Hurewicz 余纤维化成为 Quillen 余纤维化的判据

ANDREW RONAN

arXiv:2602.08317v1 [math.AT] 9 Feb 2026

Abstract. 本文证明， q余纤维化空间之间的 h-余纤维化是 q-余纤维化。我们还给出若干应用，包括可对称化余纤维化的推出积性质、关于 q-余纤维化的局部到整体粘合引理、证明 q余纤维化空间之间的 q-纤维化是h-纤维化，以及对 Waner 关于具有 G同伦类型的 G-CW 复形的 G-空间在纤维序列中的定理的另一种证明。此外，以上结果均可轻易推广到等变情形，因此本文始终在更一般的等变框架下进行讨论。

Contents

1. 引言 1 2. q余纤维化空间之间的 Hurewicz 余纤维化是 q-余纤维化 3 3. 可对称化余纤维化的推出积性质 5 4. 关于纤维化和余纤维化的局部粘合结果 5 5. n重积与对角映射的应用 7 6. q余纤维化空间之间的 A q-纤维化是一个 h-纤维化 9 7. Waner 定理的另一种证明 11 8. 点集拓扑附录 13 参考文献 14

1. Introduction

本文证明， hG-余纤维化的 qG-余纤维化 G-空间之间的映射是 qG-余纤维化，并讨论若干应用。结合 Illman 定理（即 G-流形具有 G-CW 复形结构）， [Ill83，推论 7.2], 我们的结果证明是识别 qG-余纤维化的有力工具，正如我们将在应用中看到的那样。

乍看之下，我们的结果似乎令人惊讶——毕竟， hG-余纤维化往往可以通过局部信息来判定。例如，任何具有一个与 $A \times (-1,1)$同胚的邻域的子空间 A 的包含映射（其中 A 对应于 $A \times \{0\}$）都是 hG-余纤维化。另一方面， qG-余纤维化的数据似乎需要全局信息，也就是说，需要一个连接定义域和陪域的 G-胞腔复形。当然， qG-余纤维化仅被定义为 G-胞腔复形的收缩，这或许正是这种直觉开始失效的第一个迹象。换个角度来看，我们处于这样一种情形：有两个模型结构，即 hG 和 qG 模型结构，它们满足弱等价与纤维化之间的关系$\mathcal{W}_h \subset \mathcal{W}_q$ 和 $\mathcal{F}_h \subset \mathcal{F}_q$ 。在这种情形下，我们可以构造一个混合模型结构，正如 Cole 在 [Col06, 定理 2.1], 中所示；在此情形下，我们称之为 mG-模型结构。关于混合模型结构，有一个一般事实： h-余纤维化的 m-余纤维化对象之间的映射是 m-余纤维化， [Col06，命题 3.11]。然而，一般而言， h-余纤维化的q-余纤维化对象之间的映射并不一定是 q-余纤维化，以下例子便说明了这一点：

例1.1： 根据 *[ACB25 定理 4.3],* ，我们在集合范畴上有两种模型结构，分别由弱等价、上纤维化和纤维化三元组给出：$(\mathcal{W}_h, \mathcal{C}_h, \mathcal{F}_h)$ 和$(\mathcal{W}_q, \mathcal{C}_q, \mathcal{F}_q)$，定义如下。令 $\mathcal{W}_h$ 和 $\mathcal{W}_q$ 均为集合之间所有映射组成的类。令 C_h 为双射组成的类，C_q 为单射组成的类。令 F_h 为集合之间所有映射组成的类， F_q 为满射组成的类。因此，我们有 $\mathcal{W}_h \subset \mathcal{W}_q$、 $\mathcal{C}_h \subset \mathcal{C}_q$ 和 $\mathcal{F}_q \subset \mathcal{F}_h$。那么， h-纤维化对象之间的映射

q-纤维化对象之间的映射只是非空集合之间的一个映射，它不一定是 q-纤维化（即满射）。这些模型结构在范畴 $\boldsymbol{Set}^{op}$ 上定义了对偶模型结构，由$(\mathcal{W}_h^{op}, \mathcal{C}_h^{op}, \mathcal{F}_h^{op})$ 和$(\mathcal{W}_q^{op}, \mathcal{C}_q^{op}, \mathcal{F}_q^{op})$ 给出，其中 $\mathcal{W}_h^{op} = \mathcal{W}_h$、$\mathcal{C}_h^{op} = \mathcal{F}_h$、 $\mathcal{F}_h^{op} = \mathcal{C}_h$、 $\mathcal{W}_q^{op} = \mathcal{W}_q$、 $\mathcal{C}_q^{op} = \mathcal{F}_q$ 和 $\mathcal{F}_q^{op} = \mathcal{C}_q$。因此，$\mathcal{W}_h^{op} \subset \mathcal{W}_q^{op}$和 $\mathcal{F}_h^{op} \subset \mathcal{F}_q^{op}$。然而，$\boldsymbol{Set}^{op}$ 中 q-余纤维化集合之间的 h-上纤维化，是$\boldsymbol{Set}$中 q-纤维化集合之间的 h-纤维化的对偶，而它不一定是 q-纤维化。因此，$\boldsymbol{Set}^{op}$ 中 q-余纤维化集合之间的 h-上纤维化，不一定是 q-上纤维化。

