arXiv:2602.08313v1 [math.AC] 9 Feb 2026

形式幂级数矩阵对角化算法

ZIHAO DAI、梁浩、卢景瑜和支立宏　　支立宏

摘要。本文研究形式幂级数环上矩阵的酉对角化。我们的主要结果表明，正规矩阵可酉对角化，当且仅当其最小多项式在该环上完全分裂，且相应的谱投影的元素属于该环。在此刻画的基础上，我们为判定代数簇的正则局部环上矩阵的酉对角化性建立了一种算法。该算法的一个核心环节是判定多项式是否在形式幂级数环上分裂的判定过程；我们利用素分解以及分歧理论中整闭包的相对光滑性等技术，建立了这一判定过程。

1. 引言

我们研究元素属于多参数形式幂级数环的矩阵的对角化问题。记

$$\mathbf{C} := \mathbb{C}[\![x_1, \ldots, x_m]\!]$$

复数域上以 m 个变量构成的形式幂级数环。我们给$\mathbf{C}$ 赋予一个对合 $*$，该对合固定变量，并对系数进行复共轭，即 $c^* := \bar{c}$当 $c \in \mathbb{C}, x_i^* := x_i$时，对于 $i = 1, \ldots, m.$。此对合自然延拓到矩阵代数 $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$。对于矩阵 $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,\ j \leqslant n} \in \mathrm{Mat}_n(C)$，我们将其伴随定义为 $A^* := (a_{ji}^*)_{1 \leqslant i,\ j \leqslant n}$. 如果矩阵 $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ 与其伴随可交换，则称其为**正规矩阵**， $AA^* = A^*A$. 如果矩阵 $U \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ 满足 $UU^* = U^*U = I_n,$，则称其为**酉矩阵**，其中 I_n表示单位矩阵。我们用 $\mathbb{U}_n(\mathbf{C})$表示 $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ 中的酉矩阵群。

本文研究形式幂级数环上正规矩阵的酉对角化。矩阵 $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ 在存在酉矩阵 U和对角矩阵 D使得 $A = UDU^*$.时称为可酉对角化。形式幂级数环上矩阵的对角化问题自然地出现在经典矩阵理论中：谱定理保证， $\mathbb{C}$上的每个正规矩阵都可酉对角化；此外，该问题也出现在量子力学中，尤其是微扰理论中，因为算子会展开为形式幂级数。经典微扰方法在假设首项的特征子空间非退化的条件下，计算矩阵 A 的对角化。在单变量情形（$m = 1$），简并微扰理论无需这一非退化假设，也能得到酉对角化 [7]。然而，关于多参数形式幂级数矩阵对角化的严格结果仍大多付之阙如。一个主要障碍是，此类正规矩阵的特征值通常无法表示为形式幂级数；它们往往需要用普伊瑟级数展开或更一般的代数扩张来表示。

我们的工作受到 Parusiński 和 Rond 对多参数微扰理论的研究 [26], 的启发。该研究利用 Abhyankar-Jung 定理 [25] 给出了形式幂级数矩阵可对角化的一个充分条件。他们的判据要求最小多项式的判别式是正规交叉除子——也就是说，它是一个单项式乘以一个单位——在此条件下即可推出可对角化。特别地，他们的结果意味着，单变量形式幂级数环上的每个正规矩阵都可对角化。然而，正规交叉条件排除了一些显然可对角化的矩阵，以下简单例子便说明了这一点。

例 1. 对角矩阵的最小多项式的判别式

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

为 $(x_1 - x_2)^2$, , 它不是正规交叉除子。

这一局限表明，探索对角化能力的更一般条件可能会有所裨益。

在这项工作中，我们提出了两项主要贡献：

- **理论刻画**：我们建立了任意形式幂级数环上正规矩阵酉可对角化的充要条件。该结果在定理 1 中予以形式化，将经典谱定理推广到多参数情形，为依赖任意有限个参数的矩阵提供了严格的代数基础。

- **算法构造**：我们为仿射 $\mathbb{C}$-簇在闭正则点处的正则局部环中的矩阵构造了一种构造性算法。其关键是一个可计算的判据（定理 2），它绕开了形式幂级数环中因式分解难以处理的问题：该判据通过特定雅可比矩阵上的满秩条件，刻画最小多项式何时在局部环中完全分裂。这样一来，酉分解的存在性便可归结为简单的秩检验，并且无需在幂级数环中求根即可显式计算。

2. 在$\mathbf{C}$上进行酉对角化的判据

本节将建立在$\mathbf{C}$上进行酉对角化的充要判据。设$\mathbf{R} := \mathbb{R}[\![x_1, \ldots, x_m]\!]$ 为实数域上关于 m 个变量的形式幂级数环，它是$\mathbf{C} = \mathbb{C}[\![x_1, \ldots, x_m]\!]$的对合不变子环。幂级数环$\mathbf{C}$和$\mathbf{R}$是正则局部环，其极大理想分别为 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\mathbf{C}}$ 和 $\mathfrak{m}_{\mathbf{R}}$，二者均由共同的正则局部实参数$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$生成。$\mathbf{C}$ 和$\mathbf{R}$ 中的可逆元群分别为$\mathbf{C}^\times := \mathbf{C} \setminus \mathfrak{m}$和$\mathbf{R}^\times := \mathbf{R} \setminus \mathfrak{m}_{\mathbf{R}}$。我们在$\mathbf{C}^n$ 上赋予标准厄米内积：

$$\langle -, - \rangle : \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \sum a_k b_k^*.$$

对于向量 $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^n$，内积 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$ 始终位于 $\mathbf{R}$ 中。若 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$ 在 $\mathbf{R}$ 中可逆（即在 $\mathbf{C}$中可逆），则我们将 $\mathbf{a}$ 的 $\mathbf{C}$-范数定义为 $\|\mathbf{a}\| := \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \in \mathbf{R}$,

并规范化，使得 $\|\mathbf{a}\|_{(0)} = \|\mathbf{a}\| \bmod \mathfrak{m} > 0$。注意，若 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$ 在$\mathbf{R}$ 中不可逆（例如，若 $\mathbf{a} = [x_1, x_2]^\top$），则 $\sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$ 不必是 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$中的元素。

定理 1 的证明受经典微扰理论启发，其本质上是一种 Hensel提升过程 [8]。Hensel提升是求解形式幂级数环上方程的强大算法工具，可在非退化假设下逐阶逼近矩阵对角化，从而同时确立其存在性与可计算性。在证明定理 1 时，我们改进了这一方法，以去除非退化假设。此外，我们在第 3 节的主要结果采用了更精巧的变体（亨泽尔化）。由于亨泽尔思想始终是核心，我们先回顾基本设置。

考虑情形 $m = 1$，并令 $A = A_0 + A_1 x_1$ 为满足 $A_0, A_1 \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 的 $A = A_0 + A_1 x_1$。假设特征多项式 $\chi_{A_0}(t)$ 有 n 个互不相同的根（非退化情形）。对于 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$，令 $e_k(\mathbf{y})$ 表示第 k 个初等对称多项式。定义多项式映射

$$f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n, \quad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \mapsto (-e_1(\mathbf{y}), \ldots, (-1)^n e_n(\mathbf{y})).$$

由于 A_0 没有重特征值，切映射 $\mathrm{d}f$ 在原点 $o \in \mathbf{C}^n$处满秩。因此，适用于形式幂级数环的隐函数定理（IFT）保证 $\chi_A(t) \in \mathbf{C}[t]$ 在 $\mathbf{C}$ 上完全分裂。从 A_0 对应于特征值 $\lambda \in \mathbb{C}$的归一化特征向量 $\bar{v} \in \mathbb{C}^n$ 出发，牛顿-亨泽尔迭代按次数逐步提升 $\bar{v}$，得到 $v \in \mathbf{C}^n$，它是A的归一化特征向量，对应于 $\lambda \in \mathbf{C}$，且满足 $\lambda \equiv \lambda$模 $\mathfrak{m}_{\mathbf{C}}$。

如果 $\chi_{A_0}(t)$ 有多个根（退化情形），且 $\mathrm{rank}(\mathrm{d}f|_o) < n$，那么隐函数定理失效，牛顿-亨泽尔迭代算法也无法定义，因为它要求对 $\mathrm{d}f|_o$求逆。要处理此类退化情形，需要采用更精细的技术 [16, 30, 31]。

给定正规矩阵 $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$，假设 A 有 d 个不同特征值$\lambda_k \in \mathbb{F} := \mathrm{Frac}(\mathbf{C})^{\mathrm{alg}}$，重数为 n_k，$k = 1, \ldots, d$和 $\sum n_k = n$。下面的定理刻画了 A 何时可酉对角化。

定理 1. </style}正规矩阵 在酉群($\mathbf{C}$) 的伴随作用下可对角化，当且仅当 A 的特征多项式在 $\mathbf{C}$ 上完全分裂，且 A 的各特征子空间对应的投影算子的所有矩阵元素都属于 $\mathbf{C}$，也就是说，存在 $\Pi_k \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$，使得

$$\Pi_k^* = \Pi_k,\ \Pi_k^2 = \Pi_k,\ \sum_k \Pi_k = I_n,\ \Pi_k \Pi_{k'} = 0 \ \textit{if}\ k \neq k', \tag{1}$$

