arXiv:2602.08304v1 [math.SP] 9 Feb 2026

离散拉普拉斯算子谱不变量理想的代数性质

MATTHEW FAUST、LEO FRIEDMAN、GAVIN O'MALLEY、ROLANDO RAMOS 和 AARYAN SHARMA

Abstract. 设 $\Gamma = q_1\mathbb{Z} \oplus q_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus q_d\mathbb{Z}$，其中对于每个 $j \in \{1, \ldots, d\}$，均有 $q_j \in \mathbb{Z}^+$，并以 Δ 表示作用于 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 上的离散拉普拉斯算子。我们将介绍当 $d = 1$ 时离散拉普拉斯算子谱不变量理想的若干代数性质，包括构造一个格罗布纳基。我们还将介绍若干组复数域 Γ-周期势 V，使得 Δ 和 $\Delta + V$ 是弗洛凯等谱的。最后，我们将讨论一般情形，其中 q_i 取为 $\mathbb{Z}^d$ 中的向量。

1. Introduction

离散拉普拉斯算子 Δ作用于 $\mathbb{Z}^d$ 上的平方可和函数 f， $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$，定义如下：

$$(\Delta f)(n) = \sum_{\|n-m\|_1=1} f(m),$$

其中，对于 $n = (n_1, n_2, \ldots, n_d)$ $m = (m_1, m_2, \ldots, m_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\|n - m\|_1 := \sum_{j=1}^d |n_j - m_j|$.对于 $\Gamma = q_1\mathbb{Z} \oplus q_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus q_d\mathbb{Z}$， Γ-周期势 V： $\mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ 是一个满足以下条件的函数

$$V(n) = V(n + \gamma) \text{ for all } n^d \in \mathbb{Z} \text{ and } \gamma \in \Gamma.$$

我们称这个和 $\Delta + V$为 *discrete periodic Schrödinger operator*。弗洛凯理论揭示，该算子的 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 谱 $\sigma(\Delta + V)$ 由下列方程的解给出

$$(\Delta f)(n) + V(n)f(n) = \lambda f(n),$$

对于函数 $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$，其满足弗洛凯-布洛赫边界条件

$$f(n + q_j\mathbf{e}_j) = e^{2\pi i k_j} f(n),$$

其中 $n \in \mathbb{Z}^d, k_j \in [0, 1)$，且 $j = 1, 2, \ldots, d.$ 这里， $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^d$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的标准基， $\{q_j\}_{j=1}^d$ 为正整数。

注意到每个 $f(n)$ 都由其在 $\{(n_1、\ldots\ldots、 n_d) \mid 0 \le n_i < q_i\}$ 上的取值确定，对于每个固定的 $k \in [0, 1)^d$， $\Delta + V$ 表现为有限矩阵的乘法。将 $z_i = e^{2\pi i k_j}$ 视为不定元，记 $L_V(z)$（其中 $z = (z_1, z_2、\ldots\ldots、 z_d)$）为该有限 *Floquet matrix*。特别地，令 $\mathbb{T}$ 表示复单位圆，则有

$$\sigma(\Delta + V) = \bigcup_{z \in \mathbb{T}^d} \sigma(L_V(z)).$$

关键词和短语。安巴尔祖米扬型问题、Floquet 等谱性、离散周期薛定谔算子。*2020*年数学主题分类。15A29, 47B36, 81Q35.

如果两个离散周期薛定谔算子 $V+\Delta$ 和 $V'+\Delta$ 具有 Γ-周期势（或者 V 和 V' 这两个 Γ-周期函数本身），我们称它们是弗洛凯等谱的，如果

$$\sigma(L_V(z)) = \sigma(L_{V'}(z)), \text{ for all } z \in \mathbb{T}^d.$$

对弗洛凯等谱性的研究至少可以追溯到 20 世纪 80 年代末，当时 Kap- peler 发表了三篇奠基性论文 [29–31]。这些研究探讨了许多性质，包括但不限于：需要检验多少个一般准动量值才能确定 Bloch簇 [30], 有多少个势与任意给定的势弗洛凯等谱 [29]（以及在某些情形下这些势必须是什么 [30]）、可分离性 [31]，以及我们关注的离散拉普拉斯算子的弗洛凯等谱性 [31]。

文献 [31]，证明，满足 Δ 和 $\Delta + V$ 与之弗洛凯等谱的唯一实势是零势 $V = 0$。文献 [50] 将这一结果推广到一大类图。相关问题见文献 [27] 。关于可分离势的弗洛凯等谱性研究也取得了很大进展 [43]。

Floquet 等谱性是离散周期算子谱理论中的众多问题之一，代数几何方法在其中发挥了重要作用。除了更一般的费米等谱性 [6, 41, 45], 之外，代数方法还应用于研究 Bloch 簇和 Fermi 簇的（不可）约性 [11, 20, 21, 23, 39, 52], 、平带的存在性 [12, 13, 34, 38, 49, 54], 、Borg定理 [46], 、量子遍历性 [44,47], 、极值的研究 [2, 3, 10, 14, 16–18, 22], 等；更多进展和综述请参见 [1, 5, 19, 32, 33, 40, 42, 53]。

本文研究 Ambarzumyan型逆问题：寻找与零势 (0) Floquet 等谱的 Γ-周期势。尽管众所周知，不存在与0Floquet 等谱的非零实值势，但可能存在非零复值势。证明这类势存在已成为近期关注的话题 [7, 15, 51]。在 [15], 中，研究者证明，当 q_j 中至少有一个是大于 3 的偶数时，存在与0 Floquet 等谱的显式非零复值 Γ-周期势。最近，[7] 证明了，当至少一个 $q_j > 3$时，存在与0 Floquet 等谱的非零 Γ-周期势。尽管 [7]中的方法证明了这些势的存在性，但与 [15], 不同，这些方法并未提供这些势具体形式的信息。为此，我们提出若干一般形式，并推测与0 Floquet 等谱的一类非零复势将具有这些形式。我们还给出一些理论结果，并讨论各种开放问题和猜想。

本文其余部分的组织如下。在第 2节中，我们介绍研究的主要对象——谱不变量理想。在第 3节中，我们为谱不变量理想构造 Gr¨obner 基，并讨论其一些推论。在第 4 节中，我们引入势的特化，由此得到一个变量和多项式数量大致减半的系统；我们还描述了与 0 弗洛凯等谱的势由于其存在性而必须满足的各种对称性和性质。在第5节中，我们展示使用 Bertini 和 Macaulay2 得到的各种实验结果。最后，在第 6节中，我们讨论周期何时可以取 $\mathbb{Z}^d$的更一般的满秩子格，此时 [7] 的某些刚性性质不再成立。

2. 谱不变量

由于与 **0** 等谱的 $n\mathbb{Z}$-周期势自然延拓为与 **0** 等谱的 $q_1\mathbb{Z}\oplus q_2\mathbb{Z}\dots q_d\mathbb{Z}$-周期势，当 $q_k = n$ 对于某个 k时，我们将重点讨论一维情形。注意，一维方格点阵顶点上的任意 $n\mathbb{Z}$-周期函数，都由其在顶点 1、……、 n上的取值唯一确定，因此任意此类函数都可以表示为由这些 n 个值组成的向量。给定一个 $n\mathbb{Z}$-周期势$V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$，其中 $n \geq 3$，弗洛凯矩阵 $L_V(z)$ 具有如下形式：

$$L_V(z) = \begin{pmatrix} v_1 & 1 & & z^{-1} \\ 1 & v_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ z & & 1 & v_n \end{pmatrix}.$$