我们的理论同样适用于采用 $\mathcal{C}$-模型结构的情形；该结构见 [Sch18，命题 B。7], 它是 qG-模型结构的推广，因此全文我们都采用 $\mathcal{C}$-模型结构。一个早期应用是证明： G-余纤维化空间的 $\mathcal{C}$-等变开子空间仍是 $\mathcal{C}$-余纤维化的，由此得到对主要结果的如下加强：

定理 1.2： 若 i： $A \to B$ 是一个 hG-余纤维化，且 B 是 $\mathcal{C}$-余纤维化的，那么 A 是 $\mathcal{C}$-余纤维化的，并且 i 是一个$\mathcal{C}$-余纤维化。

事实上，我们的一些应用确实需要 $\mathcal{C}$-模型结构的完整一般性。例如，在第 3 节中，我们令 $\mathcal{C}$ 为 $[0,1]^n$（视为一个 Σ_n-空间）的各向同性群集合，从而得到可对称化余纤维化的如下推出积性质：

定理 1.3： 设 $j\colon A \to B$ 是一个张量化且余张量化的闭对称幺半拓扑模型范畴中的可对称化余纤维化，并设 $i : C \to D$ 是空间的一个 q-余纤维化。那么推出积映射：

$$j \widehat{\times} i : A \times D \cup_{A\times C} B \times C \to B \times D$$

是可对称化余纤维化；若 i 是无圈的，或 j 是可对称化无圈余纤维化，则它是可对称化无圈余纤维化。

在第 4 节中，我们为 $\mathcal{C}$-纤维化和 $\mathcal{C}$-余纤维化推导出局部到整体粘合结果。我们此前在引理 2.4 中证明，若 $i : A \to B$ 是一个 $\mathcal{C}$- 余纤维化，且 $U \subset B$ 是一个 G- 等变开子空间，则 $i\colon A \cap U \to U$ 是一个 $\mathcal{C}$-余纤维化。由此可得以下针对 $\mathcal{C}$-余纤维化的局部到整体粘合结果：

定理 1.4： 若 $i\colon A \to B$ 是 G-空间的一个映射，且存在 B 的一个 G-可数开覆盖 $\mathcal{U}$，使得对于每个 $U \in \mathcal{U}$， $i|_{A\cap U}\colon A \cap U \to U$ 都是一个 $\mathcal{C}$-余纤维化，那么 i 就是一个 $\mathcal{C}$-余纤维化。

在第 5 节中，我们通过考察 n 重积与对角映射，开启了一系列新的应用。具体而言，我们推导出 DE72，推论 III.2] 的以下等变类比：

定理 1.5： 若 X 是 qG-余纤维化的，则对角映射 $\Delta\colon X \to X^n$ 是一个 $q(G \times \Sigma_n)$-上纤维化。

在第 6 节中，我们利用第 5 节的结果，帮助证明 q-余纤维化空间之间的 q-纤维化是一个 h-纤维化，或者更一般地说：

定理 1.6： 假设 $\mathcal{C}$ 在共轭和交运算下封闭。若 p： $E \to B$ 是 $\mathcal{C}$-余纤维化空间之间的 $\mathcal{C}$-纤维化，则 p 是一个 hG-纤维化。

在非等变情形下，且当 E 和 B 都是 CW 复形时，定理 1.6 归功于 Cauty、 [Cau92],Steinberger 和 West， [SW84，定理 1]。然而，将结论推广到 E 和 B 为 q-余纤维化空间、乃至胞腔复形的情形，则是我们关于 q-余纤维化空间的开子空间为 q-余纤维化空间这一结果的新推论。在等变情形下，且当 E 和 B 都是 G-CW 复形时，该结果归功于 Gevorgyan 和 Jimenez， [GJ19，定理 6]。

我们将在第 7 节以本理论最有趣的应用之一收尾，即给出 Waner 定理及其逆命题的简洁证明：

定理 1.7： 令 $\mathcal{C}$ 在共轭和交下封闭。令 p： $E \to B$ 为一个 hG-纤维化，且 B 是 $m\mathcal{C}$-余纤维化的。那么， E 是 $m\mathcal{C}$-余纤维化的，当且仅当对于每个 H 和 $b \in B$ （其各向同性群为 H）， $p^{-1}(b)$ 是 m（$H \cap \mathcal{C}$）-余纤维化的。