并且 $A = \sum_k \lambda_k \Pi_k$。

证明。假设 A 可对角化，即存在酉矩阵 $U \in \mathbb{U}_n(\mathbf{C})$ 和对角矩阵 $D \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$，使得 $A = UDU^{-1}$。D 的对角元素是 A的特征值，因此 A, $\chi_A \in \mathbf{C}[t]$ 的特征多项式在 $\mathbf{C}$上分裂。对坐标作适当置换后，我们写作$D = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \ldots, \lambda_d I_{n_d})$，其中 n_k 是特征值 λ_k的重数，并且$\sum_k n_k = n$。令

$$\Pi_k := U\, \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, I_{n_k}, 0, \ldots, 0) U^{-1} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C}).$$

直接验证可知，(1) 成立。这里，Π_k 是投影到与特征值 λ_k相关联的特征子空间 V_k 上的正交投影算子。

反过来，假设 $A = \sum_k \lambda_k \Pi_k$ 满足 (1)，其中 Π_k 是投影到特征值 λ_k的特征子空间 V_k 上的投影算子，并且当 $k \neq k'$时， $\Pi_k \Pi_{k'} = 0$ 。正交投影算子 $\Pi_k \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ 的性质表明 $\mathbf{C}^n = \bigoplus_k (\Pi_k \mathbf{C}^n)$，且每个 $V_k = \Pi_k \mathbf{C}^n$ 都是有限投射$\mathbf{C}$-模。由于 $\mathbf{C}$ 是一个局部环，可推知每个 V_k 都是自由$\mathbf{C}$-模。我们需要从 Π_k中提取 V_k 的一个正交$\mathbf{C}$-基。记 $\Pi_k(0) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 为Π_k 模 $\mathfrak{m}$的余数。于是有

$$\Pi_k^*(0) = \Pi_k(0), \Pi_k(0)^2 = \Pi_k(0), \sum_k \Pi_k(0) = I_n, \Pi_k(0)\Pi_{k'}(0) = 0$$

当 $k \neq k'$ 时。这是 $\mathbb{C}^n$ 的正交分解。我们将经典的 $\mathbb{C}$ 上的 Gram-Schmidt 正交化推广到$\mathbf{C}$ 上。在 $\mathbb{C}$ 上应用 Gram-Schmidt 正交化，我们得到 $\mathbb{C}^n$ 中 $\Pi_k(0)$ 的像的一个标准正交 $\mathbb{C}$-基，记作 $e_{k,1}, \ldots, e_{k,n_k} \in \mathbb{C}^{n_k}$。我们可以写成 $e_{k,j} = \Pi_k(0) c_{k,j}$，其中 $c_{k,j} \in \mathbb{C}^n$ 且 $\|c_{k,j}\| > 0$。

由于

$$\langle \Pi_k c_{k,j},\, \Pi_k c_{k,j} \rangle \equiv \|e_{k,j}\|^2 = 1 \pmod{\mathfrak{m}},$$

这个内积是$\mathbf{R}$中的一个单位。根据亨泽尔引理，存在唯一的元素$w_{k,j} \in \mathbf{R}^\times$ ，使得

$$w_{k,j}^2 = \langle \Pi_k c_{k,j},\, \Pi_k c_{k,j} \rangle\,,\ w_{k,j}(0) = 1.$$

令 $E_{k,j} := \frac{\Pi_k c_{k,j}}{w_{k,j}}$ 。$E_{k,j} \in \mathbf{C}^n$ ，因为 $w_{k,j} \notin \mathfrak{m}$ 在$\mathbf{C}$中可逆。$E_{k,j}$ 的定义保证了

$$\|E_{k,j}\| = 1, \quad \langle E_{k,j},\, E_{k,j'} \rangle \equiv \delta_{j,j'} \pmod{\mathfrak{m}}, \tag{2}$$

其中 $\delta_{j,j'}$ 表示克罗内克 δ，当 $j = j'$ 时等于 1，否则等于 0。方程 (2) 表明，对任意 $j = 1, \ldots, n_k$，$\mathrm{spanc}(E_{k,j'})_{j' \leqslant j}$是一个自由 $\mathbf{C}$-模，这利用了$\mathbf{C}$ 是一个局部环这一事实。

令 $\tilde{e}_{k,1} := E_{k,1}$。递归定义 $\tilde{e}_{k,j} \in \mathrm{spanc}(E_{k,j'})_{j' \leqslant j} \setminus \mathrm{spanc}(E_{k,j'})_{j' < j}$如下：

$$\tilde{e}_{k,j} := \frac{E_{k,j} - \sum_{j'<j} \langle E_{k,j},\, \tilde{e}_{k,j'} \rangle\, \tilde{e}_{k,j'}}{\left\| E_{k,j} - \sum_{j'<j} \langle E_{k,j},\, \tilde{e}_{k,j'} \rangle\, \tilde{e}_{k,j'} \right\|}. \tag{3}$$

我们通过归纳法验证 $(\tilde{e}_{k,j'})_{j'=1}^{n_k}$ 的定义是有效的，并且给出了自由模 $\Pi_k \mathbf{C}^n$ 的一组正交归一 $\mathbf{C}$-基。$\tilde{e}_{k,1}$ 定义良好。假设对于 $j' < j$，$(\tilde{e}_{k,j'})_{j' < j}$ 定义良好，并给出了自由模 $\mathrm{spanc}(E_{k,j'})_{j' < j}$的一组正交归一 $\mathbf{C}$-基。那么我们有

$$E_{k,j} - \sum_{j'<j} \langle E_{k,j},\, \tilde{e}_{k,j'} \rangle\, \tilde{e}_{k,j'} \equiv e_{k,j} \pmod{\mathfrak{m}},$$

这意味着

$$\left\| E_{k,j} - \sum_{j'<j} \langle E_{k,j},\, \tilde{e}_{k,j'} \rangle\, \tilde{e}_{k,j'} \right\| \in \mathbf{C}^\times.$$

因此，$\tilde{e}_{k,\,j}$ 定义良好。由归纳法可知，方程（3）意味着 $E_{k,\,j}$可以用 $(\tilde{e}_{k,\,j'})_{j' \leqslant j}$ 作 $\mathbf{C}$-线性表示，反之亦然，这保证了 $(\tilde{e}_{k,\,j'})_{1 \leqslant j' \leqslant j}$构成 $\mathrm{spanc}(E_{k,\,j'})_{j' \leqslant j}$ 的一个正交归一 $\mathbf{C}$-基。

令 U 为矩阵，其列由集合 $(\tilde{e}_{k,\ j})_{k,\ j}$ 中的元素给出，并按如下顺序排列：

$$U \coloneqq [\tilde{e}_{1,1}, \dots, \tilde{e}_{1,n_1}, \dots, \tilde{e}_{d,1}, \dots, \tilde{e}_{d,n_d}].$$

直接计算即可验证

$$AU = U \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_d I_{n_d}).$$

□

备注 *1*。利用自然嵌入 $C \to Frac(C)$，我们将正规矩阵 A 视为 $Mat_n(Frac(C))$ 中的元素。如果特征多项式 $\chi_A(t)$ 在 C 上（等价地，在 $Frac(C)$ 上）分裂，我们可以构造投影算子 $\Pi_k \in Mat_n(Frac(C))$，使其满足 *(1)* 和 $A = \sum_k \lambda_k \Pi_k$。这些投影称为 A的谱投影，它们是唯一确定的，并且可以利用 d 个互不相同的根对 $\chi_A(t)$ 进行拉格朗日插值来计算。此外，如果对于所有 k 都有 $\Pi_k \in Mat_n(C)$，那么这一族 $(\Pi_k)_k$ 便构成定理 *1* 所需的谱投影。

正规矩阵 $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ 的酉对角化可以按照下面所述的标准步骤进行计算。

(1) 求出 A 的（首一）最小多项式

$$\mu_A(t) = \chi_A(t) / \gcd(\chi_A(t), \chi_A'(t));$$

将其分解为 $\mathbf{C}[t]$ 上不可约多项式的乘积：

$$\mu_A(t) = p_1(t) \cdots p_d(t).$$

如果任何 $p_k(t)$ 都是非线性的，则返回 **不可对角化**。

(2) 对于 $k = 1, \dots, d$，通过拉格朗日插值计算投影多项式 $P_k(t) \in \mathbf{C}[t]$，使其满足

$$P_k(t) \equiv \delta_{kl} \pmod{p_l(t)}.$$

如果投影矩阵 $\Pi_k = P_k(A)$ 的任何约分后元素的分母不属于 $\mathbf{C}^\times$，则返回 **不可对角化**。

(3) 对于 $k = 1, \dots, d$，求出 $\Pi_k \mathbf{C}^n$ 的标准正交 $\mathbf{C}$-基 B_k（例如，使用施密特正交化）。令 $n_k =$秩为 B_k。返回 $U = (B_1 | \dots | B_d)$ 和 $D =$diag$(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_d I_{n_d})$。

下面我们给出一个例子，它不满足 [26, 定理 2.5] 中给出的充分条件，但仍然可对角化。

例 2. 考虑其酉对角化

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) & -\frac{i}{2}(x_1 - x_2) \\ \frac{i}{2}(x_1 - x_2) & \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \end{pmatrix},$$

在 $\mathbf{C} = \mathbb{C}[\![x_1, x_2]\!]$ 上。A 的特征多项式为

$$\chi_A(t) = t^2 - (x_1 + x_2)t + x_1 x_2,$$

它与最小多项式 $\mu_A(t)$ 相同。其判别式为 $(x_1 - x_2)^2$，这不是 $\mathbf{C} = \mathbb{C}[\![x_1, x_2]\!]$ 的单位。因此，它不满足 *[26, 定理 2.5]* 的充分条件。

