arXiv:2602.08264v1 [math.RT] 9 Feb 2026

单位根处 Gaiotto 范畴中的不可约对象

ALEKSANDR POPKOVICH

Abstract. R. Travkin 和 R. Yang 的一个定理最初由 D. Gaiotto 提出猜想。该定理指出，对于一般情形（非单位根），q 仿射格拉斯曼流形上 q-扭曲 D-模的范畴 Gr_{GL_N} 中，那些关于某个子群（由 $0 \leq M<N$的选取 GL_N所定义）的等变对象，与量子超群 $U_q(\mathfrak{gl}(M|N))$ 的表示范畴等价。我们希望探究当 q 为单位根时，这种等价是否仍然成立。首先，我们考察不可约对象的集合之间是否存在自然双射。本文提出一项观察，表明情况应当如此：我们证明，Gaiotto 范畴中的不可约对象与正特征下超群 $GL(M|N)$ 的表示范畴中的不可约对象之间存在自然双射。证明基于 J. Brundan 和 J. Kujawa 在 arXiv:math/0210108 中阐述的 Serganova 算法版本。

1. Introduction

设 $\mathcal{K} := \mathbb{C}((t))$ 为变量 t 的洛朗级数域，$\mathcal{O} = \mathbb{C}[[t]] \subset \mathcal{K}$ 为其整数环，$\mathrm{Gr}_N = GL_N(\mathcal{K})/GL_N(\mathcal{O})$ 为 GL_N 的仿射格拉斯曼流形。

固定非负整数 $M<N$。可以定义某个幺幂子群 $U^-_{M,\,N}(\mathcal{K}) \subset GL_N(\mathcal{K})$ 及其特征 χ：$U^-_{M,\,N}(\mathcal{K}) \to \mathbb{C}^\times$ 由 $GL_M(\mathcal{K}) \subset GL_N(\mathcal{K})$ 正规化（见 [TY2] 的定义及相关讨论）。

Travkin 和 Yang（[TY2]）证明了如下结果：

定理 1. 若 q 不是单位根，则存在 t-正合幺半群等价

$$\mathrm{SD}_q^{\mathrm{GL}_M(\mathcal{O})\ltimes U^-_{M,N}(\mathcal{K}),\chi}(\mathrm{Gr}_N) \simeq \mathrm{Rep}^q(\mathrm{GL}(M|N))), \tag{1.1}$$

其中 SD_q 表示系数取自超向量空间 SVect 的 q-扭 D-模的导出范畴，$\mathrm{Rep}^q(\mathrm{GL}(M|N))$ 是量子超群 $U_q(\mathfrak{gl}(m|n))$ 的有限维表示范畴。

我们旨在考察当 q 是单位根时，这个等价是否有望成立。我们首先要问的是，在这种情况下，所涉及范畴的不可约对象集合之间是否存在自然双射。

I在本文中，我们作出一个观察，表明情况应该如此 .

1.1 左端的不可约对象由 $\mathrm{GL}_M(\mathcal{O})\ltimes U^-_{M,\,N}(\mathcal{K})$ 在 Gr_N 上的轨道的一个子集（并由其延拓）参数化——这些轨道称为相关轨道。该群在 Gr_N 上的所有轨道（无论相关与否）均由 $GL(M|N)$ 的支配权重参数化，

即由 $GL(M|N)$ 的不可约模相对于标准博雷尔子群的最高权。现在，与通常理论不同，在超群的情形下，并非所有的 Borel 子群都彼此共轭——特别地，存在所谓的“混合”博雷尔子群，它在某种意义上离标准博雷尔子群最远。对于通有的 q，在 [TY2] 中观察到，相关轨道由 $U_q(\mathfrak{gl}(m|n))$ 相对于混合 Borel 子代数的不可约表示的最高权参数化——这两个集合作为超群整权格的子集是相同的。我们希望看到，对于一般的 q。

不过，我们无法直接验证这一点：困难之一在于，虽然从任意 Borel 子代数出发都可以构造一个“量子超群 $U_q(\mathfrak{gl}(m|n))$”，但我们甚至不知道由不同 Borel 子代数定义的量子超群是否相同。