在非等变情形下，定理 1.7 归功于 Stasheff， [Sta63], ，另有 Sch¨on， [Sch77] 给出了另一种证明。在等变情形下，正向结论归功于 Waner， [Wan80，推论 4.14]。

记号与约定

假设所有空间均为紧生成弱豪斯多夫空间，所有群均为紧李群，并且本文讨论的紧李群的所有子群均为闭子群。在 G-空间范畴中工作时，所有映射、同伦、空间等均假设为 G-等变，即使我们没有明确说明。

全文中，令 $\mathcal{C}$ 表示 G 的一个子群集合，并假设该集合关于共轭封闭；随后我们在 G-空间范畴上采用 $\mathcal{C}$-模型结构，见 Sch18，命题 B.7]。回顾一下，$\mathcal{C}$-模型结构是一个拓扑模型结构，由以下对象余纤维生成：

$$I = \{G/H \times S^{n-1} \to G/H \times D^n | n \geq 0, H \in \mathcal{C}\},$$
$$J = \{G/H \times D^n \to G/H \times D^n \times I | n \geq 0, H \in \mathcal{C}\}$$

此外， $\mathcal{C}$-纤维化（分别地， $\mathcal{C}$-等价）是指满足以下条件的映射： p 使得对每个 $H \in \mathcal{C}$， p^H 都是一个 q-纤维化（分别地， q-等价）。注意，我们假设 $\mathcal{C}$ 关于共轭封闭并不失一般性，且能方便证明。

2. Hurewicz cofibrations between q-cofibrant spaces are q-cofibrations

现在我们开始证明主要定理。若 f， $g\colon X \to Y$ 是映射，且 $i\colon A \to X$ 是映射，我们称 H 是 f 与 g 之间的同伦，且相对于 i 保持不变（rel），如果 $H \circ (i \times 1)$ 是 fi 与 $gi(= fi)$ 之间的常值同伦。类似地，若 $p\colon Y \to Z$ 是映射，我们称 H 相对于 p 保持不变（rel），如果 pH 是 pf 与 pg 之间的常值同伦。至于某个同伦是相对于前复合还是后复合而言，留待读者根据上下文判断。

关键在于 以下对 [MP12，命题 17.1.4], 的推广，它的证明与原命题相同 ：

引理 2.1： 设 $i\colon A \to B$ 是一个 hG-上纤维化，且 C 是 A 的一个子空间。设 $p\colon X \to Y$ 是一个映射，它相对于 $B \times \{0\} \cup_{C\times\{0\}} C \times I \to B \times I$ 具有右提升性质。假设给定一个交换方块：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{v} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \xrightarrow[w]{} & Y \end{array}$$

以及一个映射 $\sigma\colon B \to X$，使得 $p\sigma i = pv$、 $\sigma i \simeq v$ 相对于 p，且 $p\sigma \simeq w$ 相对于 i。那么 σ 同伦于某个 τ，满足 $\tau i = v$ 和 $p\tau = w$。

证明。由于 i 是一个 hG-上纤维化， σ 同伦于某个 σ'，且满足 $\sigma' i = v$，使得复合同伦 $p\sigma' \simeq w$ 仍相对于 i。因此，我们已将问题化归到 $\sigma i = v$的情形。令 (H, λ) 表示作为一个 NDR-对的 (B, A)。令 $K\colon B \times I \to Y$为 $p\sigma$ 与 w之间的同伦，相对于 i，并将其规范化，使得对于 $t \geq \lambda(b)$， $K(b, t) = K(b, 1)$（见引理8.3）。由于 p 对 $B \times \{0\} \cup_{C\times\{0\}} C \times I \to B \times I$具有右提升性质，并在 $C \times I$上使用常值同伦，我们可以将此同伦提升为 $K\colon B \times I \to X$，其起点为 σ。如果我们将 $\tilde{\sigma}(b)$ 定义为 $= K(b, \lambda(b))$，便可如愿解出该提升问题。□

现在我们可以证明，两个 $\mathcal{C}$-余纤维化的 G-空间之间的 hG-上纤维化是 $\mathcal{C}$-上纤维化；更一般地：

引理 2.2： 如果我们有一个交换三角形：

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ {\scriptstyle j}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle k} \\ A & \xrightarrow[i]{} & B \end{array}$$