对应于 $p_1(t) = t - x_1$ 和 $p_2(t) = t - x_2$的投影多项式为

$$P_1(t) = \frac{t - x_2}{x_1 - x_2}, \quad P_2(t) = \frac{t - x_1}{x_2 - x_1}.$$

计算投影矩阵

$$\Pi_1 = P_1(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \Pi_2 = P_2(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

子空间 $\Pi_1\mathbf{C}^2$ 和 $\Pi_2\mathbf{C}^2$ 的标准正交基分别为

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad and \quad B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此， A 在 $\mathbf{C} = \mathbb{C}[\![x_1, x_2]\!]$ 上的对角化由 $A = UDU^*$ 给出，其中

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \ and \ D = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}.$$

例3. 考虑 *[12,* 例 *6.1]* 中的以下例子

$$A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}.$$

A 的最小多项式为

$$\mu_A(t) = t^2 - (x_1^2 + x_2^2)t.$$

将 $\mu_A(t) = t(t - (x_1^2 + x_2^2))$ 在 C 上分解，其不可约因子为

$$p_1(t) = t, \quad p_2(t) = t - (x_1^2 + x_2^2).$$

与 $p_1(t)$ 和 $p_2(t)$ 对应的投影多项式为

$$P_1(t) = \frac{t}{x_1^2 + x_2^2}, \quad P_2(t) = -\frac{t - (x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2}.$$

计算投影矩阵

$$\Pi_1 = P_1(A) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix},$$
$$\Pi_2 = P_2(A) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\begin{pmatrix} x_2^2 & -x_1x_2 \\ -x_1x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Π_1 和 Π_2 的分母均为 $x_1^2 + x_2^2 \notin \mathbf{C}^\times$. 根据定理 *1*，$A$ 不能在 $\mathbf{C}$ 上酉对角化。

在上述两个例子中，给定矩阵的特征值是 $x_1, \ldots, x_m$ 中的多项式，因此最小多项式 $\mu_A(t)$ 可分解为一次因子的乘积。然而，一般来说，元素属于形式幂级数环的矩阵，其特征值未必能在 $\mathbf{C}$ 上表示为任何显式的有限表达式。

从算法角度来看，要通过有限步骤确定一个矩阵是否能在多参数形式幂级数环上对角化，在计算上是不可行的。核心障碍在于因式分解。形式幂级数环上的因式分解带来了与多项式环中截然不同的计算难题 [17, 9, 10, 11, 18, 19]。尽管 $\mathbf{C}$ 是唯一分解整环 [32, 第 2 章，引理 2。2], 标准工具（如 Puiseux展开 [27] 和 Hensel提升 [8, 36, 16] ）通常只能得到截断近似，而无法得到精确的闭式因子 [35, 2]。为解决这一问题，我们的计算框架聚焦于代数几何局部环；这类局部环可以通过 Mora切锥算法 [22]和标准基方法 [6] 实现有效的有限步算法，同时不牺牲理论上的一般性。

3. 何时特征值是幂级数?

现在假设 A 的条目属于一个由 $\mathbb{C}$-代数簇导出的正则局部环。更确切地说，设 X 是一个维数为 m 、嵌入于 $\mathbb{C}^M$中的不可约仿射 $\mathbb{C}$-簇，并设基点 $o \in \mathbb{C}^M$ 是 X的正则点。用 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_M)$表示 $\mathbb{C}^M$的坐标变量，用 $\mathbf{I}(X)$表示 X 在 $\mathbb{C}^M$中的定义理想。于是， X 的仿射坐标环为

$$\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}[\mathbf{x}]/\mathbf{I}(X).$$

对应于 o 的 $\mathcal{O}_X(X)$ 的极大理想为 $\mathbf{x}\mathcal{O}_X(X)$，而正则局部环 $\mathcal{O}_{X,o}$ 是在 $\mathbf{x}\mathcal{O}_X(X)$ 处对 $\mathcal{O}_X(X)$ 进行局部化所得的局部环。记

$$\mathfrak{m}_{X,o} = \mathbf{x}\mathcal{O}_{X,o}$$

$\mathcal{O}_{X,o}$ 的唯一极大理想为，并以 $K = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{X,o})$ 表示 $\mathcal{O}_{X,o}$ 的分式域。

设 $\mu(t) \in \mathcal{O}_{X,o}[t]$ 是变量 t 上的 $\mathcal{O}_{X,o}$ 中的首一多项式。本节旨在确定 μ 的所有根是否都属于 $\mathfrak{m}_{X,o}$-阿代克完备化$\widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$ $\widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$。这里将 $\mathcal{O}_{X,o}$ 视为变量 m 中的幂级数环 $\mathbf{C}$ ——$\mathfrak{m}_{X,o}$ 的正则局部参数——上的 $\mathbb{C}$ 。

写作

$$\mu(t) = t^d + c_1 t^{d-1} + \cdots + c_d,$$

连同 $c_k \in \mathcal{O}_{X,o}$, $k = 1, \ldots, d$。引入变量 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d)$ 以表示 μ 的根。对于 $k = 1, \ldots, d$， 记

$$e_k(\mathbf{y}) = \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant d} y_{j_1} \cdots y_{j_k}.$$

$\mathbf{y}$ 中的第 k 个初等对称多项式。设 J 为 $\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]$ 中由韦达多项式生成的理想

$$\xi_k(\mathbf{y}) \coloneqq e_k(\mathbf{y}) - (-1)^k c_k, \text{ for } k = 1, \ldots, d. \tag{4}$$

商环 $\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/J$ 称为 μ 在 $\mathcal{O}_{X,o}$ 上的 泛分解代数 [3,15] 或 分裂代数 [5, 13, 33, 14] 。该代数编码了关于 μ 的根的信息，而不假定其具体形式。设 $\mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/J)$ 表示 $\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]$-模 $\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/J$ 的相伴素理想集合。我们有如下结果。

命题 1. *$\mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/J)$ 恰好是 $\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]$，中包含 J 的极小素理想，并且在变量 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d)$ 的置换下共轭。此外，$\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]$ 在任一 $Q \in \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/J)$ 处的剩余域 $\kappa(Q)$ 是 $\mu(t)$ 在 $\mathcal{O}_{X,o}$ 的分式域 K 上的分裂域。*

证明。众所周知，$\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]$ 在变量 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d)$ 上受置换 Σ_d 作用时的不变子代数为

$$\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]^{\Sigma_d} = \mathcal{O}_{X,o}[e_1(\mathbf{y}), \ldots, e_d(\mathbf{y})],$$

在 $\mathcal{O}_{X,o}$ 上的对称多项式代数本身是关于变量 $e_1(\mathbf{y}), \ldots, e_d(\mathbf{y})$ 的 $\mathcal{O}_{X,o}$ 多项式代数。此外，$\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]$ 是一个有限自由的 $\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]^{\Sigma_d}$-模，其秩为 $d!$ ，基为 $y_1^{k_1} \cdots y_d^{k_d}$for $0 \leqslant k_j < j$and $1 \leqslant j \leqslant d$ [3, §6, Théorème 1]。现在可以看出， $J^c := J \cap \mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]^{\Sigma_d}$ 是一个由线性多项式 (4) 生成的高度为 d 的素理想，而 J^c 的商整环为

$$\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]^{\Sigma_d}/J^c \cong \mathcal{O}_{X,o}.$$

因此，整扩张 $\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]^{\Sigma_d} \subseteq \mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]$ 的上升定理表明， J 的高度也为 d。

由于 $\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]$ 是一个 Cohen-Macaulay环，且 J 由 d 个元素生成 (4)，无混合定理 [20, 定理 17.6] 推出 J 是无混合的；也就是说，Ass($\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/J$) 恰好是包含 J 的 $\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]$ 中的极小素理想。包含 J 的极小素理想恰好是位于 J^c 之上的素理想。因此，伽罗瓦理论推出，Ass($\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/J$) 在变量 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d)$ 上的置换作用下互为共轭。域论中有一个众所周知的事实：对于任意一个 $Q \in \text{Ass}(\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/J)$，$\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]$ 在该处的剩余域 $\kappa(Q)$ 是 $\mu(t)$ 在 $\mathcal{O}_{X,o}$ 的分式域 K 上的分裂域。□

固定一个关联素理想 $Q \in \text{Ass}(\mathcal{O}_{X,\ o}[\mathbf{y}]/J)$，并令

$$L = \kappa(Q)$$

为 $\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]$ 在 Q 处的剩余域。则 L 是 $K = \widehat{\text{Frac}}(\mathcal{O}_{X,o})$ 的有限伽罗瓦扩张。由于 $\mathcal{O}_{X,o}$ 和 $\mathcal{O}_{X,o}$ 都是正则局部环，因此它们也是正规整环。令 $\mathcal{O}_{X,o}^{L}$ 为 $\mathcal{O}_{X,o}$ 在 L 中的整闭包。由于 $\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/Q$ 是 $\mathcal{O}_{X,o}$ 的整扩张，且其分式域为 $L = \text{Frac}(\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/Q)$，因此 $\mathcal{O}_{X,o}^{L}$ 也是 $\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/Q$ 在 L 中的整闭包 $\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/Q$。于是，我们得到以下判据，它以 $\mathcal{O}_{X,o}^{L}$ 关于 $\mathcal{O}_{X,o}$ 的任意有限表示所对应的雅可比矩阵来表述。

定理 2. 设 $\mathcal{O}_{X,\ o}^{L} = \mathcal{O}_{X,\ o}[z_1, \ldots, z_N]/Q'$ 是 $\mathcal{O}_{X,\ o}^{L}$ 关于 $\mathcal{O}_{X,\ o}$ 的有限表示，其中 Q' 由 $g_1, \ldots, g_D \in \mathcal{O}_{X,\ o}[z_1, \ldots, z_N]$ 生成。那么我们必然有 $D \geqslant N$。此外，$\mu(t)$ 的所有根都属于 $\mathcal{O}_{X,\ o}$，当且仅当雅可比矩阵