为了解决这一问题，我们借助一个广为人知的原理：素数阶单位根处量子群的表示范畴 p 应当与正特征 p的域$\Bbbk$ 上的（非量子）群的表示范畴密切相关。在我们的情形中，我们考虑特征 p 下超群$GL(m|n)$的表示范畴，并将此范畴记为 $\mathrm{Rep}^p(\mathrm{GL}(M|N))$。

与 [TY2] 相比，我们需要做的一项调整是改用 $GL_N(\mathcal{K})$ 的一个略有不同的幺幂子群：幺幂子群 $U^-_{M,N}(\mathcal{K})$ 并非唯一可能的选择，而且事实上不同于 Travkin 和 Yang 在 [TY1], 中处理非扭曲情形时所采用的选择；他们使用的子群记作 $U_{M,N}(\mathcal{K})$，它由 $U^-_{M,N}(\mathcal{K})$ 中各矩阵的转置构成。不过，两种选择都会导出等价范畴（见 [TY1] 的第 5 节），而选择不同子群对组合学的影响，则是描述相关权重与轨道的不等式中的符号反转。采用群 $U_{M,N}(\mathcal{K})$ 可以使我们的结果稍微简洁一些。

我们在本文中证明的结果如下。

定理 2。令 $q^p = 1$ 为素数 p。那么，支持 $\mathrm{SD}^{\mathrm{GL}_M(\mathcal{O})\ltimes U_{M,N}(\mathcal{K})}(\mathrm{Gr}_N)$ 的不可约对象的轨道集合，作为超群$GL(m|n)$ 的整权格的子集，等于关于“混合”Borel 子代数的 $\mathrm{Rep}^p(\mathrm{GL}(M|N))$ 中不可约对象的最高权集合。

证明基于 Brundan 和 Kujawa 的工作 [BK]，他们提出了 Serganova 算法的一个版本，可以确定关于不同 Borel 子代数的 $\mathrm{Rep}^p(\mathrm{GL}(M|N))$ 中对象的最高权。

致谢。我们感谢 Alexander Braverman 提出了引出本注记的问题并进行了许多有益的讨论，也感谢 Pavel Etingof 向我们指出 [BK]这项工作。

2. Irreducible objects in the $\mathrm{Rep}^p(\mathrm{GL}(M|N))$

在本节中，我们研究范畴 $\mathrm{Rep}^p(\mathrm{GL}(M|N))$ 的不可约对象的集合，它刻画了1.1 右侧对应于 $q^p = 1$ 的范畴。

2.1. Borel 子群与最高权。 给定一个博雷尔子群 $B \subset G = GL(M|N)$，我们可以定义支配权的概念，以及表示 G的最高权，这与约化群表示的经典理论中的做法相同。与经典理论类似，最终可知 G的有限维不可约表示与支配整权集合一一对应。

然而，在超群的情形下，所得图景取决于博雷尔子群 $B \subset G$ 的选择——这是因为超群 G 的博雷尔子群并非彼此都共轭。

更准确地说，取 $\mathbb{C}^{(M,N)}$的一组齐次基 v_1、……、 v_M、 v_{M+1}， $...v_{M+N}$，其中 v_i 对于 $1 \leq i \leq M$ 为偶，对于 $M+1 \leq i \leq M+N$ 为奇。此选择确定了 $GL(M|N)$ 中的一个 Cartan 子群，以及 $\mathfrak{gl}(M|N)$中的一个 Cartan 子代数。从现在起，我们固定这一选择。

对于任意置换 $\omega \in S_{m+n}$，记 Fl_ω 为旗标

$$Fl_\omega := span_{\mathbb{C}}\langle v_{\omega(1)}\rangle \subset span_{\mathbb{C}}\langle v_{\omega(1)}, v_{\omega(2)}\rangle \subset ... \subset span_{\mathbb{C}}\langle v_{\omega(1)}, ..., v_{\omega(M+N)}\rangle. \tag{2.1}$$

那么，任意博雷尔子群 $B \subset G$ 都是某个 $\omega \in S_{M+N}$ 的稳定子 FL_ω；当且仅当对所有 $i \in \{1, ..., M+N\}$， $v_{\omega_1\,(i)}$ 和 $v_{\omega_2\,(i)}$ 的奇偶性相同，两个这样的博雷尔子群 B_{ω_1} 和 B_{ω_2} 才彼此共轭。

