arXiv:2602.08292v1 [math.CV] 9 Feb 2026

复调和平均数

ATSUSHI NAKAYASU

Abstract. 我们研究非零复值随机变量的调和平均数（复调和平均数），并建立了若干几何估计和界。与经典的正值情形不同，复调和平均数可能位于值域的凸包之外。我们证明，若值域包含在一个不含原点的圆盘内，则复调和平均数也被限制在同一个圆盘内。这一结果基于反演下圆盘的性质以及凸性论证。我们还得到了涉及模和实部的进一步估计，并明确分析了两点情形，揭示出一种圆形结构。文中给出了若干示例，以说明复调和平均数的独特性质。

1. Introduction

在这篇短文中，我们研究复值情形下的调和平均数，并证明它满足简单的几何界。

（经典）调和平均数通常针对取正值（取值于 $(0,\infty)$ 的随机变量 X 定义，其定义为

$$\mathbf{H}[X] := \mathbf{E}[X^{-1}]^{-1}$$

如果期望 $\mathrm{E}[X^{-1}]$ 存在且为正数。复值（$\mathbb{C}\setminus\{0\}$值）随机变量 Z 的复调和平均数以类似方式定义，前提是该随机变量非零

$$\mathbf{H}[Z] := \mathbf{E}[Z^{-1}]^{-1}$$

如果期望 $\mathrm{E}[Z^{-1}]$ 存在且为非零复数。显然，如果复值随机变量 Z的值域（即其分布的支集，记作 $\mathrm{Range}[Z]$）包含于正数 $(0,\infty)$，那么复调和平均数就等同于经典调和平均数。注意， Z 的复调和平均数存在的一个充分条件是其值域满足以下条件

$$\mathrm{Range}[Z] \subset \{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z \geq a\} \cap \{z\in\mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$$

对于某些 $a>0$ 和 $R<\infty$。

调和平均数有许多应用，尤其是在均质化理论中，它作为有效系数的 Reuss界出现 [1,小节 1.1。3]。当我们考虑复方程的均质化时，自然会出现复调和平均数 [3]。事实上，复数情形下实部为正的有效系数，已在黏弹性复合材料理论中得到了充分研究 [2], [5]。

Date: 2026年2月10日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 47A64; 次要分类号 60A10、30C10。*Key words and phrases.* 调和平均数，复值随机变量，反演。

对于正值随机变量 X 的调和平均数，已有若干界或估计。显而易见的界由值域给出：

$$\inf \mathrm{Range}[X] \le \mathbf{H}[X] \le \sup \mathrm{Range}[X].$$

（这里，值域 $\mathrm{Range}[X]$ 是正数 $(0,\infty)$ 的子集。）利用詹森不等式 $\phi(\mathbf{E}[X]) \le \mathbf{E}[\phi(X)]$，对于 $(0,\infty)$ 上的凸函数$\phi(x) = x^{-1}$，可得另一项估计：

$$\mathbf{H}[X] = \mathbf{E}[X^{-1}]^{-1} \le \mathbf{E}[(X^{-1})^{-1}] = \mathbf{E}[X].$$

当且仅当 X 几乎必然为常数时，等号成立。

然而，对于复调和平均数，推导界或估计并非易事；据作者所知，相关结果也很少。我们认为，这类界有助于研究复值方程的有效系数。

本文结构安排如下。第 2 节通过若干两点分布和连续分布下复调和平均数的例子，并配以图示，展现其与正值情形相比的独特行为。第 3 节和 4 节推导涉及模和实部的基本估计。第 5 节给出本文主要的几何界，说明复调和平均数如何通过反演和凸性论证，继承值域的圆盘约束。最后，在第 6 节中，我们重新讨论两点情形，并明确描述由此产生的圆形结构。

2. Examples

我们给出几个复调和平均数的例子，说明复调和平均数的行为与正值情形大不相同。

考虑非零复值随机变量Z的值域由两个值 c_1、c_2构成的情形，即 $\mathrm{Range}[Z] = \{c_1, c_2\}$，并令 $\theta \in [0,1]$ 为 $Z = c_2$的概率。那么，复调和平均数 $h = \mathbf{H}[Z]$ 为

$$h = ((1-\theta)c_1^{-1} + \theta c_2^{-1})^{-1} = \frac{c_1 c_2}{c_1\theta + c_2(1-\theta)}.$$