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_D)}{\partial(z_1, \ldots, z_N)} \bmod \mathfrak{n}$$

在 $\kappa(\mathfrak{n})^{D \times N}$ 中具有满秩 N。

为了证明该定理，我们需要引入一些记号与引理。

引理1. 下列陈述等价：

(1) $\mu(t)$ 在 K 上的所有根都属于 $\widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$；

(2) 存在一个 $\mathcal{O}_{X,o}$-代数映射 $\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/Q \to \widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$；

(3) 存在一个 K-代数映射 $L \to \text{Frac}(\widehat{\mathcal{O}_{X,o}})$；

(4) 存在一个 $\mathcal{O}_{X,o}$-代数映射 $\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/Q \to \mathcal{O}_{X,o}$。

此外，若上述任一陈述成立，则其中的代数映射是单射。

证明。(1)⇒(2)：若 $\mu(t)$ 的所有根都属于 $\widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$，则存在一个 $\widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$-代数映射 $\varphi : \mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}] \to \widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$，将 $\mathbf{y}$ 映到 $\widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$ 中 $\mu(t)$ 的根。φ 的核位于 $\mathcal{O}_{X,o}$ 的零理想之上，这意味着 $\ker\varphi$ 在 $\mathbf{y}$ 的置换下与 Q 共轭。因此，存在一个 $\mathcal{O}_{X,o}$-代数单射 $\widetilde{\varphi} : \mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/Q \to \mathcal{O}_{X,o}$。

(2)⇒(1)：如果存在一个 $\mathcal{O}_{X,o}$-代数映射 $\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/Q \to \widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$，那么其核位于 $\widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$ 的零理想之上，这意味着 $\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/Q \to \widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$ 是一个单射，并且 $\mathbf{y}$ 模 Q 的像是 $\mu(t)$ 在 K 上的所有根。

(2)⇒(3)：(2) 中的 $\mathcal{O}_{X,o}$-代数映射 $\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/Q \to \mathcal{O}_{X,o}$ 诱导出分式域 $L \to \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{X,o})$ 在 K 上的域扩张。

(3)⇒(1)：若存在一个 K-代数映射 $L \to \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{X,\,o})$，则 $\mathbf{y}$ 的像就是 $\mu(t)$ 在 K 上的全部根。

(3)⇒(4)：回想一下，$\mathcal{O}_{X,\,o}$ 和 $\mathcal{O}_{X,\,o}$ 在各自的分式域 K 和 $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{X,\,o})$ 中是整闭的。因此，$\mathcal{O}_{X,\,o}$ 在 $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{X,\,o})$ 中的整闭包包含于 $\mathcal{O}_{X,\,o}$ 中。由 (3) 中域 $L \to \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{X,\,o})$ 对 K 的扩张，$\mathcal{O}_{X,\,o}{}^{L} = \mathcal{O}_{X,\,o}[\mathbf{y}]/Q$ 在 $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{X,o})$ 中的整闭包也必然包含于 $\mathcal{O}_{X,\,o}$中。

(4)⇒(2)：$\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/Q \to \mathcal{O}_{X,o}$ 中的结果是将式（4）中的$\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/Q \to \mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/Q$ 和$\mathcal{O}_{X,o}[\mathbf{y}]/Q \to \mathcal{O}_{X,o}$ 结合起来得到的。□

注意到，$\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{X,o})$ 是 $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{X,o})$ 的一个相当“野”的扩张域，因为 $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{X,o})$ 在 K 上是超越的，而 L 必须是 K 上的代数元。因此，我们需要对 $\mathcal{O}_{X,o}$ 作代数逼近，以细化引理1。幸运的是，确实存在这样一种替换，即 $\mathcal{O}^{h}_{X,o}$ 的亨泽尔化$\mathcal{O}_{X,o}$ [4, §18][21, 第 1][23, VII章][28]。我们还向读者推荐 Stacks Project，以了解更多关于亨泽尔化以及我们随后将用到的分歧理论的信息。为方便起见，我们将列出所需的 $\mathcal{O}_{X,o}$ 的亨泽尔化的性质。首先，我们回顾分歧理论中的一些基本设定。

记号 1. 令 $K = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{X,o})$。

(I) 令 E 为 K的可分闭包，将其视为$\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{X,o})$的一个可分闭包的子域，并将 K 的绝对伽罗瓦群记为

$$G \coloneqq \mathrm{Gal}(E|K).$$

(II) 令 $\mathcal{O}_{X,o}{}^{E}$ 为 E中 $\mathcal{O}_{X,o}$ 的整闭包，并定义

$$\mathfrak{m}' \coloneqq \widehat{\mathfrak{m}_{X,o}} \cap \overline{\mathcal{O}_{X,o}}{}^{E},$$

它是 $\mathcal{O}_{X,o}{}^{E}$ 中位于 $\mathfrak{m}_{X,o}$之上的极大理想。

(III) 令

$$D \coloneqq D(\mathfrak{m}'|\mathfrak{m}_{X,o}) = \{\sigma \in G \mid \sigma(\mathfrak{m}') = \mathfrak{m}'\}$$

为 $\mathfrak{m}'$ 在 $\mathfrak{m}_{X,o}$之上的分解群，并将其固定域记为 E^D （即 K的分解域）。

(*IV*) 设 $\mathcal{O}_{X,\,o}{}^{D}$ 是 E^D 中 $\mathcal{O}_{X,\,o}$ 的整闭包，并令

$$(\mathfrak{m}')^D \coloneqq \mathfrak{m}' \cap E^D,$$

它是 $\mathcal{O}_{X,\,o}{}^{D}$ 的极大理想。

现在我们可以陈述 Hensel 化的性质。

性质1 （亨泽尔化的性质）。 *[4, 21, 23, 28](i)* $\mathcal{O}^{h}_{X,\,o}$ 是 $\mathcal{O}_{X,\,o}$ 的亨泽尔局部扩张，其极大理想为 $\mathfrak{m}^{h}_{X,\,o} = \mathfrak{m}_{X,\,o}\mathcal{O}^{h}_{X,\,o}$ 且剩余域为 $\kappa(\mathfrak{m}^{h}_{X,\,o}) = \kappa(\mathfrak{m}_{X,\,o})$；

(ii) $\mathcal{O}^h_{X,\,o}$ 是关于 o 在 X 中的平展邻域（即直接极限）所对应的局部环，且剩余域扩张平凡；*(iii)* $\mathcal{O}^h_{X,\,o}$ 是维数为 $m=$ 维$\mathcal{O}_{X,\,o}$的正则局部环；*(iv)* $\mathcal{O}_{X,\,o}$-代数双射的典范级数

$$\mathcal{O}_{X,o}/(\mathfrak{m}_{X,o})^e \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^h_{X,o}/(\mathfrak{m}^h_{X,o})^e,\ \textit{for } e\in\mathbb{Z},$$

诱导出 $\mathcal{O}_{X,o}$-代数单射

$$\mathcal{O}^h_{X,o}\to\widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$$

以及 K-代数单射 $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}^h_{X,o})\to\mathrm{Frac}(\widehat{\mathcal{O}_{X,o}})$；

(v)$\mathcal{O}^h_{X,o}$ 同构于局部环 $(\mathcal{O}_{X,o}{}^{D})_{(\mathfrak{m}')^D}$，作为一个$\mathcal{O}_{X,o}$-代数；其分式域 $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}^h_{X,o})$ 作为 K-代数同构于 E^D。下文中，我们将 $\mathcal{O}^h_{X,o}$ 和 $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}^h_{X,o})$ 分别视为 $(\mathcal{O}_{X,o}{}^{D})_{(\mathfrak{m}')^D}$ 和 E^D。

(vi)（*Artin*逼近 *[1]* 的特例）等式成立

- $\overline{\mathcal{O}_{X,\,o}}{}^{E}\cap\widehat{\mathcal{O}_{X,o}}=\mathcal{O}^h_{X,o}$,
- $E\cap\widehat{\mathcal{O}_{X,o}}=\mathcal{O}^h_{X,o}$,
- $\mathcal{O}_{X,\,o}{}^{E}\cap\overline{\mathrm{Frac}(\widehat{\mathcal{O}_{X,o}})}=\mathcal{O}^h_{X,\,o}$，且
- $E\cap\mathrm{Frac}(\widehat{\mathcal{O}_{X,o}})=\mathrm{Frac}(\mathcal{O}^h_{X,\,o})$。

利用性质1，我们得到引理1的如下改进。

引理 2 (接续引理1)。以下命题与引理*1*中的命题等价：

(1') $\mu(t)$ 在 K 上的所有根都属于$\mathcal{O}^h_{X,\,o}$；*(2')* 存在一个$\mathcal{O}_{X,\,o}$-代数映射$\mathcal{O}_{X,\,o}[\mathbf{y}]/Q\to\mathcal{O}^h_{X,\,o}$；*(3')* 存在一个 K-代数映射 $L\to\mathrm{Frac}(\mathcal{O}^h_{X,\,o})$；*(4')* 存在一个$\mathcal{O}_{X,\,o}$-代数映射$\mathcal{O}_{X,\,o}[\mathbf{y}]/Q\to\mathcal{O}^h_{X,\,o}$。