众所周知，在这一背景下（参见 [30, 第 1]页），对于每个 $\sigma(L_V(z)$，其谱由$z \in \mathbb{T}$ 在 $L_V(z$的某个单一取值处的谱决定。因此，从现在起，我们用 L_V 代替 $L_V(\mathbf{1})$，并注意到， V 与**0** 是弗洛凯等谱的，当且仅当$\sigma(L_V) = \sigma(L_{\mathbf{0}}$（包括特征值的重数）。

令 $D_V(\lambda)$表示 L_V的特征多项式。注意，要使 V和**0** 弗洛凯等谱， $D_V(\lambda)$与 $D_{\mathbf{0}}(\lambda)$必须是关于 λ的相同一元多项式。令 ζ_V 表示 $D_V(\lambda)$与 $D_{\mathbf{0}}(\lambda)$之差所得到的多项式，即

$$\zeta_V := D_V(\lambda) - D_{\mathbf{0}}(\lambda).$$

令 $[\lambda^k]f$ 表示多项式 f中单项式 λ^k 对应项的系数。要使 $D_V(\lambda)$和 $D_{\mathbf{0}}(\lambda)$对应相同的多项式，它们的系数必须相等。若此条件成立，则注意到 $[\lambda^n]\zeta_V = 0$ ，并将 v_j 视为不定元，

$$(p_k :=)(-1)^{n-k}[\lambda^{n-k}]\zeta_V = 0 \text{ for } k \in \{1, \dots, n\} =: [n]. \tag{1}$$

由于 p_k 是关于 v_j的多项式， (1) 定义了一个由 n 个多项式方程组成、含n 个变量的方程组。由于 $v_j = 0$ 对所有 $j \in [n]$ 平凡地是该方程组的一个解，故 p_k 的常数项为零。我们称 p_k *spectral invariants*（对应于势**0**）。

设 e_k 为 关于 $\mathbb{C}[v] = \mathbb{C}[v_1, \dots, v_n]$的次数为 k的初等对称多项式 ，

$$e_k = \sum_{1\leq j_1<\dots<j_k\leq n} \prod_{\ell=1}^{k} v_{j_\ell},$$

定义 $T_d(f)$为由 f中次数为 d的项给出的齐次多项式，并令$T_{\max}(f) = T_{\deg(f)}(f)$。

由于 $D_{\mathbf{0}}(\lambda)$的系数关于 $\mathbb{C}[v]$为常数，对于非常数单项式 $m \in \mathbb{C}[v]$,

$$[m]p_k = [\lambda^{n-k}m](-1)^{n-k}D_V(\lambda). \tag{2}$$

回想一下,

$$D_V(\lambda) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} (L_V - \lambda I)_{j,\sigma(j)}, \tag{3}$$

其中 $\sigma \in S_n$，是作用于 $[n]$上的对称群。注意，对于每个固定的 $\mathbb{C}[v]$，其最高次数项 λ^{n-k} 在恒等置换的（3）中出现。因此，

$$T_{\max}(p_{n-k}) = [\lambda^k]\left((-1)^k \prod_{j=1}^{n}(v_j - \lambda)\right) = e_{n-k}. \tag{4}$$

尽管 p_k 的最高次齐次项是对称的，但当 $n > 3$时，p_k 并非如此。相反，p_k 由二面体群固定，D_n，也就是说，

$$p_k(v_1, v_2, \ldots, v_n) = p_k(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) \text{ for all } \sigma \in D_n. \tag{5}$$

这一关系很容易由矩阵 L_V推出。

引理 2.1. 如果 $n-k$ 是奇数，那么 p_{n-k} 只包含奇次数项；如果 $n-k$ 是偶数，那么 p_{n-k} 只包含偶次数项。

$_n$证明。 根据 [15, 第2节 (ix)], 唯一的 $\sigma \in S_n$ 使得 $\prod(L_V - \lambda I)_{j,\ \sigma(j)} \neq 0$ 是那些 $_{j=1}$仅由1-循环和2-循环组成的。令 m 为一个次数为 $s > 0$ 的单项式，属于 $\mathbb{C}[v]$。由(2)和(3)，可得

$$[m]p_{n-k} = [m\lambda^k] \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} (L_V - \lambda I)_{j,\sigma(j)}.$$

$_n$注意，对于固定的 $\sigma \in S_n$，若要使 $[m\lambda^k]\sum(L_V - \lambda I)_{j,\ \sigma(j)}$ 非零，则 σ 必须恰有 $s+k$ 个不动点。由于 σ 的其余循环必须是2-循环，因此可知$n-k-s$ 必为偶数。于是，$n-k$ 和 s 的奇偶性必定相同。□

由（4）和引理 2.1，可得 $p_k = e_k + f_k$ 其中 f_k 是一个多项式，属于$\mathbb{R}[v_1, \ldots, v_n]$，且 $\deg(f_k) < k-1$。

接下来我们讨论 *ideal of spectral invariants* （势为0的情形）。也就是说，由我们的谱不变量生成的理想，

$$I := \langle p_1, p_2, \ldots, p_n \rangle.$$

零点集 $V(I)$恰好包含方程（1）的所有解。

3. A Gröbner Basis for The Ideal of Spectral Invariants

对于理想 I，Gr¨obner 基 $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ 是一组最小的多项式生成元，满足

$$I = \langle g_1, g_2, \ldots, g_k \rangle \text{ and } LT(I) = \langle LT(g_1), LT(g_2), \ldots, LT(g_k) \rangle,$$

其中，$LT(g_j)$ 是 g_j 的首项，而 $LT(I)$ 是关于某个全局单项式序，I 中所有多项式的首项所组成的集合。我们将对 $\mathbb{C}[v]$使用分次反字典序（grevlex）单项式序，定义如下。对于$\alpha = (\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，定义 $v^\alpha = v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \cdots v_n^{\alpha_n}$。于是，在分次反字典序中，当 $\deg(v^\alpha) > \deg(v^\beta)$，或者当 $\deg(v^\alpha) = \deg(v^\beta)$ 且 $\alpha - \beta$ 中最右侧的非零项为负时，有 $v^\alpha > v^\beta$。关于 Gr¨obner 基和单项式序的更多细节，请参见 [8,第 2]章。

对于 $a \in \{1, \ldots, n\}$ 和 $b \in \{0, \ldots, n\}$，定义多项式

$$H(a,b) := \sum_{a \le j_1 \le \cdots \le j_b \le n} \prod_{\ell=1}^{b} v_{j_\ell}, \text{ and let } H(a,0) := 1. \tag{6}$$

它们恰好是变量 v_a、……、v_n上的 b 次完全齐次对称多项式。对于 $k = 1$、……、n，定义

$$g_k := -\sum_{j=1}^{k} H(k, k-j)(-1)^j p_j. \tag{7}$$

定理 3.1。 $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ 是 I 的 *Gröbner* 基。