下文我们将关注 G 的两个特定博雷尔子群：记 B_s :=$Stab(Fl_{id})$（“s”代表“标准”）为标准旗标的稳定子

$$Fl_{id} := span_{\mathbb{C}}\langle v_1\rangle \subset span_{\mathbb{C}}\langle v_1, v_2\rangle \subset ... \subset span_{\mathbb{C}}\langle v_1, ..., v_{M+N}\rangle \tag{2.2}$$

并记 B_m （“m”代表“混合”）为具有可能最多的奇向量与偶向量之间“切换”的旗标的稳定子：

$$Fl_m : = span_{\mathbb{C}}\langle v_{M+1}\rangle \subset span_{\mathbb{C}}\langle v_{M+1}, v_1\rangle \subset span_{\mathbb{C}}\langle v_{M+1}, v_1, v_{M+2}\rangle \subset$$
$$\subset span_{\mathbb{C}}\langle v_{M+1}, v_1, v_{M+2}, v_2\rangle \subset ... \subset span_{\mathbb{C}}\langle v_{M+1}, v_1, v_{M+2}, v_2, ..., v_{M+N}\rangle.$$

将 $GL(M|N)$ 的 Cartan 子代数的权格视为由对角权 ε_1，……， ε_M， ε_{M+1}，……， ε_{M+N}生成的 $\mathbb{Z}^M \times \mathbb{Z}^N$，其中 ε_i在 $i = 1$，……， M时为偶数，否则为奇数。

则关于标准博雷尔子群 B_s 的有限维表示的最高权可识别为元组 $(\lambda,\ \theta) \in \mathbb{Z}^M \times \mathbb{Z}^N$，其中 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_M$ 且 $\theta_1 \geq \theta_2 ... \geq \theta_{M+1}$。

我们还需要以下对博雷尔子群正根的描述：在上述将权格与 $\mathbb{Z}^M \times \mathbb{Z}^N$ 进行的识别下，正根

属于某个 Borel 子群 B_ω，其正根为

$$\Phi_\omega^+ = \{\varepsilon_{\omega(i)} - \varepsilon_{\omega(j)} | 1 \le i < j \le M+N\}. \tag{2.3}$$

关于上述内容的更多细节，请参见 [TY2], [S]。

现在我们旨在描述相对于混合博雷尔群 B_m 的有限维表示的最高权。稍后我们将看到，这个集合也为 Gaiotto 范畴 $\mathrm{SD}_{\mathrm{GL}_M(\mathcal{O}) \times U_{M,q}^-}$ $_N$ $\chi(\mathcal{K})$ (Gr_N) 中的不可约对象提供参数化。

为了描述 B_m 的最高权，我们将使用 [BK] 中提出的 Serganova 算法的一种变体。该算法将在下面一个（相当技术性的）小节中介绍，它使我们能够了解从一个博雷尔子群转到另一个时最高权集合如何变化，从而使我们能够从上述标准博雷尔子群的最高权描述推导出混合博雷尔子群的最高权描述。

2.2. **Serganova 算法**。 现在我们的目标是描述相对于“混合”博雷尔子群的范畴 Rep_p（GL（$M|N$））中不可约表示的最高权集合。为此，我们采用 [BK] 中提出的 Serganova 算法的一个变体（参见该文献中的定理4.3）。该算法使我们能够从标准博雷尔子群的最高权集合出发，描述“混合”博雷尔子群的最高权集合。

在讨论算法时，我们假设 $N = M+1$ ——这会略微简化记号，但不会导致一般性损失：如果 $N > M+1$ 那么 θ_{M+2}，……，θ_N 都是不受算法影响的“虚”项。此外，下面我们完全用整数元组上的运算来表述算法，并且只讨论从标准博雷尔子群过渡到“混合”博雷尔子群的情形——关于更一般的讨论，请参阅 [BK]。

现在考虑

$$A := \{(\lambda, \theta) \in \mathbb{Z}^M \times \mathbb{Z}^{M+1} \text{ such that } \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge ... \ge \lambda_M \text{ and } \theta_1 \ge \theta_2 ... \ge \theta_{M+1}\} \tag{2.4}$$