此外，若上述任一陈述成立，则相应的代数映射是单射。

证明。结合 (2') 和 (4') 中的 $\mathcal{O}_{X,o}$-代数映射与性质1 (iv) 中的 $\mathcal{O}_{X,o}$-代数映射$\mathcal{O}^h_{X,\,o}\to\widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$，可知 (1')⇒(1)、(2')⇒(2)、(3')⇒(3)，以及(4')⇒(4)；性质1 (v) 和 (vi) 表明，$\mathcal{O}_{X,o}$ 中的 $\mu(t)$ 的根全都属于 $\mathcal{O}^h_{X,o}$，并且 (1)、(2)、(3) 和 (4) 中的映射分别经由 (1')、(2')、(3') 和 (4') 中相应的映射分解。因此 (1)⇒(1')、(2)⇒(2')、(3)⇒(3')，以及 (4)⇒(4')。□

注意，$\mathrm{Frac}(\mathcal{O}^h_{X,o})=E^D$ 通常是 $K=\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{X,o})$ 的一个无限代数扩张域，因此引理 2 中的判据在计算意义上仍然不够实用。因此，我们需要更明确地描述域扩张 $K\subseteq L$ 或整扩张 $\mathcal{O}_{X,o}\subseteq\mathcal{O}_{X,o}{}^{L}$ 的判据。为了建立 $\mu(t)$ 在 $\mathcal{O}_{X,o}$ 中完全分裂的判据的下一部分，我们需要回顾代数几何中的几类态射。

记号 2. 设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是含幺诺特交换环，并设

$$\phi\colon\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$$

是一个环同态。设 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{B}$ 是满足以下条件的素理想

$$\mathfrak{p} = \phi^{-1}(\mathfrak{q}).$$

环同态 ϕ 称为

（*A*）有限型，如果 ϕ 可分解为

$$\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{A}[z_1, \ldots, z_N] \twoheadrightarrow \mathfrak{B}$$

对于某个 $N \in \mathbb{N}$和变量 $z_1, \ldots, z_N$；

(B) 有限，如果 $\mathfrak{B}$ 是有限 $\mathfrak{A}$-模；

(C) 平坦，如果 $\mathfrak{B}$ 是平坦的 $\mathfrak{A}$-模；

(D) 在 $\mathfrak{q}$处平坦，如果 $\mathfrak{B}_{\mathfrak{q}}$ 是平坦的 $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$-模；

(E) 在 $\mathfrak{q}$处非分歧，如果 ϕ 是有限型的，

$$\phi(\mathfrak{p})\mathfrak{B}_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}\mathfrak{B}_{\mathfrak{q}},$$

且诱导的剩余域扩张 $\kappa(\mathfrak{q})/\kappa(\mathfrak{p})$ 是有限可分的；

(F) 非分歧，若 ϕ 是有限型的，且在每个素理想 $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{B}$处都非分歧；

(G) 在 $\mathfrak{q}$处平展，若 ϕ 在 $\mathfrak{q}$ 处平坦，且在 $\mathfrak{q}$处非分歧；

(H) 平展，若 ϕ 在每个素理想 $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{B}$处都平展。

现在我们可以陈述并证明以下判据。

引理3（续引理 1 和 2）。以下命题分别等价于引理*1*和引理 *2* 中的命题：

(u') $\mathcal{O}_{X,o} \to \overline{\mathcal{O}_{X,o}}^{L}$ *is unramified at some maximal* $\mathfrak{n} \subset \overline{\mathcal{O}_{X,o}}^{L}$*;*
(u) $\mathcal{O}_{X,o} \to \overline{\mathcal{O}_{X,o}}^{L}$ *is unramified;*
(e') $\mathcal{O}_{X,o} \to \overline{\mathcal{O}_{X,o}}^{L}$ *is étale at some maximal* $\mathfrak{n} \subset \overline{\mathcal{O}_{X,o}}^{L}$*;*
(e) $\mathcal{O}_{X,o} \to \overline{\mathcal{O}_{X,o}}^{L}$ *is étale;*

证明。(u)⇒(u') 和 (e)⇒(e') 显然成立，因为环同态是否非分歧或平展是一个局部性质。

(e')⇒(u') 和 (e)⇒(u) 是众所周知的，因为（局部）平展等价于同时（局部）平坦和（局部）非分歧。

(u')⇒(e') 和 (u)⇒(e) 可由 [21, 第 1 章定理 3.20]推出。

(u')⇒(u) 和 (e')⇒(e)：由于 Gal$(L|K)$ 在$\overline{\mathcal{O}_{X,o}}^{L}$的极大理想上传递作用，因此在任一极大理想处非分歧或平展，分别意味着在每个极大理想处都非分歧或平展。

(3')⇒(u')：令 $(\mathfrak{m}')^L = (\mathfrak{m}' \cap E^D) \cap L$ 为 $\overline{\mathcal{O}_{X,o}}^{L}$的极大理想。(3')意味着$L$ 被 $D = D(\mathfrak{m}'|\mathfrak{m}_{X,o})$固定。因此我们有 $D \subseteq$ Gal$(E|L)$ 和 $D(\mathfrak{m}'|(\mathfrak{m}')^L) = D$。

伽罗瓦扩张的分解群的典范短正合列$E|L|K$

$$1 \to D(\mathfrak{m}'|(\mathfrak{m}')^L) \xrightarrow{\mathrm{Id}} D(\mathfrak{m}'|\mathfrak{m}_{X,o}) \to D((\mathfrak{m}')^L|\mathfrak{m}_{X,o}) \to 1$$

这意味着 $D((\mathfrak{m}')^L|\mathfrak{m}_{X,o}) = 1$，因此由 $D((\mathfrak{m}')^L|\mathfrak{m}_{X,o})$所固定的 L 的子域就是 L 本身。根据 [23, 定理41.2], ，$\mathcal{O}_{X,o}$的极大理想$\mathfrak{m}_{X,o}$ 生成局部环$(\overline{\mathcal{O}_{X,o}}^{L})_{(\mathfrak{m}')^L}$的极大理想，并且剩余域 $\kappa((\mathfrak{m}')^L)|\kappa(\mathfrak{m}_{X,o})$的扩张是平凡的。由于$\mathcal{O}_{X,o}$ 是诺特的，且 $L|K$ 是有限可分的，$\mathcal{O}_{X,o}$ 在 L 中的整闭包$\overline{\mathcal{O}_{X,o}}^{L}$ 众所周知是一个有限

$\mathcal{O}_{X,o}$-模 [23, 推论10.16], , 这意味着$\mathcal{O}_{X,o}{}^{L}$ 在$\mathcal{O}_{X,o}$上是有限型的。因此, $\mathcal{O}_{X,o} \to \mathcal{O}_{X,o}{}^{L}$ 在$(\mathfrak{m}')^{D}$处是非分歧的。

(e')⇒(4'): 注意, 剩余域扩张 $\kappa(\mathfrak{n})|\kappa(\mathfrak{m}_{X,o})$ 是平凡的, 因为$\kappa(\mathfrak{n})|\kappa(\mathfrak{m}_{X,o})$ 是有限可分的, 且 $\kappa(\mathfrak{m}_{X,o}) \cong \mathbb{C}$ 是可分闭的。因此, $(\mathcal{O}_{X,o}{}^{L}, \mathfrak{n})$ 是 $(\mathcal{O}_{X,o}, \mathfrak{m}_{X,o})$ 的一个étale 邻域, 且剩余域扩张平凡。现在由性质 1 (ii) 可知, 存在一个典范的 $\mathcal{O}_{X,o}$- 代数映射$\mathcal{O}_{X,o}{}^{L} \to \mathcal{O}^{h}_{X,o}$ 满足 $\mathfrak{m}^{h}_{X,o} \cap \mathcal{O}_{X,o}{}^{L} = \mathfrak{n}$, 从而验证了 (e')⇒(4')。

□

现在利用引理 1-3, 我们可以给出定理 2 的证明。

定理 *2* 的证明。 *</style}*不等式 由维数不等式以及 , o^{L} 是 $\mathcal{O}_{X,o}$的整扩张这一事实得出。注意, 引理 1-3 已经确立了 (1) , (u')。记 $\mathfrak{A} = \mathcal{O}_{X,o}$ 和 $\mathfrak{B} = \mathcal{O}_{X,o}{}^{L}$。那么, 当且仅当 Kähler 微分模 $\Omega^{\mathfrak{B}/\mathfrak{A}}$在 $\mathfrak{n}$ 处消失时, $\mathcal{O}_{X,o}{}^{L}$ 在 $\mathfrak{n}$ 处相对于$\mathcal{O}_{X,o}$ 是非分歧的。这等价于典范的 $\mathfrak{B}$-模映射满足条件

$$Q'/(Q')^2 \longrightarrow \Omega_{\mathfrak{A}[z_1,\dots,z_N]/\mathfrak{A}} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B}, \quad f \mapsto \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial z_j} \mathrm{d}z_j$$

在 $\mathfrak{n}$ 处是满射。最后, 当且仅当定义该线性映射的雅可比矩阵

$$\begin{aligned} J : \bigoplus_{k=1}^{D} \mathfrak{B} f_k &\longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{N} \mathfrak{B} \mathrm{d}z_j = \Omega_{\mathfrak{A}[\mathbf{z}]/\mathfrak{A}} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B}, \\ (b_k f_k)_k &\longmapsto \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{D} b_k \frac{\partial f_k}{\partial z_j} \right) \mathrm{d}z_j, \end{aligned}$$