使得 i是一个 hG-上纤维化，且 j 和 k 都是 $\mathcal{C}$-上纤维化，那么 i 是一个 $\mathcal{C}$-上纤维化。

证明。在任意模型范畴中，要证明余纤维化对象之间的映射 i 是上纤维化，只需证明 i 相对于余纤维化对象之间的所有无圈纤维化都具有左提升性质，这可由收缩论证得出。因此，考虑由 G-Sp 上的 $\mathcal{C}$-模型结构诱导的 $(C\downarrow$G-Sp$)$ 上的 $\mathcal{C}$-模型结构，见 [Hir03，定理 7.6.5]。设 $p:(X,\alpha:\ C\to X)\to(Y,\beta:\ C\to Y)$ 是余纤维化对象之间的 $\mathcal{C}$-无圈 $\mathcal{C}$-纤维化。于是，在 G-Sp 中，我们可以求解 β 相对于 p 的提升问题，从而找到映射 $s:(Y,\beta)\to(X,\alpha)$，它属于 $(C\downarrow$ G-Sp$)$，且满足 $ps=1$。求解 $X\times\{0,1\}\cup C\times I\to X\times I$ 相对于 p 的提升问题，表明 sp 与 1 在 p 上相对同伦。现在考虑 $(C\downarrow$G-Sp$)$ 中 i 相对于 p 的提升问题。只需找到底层 G-Sp 中对应提升问题的解，因为任意提升都会自动定义一个属于 $(C\downarrow$G-Sp$)$ 的映射。我们可以像引理 2.1 中那样求解这个提升问题，其中初始的同伦提升取为 sw。□

例 2.3： 假设 $H\in\mathcal{C}$。若 U 是 $G/H\times D^n$的等变开子空间，则 $i:\ U\cap(G/H\times\partial D^n)\to U\cap(G/H\times D^n)$ 是一个光滑 G-流形边界的包含映射，因此，根据等变领圈邻域定理，*[Kan07，定理 3.5]*，它是余纤维化空间之间的 hG-上纤维化。由此，引理 *2.2* 告诉我们，i 是一个 $\mathcal{C}$-上纤维化。

引理 2.4： 若 $i:\ A\to B$ 是一个 $\mathcal{C}$-上纤维化，且 $U\subset B$ 是一个 G-等变开子空间，则 $i:\ A\cap U\to U$是一个 $\mathcal{C}$-上纤维化。

证明。 首先，如下所示，i 是一个相对 $\mathcal{C}$-胞腔复形 $j:A\to C$的收缩：

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ B & \underset{i}{\longrightarrow} & C & \underset{r}{\longrightarrow} & B \end{array}$$

若令 $V=r^{-1}(U)$，则 $i:\ A\cap U\to U$ 是 $j:\ A\cap V\to V$的收缩。因此，我们将问题化归为 i 是一个相对 $\mathcal{C}$-胞腔复形的情形，以下假设此情形成立。

我们可以将 i 表示为映射 $A_\lambda\to A_{\lambda+1}$的超限复合，其中每个映射都是形如 $G/H\times S^{n-1}\to G/H\times D^n$ 的映射的推出，且满足 $H\in\mathcal{C}$。根据 [Ron23，引理 6.2.3] 和引理 8.1，映射$i:\ A\cap U\to U$可以表示为映射 $A_\lambda\cap U\to A_{\lambda+1}\cap U$的超限复合，其中每个映射都是形如 $(G/H\times S^{n-1})\cap\alpha^{-1}(U)\to(G/H\times D^n)\cap\alpha^{-1}(U)$的映射的推出，而 α 是胞腔到 B的包含映射。由例 2.3，$A_\lambda\cap U\to A_{\lambda+1}\cap U$ 因此是一个 $\mathcal{C}$-上纤维化，故超限复合 $i:\ A\cap U\to U$也是如此。□

推论 2.5： $\mathcal{C}$-余纤维化 G-空间的等变开子空间是 $\mathcal{C}$-余纤维化 $t.$

结合引理 2.2 和推论 2.5，我们可以将引理 2.2 改述如下：

定理 2.6： 若 $i:\ A\to B$ 是一个 hG-上纤维化，且 B 是 $\mathcal{C}$-余纤维化的，则 A 是 $\mathcal{C}$-余纤维化的，且 i 是一个$\mathcal{C}$-上纤维化。

证明。 若 (H,λ) 将 (B,A) 表示为一个 G-NDR 对，则 A 是 $\lambda^{-1}([0,1))$ 的一个收缩；根据推论 2.5，后者是 $\mathcal{C}$-余纤维化的。□

作为本节的结束，我们记录以下关于将群作用限制到子群上的直接引理。设 $\mathcal{C}$ 是 G 的一个在共轭下封闭的子群集合，且 H 是 G的一个子群。定义 $\mathcal{C}\cap H=\{K\cap H|K\in\mathcal{C}\}$。于是有：

引理 2.7： 如果 X 作为 G-空间是 $\mathcal{C}$-余纤维化的，那么 X 作为 H-空间是$(\mathcal{C}\cap H)$-余纤维化的。