本节余下部分将用于证明定理 3.1 并讨论其一些推论。

引理 3.2。$\langle g_1、\ldots\ldots、g_n \rangle = I$。

证明。 注意，$\langle g_1、\ldots\ldots、g_n \rangle \subseteq I$ 直接由 g_k 的定义可得。我们将通过归纳法证明每个 $p_j \in \langle g_1、\ldots\ldots、g_n \rangle$。注意到

$$g_1 = -\sum_{j=1}^{1} H(1, 1-j)(-1)^j p_1 = H(1,0)p_1 = p_1.$$

因此，$p_1 \in \langle g_1，\ldots\ldots，g_n \rangle$。现在假设对每个 $j < k$，$p_j \in \langle g_1，\ldots\ldots，g_n \rangle$。那么，

$$p_j = \sum_{\ell=1}^{n} P_{j,\ell} g_\ell,$$

其中每个 $P_{j,\ \ell} \in \mathbb{C}[v_1, \ldots, v_n]$。根据 g_k 的定义，

$$g_k = -\sum_{j=1}^{k-1} H(k, k-j)(-1)^j p_j - (-1)^k p_k.$$

由此可知，每个 $p_k \in \langle g_1 \ldots，\ g_n \rangle$，因此 $I \subseteq \langle g_1，\ldots\ldots，g_n \rangle$。 □

定理 3.3。 $T_{\max}(g_k) = H(k,\ k)$。

证明。 由于我们只关注 g_k的最高次部分，因此可以忽略任何次数低于最高次数的项。由（4），可得 $T_{\max}(p_j) = e_j$，因此，除非所有次数为 k 的项都相互抵消，否则我们可以忽略 p_j的任何低阶项。我们将假设 g_k 的次数为 k （并证明这一假设）。根据这一假设，我们有

$$T_{\max}(g_k) = T_k(g_k) = -\sum_{j=1}^{k} H(k, k-j)(-1)^j e_j.$$

Notice that $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j e_j x^j = \prod_{i=1}^{n} (1 - v_i x)$ and $\sum_{j=0}^{\infty} H(k,j) x^j = \prod_{j=k}^{n} \frac{1}{1 - v_j x}$.

因此，

$$[x^k]\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j e_j x^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}H(k,j)x^j\right)=H(k,k)-T_k(g_k).$$

然而，我们有

$$\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j e_j x^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}H(k,j)x^j\right)=\left(\prod_{i=1}^{n}(1-v_i x)\right)\left(\prod_{j=k}^{n}\frac{1}{1-v_j x}\right)$$
$$=(1-v_1x)\cdots(1-v_{k-1}x),$$

因此

$$[x^k]\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j e_j x^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}H(k,j)x^j\right)=0.$$

由此，我们得到 $T_k(g_k)=H(k,\ k)$。 □

推论 3.4。 $LT(g_k)=v_k^k$ 在分次反字典序单项式序下。

给定两个多项式 f和 g，令 $LM(f)$ 表示项 $LT(f)$ 的单项式，令$LCM(f,g)$ 表示最小公倍式，并令 $S(f,g)$ 表示 f和 g的 S-多项式，即 $S(f,g)=\frac{LCM(LT(f),LT(g))}{LT(f)}f-\frac{LCM(LT(f),LT(g))}{LT(g)}g$。最后，对于多项式集合 K，我们用 $f\to_K a$ 表示 a 是 f 除以 K中各元素进行多元除法后的余数。现在我们可以证明定理 3.1。

定理 3.1 的证明。由引理 3.2 可知 $\langle g_1,\ldots,g_n\rangle=I$。根据 [8][第 2 章第 10 节命题 1],，若 $LM(g_j)$ 和 $LM(g_k)$ 互素，则 $S(g_j,g_k)\to_G 0$。由于 $LT(g_k)=v_k^k$，每一对 g_j和 g_k, $j\neq k$ 显然互素。因此，根据 Buchberger 判据，[9, 第 1] G 章是 I 的 Gr¨obner 基。□

定理 3.5。 I 的仿射 *Hilbert* 多项式为 $HP_{R/I}(s)=n!$。

证明。设 $R=\mathbb{C}[v]$。对于 $s\geq 0$，理想 I 的仿射 Hilbert 函数 $HF_{R/I}(s)$ 是总次数为 $\leq s$ 且不属于 $LT(I)$ 的单项式个数。当 s 足够大时， $HF_{R/I}(s)$ 与仿射 Hilbert 多项式 $HP_{R/I}(s)$ 相符。由于 G 是 I 的 Gr¨obner 基，

$$\langle LT(I)\rangle=\langle LT(g_1),\ldots,LT(g_n)\rangle=\langle v_1,v_2^2,\ldots,v_n^n\rangle.$$

因此，不属于 $LT(I)$ 的单项式集合恰好是

$$B=\left\{v_1^{j_1}v_2^{j_2}\cdots v_n^{j_n}|0\leq j_\ell<\ell\right\}.$$

每个 j_ℓ 都有 ℓ 个可取值，因此 se 中有 $n!$ 个单项式 t.

由于 B 中所有单项式的次数都不超过 $\binom{n}{2}$，对于任意 $s\geq\binom{n}{2}$， $HF_{R/I}(s)=n!$ 由此可得， $HP_{R/I}(s)=n!$ □

推论 3.6. $V(I)$ 的维数为0，且 $V(I)$ 的次数为 $n!$。因此，$V(I)$ 计重数共有 $n!$ 个点，由1至 $n!$ 个点组成。 [1]

注 1. 注意，定理 *3.1*和 *3.5* 的证明仅依赖于 p_k 的最高次数项为次数 k的初等对称多项式；它们的低次数部分 f_k 只需小于次数 k即可。也就是说，对于由初等对称多项式的扰动生成的任意理想，该过程都给出了一个 ***Grö¨bner*** 基，其中包括任意有限图的谱不变量理想。

我们最后通过改进推论 $V(I)$ 中给出的不同点数量上界来结束本节，该推论为 3.6。下文中，我们始终指的是根据定义理想确定的点的重数（而不是相对于根基的重数）。换言之，我们的代数簇不是约化的，实质上是在考虑与我们的理想相关联的仿射概形的闭点。

定理 3.7。 假设 $n > 2$。**0** 在 $V(I)$ 中的重数至少为 $2n$。因此， $V(I)$ 对于 $n > 1$ 包含至少 1 个、至多 $n! - 2n + 1$ 个点。

证明。给定一个固定的一般势 $V' = (v'_1, \dots, v'_n) \in \mathbb{C}^n$，考虑由 $t \in \mathbb{C}$ 参数化的谱不变量理想族 $I_{tV'}$，其中 $tV' = (tv'_1, \dots, tv'_n)$。一般是指， V' 满足：若对任意 $i, j \in [n]$， $i \neq j$，则 $v'_i \neq v'_j$。每个 $I_{tV'}$ 的生成元均以与 $I(= I_0)$ 相同的方式得到（即，将差值 $D_V(\lambda) - D_{tV'}(\lambda)$ 视为关于 λ 的多项式，并取其非零系数）；特别地，若 h_k 是 $I_{tV'}$ 的第 k 个谱不变量，则 $h_k(v, t) = p_k(v_1, \dots, v_n) - p_k(tv'_1, \dots, tv'_n)$，其中 p_k 如式 (1) 所示。

将 t 视为一个不定元，令 I_X 表示由$h_i(v, t)$ 和 $X := V(I_X) \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ 生成的 $\mathbb{C}[v_1, .., v_n, t]$ 理想，其对应的仿射代数簇为该理想所定义的簇。注意，若 $g'_k := -\sum_{j=1}^{k} H(k, k-j)(-1)^j h_j$，则 $G' = \{g'_1, \dots, g'_n\}$ 是 I_X的 Gr¨öbner 基。这可由与定理 3.1 相同的证明得到，只需采用带有 $v_1 > \cdots > v_n > t$的分次反字典序单项式序。唯一显著的差别在于定理 3.3 的相应版本：我们会得到 $T_{\max}(g_k) = H(k, k) + tr$，其中某个齐次 $r \in \mathbb{C}[v_k, \dots, v_n, t]$ 的次数为 $k-1$；但这不会改变推论 3.4。最后请注意，不属于$\langle LT(I_X)\rangle$的单项式集合是 $B_X = \left\{t^a v_1^{j_1} v_2^{j_2} \cdots v_n^{j_n} | 0 \leq j_\ell < \ell, 0 \leq a\right\}$。根据定理 3.5 的论证，我们发现 $HP_{\mathbb{C}[v,t]/I_X}(s) = (n!)s - {}^n!_{(n(n-1)-4)}$ 4，因此 X 是一维的。