在 $\mathfrak{n}$ 处满秩 N （等价地, 是满射）。 □

设 $\mu(t) \in \mathcal{O}_{X,o}[t]$ 是一个首一无平方因子多项式。我们给出算法 $\widehat{\mathbf{1}}$, 用于判定 $\mu(t) \in \mathcal{O}_{X,o}[t]$ 是否在 $\mathcal{O}_{X,o}$ 上完全分裂。

注 2. 根据隐函数定理, 我们可以使用第 *5* 步中的满秩雅可比矩阵, 对函数 $g_1, \dots, g_D$ 应用牛顿-亨泽尔迭代。这样便能以任意所需精度计算 $\mathbf{y}$ 和$\mathbf{w}$ 模 Q' 的幂级数展开。

注 3. 实际上, 如果簇 X 定义在子域 $F \subseteq \mathbb{C}$ 上（例如 $\mathbb{Q}$ 或某个数域）, 那么算法 *1* 可以完全在 F 上执行。具体而言, 可以将多项式环系数域中的 $\mathbb{C}$ 替换为 F, 并在 F 上计算所有关联素理想。这种调整有以下理论依据:

(1) 正则性下降: 对于一个 F-簇 Y 和一个闭点 $p \in Y$, p 是正则点, 当且仅当基变换 $Y_{\mathbb{C}}$ 中位于 p 之上的点都是正则的。*(2)* 代数推广: 基于 $\mathcal{O}_{X,o}$ 建立的结果可推广到 $\mathcal{O}_{Y,p}$, 方法是将亨泽尔化 $\mathcal{O}^{h}_{X,o}$ 替换为严格亨泽尔化 $\mathcal{O}^{sh}_{Y,p}$。*(3)* 分歧理论: 惯性群 $I(\mathfrak{m}'|\mathfrak{m}_{Y,p})$ 取代了分解群 $D(\mathfrak{m}'|\mathfrak{m}_{X,o})$ 的作用。

算法 1： 判定多项式在 $\widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$ 上是否完全分裂

输入： 多项式环 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$，其定义理想为 $\mathbf{I}(X) \subseteq \mathbf{x}\mathbb{C}[\mathbf{x}]$，簇为 X，一个首一多项式 $\mu(t) = t^d + c_1 t^{d-1} + \cdots + c_d, c_k = F_k/G_k$ 模 $\mathbf{I}(X)$，$F_k, G_k \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ 以及 $G_k(o) \neq 0$。

输出： 真当 $\mu(t)$ 在……上完全分裂 $\widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$（即，$\mu(t) = \prod_{k=1}^{d}(t-\lambda_k)$ 对某个 $\lambda_k \in \widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$ 成立），以及定义理想 $Q', \mathfrak{n} \subseteq \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}]$；否则为 **假**。

1. 定义该理想，其中 e_k 表示变量 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d)$ 中的基本对称多项式。2. 选取理想 $J = \langle e_k(\mathbf{y}) \mid \mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y}] \mid (-1)^k F_k \mid k = 1, \ldots, d \rangle \subseteq \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$，使其满足 $Q \cap \mathbb{C}[\mathbf{x}] \subseteq \mathbf{x}\mathbb{C}[\mathbf{x}]$。3. 计算 $\mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y}]/Q$ 在其分式域中的整闭包的仿射表示，记为 $\mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{w}]/Q'$，并引入新变量 $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_e)$。计算理想 Q' 的一个生成集 $g_1, \ldots, g_D$，并注意到必然有 $D \geqslant d + e$。4. 找出理想 $Q' + \mathbf{x}\mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{w}]$ 的一个关联素理想 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{w}])$，使其满足 $\mathfrak{n} \cap \mathbb{C}[\mathbf{x}] \subseteq \mathbf{x}\mathbb{C}[\mathbf{x}]$。注意，任何这样的素理想 $\mathfrak{n}$ 必然是一个极大理想。

5. 计算 $g_1, \ldots, g_D$ 关于 $\mathbf{y}, \mathbf{w}$ 模 $\mathfrak{n}$ 的雅可比矩阵：

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_D)}{\partial(\mathbf{y}, \mathbf{w})} (\mathrm{mod}\, \mathfrak{n}) \in (\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}]/\mathfrak{n})^{D \times (d+e)}.$$

如果模 $\mathfrak{n}$ 的雅可比矩阵满秩 $d + e$，则返回 **True** 以及理想 Q'、$\mathfrak{n}$；否则返回 **False**。

因此，可以在这种算术情形下发展引理 *1–3* 的类似结果，最终得到域 F 上相同的雅可比判据（定理 *2*）。

我们给出两个例子来说明算法 1。所有计算均在域 $\mathbb{Q}$ 上使用 Macaulay2 完成。

例 4. 矩阵的最小多项式

$$A = \begin{pmatrix} -x_1 & x_2 & 0 \\ x_2 & -x_1 & \sqrt{2}x_2 \\ 0 & \sqrt{2}x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}$$

为 $\mu_A(t) = t^3 - 3(x_1^2 + x_2^2)t - 2x_1^3$。这是 *[12,例 5.7]* 中给出的双曲多项式。其韦达理想 为

$$J = \left\langle y_1 + y_2 + y_3, y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 + 3x_1^2 + 3x_2^2, y_1y_2y_3 - 2x_1^3 \right\rangle,$$

它在 $\mathbb{Q}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$, 中是素理想，因此 $Q = J$。

$\mathbb{Q}[\mathbf{x},\mathbf{y}]/Q$ 的整闭包为

$$\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}]/Q', \quad \mathbf{w} = (w_{0,0}, w_{0,1}),$$

其中$Q' = \langle y_1+y_2+y_3,\ y_2^2+y_2y_3+y_3^2-3x_1^2-3x_2^2,\ w_{0,1}x_2-y_2y_3-y_2x_1-y_3x_1-x_1^2,\ w_{0,1}y_2+w_{0,1}y_3-w_{0,1}x_1-3x_1x_2,\ w_{0,0}x_2-y_3^2+y_3x_1+2x_1^2,\ w_{0,0}y_3+w_{0,0}x_1-3y_3x_2,\ w_{0,0}y_2+w_{0,0}x_1-w_{0,1}y_3+2w_{0,1}x_1,\ w_{0,1}^2+3y_2y_3-3x_1^2,\ w_{0,0}w_{0,1}-3y_2y_3-3y_3x_1,\ w_{0,0}^2-3y_3^2+6y_3x_1\rangle$。

Q' 关于变量$\mathbf{y}$,$\mathbf{w}$ 的 Q' 生成元雅可比矩阵在点$\mathfrak{n}$ 处为

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

其秩为1。因此， μ_A 不能 在$\mathcal{O}_{X,o}$上分裂，因此 A 不可对角化。

以下例子最初由 Rellich 提出 [29], ，摘自 Parusiński 和 Rainer 的综述 [24, 例 2.8]。

例 5. *[29]*给定矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2x_1 & x_1+x_2 \\ x_1+x_2 & 2x_2 \end{pmatrix},$$

其最小多项式为

$$\mu_A(t) = t^2 + (-2x_1-2x_2)t - x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2.$$

相应的韦达理想为

$$J = \left\langle y_1+y_2-2x_1-2x_2,\ y_1y_2+x_1^2-2x_1x_2+x_2^2 \right\rangle,$$

它在 $\mathbb{Q}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ 中是素理想。因此我们记作 $Q = J$。

$\mathbb{Q}[\mathbf{x},\mathbf{y}]/Q$ 的整闭包就是 $\mathbb{Q}[\mathbf{x},\mathbf{y}]/Q'$ ，其中 $Q' = J$ ，唯一的极大理想 $\mathfrak{n}$ 由 $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$ 生成。 Q' 关于 $\mathbf{y}$ 的生成元的雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{n}},$$

它在 $\mathfrak{n}$ 处的秩为 1 。因此， μ_A 不在 $\mathcal{O}_{X,o}$ 上分裂。

然而，正如 *[24],* 所指出的，进行膨胀 $x_1 \mapsto x_1x_2$ 后得到的矩阵，其最小多项式完全分裂。令

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 & x_1x_2+x_2 \\ x_1x_2+x_2 & 2x_2 \end{pmatrix},$$

其最小多项式为

$$\mu_{\tilde{A}}(t) = t^2 + (-2x_1x_2-2x_2)t - x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2^2 - x_2^2,$$

且关联的韦达理想为

$$J = \left\langle -2x_1x_2+y_1+y_2-2x_2,\ x_1^2x_2^2-2x_1x_2^2+y_1y_2+x_2^2 \right\rangle.$$

理想 J 有一个关联素理想

$$Q = \langle 2x_1x_2-y_1-y_2+2x_2, y_1^2+6y_1y_2+y_2^2-8y_1x_2-8y_2x_2+16x_2^2\rangle.$$

$\mathbb{Q}[\mathbf{x},\mathbf{y}]/Q$ 的整闭包为

$$\mathbb{Q}[\mathbf{x},\mathbf{y},w_{0,1}]/Q'.$$

其中 $Q' = \langle 2x_1x_2 - y_1 - y_2 + 2x_2,\ y_1^2 + 6y_1y_2 + y_2^2 - 8y_1x_2 - 8y_2x_2 + 16x_2^2,\ w_{0,1}x_2 + y_2,\ 2w_{0,1}y_2 + y_1x_1 + 5y_2x_1 - 3y_1 + y_2 + 8x_2,\ 2w_{0,1}y_1 - y_1x_1 - y_2x_1 + 3y_1 + 3y_2 - 8x_2,\ w_{0,1}^2 + 2w_{0,1}x_1 + 2w_{0,1} - x_1^2 + 2x_1 - 1\rangle$。

