，其灵感来自 [7]。

下文中，$\beta^R_n(N)$ 表示给定R-模N的第 n 个贝蒂数。

A.2. 设M 是一个非零无挠R-模。假设M 具有极小重数，且 $\mathrm{e}_R(M) > 2\mu_R(M)$。若存在一个$R$-模 N，使得对所有$i \gg 0$，$\mathrm{Tor}^R_i(M,N) = 0$，则要么 $\mathrm{pd}_R(N) < \infty$，要么对所有$i \gg 0$，$\beta^R_{i+1}(N) > \beta^R_i(N)$。

证明。假设存在一个R-模N，使得对所有$i \gg 0$，$\mathrm{Tor}^R_i(M,N) = 0$。令 (x) 为 $\mathfrak{m}$的极小约化。于是x 是R上的非零因子，因此，由于M 是非零无挠R-模，M 上的x 也是非零因子。因此，存在如下R-模正合列

$$0 \to M \xrightarrow{x} M \to M/xM \to 0,$$

由此可得，对所有$i \gg 0$，$\mathrm{Tor}^R_i(M/xM,N) = 0$。令$e = \mathrm{e}_R(M)$，$v = \mu_R(M)$，并考虑由 A.1(1) 得到的下列正合列：

$$0 \to k^{\oplus(e-v)} \to M/xM \to k^{\oplus v} \to 0. \tag{A.2.1}$$

假设 $\mathrm{pd}_R(N) = \infty$。那么，对所有 $i \geq 0$，$\mathrm{Tor}^R_i(k,N) \neq 0$。因此，将正合列 (A.2.1) 与 N 张量化，可得以下非零 R-模的同构：

$$\mathrm{Tor}^R_i(k,N)^{\oplus(e-v)} \cong \mathrm{Tor}^R_{i+1}(k,N)^{\oplus v} \text{ for all } i \gg 0. \tag{A.2.2}$$

这些同构 (A.2.2) 给出了等式 $(e-v)\cdot\beta_i^R(N) = v\cdot\beta_{Ri+1}(N)$，对所有 $i \gg 0$ 均成立。由于$e > 2v$，可得

$$\frac{\beta_{i+1}^R(N)}{\beta_i^R(N)} = \frac{e-v}{v} > \frac{2v-v}{v} = 1.$$

这表明，对于所有 $i \gg 0$，$\beta_{Ri+1}(N) > \beta_i^R(N)$，如所声称。 □

本节最后指出，在 A.2 中，假设 $\mathrm{e}_R(M) > 2\mu_R(M)$ 是必要的；另见 [7,Thm. A(1)(i,ii)]。

例 A.3. 设 $R = k[\![x, y, z]\!]/(xz - y^2, xy - z^2)$。那么 R 是一个余维为二的一维完全交。令 $T = R/(x, y)$，$M = \Omega_R T = (x, y) \subseteq R$，并令 $N = R/(x, z)$。那么 $\mathfrak{m}M = (x^2, z^2, xz, zy)$，因此 $\mu_R(\mathfrak{m}M) = 4$。此外，(x) 是 $\mathfrak{m}$ 的一个极小约化，因为$\mathfrak{m}^3 = (x)\mathfrak{m}^2$。所以，$\mathrm{e}(R) =$长度$_R(R/xR) = 4$。因此，$4 = 2\mu_R(M) = \mathrm{e}_R(R) = \mathrm{e}(M) = \mu_R(\mathfrak{m}M)$。这表明 M 具有极小重数；参见 2.6。此外可得，对所有 $i \geq 1$，$\mathrm{Tor}_i^R(M, N) = 0$，其中 $\mathrm{pd}_R(N) = \infty$ 且 $\beta_i^R(N) = 2$ 对所有 $i \geq 1$ 均成立；参见 [17, 1.3] 和 [18, 4.2]。

致谢

本研究的部分工作是在 Kumashiro 于 2023年8月 访问西弗吉尼亚大学期间完成的。

本研究的部分工作还于 2025年1月至6月 期间，在 O. Celikbas 和 E. Celikbas 访问位于德国波恩的马克斯·普朗克数学研究所时完成。O. Celikbas 衷心感谢该研究所的热情接待与经费支持，E. Celikbas 也感谢该研究所的热情接待。

NAOKI ENDO 获得了日本学术振兴会科学研究费助成事业（C类）23K03058 的资助。SHINYA KUMASHIRO 获得了日本学术振兴会青年研究者研究资助 24K16909 的资助。