考虑超平面 $\mathcal{H} := \mathbb{C}^n \times \{0\}$，我们可以将点 (0, 0) 与势 $\mathbf{0} \in V(I_0)$ 等同起来，因为 (0, 0) 在交 $X \cap \mathcal{H}$ 中的重数等于 0 在 $V(I_0)$ 中的重数。由 (5) 可知，对于每个 $\sigma \in D_n$ 和每个 $t \in \mathbb{C}$，都有 $(tv'_{\sigma(1)}, \dots, tv'_{\sigma(n)}, t) \in X$。因此， X 至少包含 $2n$ 条经过原点 (0, 0) $\in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$的不同直线，记为 $L_1, \dots, L_{2n}$。每个 L_i 都是X 的一个不可约分支；由于重数在不可约分支上具有可加性 2，(0, 0) 在X 中的重数至少为 2n。由于 (0, 0) $\in \mathcal{H}$，它在 $\mathcal{H}$中的重数至少为 1。由于交中一点的重数至少为相应重数的乘积，因此 (0, 0) 在交 $X \cap \mathcal{H}$ 中的重数至少为 $1 * 2n$。□

[1]通过不同的方法，这一点也在 [29] 和 [48], 中得到了证明，尽管两者都可以视为加性逆特征值问题的类似结果的特例，该结果最早在 [24]中得到证明。[2]例如，参见 [25,第 3]节。

注 2。定理 *3.7* 中的观察可以直接推广到赋有固定势 V的图的谱不变量。特别地，给定一个有 G 个 n 顶点的图，至多有 $n! - |aut(G)|$ 个与 $V = (v_1, \dots, v_n)$弗洛凯等谱的非平凡势，其中 $aut(G)$ 是 G的自同构群。由于 V 是一般的，与 V 弗洛凯等谱的非平凡势，指的是不能通过 V 的对称性置换 G的坐标得到的势。

4. Symmetries and Specialized Potentials

给定一个 $n\mathbb{Z}$-周期势 $V = (v_1, \dots, v_n)$，令 $-V = (-v_1, \dots, -v_n)$，并令$\overline{V} = (\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n})$。

引理 4.1。若 V 与**0**等谱，则 $-V$ 与**0**等谱。

证明。显然，将 V 替换为 $-V$ 至多会改变 p_k 的符号，根据引理2.1。□

引理 4.2。若 V 与**0**等谱，则 $\overline{V}$ 与**0**等谱。

Proof. 由于 p_k 的系数全为实数，我们有 $\overline{p_k(V)} = p_k(\overline{V})$. □

推论 4.3. 如果 V 与**0**等谱，那么任何势 V' 只要是 V、 $-V$、 $\overline{V}$或 $-\overline{V}$的二面体置换，就与**0**等谱。

证明. 这直接由（5）、引理 4.1和引理 4.2得出。□

备注3. 推论 *4.3* 结合 （5） 可知，对于每个 V 与 **0**等谱的势，我们可以立即通过对 V 进行二面体置换，并取其共轭、取负以及共轭后取负，得到至多 $8n - 1$ 个其他势函数。

接下来我们将关注势的一种特定特化。考虑 $n\mathbb{Z}$-周期方格格上的势函数 U，满足 $u_j = -u_{n-j+1}$。当$n = 2m$为偶数时，这给出形式为（u_1，……，u_m，$-u_m$，……，$-u_1$）的势函数。当$n = 2m + 1$为奇数时，这给出形式为（u_1，……，u_m，**0**，$-u_m$，……，$-u_1$）的势函数。

引理 4.4。$[\lambda^k]\zeta_U = [\lambda^k]\zeta_{-U}$ 对于 $0 \le k \le n$。

证明。根据（5），每个 $[\lambda^k]\zeta_U$ 都呈现出反射对称性； $-U$ 是 U的反射。□

推论 4.5。$[\lambda^{n-2k-1}]\zeta_U = 0$ 对于所有 $0 \le k \le m$。

证明。根据引理 2.1， $[\lambda^{n-2k-1}]\zeta_U$ 完全由奇次数项组成。因此，$[\lambda^{n-2k-1}]\zeta_U = -[\lambda^{n-2k-1}]\zeta_{-U}$。然而，根据引理 4.4， $[\lambda^{n-2k-1}]\zeta_U = -[\lambda^{n-2k-1}]\zeta_{-U} = -[\lambda^{n-2k-1}]\zeta_U$。因此， $[\lambda^{n-2k-1}]\zeta_U = 0$。□

由于在此特化下其他所有系数均为 **0**，该系统便从含有 n 个方程、 n 个变量的系统简化为含有 m 个方程、 m 个变量的系统。现在我们来关注这个特化后的系统。

定义

$$e'_k := \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le m} \prod_{\ell=1}^{k} u_{j_\ell}^2 \text{ and } H'(a,b) := \sum_{a \le j_1 \le \cdots \le j_b \le m} \prod_{\ell=1}^{b} u_{j_\ell}^2,$$

$\mathbb{C}[u]$ 中次数为 k 的初等对称多项式，以及关于 $u_a, \ldots, u_m$的次数为 b 的完全齐次对称多项式，两者均在映射 $u_i \to u_i^2$ 下，对所有 i 均成立。此外，令

$$p'_k := (-1)^{n+k}\zeta_U\left[\lambda^{n-2k}\right], I' := \langle p'_1, \ldots, p'_m\rangle, g'_k := \sum_{j=1}^{k} H'(k, k-j)p'_j, \text{ and } G' = \{g'_1, \ldots, g'_m\}.$$

这些定义与第 3 节中的定义完全类似。例如，在本例中，我们有以下与（4）类似的结果:

$$T_{\max}\left(p'_k\right) = (-1)^k[x^{2k}]\prod_{i-1}^{m}(1+u_i x)(1-u_i x) = e'_k. \tag{8}$$

备注4。 V（I'）自然继承了引理 *4.1* 和引理 *4.2*中的对称性。

定理 4.6。 G' 是 I' 的 ***Gröbner*** 基，$\langle LT\ (I')\ \rangle = \langle u_1^2, u_2^4, \ldots, u_m^{2m}\rangle$ 按分次反字典序单项式序排列，并且 I' 的仿射 ***Hilbert*** 多项式为 $HP_{R/I'}\ (s)\ = 2^m m!$ 。

证明。 由于每个 p'_k 的最高次数项都是 k 次初等多项式，关于u_1^2，……，u_m^2，这些结果可通过与第 3 节中对未特化势所给出的论证类似的论证得到。Hilbert 多项式则来自于在定理 3.5 的证明中将 B 替换为$B' = \left\{u_1^{j_1}u_2^{j_2}\cdots u_m^{j_m}\colon\ \ 0 \le j_\ell < 2\ell\right\}$。□

推论 4.7. $V(I')$ 的维数为 0，且 $V(I')$ 的次数为 $2^m m!$。因此，$V(I)$计重数共有 $2^m m!$ 个点，并由介于 1 与 $2^m m!$ 之间的若干点组成。