这是 GL（$M|N$）的支配整权集合，即相对于标准博雷尔子群的最高权（参见 [BK]的第4节）。

存在一个映射 S： $A \to \mathbb{Z}^M \times \mathbb{Z}^{M+1}$，其定义为对 A 中的元素应用以下算法。

该算法（但不是其结果）取决于在集合$\{\alpha_i\}$ 上的一个线性序$= \Phi_{st}^+ \backslash \Phi_m^+$ 的选择；该线性序细化了由 $\alpha \preccurlyeq_{st} \beta \iff (\alpha - \beta \in \Phi_{st}^+)$给出的“标准”偏序。

我们将使用两种线性序。在识别 $\Phi_{st}^+ \backslash \Phi_m^+ = \{(i,j) | 1 \le i \le M, 1 \le j < M+1, j \le i\}$ 下，“标准”偏序定义为

$$(i_1, j_1) \preccurlyeq (i_2, j_2) \iff i_1 \ge i_2 \text{ and } j_1 \le j_2 \tag{2.5}$$

并且它有两种自然的线性细化：

(i) $(M,1) <_1 (M-1,1) <_1 (M-2,1) <_1 ... <_1 (1,1) <_1 (M,2) <_1 ... <_1 (M,M)$

(ii) $(M,1) <_2 (M,2) <_2 ... <_2 (M,M) <_2 (M-1,1) <_2 ... <_2 (1,1)$

定义 2.1. （ $p > 0$ 的 *Serganova* 算法）。

上文描述的两种线性序会产生两种略有不同的算法版本

（*i*）版本 *1*：我们按照上文描述的线性序遍历集合 $\Phi_{st}^{+}\backslash\Phi_{m}^{+}$，或（*ii*）版本 *2*：我们使用线性序 $<_2$。

（结果与所使用的版本无关）。

在两个版本中，在算法的第 k 步，都会执行以下两种操作之一：如果 （i_k、 j_k） 是按照所选排序的 k 个元素 $\Phi_{st}^{+}\backslash\Phi_{m}^{+}$，那么

（*i*）（操作 *1*）如果 $\lambda_{i_k}^{(k)}+\theta_{j_k}^{(k)} \equiv 0\ mod\ p$，那么我们什么也不做： $\lambda^{(k+1)}=\lambda^{(k)}$ 和 $\theta^{(k+1)}=\theta^{(k)}$ （ *ii* ）（操作 *2* ）否则， $\lambda_{i_k}^{(k+1)}=\lambda_{i_k}^{(k)}-1$、 $\theta_{j_k}^{(k+1)}=\theta_{j_k}^{(k)}+1$，并且对于所有 $i \neq i_k$ 和 $j \neq j_k$，都有 $\lambda_{i}^{(k+1)}=\lambda_{i_k}^{(k)}$ 和 $\theta_{j}^{(k+1)}=\theta_{j}^{(k)}$ 。

.

We a能够描述集合 A 在 Serganova 算法下的像 .

引理 3。 记由满足以下条件的有序对 $(\lambda,\ \theta)$ 组成的子集为 $M \subset A$：

(i) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_M$ 和 $\theta_1 \geq \theta_2 ... \geq \theta_{M+1}$;
(ii) 若 $\lambda_{i-1}=\lambda_i$，则 $\lambda_i+\theta_i=0$ 模 p，以及
(iii) 若 $\theta_i=\theta_{i+1}$，则 $\lambda_i+\theta_i=0$ 模 p。

那么我们有集合相等式 $S(A) = M \subset \mathbb{Z}^M \times \mathbb{Z}^{M+1}$。

证明。 首先，我们证明 $S(A) \subset M$。我们将使用这样一个事实： $\Phi_{st}^{+}\backslash\Phi_{m}^{+}$ 的线性序可以任意选取，只要它与该集合上的偏序相容，就不会影响算法的结果。

• 为了证明像 S 中的任意元素 $(\lambda,\ \theta) = S((\lambda,\ \theta))$ 对所有 i 都具有 $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$，且满足引理的条件 (i)，我们使用版本 1 的算法。

首先我们证明，对所有 i都有 $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$，也就是说 λ 是一个整数的非递增序列。事实上，一个更强的命题成立（而且我们很快就会用到它）：非递增这一性质在算法的每一步都被保持。的确，为了导出矛盾，假设在算法的第 k步这一性质第一次被破坏，也就是说 $\lambda^{(k)}$ 是非递增的，但 $\lambda^{(k+1)}$ 不是。由于在这一步只有 λ 的第 i_k项可能受到影响，它必定已被改变（减小），并且我们必定有 $\lambda_{i_k}^{(k+1)}<\lambda_{i_k+1}^{(k+1)}$ 。由于每次执行操作 2 时该项只减小 1，并且在上一次迭代中 $\lambda^{(k)}$ 是非递增的，我们必定曾经有 $\lambda_{i_k}^{(k)}<\lambda_{i_k+1}^{(k)}$，并且在先前满足 $i_{k-1}=i_k+1$的第（$k-1$）步（因为我们使用的是 dirst 排序）必定执行了操作 1。但那样的话，在第 k步也应该执行了操作 1。矛盾。