参考文献

[1] Shreeram Shankar Abhyankar，高嵌入维数局部环，《美国数学杂志》**89** (1967), 1073– 1077. 1, 3[2] **82** 1963 8 28 9 Hyman Bass，*Gorenstein*环的普遍存在，《数学杂志》( ), – . Joseph P. Brennan、JürgenHerzog 和 Bernd Ulrich，极大生成的 *Cohen-Macaulay*模，《斯堪的纳维亚数学杂志》**61** (1987), no. 2, 181–203. 3, 5, 8[4] Winfried Bruns 和 Jürgen Herzog，*Cohen-Macaulay*环，剑桥高等数学研究丛书，第 39, 1993 3, 9 卷，剑桥大学出版社，剑桥，. Ela Celikbas、[5] Olgur Celikbas、Shiro Goto 和 Naoki Taniguchi，广义*Gorenstein-Arf*环，《阿克塔数学》**57** (2019), no. 1, 35–53. 14[6] Hailong Dao、Sarasij Maitra 和 Prashanth Sridhar，曲线奇点上自反模与*I-Ulrich*模，《美国数学会汇刊B辑》**10** (2023), 355–380. 5[7] Souvik Dey、Dipankar Ghosh 和 Aniruddha Saha，*Cohen-Macaulay*模（对）的复杂度与曲率及其应用，预印本 2024；发布于 arXiv:2411.17622v1. 1, 3, 4, 16, 17[8] Souvik Dey、Dipankar Ghosh 和 Aniruddha Saha，某些*Cohen-Macaulay*模的检验性质及通过（上）同调有限次消失判定局部环的准则，预印本 2024；发布于 arXiv:2412.01636v1. 1, 2, 3, 5[9] Souvik Dey 和 Toshinori Kobayashi，*Burch*子模及相关子模的（上）同调消失，《伊利诺伊数学杂志》**67**(2023), no. 1, 101–151. 10[10] **41** 1976 2, 439 454 4 [11] Paul Eakin 和 Avinash Sathaye，预稳定理想，《代数杂志》( ), no. – . Naoki Endo 和 Shiro Goto，自反迹理想的自同态代数上的自反模，《纯粹与应用代数杂志》**228** (2024), no. 8, Art. 107662, 20 pp. 11

[12] Eleonore Faber，迹理想、正规化链与自同态环，《纯粹与应用数学季刊》**16**(2020), no. 4, 1001–1025. 13[13] Shiro Goto、Ryotaro Isobe 和 Shinya Kumashiro，迹理想与双有理扩张之间的对应及其在分析环的*Gorenstein*性质中的应用，《纯粹与应用代数杂志》**224** (2020), no. 2, 747–767. 11[14] Phuong，几乎 *Gorenstein* 环，《代数杂志》**379** (2013), 355–381. 11, 13 (英文). Craig Huneke、Srikanth B. Iyengar 和 Roger Wiegand，一维*Gorenstein*环中的刚性理想，《越南数学学报》**44** (2019), 31–49. 9[15][16] Craig Huneke 和 Irena Swanson，理想、环与模的整闭包，伦敦数学学会讲义丛书，第 336 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2006. 2, 3, 6, 9, 11[17]. David A. Jorgensen，完全交上的*Tor*与挠，《代数杂志》**195** (1997), no. 2, 526–537. 17[18]，完全交上的复杂度与 *Tor*，《代数杂志》**211** (1999), no. 2, 578–598. 17[19]

Toshinori Kobayashi 和 Ryo Takahashi，理想同构于迹理想的环，《数学新闻》**292** (2019), no. 10, 2252–2261. 11[20] Joseph Lipman，稳定理想与*Arf*环，《美国数学杂志》**93** (1971), no. 3, 649–685. 3, 4, 11[21] Thomas Marley，理想的约化数与关联分次环的局部上同调，Proc. Amer. Math. Soc.**117**(1993), no. 2, 335–341. 4[22] Masayoshi Nagata，局部环，经修订重印，Robert E. Krieger出版公司，纽约州亨廷顿，1975. 8[23] Tony J. Puthenpurakal，*Cohen-Macaulay*模的希尔伯特系数，《代数杂志》**264**(2003), no. 1, 82–97. 1, 2, 3[24] Maria Evelina Rossi 和 Giuseppe Valla，滤过模的希尔伯特函数，意大利数学联盟讲义，第9卷，施普林格出版社，柏林；UMI，博洛尼亚，2010. 4

ELA CELIKBAS，西弗吉尼亚大学数学与数据科学学院，摩根敦，WV 26506-6310，美国电子邮箱：ela.celikbas@math.wvu.edu OLGUR CELIKBAS，西弗吉尼亚大学数学与数据科学学院，摩根敦，WV 26506-6310，美国电子邮箱：olgur.celikbas@math.wvu.edu NAOKI ENDO，明治大学政治经济学院，日本东京杉并区永福1-9-1，168-8555电子邮箱：endo@meiji.ac.jp SHINYA KUMASHIRO，大阪工业大学工学部，日本大阪市旭区大宫5-16-1，535-8585电子邮箱：shinya.kumashiro@oit.ac.jp