鉴于这一特化的性质，以及当 n 能被 4 [15], 整除时 $V(I')$ 中存在已知非零点这一事实，我们提出如下猜想。

猜想 1. 存在形如 $(v_1, v_2, \ldots, -v_2, -v_1)$的非零 $q\mathbb{Z}$-周期势 V，对于 $q > 3$，使得 Δ 与 $\Delta + V$弗洛凯等谱。

正如在 [15] 中发现的偶势支持猜想 1那样，它们也提示如下猜想。

猜想 2. 存在形如 $(v_1, v_2, \ldots, v_2, v_1)$的非零 $q\mathbb{Z}$-周期势 V，对于 $q > 3$，使得 Δ 与 $\Delta \mp V$弗洛凯等谱。

为完整起见，我们简要证明，在 [15]猜想1 的情形 $4|q$ 以及猜想 2的情形 q 为偶数时所找到的势满足相应结论。

当 $4|q$ 时的猜想 1，以及 $q > 3$为偶数时的猜想 2 的证明。令 $q = 2m$，其中 $m > 1$。由 [15, 定理 31] 可知，满足 $V(1) = 1 + i$、$V(2) = 1 - i$、$V(m+1) = -1 + i$、$V(m+2) = -1 - i$ 以及 $V(j) = 0$，且在 j 所有其他顶点轨道上的 $q\mathbb{Z}$-周期势 V与 0 弗洛凯等谱。

将循环置换 $(1\ 2\cdots q)$ 应用 $m-1$ 次于 V，得到一个满足 $V'(1) = -1 - i$、$V'(m) = 1 + i$、$V'(m+1) = 1 - i$、$V'(q) = -1 - i$，以及在其他情况下 $V'(j) = 0$ 的 $q\mathbb{Z}$-周期势 V'；根据 (5)，该势与 0 等谱。这证明了 $q > 3$为偶数时的猜想 2。

现在假设 $m = 2k$。将循环置换 $(1\ 2\cdots q)$ 应用 $k-1$ 次于 V，得到一个 $q\mathbb{Z}$-周期势 V'，使得 $V'(k) = -1-i, V'(k+1) = 1+i, V'(m+k) = 1-i,$

n	重数 at **0**	重数 of 点$_{\neq 0}$	唯一点	唯一点 mod D_n	唯一点 对所有……取模 对称尝试	奇异点模 D_n	重数：计数	猜想 2 唯一点。
3	6	0	1	1	1	1	{6:1}	0
4	16	8	9	2	1	1	{1:8, 16:1}	4
5	60	60	61	7	3	1	{1:60, 60:1 }	4
6	120	600	529	45	20	3	{ 1:504 , 2:12, 6:12, 120:1}	32
7	588	4452	4453	319	105	1	{1:4452, 588:1 }	120

TABLE 1. $V(I)$的计算结果。

$V'(m+k+1) = -1-i$，并且 $V'(j) = 0$ 否则，它与**0** 通过（5）得到的等谱。这证明了对于满足1 的 $q > 3$， $4|q$。 □

接下来，我们将讨论一些支持这些猜想的实验结果。

5. EXPERIMENTAL RESULTS

本节讨论我们通过实验发现的小 n 值对应的 $V(I)$ 值。本节的结果通过使用 Macaulay2 [26] 和 Bertini [4]进行符号与数值计算获得。数值计算使用了软件包 [36, 37, NumericalAlgebraicGeometry]，并通过软件包 [35, NumericalCertification], 对方程 (1) 的解进行认证；该软件包利用阿尔法理论证明这些数值解对应于真正的解 [28]。下文中，除非另有说明，解指 $V(I)$ 或 $V(I')$ 的非零点；关于 $V(I)$ 的对称性参见备注3，关于 $V(I')$ 的对称性参见备注4。

我们关于 $V(I)$ 和 $V(I')$ 的元素的计算结果分别汇总于表 1 和 2。通过符号求解 **0** 处的重数，得到 $V(I)$ 和 $V(I')$ 的切锥理想的次数（但 $n = 7$ 在 $V(I)$ 时除外）。倒数第二列采用 $i{:}j$ 的格式，以表示相应簇中有 j 个重数为 i 的点[3]。其余数值均通过数值计算并经认证获得。

在 $n = 4$ 时，按对称性计唯一的非零解正是 [15] 中找到的解。在图 1 中，我们绘出了 $n = 5$ 的所有按二面体对称计的非零解。在图 2 中，我们展示了 $n = 6$ 的非零奇异解，左侧和右侧图像分别对应于 $V(I)$ 中重数分别为 2 和 6 的点。图 3 展示了 $V(I')$ 中 $n = 7$ 的所有非零点（按对称性计）。图 4 展示了所有

[3]请注意，奇点的次数 除**0** 之外的奇点未经认证，而是基于 Bert 的输出 ini.

n	重数 at **0**	重数 of 点$_{\neq 0}$	唯一点	唯一点 mod 对称尝试	奇异点模对称-性	重数：计数
4	4	4	5	2	1	{1:4, 4:1}
5	4	4	5	2	1	{1:4, 4:1}
6	8	40	41	11	1	{1:40, 8:1}
7	8	40	41	11	1	{1:40, 8:1}
8	16	368	357	90	2	{1:352, 4:4, 16:1}
9	16	368	369	93	1	{1:368 16:1}
10	32	3808	3781	946	2	{1:3776, 8:4 32:1}
11	32	3808	3809	953	1	{1:3808, 32:1}

TABLE 2. $V(I')$的计算结果。

$V(I)$ 的非零解，其中 $n = 9$ 至少有两个连续的势值为 0；最左侧解的非零值是 $z^6 + 1 = 0$ 的解。

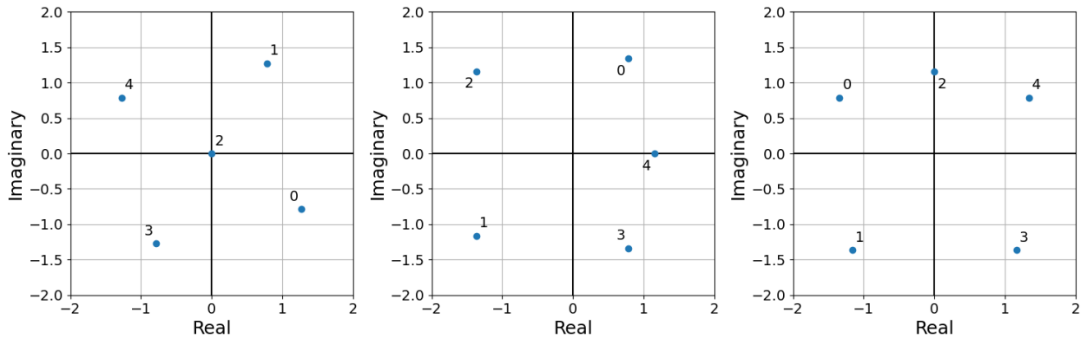


FIGURE 1. $n = 5$ 的所有解（考虑对称性）。

在图 5中，我们绘制了复平面上所有已找到的值，这些值是与 0弗洛凯等谱的势可以取到的组合，范围为 $n = 5$ 至 $n = 8$。用于生成这些表格数据的代码可在 GitHub 上获取[4]。

根据表 2的数据，我们提出对猜想 1的如下完善。**猜想 3**。 当 q 为奇数时， $V(I')$ 仅有正则非零点；当它是大于 6 的偶数时，除对称性外，存在一个重数为 $2^{\frac{q}{2}-2}$ 的奇异点。此外，0处的重数为 $2^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor}$。