现在证明，对于 $(\lambda,\ \theta)$，条件 (i) 总是成立。假设对于某个 i，我们有 $\tilde{\lambda}_{i-1}=\tilde{\lambda}_i$。设 k 是 $i_k=i$ 所在的最后一步，因此 $\lambda_i^{(k+1)}=\tilde{\lambda}_i$。由于

这是 $i_k = i$ 所在的最后一步，并且我们使用排序 $<_1$，因此以下结论必然成立：我们必须有 $j_k = i_k$，且所有剩余的第“m”步都满足$i_m > i_k$ 和 $j_m > j_k$。由此可得 $\lambda^{(k+1)}_{i_k-1} = \tilde{\lambda}_{i_k-1}$、$\lambda^{(k+1)}_{i_k} = \tilde{\lambda}_{i_k}$ 和 $\theta^{(k+1)}_{i_k} = \tilde{\theta}_{i_k}$。因此，根据我们的假设，必有 $\lambda^{(k+1)}_{i-1} = \lambda^{(k+1)}_{i}$。再结合（上文已证明）$\lambda^{(k)}$ 是非递增的这一事实，可知在第 k 步执行了操作 1，因此 $\lambda^{(k+1)}_{i_k} = \theta^{(k+1)}_{i_k}$，进而 $\tilde{\lambda}^{(k+1)}_{i_k} = \tilde{\theta}^{(k+1)}_{i_k}$。

•用算法版本 2 进行类似推理可知，像中的任意元素 $\tilde{\ }\ \tilde{\ }\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\tilde{\ }\qquad\tilde{\ }(\lambda,\theta) = S((\lambda,\theta))$ 都满足 S，对所有 $\theta_i \geq \theta_{i+1}$ 均成立，并且引理的条件 (ii) 得到满足。

• 最后，我们来证明任意一对 $(\lambda,\theta) \in M$ 都可以表示为某个 $(\lambda,\theta) \in A$对应的 $S((\lambda,\theta))$。事实证明，可以给出一个逆映射 $S^{-1}\colon M \to A$。

为此，注意无论算法在步骤 k采用两种操作中的哪一种，我们都有 $\lambda^{(k)}_{i_k} + \theta^{(k)}_{j_k} \equiv \lambda^{(k+1)}_{i_k} + \theta^{(k+1)}_{j_k} \bmod p$；因此在每个时刻，我们都会“记住”上一步采取了哪种操作。因此，我们可以通过按与 $<_1$ 或 $<_2$ 相反的顺序遍历集合 $\Phi^+_{st}\backslash\Phi^+_m$，并执行此前所做变换的逆变换，来“反转”该算法。

这定义了一个映射 $S^{-1}\colon\ M \to \mathbb{Z}^M \times \mathbb{Z}^{M+1}$；我们需要证明 $S^{-1}(M) \subset A$，即对任意元素 $(\tilde{\lambda},\tilde{\theta}) \in M$ 以及 $(\lambda,\theta)\colon = S^{-1}((\tilde{\lambda},\tilde{\theta}))$，$\lambda$ 与 θ 均为非递减。

让我们证明 λ 是非递减的。为此，我们将使用谢尔加诺娃算法的版本 1 的逆，以及引理的条件 (i)。由于 λ 已经是非递减的，我们只需证明该性质在该过程的每一步都得以保持。

设逆算法的第 k 步是非递增这一性质首次被破坏的一步。将该步的输入记为 $(\lambda^{(in)},\theta^{(in)})$，输出记为 $(\lambda^{(out)},\theta^{(out)})$。该性质被破坏意味着存在下标 i与 j（本步所考虑的那些项的下标），使得 $\lambda^{(in)}_{i-1} = \lambda^{(in)}_i$，但$\lambda^{(out)}_i = \lambda^{(out)}_{i-1} + 1$ 且 $\theta^{(out)}_j = \theta^{(in)}_j - 1$，也就是说，在这一步执行了操作 2 的逆，使 λ 的第 i个值增大，并使 θ的第 j 个值减小。现在考虑两种情形：要么 $i = j$，要么 $i > j$。