证明。 通过收缩论证，我们可以将问题归结为 X 是一个 $\mathcal{C}$-胞腔复形的情形。在这种情况下，X 是由形如 i 的映射的推出构成的超限复合：$G/K\times S^{n-1}\to G/K\times D^n$，其中 $K\in\mathcal{C}$。因此，只需证明当把 i 视为一个 H-映射时，它是一个 $(\mathcal{C}\cap H)$-上纤维化。事实上，i 是 H 流形之间的一个 hH-上纤维化，其各向同性群属于 $\mathcal{C}\cap H$，因此根据 [Ill83，推论 7.2] 和定理 2.6，它是一个 $(\mathcal{C}\cap H)$-上纤维化。□

3. A pushout-product property of symmetrizable cofibrations

设 $\mathcal{E}$ 是一个闭对称幺半、张量化的拓扑模型范畴，其幺半积为 $\boxtimes$。若 $f\colon A \to B$ 和 $g\colon C \to D$ 是 $\mathcal{C}$ 中的映射，令 $f\hat{\boxtimes}g$ 表示 f 与 g 的推出积，$f\hat{\boxtimes}g\colon A \boxtimes D \cup_{A\boxtimes C} B \boxtimes C \to B \boxtimes D$。一般而言，运算上方的帽号表示相应的推出积，或涉及拉回的对偶概念。n 重复复合 $f\hat{\boxtimes}...\hat{\boxtimes}f$ 记作 $f^{\hat{\boxtimes}n}$。可对称化上纤维化的概念定义如下：

定义 3.1： 若映射 $i\colon A \to B$ 属于 $\mathcal{E}$，且对每个 $n \geq 1$，$h^{\boxtimes n}/\Sigma_n$ 都是（无环）上纤维化，则称其为可对称化的（无环）上纤维化。

例 *3.2*：设 $G = \Sigma_n$，并设 $\mathcal{C}$ 是 G 的子群集合，每个子群都同构于对称群的乘积 $\Sigma_{n_1} \times ... \times \Sigma_{n_l}$，对应于将 $\{1, ..., n\}$ 划分为大小分别为 n_1、...、n_l 的集合。设 $i\colon S^{k-1} \to D^k$ 为边界包含映射。若考虑迭代推出积映射 $j\colon S^{k-1} \times (D^k)^{n-1} \cup ... \cup (D^k)^{n-1} \times S^{k-1} := Q_n(i) \to (D^k)^n$，则根据 *[May72，引理 A.4]*，$j$ 是一个 $h\Sigma_n$- 上纤维化；其定义域和陪域都是 $\mathcal{C}$- 余纤维化的，因为它们是 G 流形，因而是 G-*CW* 复形，参见 *[Ill83，推论 7.2]*，且其各向同性群属于 $\mathcal{C}$。因此，引理 *2.2* 告诉我们，j 是一个 $\mathcal{C}$-上纤维化。

接下来，我们将其应用于可对称化共纤维化理论，这是 [Sch18，命题 2.1.12]的推广：

定理3.3： 设 $j\colon A \to B$ 是一个张量化且余张量化的闭对称幺半拓扑模型范畴中的可对称化余纤维化，并设 $i : C \to D$ 是空间的一个 q- 余纤维化。那么推出积映射：

$$j\hat{\times}i : A \times D \cup_{A\times C} B \times C \to B \times D$$

是一个可对称化余纤维化；若 i 是无圈的，或 j 是可对称化无圈余纤维化，则它是可对称化无圈余纤维化。

证明。$\mathcal{E}$ 是张量化且余张量化的这一假设意味着双函子 $-\times-$ 在两个变量上都保持余极限。因此，根据 [RV22，命题 C.2.9]，，并利用 [GG16，定理 7]中所述的可对称化余纤维化的闭包性质，我们可以将问题归约到 i 是一个生成 q-余纤维化的情形。现在，对于任意 $n \geq 1$，我们要证明 $(j\hat{\times}i)^{\boxtimes n}/\Sigma_n$ 是一个（无圈）余纤维化。等价地，我们要证明 $(j\hat{\times}i)^{\boxtimes n}$ 对于（无圈）纤维化 $p\colon X \to Y$ 具有 Σ_n-等变左提升性质，其中 Σ_n 在 X 和 Y 上平凡作用。利用张量伴随，只需证明 $i^{\times n}$ 对于 $\widehat{Map}(j^{\hat{\boxtimes}n}, p)$具有等变左提升性质。在例3.2中，我们看到，相对于指定的子群集 $\mathcal{C}$，$i^{\hat{\times}n}$ 是一个 $\mathcal{C}$-余纤维化。因此，只需证明 $\widehat{Map}(j^{\hat{\boxtimes}n}, p)$是一个 $\mathcal{C}$-无圈 $\mathcal{C}$-纤维化。我们需要证明，对于每个 $H \in \mathcal{C}$，$\widehat{Map}(j^{\hat{\boxtimes}n}/H, p)$都是一个 q-无圈 q-纤维化。由于 $H \in \mathcal{C}$ 同构于形如 $\Sigma_{n_1} \times ... \times \Sigma_{n_l}$的群，因此 $j^{\hat{\boxtimes}n}/H$同构于$(j^{\hat{\boxtimes}n_1}/\Sigma_{n_1}) \hat{\boxtimes} ... \hat{\boxtimes} (j^{\hat{\boxtimes}n_l}/\Sigma_{n_l})$。于是结论由以下事实得出：该模型结构是拓扑的且幺半的，j 是可对称化余纤维化，并且 p是无圈的或 j 是可对称化无圈余纤维化。□