6. THE CASE OF GENERAL FULL RANK SUBLATTICES

虽然到目前为止，我们仅讨论了 Γ关于$\Gamma = q_1\mathbb{Z} \oplus q_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus q_d\mathbb{Z}$和 $q_i \in \mathbb{Z}^+$的周期势，但更一般情形下的问题也值得研究：

[4]mattfaust.github.io/FloIsoDL/flz.m2

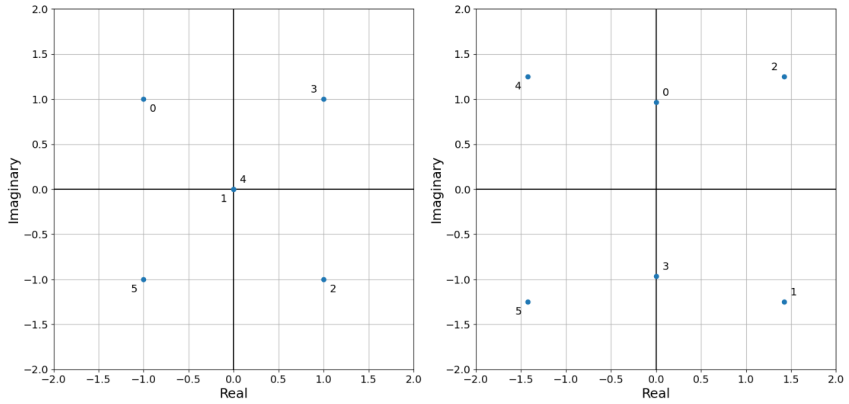


FIGURE 2. $n = 6$的非零奇异解。

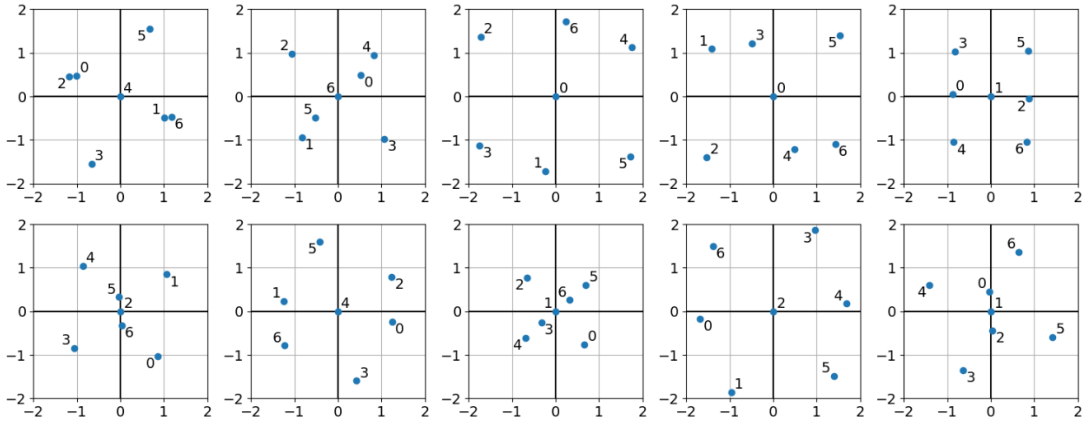


FIGURE 3. 在对称性意义下， $n = 7$ 的所有特化解。

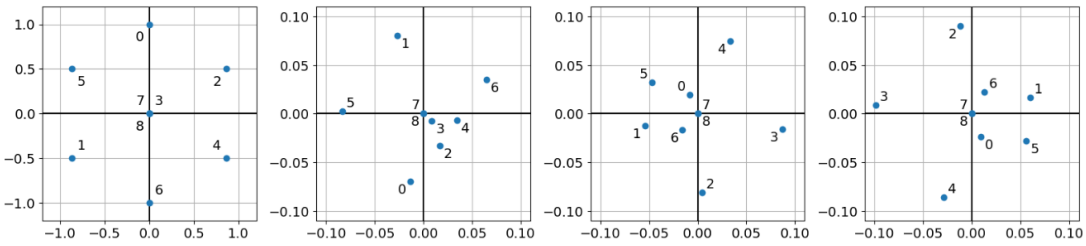


FIGURE 4. 在对称性意义下， $n = 9$所有连续两个零的解 ry.

势，即对 $\Gamma = \mathbf{q}_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{q}_d\mathbb{Z}$ for $\mathbf{q}_i \in \mathbb{Z}^d$具有 Γ周期性的势，其中 Γ 是 $\mathbb{Z}^d$的一个满秩子格。在这种情况下，弗洛凯矩阵可通过与第 1 节所述相同的过程得到，唯一的区别是，我们考察满足弗洛凯-布洛赫边界条件 $f(n + \mathbf{q}j) = e^{2\pi i k_j} f(n)$（其中 $n \in \mathbb{Z}^d$、$k_j \in [0, 1)$）的函数 f： $\mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ 上 $\Delta + V$ 的谱，以及 $j = 1$、2、.....、d。如果对于某些整数 c_i， $\mathbf{q}_i = c_i\mathbf{e}_i$ ，那么我们就回到了第 1 节的情形。

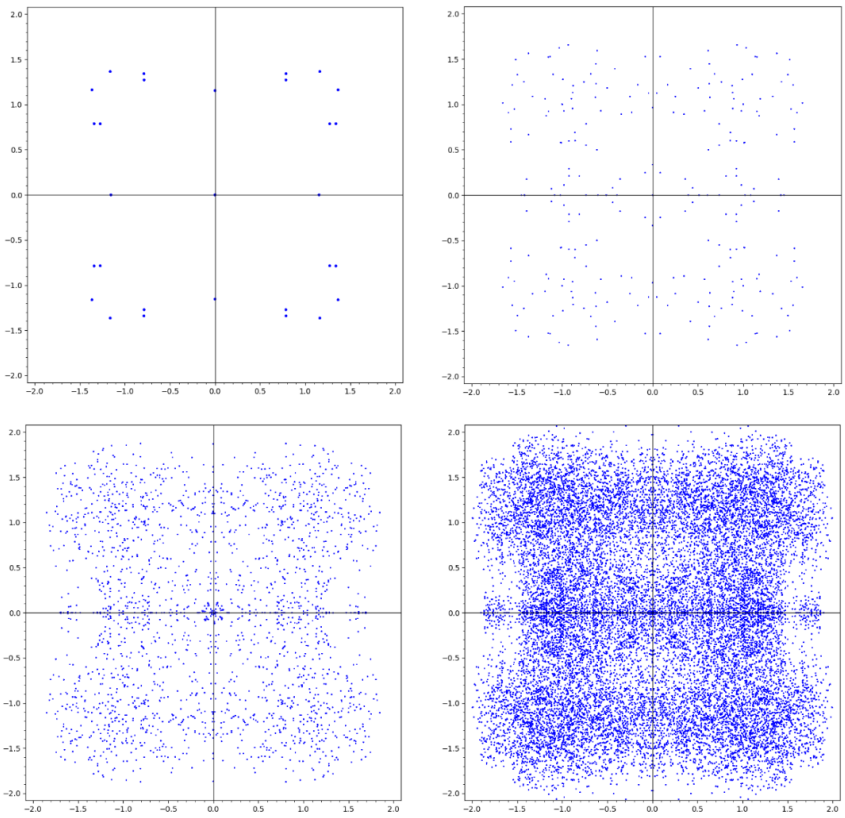


FIGURE 5. $n=5$、 $n=6$、 $n=7$和 $n=8$的所有解。

注意，当 $\Gamma = q_1\mathbb{Z} \oplus q_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus q_d\mathbb{Z}$ 对于 $q_i \in \mathbb{Z}_+$时，根据 [7], 当 $\prod_{i=1}^{d} q_i > 3^d$时，那么无论 Γ 是什么，由于一个 q_i 必须大于3，将存在与Γ-周期势弗洛凯等谱的**零势**。在更一般的情形下，允许 q_i成为 $\mathbb{Z}^d$中的向量，不存在类似的界，使得一旦超过该界，就能推出存在与**零势**弗洛凯等谱的非零势。现在我们来证明这一点。