例 2.1。现在给出具体例子 $c_1 = 1+i$、$c_2 = 1-i$。那么，复调和平均数 $h = \mathbf{H}[Z]$ 计算如下：

$$h = \frac{(1+i)(1-i)}{(1+i)\theta + (1-i)(1-\theta)} = \frac{2}{1-(1-2\theta)i} = \frac{1+(1-2\theta)i}{2\theta^2 - 2\theta + 1}.$$

特别地，对于 $\theta = 1/2$，我们有 $h = 2$。这个例子表明，复调和平均数的实部可能大于值域中各实部的上确界。我们还指出，复调和平均数 h 总是在圆

$$|z-1| = 1,$$

经过 c_1、c_2 以及原点 0。参见图 1。

例 2.2。再举一个例子，设 $c_1 = 8$, $c_2 = 1+i$。那么，复调和平均数 $h = \mathbf{H}[Z]$ 的计算如下

$$h = \frac{8(1+i)}{8\theta + (1+i)(1-\theta)} = \frac{8(1+3\theta) + 32\theta i}{25\theta^2 + 6\theta + 1}.$$

注意，复调和平均数的虚部 $(32\theta)/(25\theta^2+6\theta+1)$ 在 $\theta = 1/5$ 处达到最大值，此时 $h = 4+2i$。这个例子表明

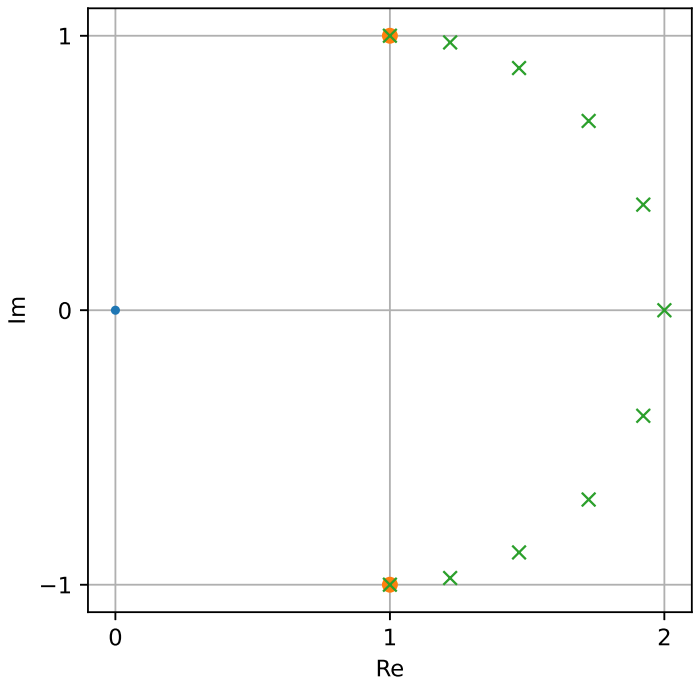

FIGURE 1. $c_1 = 1 + i$ 与 $c_2 = 1 - i$的复调和平均数，权重为 $\theta = 0.0$ 0.1, $\cdots$1.0。

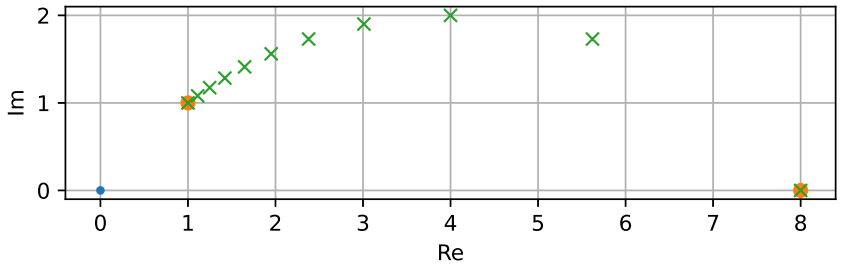

FIGURE 2. $c_1 = 8$ 与 $c_2 = 1 + i$ 的复调和平均数，权重为 $\theta = 0.0$0.1, $\cdots$1.0。

复调和平均数的虚部可能超过值域中虚部的上确界。我们还指出，复调和平均数 h 始终位于圆上

$$|z - (4 - 3i)| = 5,$$

经过 c_1, c_2 以及原点 0。参见图 2。

我们还研究连续分布的复调和平均数。

例2.3（复对数正态分布）。设 Z 为服从复正态分布 $\mathcal{CN}(\mu, \sigma)$的随机变量，其均值为 $\mu \in \mathbb{C}$，方差为 $\sigma > 0$,