如果 $i > j$，那么上述情况不可能发生：要执行操作 2 的逆操作，必须有 $\lambda^{(in)} + \theta^{(in)} \neq 0 \bmod p$；但要使 $\lambda^{(in)}_{i-1} = \lambda^{(in)}_i$ 成立，上一步就必须执行操作 1——很容易看出这会导致矛盾。

如果 $i = j$，那么在这一步中同样无法执行操作 2 的逆操作：根据反向排序 $<_1$ 的运作方式，必有 $\lambda^{(in)}_{i-1} = \tilde{\lambda}_{i-1}$、$\lambda^{(in)}_i = \tilde{\lambda}_i$ 和 $\theta^{(in)}_i = \tilde{\theta}_i$；而我们知道，任何满足引理条件 (i) 的元素 $(\tilde{\lambda},\ \tilde{\theta}) \in S(A)$，都满足由 $\lambda^{(in)}_{i-1} = \lambda^{(in)}_i$ 可推出 $\lambda^{(in)} + \theta^{(in)} = 0 \bmod p$，因此并未执行操作 2 的逆操作。

证明 θ 单调不减的方法类似，使用算法版本 2 的逆操作以及引理的条件 (ii) 即可。

□

推论4。 关于“混合”博雷尔子群，范畴$Rep_p(GL(M|N))$中不可约表示的最高权集合由满足以下条件的元组 $(\lambda,\ \theta)\ \in\mathbb{Z}^M\times\mathbb{Z}^N$ 组成。

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}:\mathrm{A}:\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_M,\\ &\theta_1\geq\theta_2\geq\cdots\geq\theta_{M+1}\geq\theta_{M+2}\geq\cdots\geq\theta_N\\ &\text{and B: if } \theta_i=\theta_{i+1},\text{then } \theta_i+\lambda_i=0 \bmod p,\text{for } i=1,2,...,M;\\ &\text{if } \lambda_{i-1}=\lambda_i,\text{then } \theta_i+\lambda_i=0 \bmod p,\text{for } i=2,...,M. \end{aligned} \tag{2.6}$$

3. Relevant orbits

现在讨论 Gaiotto 范畴 $\mathrm{SD}_{\mathrm{GL}_M(\mathcal{O})\times U^-_{M,\ N}(\mathcal{K})}(\mathrm{Gr}_N)$，即所需等价 1.1 的左端中的不可约对象。出于标准理由，它们对应于 $\mathrm{GL}_M(\mathcal{O})\times U^-_{M,\ N}(\mathcal{K})$ 在 Gr_N 上的作用轨道的一个子集。这些轨道支撑满足必要等变条件的（扭曲） D-模；我们称这样的轨道为相关轨道。

3.1. Travkin 和 Yang 的结果。

关于相关轨道的详细研究，针对q 不是单位根的情形，可见 [TY2], ；类似的分析还见于[BFT1], [BFT2] 和 [TY1]。

在本小节中，我们陈述 [TY2] 中的分类，并进行一项修改（以考虑条件 $q^p=1$），同时说明这一修改的由来。

首先可以看出，所有 $GL_M(\mathbb{O})\ltimes U^-_{M,\ N}(\mathcal{K})$-轨道都由某些权枚举:

引理5。 （ [TY2] 中的引理 3.3.3）任意 Gr_N 中的 $GL_M(\mathbb{O})\ltimes U^-_{M,\ N}(\mathcal{K})$-轨道都有唯一一个形如 $\mathbb{L}_{(\lambda,(\theta,\theta'))}$ 的代表元，使得 $(\lambda,\ \theta)$ 是长度为 $(M,\ M+1)$ 的支配权，且 θ' 是一个长度为 $N-M-1$ 的序列。这里，

$$\mathbb{L}_{(\lambda,(\theta,\theta'))}=\begin{pmatrix} t^{-\lambda_1-\theta_1} & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & t^{-\lambda_M-\theta_M} & & & & & \\ t^{-\theta_1} & \dots & t^{-\theta_M} & t^{-\theta_{M+1}} & & & & \\ & & & & t^{-\theta'_1} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & t^{-\theta'_{N-M-1}} & \end{pmatrix}\in GL_N(\mathcal{K}). \tag{3.1}$$