定理6.1。 对于每个 $d>1$ 和 $n \in \mathbb{Z}_+$，都存在 $\mathbb{Z}^d$的一个满秩子格 Γ ，满足 $|\mathbb{Z}^d/\Gamma| > n$ ，使得与**零势** 弗洛凯等谱的唯一 Γ-周期势是**零势**。

证明。 我们通过给出具有此性质的显式周期来证明这一断言。

对于 $d=2$，考虑一个相对于 $\Gamma = \mathbf{q}_1\mathbb{Z} \oplus \mathbf{q}_2\mathbb{Z}$ 周期的势，其中$\mathbf{q}_1 = (a,\ 0)$ 对某个整数 $a>2$ 成立，且 $\mathbf{q}_2 = (1,\ 1)$[5]。容易证明，在这种情况下，我们得到如下形式的矩阵：

$$L_V = \begin{pmatrix} V(1) & 1+z_2^{-1} & 0 & \dots & 0 & z_1^{-1}(1+z_2) \\ 1+z_2 & V(2) & 1+z_2^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+z_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1+z_2 & V(a-1) & 1+z_2^{-1} \\ z_1(1+z_2^{-1}) & 0 & \dots & 0 & 1+z_2 & V(a) \end{pmatrix}.$$

[5]据我们所知，这一族最早出现在 [22] ，与其异常带边行为有关。

注意到设定 $z_2 = -1$ 后我们得到一个对角矩阵，可知这一周期中唯一与 0 弗洛凯等谱的势是 0 （因为谱不变量理想仅由第一组 a 初等对称多项式构成）。更一般地，这意味着，对于任意关于该格周期的势，与其弗洛凯等谱的势必定是它的逐坐标置换；也就是说，如果 V' 与 V 弗洛凯等谱，那么存在一个 $\sigma \in S_a$，使得 $V'(i) = V(\sigma(i))$. 当 $a = 2$ 时同样如此，尽管弗洛凯矩阵的形式略有不同。

对于 $d > 2$，考虑一个 Γ-周期势，使得 $\Gamma = \mathbf{q}_1\mathbb{Z} \oplus \mathbf{q}_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{q}_d\mathbb{Z}$ 其中 $\mathbf{q}_1 = (a, 0, 0, \ldots, 0)$、$\mathbf{q}_2 = (1, 1, 0, \ldots, 0)$、$\mathbf{q}_3 = (1, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ . . .，以及 $\mathbf{q}_d = (1, 0, \ldots, 0, 1)$，其中 $a \in \mathbb{Z}^+$。矩阵具有类似的形式，只需将每个 $1 + z_2$ 替换为$1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_d$，并将每个 $1 + z_2^{-1}$替换为 $1 + z_2^{-1} + z_3^{-1} + \cdots + z_d^{-1}$。由此可知，求解满足 $z_2 + \cdots + z_d = z_2^{-1} + \cdots + z_d^{-1} = -1$ 的 z_2, ..., z_d 的值，会得到与 $d = 2$ 情形相同的结论。□

注意，当 $\Gamma = q_1\mathbb{Z} \oplus q_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus q_d\mathbb{Z}$ 对于 $q_i \in \mathbb{Z}^+$ 时，一个与 0 弗洛凯等谱的非零 $q_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$周期势可以扩展为一个与 0 弗洛凯等谱的非零 Γ周期势（因为 Γ 是 $q_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ 的子群）。更多详情请参见 [7, 第4节。2] 当对于某个整数 $a > 1$ 有 $\Gamma = (a, 0)\mathbb{Z} \oplus (1, 1)\mathbb{Z}$ 时，对于任意整数 $b > 1$，Γ 都不是 $b\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$ 的子群。这引出了下面的问题。

问题 1. 对于 $\mathbb{Z}^d$周期网格图，分类所有满足以下条件的周期 Γ ：存在与离散拉普拉斯算子弗洛凯等谱的非零 Γ周期势。

问题 1 在 $d = 1$ [7]的情形下已得到解决，但对于 $d \geq 2$仍未解决。即使在 $\Gamma = \mathbf{q}_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{q}_d\mathbb{Z}$ 的情形下，$\mathbf{q}_i = c_i e_i$ 对于 $c_i \in \mathbb{Z}$，问题 1 对于 $d > 2$仍未解决；其障碍在于所有 c_i 均为 3 的情形。在问题 1的这两个版本中，相应的谱不变量理想通常包含比初等对称多项式的扰动更多的生成元。

我们简要讨论 $d = 2$时的一般情形。唯一不是 $q\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Z} \oplus q\mathbb{Z}$ 的子群、且对所有 $q > 3$ 都成立的满秩子格，其埃尔米特标准形如下：$(a, 0)\mathbb{Z} \oplus (b, c)\mathbb{Z}$，其中 a, b, c 满足 $0 \leq b < a$ 且 $\gcd(a, b)$ $c \in \{1, 2, 3\}$。我们对 a, b, c 的所有可能组合进行了符号检验，其中 $ac \leq 8$，未发现与**零势**等谱的非零势实例。

Acknowledgments

本研究部分是在实验数学暑期本科生研究所（SURIEM）开展的，并部分获得美国国家科学基金会 DMS-2244461 和密歇根州立大学的资助。第一位署名作者部分获得美国国家科学基金会 DMS-2052519 的资助。作者感谢 Robert Bell 博士组织 SURIEM。Faust 感谢刘文才向他介绍这一问题。

References

[1] H. Abdul-Rahman、J. Fillman、C. Fischbacher 和 W. Liu。多维周期薛定谔算子的尖锐多项式速度衰减界，2025年。 ¨2