4. Local gluing results for fibrations and cofibrations

在本小节中，我们说明定理 2.6 如何使我们能够证明关于 $\mathcal{C}$-纤维化和 $\mathcal{C}$-上纤维化的粘合结果，这些结果类似于 Dold 关于 h-纤维化和 h-上纤维化的粘合结果，见 [Dol63，定理 4.8] 以及[Dol68，命题 2]。首先回忆：

定义 4.1： G-空间 B 的 G-可数开覆盖 $\{U_j\}_{j\in J}$ 是一个局部有限开覆盖 B，满足：对每个 $j \in J$，都存在一个等变映射 $\lambda_j\colon B \to I$，使得 $U_j = \lambda_j^{-1}((0, 1])$。

下一个引理是证明所有四个粘合定理的关键：

引理 4.2： 考虑如下的 G-空间提升问题：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array} \tag{1}$$

假设存在 B 的一个 G-可数开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$，使得若 $i\in I$ 且 $J\subset I$，则诱导的提升问题存在解：

$$\begin{array}{ccc} i^{-1}(U_i\cap(\cup_{j\in J}U_j)) & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ U_i\cap(\cup_{j\in J}U_j) & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

并且，给定诱导提升问题的两个解 ψ_1,ψ_2，存在一个从 ψ_1 到 ψ_2 的 G-同伦，它同时相对于 p 和 i。

那么，原提升问题 *1* 有一个解。

证明。令：

$$S=\{(A,\psi)|A\subset I,\psi:\cup_{\alpha\in A}U_\alpha\to X,p\psi=g,\psi i=f\}.$$

我们在 S 上定义一个偏序：

$$(A,\psi_1)\leq(B,\psi_2)$$

当且仅当 $A\subset B$ 和 $\psi_1=\psi_2$ 在 $\cup_{\alpha\in A}U_\alpha\setminus\cup_{\beta\in B\setminus A}U_\beta$ 上。

我们不妨假设 B 非空，此时在引理的条件中取 $J=\{i\}$，可知 S 非空。由于 $\{U_i\}$ 是一个局部有限覆盖，S 中的每条链都有一个上界。因此，根据佐恩引理，S 包含一个极大元，记作 (A,ψ_1)。若 $A\neq I$，则存在某个 $\beta\in I\setminus A$。根据引理中的条件，存在某个 $(\{\beta\},\psi_2)\in S$。根据相对同伦意义下唯一的条件，存在一个 G-同伦 $K:(U_\beta\cap(\cup_{\alpha\in A}U_\alpha))\times I\to X$，连接 ψ_1 与 ψ_2，且相对于 p 和 i。取 G-映射 λ_1，$\lambda_2:U_\beta\cup(\cup_{\alpha\in A}U_\alpha)\to I$，使得 $\cup_{\alpha\in A}U_\alpha=\lambda_1^{-1}((0,1])$，$U_\beta=\lambda_2^{-1}((0,1])$ 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$。定义：

$$\psi(u)=\begin{cases}\psi_1(u) & \text{if } \lambda_1>\frac{3}{4}\\ \psi_2(u) & \text{if } \lambda_1<\frac{1}{4}\\ K(u,\frac{3}{2}-2\lambda_1) & \text{otherwise}\end{cases}$$

于是 $(A\cup\{\beta\},\psi)\in S$ 与 $(A,\psi_1)\leq(A\cup\{\beta\},\psi)$，矛盾。因此，$A=I$ 和 ψ_1 是原提升问题的一个解。□

由此立即得到以下关于 $\mathcal{C}$-上纤维化的粘合结果 ：

定理4.3： 若 $i:\ A\to B$ 是 G-空间之间的映射，且存在 G-可数开覆盖 $\mathcal{U}$ 覆盖 B，使得对每个 $U\in\mathcal{U}$，$i|_{A\cap U}:\ A\cap U\to U$ 都是一个 $\mathcal{C}$-上纤维化，那么 i 是一个 $\mathcal{C}$-上纤维化。