极大理想 $\mathfrak{n}$ 是

$$\big\langle x_2,\ x_1,\ y_2,\ y_1,\ w_{0,1}^2 + 2w_{0,1} - 1\big\rangle,$$

以及相对于$\mathbf{y}$ 和 $w_{0,1}$ 在 $\mathfrak{n}$ 处的 Q' 生成元的雅可比矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\,w_{0,1}+2 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & 2\,w_{0,1}+3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2\,w_{0,1}+1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

该矩阵在 $\mathbb{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, w_{0,1}]/\mathfrak{n}$中具有满秩。因此，$\mu_{\tilde{A}}$ 在$\widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$中完全分裂。

4. When are Spectral Projections in $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$?

算法2判定正规矩阵 $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathcal{O}_{X,o})$ 是否存在酉对角化；如果存在，则计算其解。

注4。 算法*2*的第*3*步实现两个关键目标：

(1) 成员资格验证： 判断 $p_{ij}^{(k)}$ 谱投影的每个$\widehat{\ }$元素是否属于环 $\mathcal{O}_{X,o}$。*(2)* 商表示： 对于符合条件的元素，计算其表示 $p_{ij}^{(k)} = f_{ij}^{(k)}/g_{ij}^{(k)}$ ，其中 $g_{ij}^{(k)}$ 在 $\widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$中可逆。此显式形式是第 *4* 步进行剩余类计算所必需的，该计算用于确定一个极大的线性无关列族。

注意， $p_{ij}^{(k)}$ 实际上属于 $\mathrm{Frac}({\mathcal{O}_{X,o}}^L) \subseteq \overline{\mathrm{Frac}}(\mathcal{O}_{X,o}^h) \subseteq \mathrm{Frac}(\widehat{\mathcal{O}_{X,o}})$。根据性质*1 (vi)*，如果 $p_{ij}^{(k)}$ 属于 $\widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$，则 $p_{ij}^{(k)}$ 将属于 $({\mathcal{O}_{X,o}}^L)_{\mathfrak{n}}$，其中$\mathfrak{n} = \mathcal{O}_{X,o}^L \cap \widehat{\mathfrak{m}_{X,o}}$ 是 ${\mathcal{O}_{X,o}}^L$的极大理想。由于${\mathcal{O}_{X,o}}^L$ 的极大理想彼此伽罗瓦共轭，因此极大理想 $\mathfrak{n}$ 可以任意选取。

备注 5. 注意，在算法*2*的步骤*4*中，必须确定对合 $*$ 在 $\mathbf{C} = \mathbb{C}[\![\mathbf{x}]\!]$ 上如何作用于 A的特征值 $(\mathbf{y} \bmod Q')$。

- 如果 A 是厄米的，则特征值在对合下保持不变，即
$$(\mathbf{y} \bmod Q')^* = (\mathbf{y} \bmod Q').$$
- 如果 A 是斜埃尔米特的，则特征值是斜不变的，即
$$(\mathbf{y} \bmod Q')^* = -(\mathbf{y} \bmod Q').$$

如果 A 既不是厄米的，也不是斜埃尔米特的，我们利用分解 $A = A_1 + iA_2$，其中 $i = \sqrt{-1}$ 和

$$A_1 = \frac{A + A^*}{2}, \quad A_2 = \frac{A - A^*}{2i}.$$

由于 A 是正规矩阵，厄米矩阵 A_1 和 A_2 彼此可交换。我们可以先应用算法*2*，对 A_1进行酉对角化。由于 A_1 和 A_2 彼此可交换， A_2 保持 A_1 的特征子空间不变。因此，我们可以将 A_2 限制在 A_1 的各个特征子空间上（在这些子空间上，它是一个埃尔米特算子），并递归地应用算法*2*。这个过程得到 A_1 和A_2的同时酉对角化，进而得到 A的同时酉对角化。

算法2： 正规矩阵的酉对角化计算

输入： 一个正规矩阵 $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathcal{O}_{X,o})$。

输出： 如果 A 在 $\widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$ 上可对角化，则返回 **可对角化**及酉矩阵 U 和对角矩阵 D；否则 **不可对角化**。

1. 计算最小多项式 $\mu_A(t)$。对 μ_A 应用算法 1。
   - 如果结果为 **False**，则返回 **不可对角化** 并终止。
2. 计算 $\mathrm{Mat}_n(\mathrm{Frac}(\mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{w}]/Q'))$ 中的谱投影：
$$\Pi_k = P_k(A) \coloneqq \prod_{i\neq k} \frac{A - y_i I_n}{y_k - y_i} \pmod{Q'}.$$
3. 对于每个三元组 (k,i,j)，将 Π_k 的 $p_{ij}^{(k)}$ 项写成有理函数
$$p_{ij}^{(k)} = \frac{F_{ij}^{(k)}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{w})}{G_{ij}^{(k)}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{w})} \pmod{Q'}.$$
计算商理想 $\left(\langle G_{ij}^{(k)}, Q'\rangle : \langle F_{ij}^{(k)}, Q'\rangle\right)$。
   - 如果它至少包含一个生成元 $g_{ij}^{(k)} \neq 0$（模 $\mathfrak{n}$），我们就计算一个代表元
$$p_{ij}^{(k)} = \frac{F_{ij}^{(k)}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{w})}{G_{ij}^{(k)}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{w})} \equiv \frac{f_{ij}^{(k)}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{w})}{g_{ij}^{(k)}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{w})} \quad (\text{模 } Q'),$$
     其中 $g_{ij}^{(k)}$ 在 $\widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$ 上可逆。
   - 如果对任意三元组 (k,i,j)，$g_{ij}^{(k)}$ 的生成元被约化为 0 模 $\mathfrak{n}$，则返回 **不可对角化**。否则继续下一步。
4. 对每个 k，计算 $\Pi_k \pmod{\mathfrak{n}} \in \mathrm{Mat}_n(\kappa(\mathfrak{n}))$。
   - 从中选取一个极大 $\kappa(\mathfrak{n})$-线性无关族的列中，为 $k = 1,\dots,d$ 选取一个极大的 $\mathfrak{n}$（$k = 1,\dots,d$）-线性无关族。
   - 将这些列提升为 Π_k 中对应的列，从而得到一个 $\mathrm{Frac}(\mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{w}]/Q')$-基。
   - 对这个基应用格拉姆-施密特正交化过程，以得到一个酉矩阵 U。（详见备注 5，其中有详细解释）

返回 **可对角化**，以及 U 和 $D \coloneqq U^* A U$。

我们给出以下示例来演示算法2。

例 6 (续例 5)。 对于厄米矩阵
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 & x_1x_2 + x_2 \\ x_1x_2 + x_2 & 2x_2 \end{pmatrix},$$
我们已经知道，其最小多项式在 $\mathbf{C} = \widehat{\mathcal{O}_{X,o}}$ 中分裂。事实上，由于 $\tilde{A}$ 是厄米的，其最小多项式在对合中心 $\mathbf{R} = \widehat{\tilde{(\mathcal{O}_{X,o})^*}}$ 中分裂，这意味着 A 的特征值均为实幂级数。由拉格朗日

插值，我们得到

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} \frac{w_{0,1}x_1 - w_{0,1} + 3x_1^2 + 1}{4(x_1^2+1)} & \frac{w_{0,1}x_1 + w_{0,1} + x_1^2 + 2x_1 + 1}{4(x_1^2+1)} \\ \frac{w_{0,1}x_1 + w_{0,1} + x_1^2 + 2x_1 + 1}{4(x_1^2+1)} & \frac{-w_{0,1}x_1 + w_{0,1} + x_1^2 + 3}{4(x_1^2+1)} \end{pmatrix},$$

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} \frac{-w_{0,1}x_1 + w_{0,1} + x_1^2 + 3}{4(x_1^2+1)} & \frac{-w_{0,1}x_1 - w_{0,1} - x_1^2 - 2x_1 - 1}{4(x_1^2+1)} \\ \frac{-w_{0,1}x_1 - w_{0,1} - x_1^2 - 2x_1 - 1}{4(x_1^2+1)} & \frac{w_{0,1}x_1 - w_{0,1} + 3x_1^2 + 1}{4(x_1^2+1)} \end{pmatrix}.$$

分别选取 Π_1, Π_2 的第一列，并进行施密特正交化过程，其中 $w^*_{0,\ 1} = w_{0,\ 1}$ 在 $\mathcal{O}_{X,\ o}$中为实数，我们得到

$$U = \begin{pmatrix} \frac{w_{0,1}x_1 - w_{0,1} + 3x_1^2 + 1}{\sqrt{\alpha}} & \frac{-w_{0,1}x_1 + w_{0,1} + x_1^2 + 3}{\sqrt{\beta}} \\ \frac{w_{0,1}x_1 + w_{0,1} + x_1^2 + 2x_1 + 1}{\sqrt{\alpha}} & \frac{-w_{0,1}x_1 - w_{0,1} - x_1^2 - 2x_1 - 1}{\sqrt{\beta}} \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha = 4w_{0,\ 1}x_1^3 - 4w_{0,\ 1}x_1^2 + 4w_{0,\ 1}x_1 - 4w_{0,\ 1} + 12x_1^4 + 16x_1^2 + 4$, $\beta = -4w_{0,\ 1}x_1^3 + 4w_{0,\ 1}x_1^2 - 4w_{0,\ 1}x_1 + 4w_{0,\ 1} + 4x_1^4 + 16x_1^2 + 12$，并且

$$D = \begin{pmatrix} x_2\left(x_1 + 1 + \sqrt{2x_1^2+2}\right) & 0 \\ 0 & x_2\left(x_1 + 1 - \sqrt{2x_1^2+2}\right) \end{pmatrix}.$$