[2] L. Alon、G. Berkolaiko 和 M. Goresky。图的磁扰动环面上特征值的光滑临界点，2025年。2[3] L. Alon 和 M. Goresky。离散磁算子的莫尔斯理论与图的节点计数分布。《谱理论杂志》，13(4):1225–1260，2023年。2[4] D. J. Bates、J. D. Hauenstein、A. J. Sommese 和 C. W. Wampler。Bertini：数值代数几何软件。可通过 bertini.nd.edu 获取，永久 DOI：dx.doi.org/10.7274/R0H41PB5。10[5]G. Berkolaiko 和 P. Kuchment。《量子图导论》，《数学调查与专著》第186卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2013年。2[6] J. Chu、K. Lyu 和 C.-F. Yang。离散周期薛定谔算子的弱可分性与部分费米等谱性，2025。2[7] J. Cobb、M. Faust 和 A. Kretschmer。逆特征值问题、Floquet 等谱性与希尔伯特–周态射。2026年。2, 13, 14[8] D. Cox、J. Little 和 D. O’Shea。《理想、代数簇与算法》。《数学本科教材》。施普林格，纽约，第三版，2007年。计算代数几何与交换代数导论。4, 6[9] D. A. Cox、J. Little 和 D. O’Shea。《运用代数几何》，《数学研究生教材》第185卷。施普林格，纽约，第二版，2005年。6[10] N. Do、P. Kuchment 和 F. Sottile。离散周期算子色散关系的一般性质。《数学物理杂志》，61(10):103502，19，2020年。2[11] M. Faust 和 J. L. Garcia。周期图色散多项式的不可约性。《SIAM应用代数与几何杂志》，9(1):83–107，2025年。2[12]M. Faust 和 I. Kachkovskiy。一般势下离散周期图算子不存在平带，2025。2[13] M. Faust 和 W. Liu。周期图算子的稀有平带，2025。2[14] M. Faust、W. Liu 和 E. Luo。二维离散周期薛定谔算子的谱带函数极值。《数学物理杂志》，66(6):062102，2025年6月。2[15] M. Faust、W. Liu、R. Matos、J. Robinson、J. Plute、Y. Tao、E. Tran 和 C. Zhuang。离散周期薛定谔算子零势的 Floquet 等谱性。《数学物理杂志》，65(7):论文编号073501，9，2024年。2, 4, 9, 10[16] M. Faust、J. Robinson 和 F. Sottile。周期图的临界点次数，2025。2[17]M. Faust 和 F. Sottile。离散周期算子的临界点。《谱理论杂志》，14(1):1–35，2024年。[18] M. Faust 和 F. Sottile。通过角点研究谱边缘猜想，2025。2[19] J. Fillman。强耦合极限下周期图算子的谱的测度，2025。2[20] J. Fillman、W. Liu 和 R. Matos。有限程薛定谔算子的Bloch簇不可约性。《泛函分析杂志》，283(10):论文编号109670，22，2022年。2[21]J. Fillman、W. Liu 和 R. Matos。周期图算子的费米簇的代数性质。《泛函分析杂志》，286(4):110286，2024年。2

[22]N. Filonov 和 I. Kachkovskiy。离散周期算子的谱带。《数学物理通讯》，405(2)：第 21 号论文，17 页，2024年。2, 13[23] L. Fisher、W. Li 和 S. P. Shipman。包含堆叠石墨烯的多层量子图的可约费米面。《数学物理通讯》，385(3)：1499–1534，2021年。2[24]S. Friedland。逆特征值问题。《线性代数及其应用》，17(1)：15–51，1977年。7[25]W. Fulton。《代数曲线：代数几何导论》。高级经典丛书。Addison-Wesley，雷德伍德城，加利福尼亚州，1989年。7[26] D. R. Grayson 和 M. E. Stillman。Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。网址：http://www2.macaulay2.com。10[27]B. Hatinoˇglu、J. Eakins、W. Frendreiss、L. Lamb、S. Manage 和 A. Puente。离散薛定谔算子的 Ambarzumian 型问题。《复分析与算子理论》，15(8)：第 118 号论文，13 页，2021年。2[28] J. D. Hauenstein 和 F. Sottile。算法 921：alphaCertified：多项式系统解的认证。《ACM 数学软件汇刊》，38(4)：第 28 号文章，20 页，2012年。10[29] T. Kappeler。离散格上的等谱周期势。I。《杜克数学杂志》，57(1)：135–150，1988年。2, 7[30] T. Kappeler。离散格上的等谱势。II。《应用数学进展》，9(4)：428–438，1988年。2, 3[31] T. Kappeler。离散格上的等谱势。III。《美国数学会汇刊》，314(2)：815–824，1989年。2[32] P. Kuchment。周期椭圆算子概述。《美国数学会通报》（新系列），53(3)：343–414，2016年。2[33] P. Kuchment。色散关系（布洛赫簇）和费米面的解析与代数性质：已知与未知。《数学物理杂志》，64(11)：第 113504 号论文，11 页，2023年。2[34] P. A. Kuchment。周期差分方程的弗洛凯理论。载于《多复变量中的几何与代数方面》（切特拉罗，1989年），第 8 卷（研讨会会议录），第 201–209 页。EditEl，伦德，1991年。2[35]K. Lee。NumericalCertification：一个 Macaulay2 软件包。版本 1.6。网址：https://github.com/Macaulay2/M2/tree/stable/M2/Macaulay2/packages。10[36] A. Leykin 和 R. Krone。NumericalAlgebraicGeometry：一个 Macaulay2 软件包。版本 1.24。网址为 “http://people.math.gatech.edu/ aleykin3/NAG4M2”。10[37] A. Leykin 和 R. Krone。数值代数几何。《代数与几何软件杂志：Macaulay2》，3，2011年。10[38] W. Li、M. Magee、M. Sabri 和 J. Thomas。极大阿贝尔覆盖的特征值，2025。2[39] W. Li 和 S. P. Shipman。平面周期图算子的费米面不可约性。《数学物理快报》，110(9)：2543–2572，2020年。2[40] W. Liu。离散薛定谔算子嵌入特征值的判据。《国际数学研究通知》，(20)：15803–15832，2021年。2[41] W. Liu。具有可分离势的离散周期薛定谔算子的费米等谱性，载于 $\mathbb{Z}^2$。《数学物理通讯》，2022年11月。2

[42] W. Liu。离散周期薛定谔算子的费米簇专题。《数学物理杂志》，63(2)：第 023503 号论文，13 页，2022年。2[43] W. Liu。周期图算子的弗洛凯等谱性。《微分方程杂志》，374：642–653，2023 年。2[44]W. Liu。周期图算子的布洛赫簇与量子遍历性。《数学分析杂志》，153(2)，2024年。2[45] W. Liu。离散周期薛定谔算子的费米等谱性。《纯粹与应用数学通讯》，77(2)：1126–1146，2024年。2[46] W. Liu。任意维数下几何博格定理的证明。即将在《欧洲数学会杂志》发表，2026年。2[47] T. Mckenzie 和 M. Sabri。周期图的量子遍历性。《数学物理通讯》，403(3)：1477–1509，2023年11月。2[48] V. G. Papanicolaou。具有复系数的周期雅可比算子。《谱理论杂志》，11(2)：781–819，2021 年。7[49] M. Sabri 和 P. Youssef。周期图的平带。《数学物理杂志》，64(9)：第 092101 号论文，23 页，2023年。2[50]N. Saburova。周期图上离散薛定谔算子的谱不变量，2025。2[51]N. Saburova 和 D. Martynov。六角晶格上薛定谔算子的零势的弗洛凯等谱性。载于《2025年衍射日（DD）》，第 188–193 页，2025年。2[52] S. P. Shipman。非对称双层量子图算子的可约费米面。《谱理论杂志》，10(1)：33–72，2020年。2[53]S. P. Shipman 和 F. Sottile。周期图算子的代数方面。即将发表于《算子理论》（第二版），2026年。2[54] T. J. Spier。万有覆盖的特征值与匹配多项式，2025。2

Matthew Faust, Department of Mathematics, Michigan State University, East Lansing,MI, USA电子邮箱：mfaust@msu.eduLeo Friedman, Department of Mathematics and Statistics, Pomona College, Clare-mont, CA, USA电子邮箱：ldfq2023@mymail.pomona.eduGavin O'Malley, Department of Mathematics, Michigan State University, East Lans-ing, MI, USA电子邮箱：omalle93@msu.edu Rolando Ramos, Department of Mathematics, Michigan State University, East Lans-ing, MI, USA电子邮箱：ramosrol@msu.eduAaryan Sharma, Department of Mathematics, Texas A&M University, College Station,Texas, USA电子邮箱：aaryans16@tamu.edu