并考虑服从对数正态分布的非零复值随机变量$\exp(Z)$。注意， Z 的概率密度函数由下式给出

$$f(z)=\frac{1}{\pi\sigma}\exp\left(-\frac{|z-\mu|^2}{\sigma}\right).$$

因此，通过标准计算，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\exp(Z)]&=\int_{\mathbb{C}}\exp(z)\frac{1}{\pi\sigma}\exp\left(-\frac{|z-\mu|^2}{\sigma}\right)\mathrm{d}z=\frac{1}{\pi}e^{\mu}\int_{\mathbb{C}}\exp\Big(-|z|^2+\sqrt{\sigma}z\Big)\,\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{\pi}e^{\mu}\int_{\mathbb{R}}\exp\big(-x^2+\sqrt{\sigma}x\big)\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}\exp\big(-y^2+\sqrt{\sigma}yi\big)\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\pi}e^{\mu}\cdot\sqrt{\pi}e^{\frac{\sigma}{4}}\cdot\sqrt{\pi}e^{-\frac{\sigma}{4}}=e^{\mu}.\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\mathbf{H}[\exp(Z)]=\mathbf{E}[(\exp(Z))^{-1}]^{-1}=\mathbf{E}[\exp(-Z)]^{-1}=\left(e^{-\mu}\right)^{-1}=e^{\mu}.$$

这些计算表明，对于复对数正态分布，算术平均数 $\mathrm{E}[\exp(Z)]$ 与调和平均数 $\mathrm{H}[\exp(Z)]$ 可以相同，而这在正值情形下绝不会发生，除非是平凡情形。

3. Estimates by modulus

本文的第一个结果是用模对复调和平均数进行的估计：

$$|\mathbf{H}[Z]|\geq\mathbf{H}[|Z|]. \tag{3.1}$$

定理 3.1 (模估计)。 对于非零复值随机变量 Z，其复调和平均数为 $\mathbf{H}[Z]$，不等式(3.1)成立。当 $Z=vX$ 对于某个（常数）非零复数 v和正值随机变量 X时，等号成立。

证明。注意到

$$Z^{-1}=\frac{\overline{Z}}{|Z|^2},$$

我们有

$$\mathbf{H}[Z]=\mathbf{E}\left[\frac{\overline{Z}}{|Z|^2}\right]^{-1}=\frac{\overline{\mathbf{E}\left[\frac{\overline{Z}}{|Z|^2}\right]}}{\left|\mathbf{E}\left[\frac{\overline{Z}}{|Z|^2}\right]\right|^2}=\frac{\mathbf{E}\left[\frac{Z}{|Z|^2}\right]}{\left|\mathbf{E}\left[\frac{\overline{Z}}{|Z|^2}\right]\right|^2} \tag{3.2}$$

因此

$$|\mathbf{H}[Z]|=\frac{1}{\left|\mathbf{E}\left[\frac{Z}{|Z|^2}\right]\right|}.$$

同时，

$$\mathbf{H}[|Z|]=\frac{1}{\mathbf{E}\left[\frac{1}{|Z|}\right]}.$$

现在，根据三角不等式，我们有

$$\left|\mathbf{E}\left[\frac{Z}{|Z|^2}\right]\right|\leq\mathbf{E}\left[\left|\frac{Z}{|Z|^2}\right|\right]=\mathbf{E}\left[\frac{1}{|Z|}\right],$$

这意味着（3.1）。等号成立的条件可由三角不等式中的等号成立条件得出。□

4. Estimates by real part

本文的下一个结果是用实部的调和平均数估计复调和平均数:

$$\operatorname{Re}\mathbf{H}[Z] \geq \mathbf{H}[\operatorname{Re} Z]. \tag{4.1}$$

我们通过一个小的推广建立以下定理。对于复数 c 和 z，我们将取实值的内积定义为 $c \cdot z = \operatorname{Re} \bar{c}z$。

定理 4.1（实部估计）。设 $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。对于值域为

$$\operatorname{Range}[Z] \subset \{z \in \mathbb{C} \mid c \cdot z \geq a\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$$