证明。考虑关于 i 的提升问题，其中的映射相对于一个 $\mathcal{C}$-无挠 $\mathcal{C}$-纤维化 $p:\ X\to Y$。G-可数开覆盖 $\mathcal{U}$ 保证存在如引理 4.2 所述的局部提升。由引理 2.4 以及 $\mathcal{C}$-模型结构是拓扑的这一事实，[Sch18，命题 B.5]，可知唯一性成立，因此这类提升问题的解在相对同伦意义下唯一。因此，结论由引理 4.2 得出。□

h上纤维化的相应粘合定理见 [Dol68, Satz 2]，，其证明使用了这样一个事实：将 h上纤维化限制到可数开子空间后，所得仍是一个 h上纤维化；此处以 [Dol68,Satz 1], 代替引理 2.4：

定理 4.4： 设 $\{U_j\}_{j\in J}$ 是 B的一个 G-可数开覆盖。若 $f:\ A\to B$ 是一个映射，且对所有 $j\in J$，$f:\ f^{-1}(U_j)\to U_j$ 都是一个 hG上纤维化，则 $f:\ A\to B$ 是一个 hG上纤维化。

关于 h-纤维化，[Dol63，定理 4.8], 稍加努力，我们就可以利用引理 4.2 为 $\mathcal{C}$-纤维化证明一个粘合结果。事实上，与非等变情形一样，[tD08，定理 6.3.3], 我们可以通过对 I^n 作立方剖分，采用一种更直接的论证来证明下面的定理。然而，只要假设该开覆盖是G-可数的，我们给出的证明对于 hG-纤维化情形也完全同样适用：

定理 4.5： 若 $p:\ X \to Y$ 是一个映射，并且存在 G-等变开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$，覆盖 Y，使得$p:\ p^{-1}(U_i) \to U_i$ 对所有 $i \in I$ 都是一个 $\mathcal{C}$-纤维化，那么 p 就是一个 $\mathcal{C}$-纤维化。

证明。 考虑一个提升问题：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ A\times I & \xrightarrow[H]{} & Y \end{array}$$

其中 A 是 $\mathcal{C}$-余纤维化的，且 $i:\ A \to A\times I$ 是 $A\times\{0\}$的包含映射。如果 Y不是仿紧 Hausdorff 空间，那么我们可以沿着 H 拉回该提升问题，将其归约为涉及 i和 q的提升问题，其中 q 是 p的拉回。注意，存在 $A\times I$ 的一个开覆盖 $\{V_i := H^{-1}(U_i)\}$，使得对所有 $i\in I$，$q:q^{-1}(U_i) \to U_i$ 都是 $\mathcal{C}$-纤维化。此外，q 的底空间是仿紧 Hausdorff 的，因此 $\{V_i\}$ 有一个 G-可数化细分。因此，从现在起，我们假设开覆盖 $\{U_i\}$ 是 G-可数化的。

对每个 $i\in I$，选取函数 $\lambda_i:\ Y\to I$，使得 $U_i = \lambda_i^{-1}((0,1])$ 且 $\sum_{i\in I}\lambda_i = 1$。假设 $S=(i_0,\ \ldots,\ i_{n-1})$ 是 I中元素的一个有限序列，因此，特别地，序列中的元素不必互不相同。定义函数 $\mu_S:\ A\to I$ 如下：

$$\mu_S(a) = \max\{\min_{j\in\{0\ldots,n-1\}}\left(\inf_{t\in[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}]}\lambda_{i_j}(H(a,t))\right) - n\sum_{T||T|<n}\mu_T, 0\} \tag{2}$$

那么，$\{V_S := \mu_S^{-1}((0,1])\}$ 是一个以 I中元素的有限序列为指标的 G-可数开覆盖，覆盖 A。因此，$\{V_S\times I\}$ 是一个 G-可数开覆盖，覆盖 $A\times I$。此外，检查等式 (2) 可知，对每个 j，都有 $H(V_S\times[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}]) \subset U_{i_j}$。由此可知，引理 4.2 的存在条件得以满足，因为根据推论 2.5，V_S 是 $\mathcal{C}$-余纤维化，因此我们可以在这些区间上归纳地构造提升。类似地，我们可以归纳地构造任意两个提升之间的相对同伦，因此引理 4.2 的唯一性条件也得以满足，从而得到所需结果。□

最后，我们记下对应的 hG-纤维化粘合结果；该结果可由上述论证或参见 [Dol63, 定理 4.8]得出：

定理 4.6： 若 $p:\ X\to Y$ 是一个映射，且存在 G-可数开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$ 覆盖 Y，使得对所有 $i\in I$，$p:\ p^{-1}(U_i) \to U_i$ 都是 hG-纤维化，则 p 是 hG-纤维化。