然后可以确定其中哪些是相关的（从而也能对 Gaiotto 范畴中的不可约对象进行分类）。

命题 6。 （[TY2]中的命题 3.3.4） $GL_M(\mathbb{O}) \ltimes U^-_{M,\ N}(\mathcal{K})$-轨道 $\mathbb{L}_{(\lambda,(\theta,\theta')}$ 相关，当且仅当 $(\lambda, (\theta,\ \theta')) \in M$，也就是说，当且仅当

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}: \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_M, \\ &\theta_1 \le \theta_2 \le \cdots \le \theta_{M+1} \le \theta'_1 \le \cdots \le \theta'_{N-M-1}, \\ &\text{and B: if } \theta_i = \theta_{i+1}, \text{then } \theta_i + \lambda_i = 0, \text{for } i = 1, 2, ..., M; \\ &\text{if } \lambda_{i-1} = \lambda_i, \text{then } \theta_i + \lambda_i = 0, \text{for } i = 2, ..., M. \end{aligned} \tag{3.2}$$

对于 $q^p = 1$ 的情形，我们断言如下。

命题 7. 设 $q^p = 1$。那么，$\mathbb{L}_{(\lambda,(\theta,\theta'))}$ 的 $GL_M(\mathbb{O}) \ltimes U^-_{M,N}(\mathcal{K})$-轨道相关，当且仅当 $(\lambda, (\theta, \theta')) \in M$，也就是说，当且仅当

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}: \mathrm{A}: \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_M, \\ &\theta_1 \le \theta_2 \le \cdots \le \theta_{M+1} \le \theta'_1 \le \cdots \le \theta'_{N-M-1} \\ &\text{and B: if } \theta_i = \theta_{i+1}, \text{then } \theta_i + \lambda_i = 0 \bmod p, \text{for } i = 1, 2, ..., M; \\ &\text{if } \lambda_{i-1} = \lambda_i, \text{then } \theta_i + \lambda_i = 0 \bmod p, \text{for } i = 2, ..., M. \end{aligned} \tag{3.3}$$

证明. 证明与 [TY2] 中命题 3.3.4 的证明相同，只需作一处细微修改。

正如 loc. cit. 中那样，我们需要验证上述条件等价于条件 $Stab_{GL_M(\mathbb{O})\ltimes U^-_{M,N}(\mathcal{K})}(\mathbb{L}_{(\lambda,(\theta,\theta'))}) \subset Ker\ \chi$，并且该稳定子作用平凡

。于 $\mathbb{L}_{(\lambda,(\theta,\theta'))} \in Gr_N$ 上的 $\mathcal{P}_{\det N}$ 纤维。证明 $Stab_{GL_M(\mathbb{O})\ltimes U^-_{M,N}(\mathcal{K})}(\mathbb{L}_{(\lambda,(\theta,\theta'))}) \subset Ker\ \chi$ 当且仅当 $\theta_{M+1} \le \theta'_1 \le \cdots \le \theta'_{N-M-1}$ 的论证与 loc cit. 中相同。

应对证明作一处小修改：稳定子群 $Stab_{GL_M(\mathcal{O})}(\mathbb{L}_{(\lambda,\theta)})$ 在 $\mathbb{L}_{(\lambda,\theta)}$ 上方的纤维上作用平凡，当且仅当 (λ, θ) 满足条件 B（因为所引文献中的条件 B 没有涉及模 p 的比较）。具体来说，[TY2] 在证明中引用了 [BFT1], 的命题 4.1.1，而该命题又基于 [BFT2], 的引理 2.3.3 中对稳定子的计算。在这一计算中，会遇到某个 GL_n（$Stab_{GL_M(\mathcal{O})}(\mathbb{L}_{(\lambda,\theta)})$ 的一个因子）在 $\mathbb{L}_{(\lambda,\theta)}$ 上方的纤维上的作用，其作用方式为 det^a，其中 $a = \theta_i + \lambda_i$，且 i 满足 $\theta_i = \theta_{i+1}$ 或 $\lambda_{i-1} = \lambda_i$。