5. 结论与未来工作

我们建立了一个严谨的代数框架，并提出了一种对形式幂级数环上的正规矩阵进行酉对角化的构造性算法。当前算法的一个主要瓶颈是计算整闭包。未来的工作将致力于绕过这一耗时步骤，或许可以利用伽罗瓦对称性，或开发专用的提升算法。

此外，由于许多应用更关注对角化矩阵的渐近行为，我们计划探索混合方法。将我们的代数结果与解析表示相结合——例如通过递推关系定义幂级数 [34] ——为高效计算与分析提供了一个有前景的方向。

致谢

我们感谢 Li, Zijia 教授在算法实验方面给予的帮助。我们感谢 Jiaqi Wang 帮助查找参考文献。我们还要感谢 Joris van der Hoeven 与我们分享了幂级数环上的有趣快速算术，并感谢 Èric Schost 与我们分享了一篇关于多项式分解的文章。梁浩感谢 Hu, Yongquan 教授和 Li, Shizhang 教授在分歧理论方面的指导与讨论。戴子豪、梁浩和 LIHONG ZHI 得到了国家重点研发计划（2023YFA1009401）以及中国科学院战略性先导科技专项（项目编号 XDA0480501）的资助。

参考文献

[1] Michael Artin. 1969. 完备局部环上结构的代数逼近。法国高等科学研究所数学出版物36 (1969), 23–58. https://doi.org/10.1007/BF02684596

[2] Thomas Becker and Volker Weispfenning. 1993. 格罗布纳基：交换代数的计算方法。数学研究生教材，第141卷。Springer-Verlag，纽约。[3] Bourbaki, Nicolas. 1981. 数学要素：代数：第四章，多项式与有理函数。Masson，巴黎，法国。[4] Dieudonné, Jean and Grothendieck, Alexander. 1967. 代数几何要素 IV。概形及概形态射的局部研究，第四部分。法国高等科学研究所数学出版物 32 (1967), 5–361。 https://www.numdam.org/item/PMIHES_1967__32__5_0/[5] Torsten Ekedahl and Dan Laksov. 2005. 分裂代数、对称函数与伽罗瓦理论。《代数及其应用期刊》4, 1 (2005), 59–75。 https://doi.org/10.1142/S0219498805001034[6] Gert-Martin Greuel and Gerhard Pfister. 2008. 交换代数导论：Singular（扩展版）。Springer，柏林。xx+689 页。由 Olaf Bachmann、Christoph Lossen 和 Hans Schönemann 参与编写，附 1 张 CD-ROM（Windows、Macintosh 和 UNIX）。[7] David J. Griffiths and Darrell F. Schroeter. 2018. 量子力学导论（第3版）。剑桥大学出版社，剑桥；美国纽约州纽约。[8] Kurt Hensel. 1904. 算术新基础。《纯粹与应用数学杂志》127 (1904), 51–84。 http://eudml.org/doc/149178[9] Erich Kaltofen. 1985. 从多元到二元及一元整系数多项式因式分解的多项式时间归约。《SIAM计算杂志》14, 2 (1985), 469–489。https://doi.org/10.1137/0214035[10] Erich Kaltofen. 1990. 多项式因式分解，1982–1986。载于《数学中的计算》（加利福尼亚州斯坦福，1986）。纯粹与应用数学讲义，第125卷。Dekker，纽约，285–309。[11] Erich Kaltofen. 1992. 多项式因式分解，1987–1991。载于 LATIN ’92（圣保罗，1992）。计算机科学讲义，第583卷。Springer，柏林，294–313。 https://doi.org/10.1007/BFb0023837[12] Krzysztof Kurdyka and Laurentiu Paunescu. 2008. 双曲多项式与多参数实解析扰动理论。《杜克数学杂志》141, 1 (2008), 123–149。 https://doi.org/10.1215/S0012-7094-08-14113-4[13] Dan Laksov. 2010. 分裂代数与Gysin同态。《交换代数杂志》2, 3 (2010), 401–425。 https://doi.org/10.1216/JCA-2010-2-3-401[14]Dan Laksov and Anders Thorup. 2012. 分裂代数与舒伯特演算。《印第安纳大学数学杂志》61, 3 (2012), 1253–1312。https://doi.org/10.1512/iumj.2012.61.4791[15] Romain Lebreton and Éric Schost. 2012. 通用分解代数的算法。载于第37届国际符号与代数计算研讨会论文集（法国格勒诺布尔）（ISSAC ’12）。计算机协会，纽约，美国，234–241。https://doi.org/10.1145/2442829.2442864[16] Grégoire Lecerf. 2002. 用于多重根系统的二次牛顿迭代。《计算数学基础》2, 3 (2002), 247–293。https://doi.org/10.1007/s102080010026

[17] Arjen K. Lenstra、Hendrik W. Lenstra, Jr. 和 László Lovász。1982年。具有有理系数的多项式分解。《数学年刊》261, 4 (1982), 515–534。https://doi.org/10.1007/BF01457454[18] Dong Lu、Dingkang Wang 和 Fanghui Xiao。2023年。关于一类多元多项式矩阵的因式分解与等价问题的新见解。《符号计算杂志》115 (2023), 266–284。https://doi.org/10.1016/j.jsc.2022.07.005[19] Dong Lu、Dingkang Wang、Fanghui Xiao 和 Xiaopeng Zheng。2023年。二元多项式矩阵的等价与化简至其史密斯标准形。《符号计算杂志》118 (2023), 1–16。https://doi.org/10.1016/j.jsc.2023.01.001[20] Hideyuki Matsumura。1987年。《交换环理论》。剑桥大学出版社。 https://doi.org/10.1017/CBO9781139171762[21]Milne, James S. 1980年。《étale上同调》。普林斯顿数学丛书，第33卷。普林斯顿大学出版社，美国新泽西州普林斯顿。[22] Ferdinando Mora。1982年。一种计算切锥方程的算法。载于《计算机代数》（马赛，1982）。《计算机科学讲义》，第144卷。Springer，柏林—纽约，158–165。[23] Nagata, Masayoshi。1962年。《局部环》。纯数学与应用数学国际丛书第13卷。Interscience Publishers（John Wiley & Sons 的一个部门），纽约—伦敦。[24] Adam Parusiński 和 Armin Rainer。[2025] ©2025。多项式与线性算子的微扰理论。载于《奇点几何与拓扑手册》第七卷。Springer，Cham，121–202。https://doi.org/10.1007/978-3-031-68711-2_3[25] Adam Parusiński 和 Guillaume Rond。2012年。Abhyankar-Jung 定理。《代数杂志》365 (2012), 29–41。https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.05.003[26] Adam Parusiński 和 Guillaume Rond。2020年。矩阵与线性算子的多参数微扰理论。《美国数学会汇刊》373, 4 (2020), 2933–2948。https://doi.org/10.1090/tran/8061[27] Victor Puiseux。1850年。代数函数研究。《纯粹与应用数学杂志》15 (1850), 365–480。[28] Raynaud, Michel。1970年。《亨泽尔局部环》。数学讲义第169卷。Springer，柏林、海德堡。https://doi.org/10.1007/BFb0069571[29] Franz Rellich。1937年。谱分解的微扰理论。第一篇：有界算子的孤立特征值的解析微扰。《数学年刊》113, 1 (1937), 600–619。https://doi.org/10.1007/BF01571652[30]Tateaki Sasaki 和 Daiju Inaba。2000年。在奇异点处构造$F(x, u_1, ..., u_l), l \geq 2$的亨塞尔构造及其应用。《SIGSAM 通报》34, 1 (2000年3月), 917。https://doi.org/10.1145/373500.373502[31] Tateaki Sasaki 和 Daiju Inaba。2017年。利用格罗布纳基增强扩展的亨塞尔构造。《ACM 计算代数通讯》51, 1 (2017), 26–28。https://doi.org/10.1145/3096730.3096737[32] Igor R. Shafarevich。2013年。《基础代数几何》。第1卷（第三版）。Springer，海德堡。射影空间中的簇。

[33]Anders Thorup。2011年。论分裂代数的不变量。arXiv:1105.4478 [math.AC] https://arxiv.org/abs/1105.4478[34] Joris van der Hoeven。2019年。有效的幂级数计算。计算数学基础 19, 3 (2019), 623–651。[35] Joachim von zur Gathen 和 Jürgen Gerhard。2013年。《现代计算机代数》（第三版）。剑桥大学出版社，剑桥。xiv+795 页。 https://doi.org/10.1017/CBO9781139856065[36] HansZassenhaus。1969年。论亨泽尔因式分解，I。数论杂志1, 3 (1969), 291–311。https://doi.org/10.1016/0022-314X(69)90047-X

（戴子豪）数学科学国家重点实验室，中国科学院数学与系统科学研究院，中国科学院大学，北京 100190，中国

电子邮箱： daizihao@amss.ac.cn

（梁浩）数学科学国家重点实验室，中国科学院数学与系统科学研究院，中国科学院大学，北京 100190，中国

电子邮箱： lianghao2020@amss.ac.cn

(JingyuLu) 加拿大安大略省滑铁卢 N2L3G1，滑铁卢大学电子邮箱地址：
jingyu.lu1@uwaterloo.ca

(Lihong Zhi) 中国北京市 100190，中国科学院大学数学与系统科学研究院数学科学国家重点实验室

电子邮箱地址： lzhi@mmrc.iss.ac.cn