其中某些 $a > 0$ 和 $R < \infty$，不等式

$$c \cdot \mathbf{H}[Z] \geq \mathbf{H}[c \cdot Z]$$

成立。当 $Z = vX$ 对于某个（常数）非零复数 v 和正值随机变量 X时，等号成立。

证明。由于

$$c \cdot \mathbf{H}[Z] = \operatorname{Re} \bar{c}\mathbf{E}[Z^{-1}]^{-1} = \operatorname{Re} \mathbf{E}[\bar{c}^{-1}Z^{-1}]^{-1} = \operatorname{Re} \mathbf{E}[(\bar{c}Z)^{-1}]^{-1} = \operatorname{Re} \mathbf{H}[\bar{c}Z],$$

只需证明（4.1）。由（3.2），我们有

$$\operatorname{Re}\mathbf{H}[Z] = \frac{\mathbf{E}\left[\frac{\operatorname{Re} Z}{|Z|^2}\right]}{\mathbf{E}\left[\frac{\operatorname{Re} Z}{|Z|^2}\right]^2 + \mathbf{E}\left[\frac{\operatorname{Im} Z}{|Z|^2}\right]^2}.$$

由于

$$\mathbf{H}[\operatorname{Re} Z] = \frac{1}{\mathbf{E}\left[\frac{1}{\operatorname{Re} Z}\right]} > 0,$$

$\operatorname{Re} \mathrm{H}[Z] - \mathrm{H}[\operatorname{Re} Z]$ 的符号与下式的符号一致

$$I = \mathbf{E}\left[\frac{1}{\operatorname{Re} Z}\right]\mathbf{E}\left[\frac{\operatorname{Re} Z}{|Z|^2}\right] - \mathbf{E}\left[\frac{\operatorname{Re} Z}{|Z|^2}\right]^2 - \mathbf{E}\left[\frac{\operatorname{Im} Z}{|Z|^2}\right]^2.$$

注意到

$$\mathbf{E}\left[\frac{1}{\operatorname{Re} Z}\right] - \mathbf{E}\left[\frac{\operatorname{Re} Z}{|Z|^2}\right] = \mathbf{E}\left[\frac{1}{\operatorname{Re} Z} - \frac{\operatorname{Re} Z}{|Z|^2}\right] = \mathbf{E}\left[\frac{(\operatorname{Im} Z)^2}{\operatorname{Re} Z|Z|^2}\right],$$

我们有

$$I = \mathbf{E}\left[\frac{(\operatorname{Im} Z)^2}{\operatorname{Re} Z|Z|^2}\right]\mathbf{E}\left[\frac{\operatorname{Re} Z}{|Z|^2}\right] - \mathbf{E}\left[\frac{\operatorname{Im} Z}{|Z|^2}\right]^2.$$

现在，应用 H¨older 不等式 $\mathrm{E}[XY]^2 \leq \mathrm{E}[X^2]\mathrm{E}[Y^2]$，可得

$$I \geq \mathbf{E}\left[\sqrt{\frac{(\operatorname{Im} Z)^2}{|Z|^4}}\right]^2 - \mathbf{E}\left[\frac{\operatorname{Im} Z}{|Z|^2}\right]^2 \geq 0,$$

这意味着 $\operatorname{Re} \mathrm{H}[Z] \geq \mathrm{H}[\operatorname{Re} Z]$。

当实值随机变量 $(\operatorname{Im} Z)^2 \operatorname{Re} \frac{Z}{|Z|^2}$ 和 $\operatorname{Re} \frac{Z}{|Z|^2}$ 线性相关时，等式成立，因此

$$\frac{(\operatorname{Im} Z)^2}{\operatorname{Re} Z|Z|^2} = k\frac{\operatorname{Re} Z}{|Z|^2}$$

对于某个 $k \geq 0$。因此，$\operatorname{Im} Z = \pm\sqrt{k} \operatorname{Re} Z$，所以 $Z = (1 \pm \sqrt{k}i) \operatorname{Re} Z$。 □