当 q 不是单位根时，使这一作用平凡化的条件是 $a = 0$，因此 TY2] 的命题 4.1.1 中条件 B 采用了这种形式。在我们的情形中，当 $q^p = 1$ 时，只要 $a = 0$ 模 p，这一作用就会平凡化，这正是上文修改条件 B 的原因。□

3.2. 切换群。 现在该作一个重要的评注了。

注记 8。 我们想在此指出，在 [TY2] 中所采用的幺幂子群 $U^-_{M,N}(\mathcal{K})$ of $GL_N(\mathcal{K})$ 并非唯一可能的选择，事实上，它不同于 [TY1], 中的选择；在后者中，作者定义并使用了群 $U_{M,N}(\mathcal{K})$，它是“转置的”

$U^-_{M,N}(\mathcal{K})$（也就是说，$U_{M,N}(\mathcal{K})$ 是上三角矩阵群的一个子群，而 $U^-_{M,N}(\mathcal{K})$ 则属于下三角矩阵群）。这两种选择实际上都会导出等变层的等价范畴——参见 TY1] 第 5 节中的讨论。不过，所有轨道以及相关轨道的描述并不会发生太大变化：从 $U^-_{M,N}(\mathcal{K})$ 切换到 $U_{M,N}(\mathcal{K})$ 时，所有不等式都应反向（这一点可参照 [TY2] 中引理 3.3.3 和命题 3.3.4 的证明，作相应修改即可证明）。

推论 9. 设 $q^p = 1$。所有 $GL_M(\mathbb{O}) \ltimes U_{M,N}(\mathcal{K})$-轨道的集合与 $GL(M|N)$ 的整数权一一对应，而相关轨道的集合由满足以下条件的元组 $(\lambda, (\theta, \theta')) \in \mathbb{Z}^M \times \mathbb{Z}^N$ 组成。

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}: \mathrm{A}: \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_M, \\ &\theta_1 \geq \theta_2 \geq \cdots \geq \theta_{M+1} \geq \theta'_1 \geq \cdots \geq \theta'_{N-M-1} \\ &\text{and B: if } \theta_i = \theta_{i+1}, \text{then } \theta_i + \lambda_i = 0 \bmod p, \text{for } i = 1, 2, ..., M; \\ &\text{if } \lambda_{i-1} = \lambda_i, \text{then } \theta_i + \lambda_i = 0 \bmod p, \text{for } i = 2, ..., M. \end{aligned} \tag{3.4}$$

现在我们可以结合推论 4和推论4 ，并表述本文的主要结论。

定理 10. 设 $q^p = 1$ ，其中 p 为素数。那么，支撑 $\mathrm{SD}^{\mathrm{GL}_M(\mathcal{O})\ltimes U_{M,N}}\chi(\mathcal{K})(\mathrm{Gr}_N)$ 不可约对象的轨道集合，等于超群 $GL(m|n)$ 的整权格中 $\mathrm{Rep}^q(\mathrm{GL}(M|N))$ 不可约对象相对于“混合” Borel 子代数的最高权集合。

References

[BK] J. Brundan, J. Kujawa - Mullineux 猜想的一个新证明, arxiv.org/abs/math/0210108[BFT1] A. Braverman, M. Finkelberg 与 R. Travkin - 关于 $Rep_q(GL(N-1,N))$ 的 Gaiotto 猜想, arxiv. org/abs/2107.02653v1 2, 4[BFT2] A. Braverman, M. Finkelberg, R. Travkin - 正交辛 Satake 等价, https://arxiv. org/abs/1912.01930 7, 8[G] D.Gaitsgory - 扭曲 Whittaker 模型与可因子化层, Selecta Math. (N.S.) 13 (2008), 第4期, 617–659; arXiv:0705.4571. 7, 8[S] V. Serganova - 李超代数表示. 李理论展望, Springer INdAM Ser., 19, Springer, Cham (2017), 125–177[TY1] Roman Travkin, Ruotao Yang - 非扭曲 Gaiotto 等价, arxiv.org/abs/2201.10462 4[TY2] Roman Travkin, Ruotao Yang - 关于 $GL(M|N)$ 的扭曲 Gaiotto 等价, arxiv.org/abs/2306. 09556 2, 7, 8, 9 1, 2, 4, 7, 8, 9

Department of Mathematics, University of Toronto
电子邮件地址：alexander.popkovich@mail.utoronto.ca