5. Bounds by circles

本节将根据值域给出复调和均值的界。我们的主要观察是，反演保持圆盘不变 [4, 第七章第 5],由此得到以下几何界。

定理 5.1（圆界）。设 D 是复平面上一个不包含 0 的圆盘。更准确地说，设

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| \leq r\}$$

其中 $c \in \mathbb{C}$ 和 $r > 0$满足 $r \leq |c|$。若非零复值随机变量 Z 满足

$$\operatorname{Range}[Z] \subset D,$$

then

$$\mathbf{H}[Z] \in D$$

成立。

该证明的一个要点是，反演 $z \mapsto z^{-1}$ 将圆映射为圆、将圆盘映射为圆盘，并且圆盘是凸的。我们指出，若一个复值随机变量的值域包含于某个闭凸集，则其期望也属于同一集合。参见例如 [6, 引理 3.1]。

证明。在情形 $r < |c|$中，反演将 D 的边界圆 C 映射为圆 C'，并将 D 映射为闭圆盘 D'，这是由 C 得出的，因为 $0 \notin D$ （从而 $\infty \notin D'$）。现在，由于值域$[Z^{-1}] \subset D'$ 且 D' 是闭凸的，我们有$\mathrm{E}[Z^{-1}] \in D'$。再由反演可知，$\mathrm{H}[Z] = \mathrm{E}[Z^{-1}]^{-1} \in D$。

情形 $r = |c|$ 与之类似，唯一的差别在于反演将D 映射为一个闭半平面。由于闭半平面是凸的，同样可以看出$\mathrm{H}[Z] = \mathrm{E}[Z^{-1}]^{-1} \in D$。□

注 5.2。我们指出，定理中 D 的形状可以推广到闭凸集 D' 经反演后的像，例如圆盘的交集或三角形的像。

6. Two-point cases revisited

考虑 Z 的值域由两个值 $c_1 \neq c_2$、c_1、$c_2 \neq 0$ 组成的情形，即 Range $[Z] = \{c_1, c_2\}$。此时，Range$[Z^{-1}] = \{c_1^{-1}, c_2^{-1}\}$，且期望 $\mathrm{E}[Z^{-1}]$ 沿着 c_1^{-1} 与 c_2^{-1} 之间的线段移动。由于反演会将直线映射为经过 0 的圆，我们得到以下结果。

定理 6.1（两点情形）。设 $c_1, c_2 \neq 0$ 满足 $c_1 \neq c_2$。设非零复值随机变量 Z 满足

$$\operatorname{Range}[Z] = \{c_1, c_2\}.$$

- 若 c_1, c_2, 0 不在同一条直线上，则复调和平均数 $\mathbf{H}[Z]$ 沿经过 c_1, c_2 和 0（唯一确定）的圆弧，在 c_1 和 c_2 之间移动，且不经过 0。

- 若 c_1、c_2、0 位于同一直线上，且 0 不在 c_1 与 c_2 之间的线段上，则复调和平均数 $\mathbf{H}[Z]$ 沿 c_1 与 c_2 之间的线段移动。

Acknowledgements

作者感谢 Hiroaki Deguchi 与 TakayukiYamada 就黏弹性复合材料理论进行的富有成效的讨论以及出色的评注。本工作得到日本学术振兴会科学研究费助成事业资助，项目编号 JP25K17275。

References

[1] G. Allaire, *Shape optimization by the homogenization method*, 应用数学科学, 146, 施普林格, 纽约, 2002; MR1859696[2] L.V. Gibiansky, R. Lakes, 二维两相黏弹性复合材料复体积模量与剪切模量的界, 材料力学, 第25卷, 第2期, 1997年3月, 第79-95页。[3] I. A. Ibragimov, N. V. Smorodina 与 M. M. Faddeev, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **420** 2013 **206** 2015 2 3373875 ( )J. [4] *Complex analysis* 103, Math. Sci. (N.Y.) ( ), 第 ; MR S. Lang, , 第四版, 数学研究生教材丛书, 施普林格, 纽约, 1999; MR1659317[5] G. W. Milton, *The theory of composites*, 剑桥应用与计算数学专著, 6, 2002 1899805 剑桥大学出版社, [6] 剑桥, ; MR A. Nakayasu, 拟凸哈密顿量加性特征值极小极大公式的两种方法, 美国数学会会刊 147 (2019), 第 2 期, 701–710; MR3894909

Graduate School of Engineering, The University of Tokyo, Yayoi 2-11-16, Bunkyo–ku, Tokyo 113-8656, Japan*Email address*: ankys@g.ecc.u-tokyo.ac.jp