5. Applications to n-fold products and the diagonal map

回忆一下，花环积 $G\wr\Sigma_n$ 定义为半直积 $G^n\rtimes\Sigma_n$，它由 Σ_n 对 G^n的置换作用诱导。

定义 5.1： 令 $\mathcal{D}_n$ 为对称群 Σ_n通过坐标置换作用于 I^n 时，各元素的各向同性群所成的集合。令 $\mathcal{C}$ 为 G 的一个在共轭下封闭的子群集合。定义$\mathcal{C}\wr\mathcal{D}_n$ 为 $G\wr\Sigma_n$ 中形如 $(H_1\times\ldots\times H_n)\rtimes Q$的子群集合的共轭闭包，其中$Q\in\mathcal{D}_n$，每个 $H_i\in\mathcal{C}$，并且对所有 i，若 $\sigma\in Q$，则 $H_i = H_{\sigma(i)}$。

Lemma 5.2: 若 X 是一个 $\mathcal{C}$-余纤维化的 G-空间，则 X^n 作为一个 $(G\wr\Sigma_n)$-空间是 $(\mathcal{C}\wr\mathcal{D}_n)$-余纤维化的 .

证明。由于 X 是一个 $\mathcal{C}$-胞腔复形的收缩，我们可以将问题归结为 X 是一个 $\mathcal{C}$-胞腔复形的情形。为证明之便，将 $\mathcal{C}$-伪复形定义为由形如 $A\times S^{n-1}\to A\times D^n$ 的映射的推出构成的复形，其中 A 是形如 G/H 且满足 $H\in\mathcal{C}$ 的 G-空间的有限乘积。特别地，若 X 是一个 $\mathcal{C}$-胞腔复形，则 X^n 继承了 $\mathcal{C}$-伪复形的结构。令 $\mathcal{E}$ 表示 X^n 的($\mathcal{C}\wr\mathcal{D}_n$)-余纤维化的 Σ_n-等变子伪复形及其包含映射所成的范畴，其中这些包含映射是($\mathcal{C}\wr\mathcal{D}_n$)-上纤维化。令 S_λ 表示 $\mathcal{E}$ 中的 λ-序列所成的集合，其中没有后继映射是恒等余纤维化映射，[Hir03，定义 10.2。1], 并令 $S=\cup S_\lambda$；由于对恒等映射的限制，这仍然是一个集合。我们可以在 S 上定义偏序：$F\le G$ 当且仅当 $F=G$，或者 F 是 G 在某个较小序数上的限制。于是，S 非空，且每条链都有上界，因此根据佐恩引理，S 有一个极大元。

引理，记作 $F\colon\ \lambda \to \mathcal{E}$。注意， λ 将是一个后继序数，否则我们就可以取并集，从而与极大性矛盾。

假设 $M := F_{\lambda-1} \neq X^{n-1}$。那么我们可以沿着粘附映射$\alpha\colon\ G/H_1 \times ... \times G/H_n \times S^{m-1} \to M$，将一个 $\mathcal{C}$-伪胞腔粘附到 M 上；这对应于来自 X的 n-胞腔的一个推出积。现在， Σ_n作用于 X的n元胞腔组，并因此作用于 Σ_n/K 轨道，该轨道由诱导 α的 n元组构成，其中 K 是诱导 α的 n元组的稳定子。由于 M 是 Σ_n-等变的，置换后的伪胞腔均不包含在 M中，因此下面的推出定义了 X^n的一个 Σ_n-等变 $\mathcal{C}$子伪复形 M':

$$\begin{array}{ccc} \sqcup_{\sigma\in\Sigma_n/K} G/H_{\sigma^{-1}(1)} \times ... \times G/H_{\sigma^{-1}(n)} \times S^{m-1} & \longrightarrow & M \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow \\ \sqcup_{\sigma\in\Sigma_n/K} G/H_{\sigma^{-1}(1)} \times ... \times G/H_{\sigma^{-1}(n)} \times D^{m} & \longrightarrow & M' \end{array}$$

由于 i 的定义域与陪域都是各向同性群属于 $\mathcal{C}\wr\mathcal{D}_n$的$(G\wr\Sigma_n)$-流形，根据 [Ill83，推论 7.2]，它们是$(\mathcal{C}\wr\mathcal{D}_n)$-余纤维化的。此外， i是一个 $h(G\wr\Sigma_n)$-上纤维化，因为它是$(G\wr\Sigma_n)$-空间$\sqcup_{\sigma\in\Sigma_n/K} G/H_{\sigma^{-1}(1)} \times ... \times G/H_{\sigma^{-1}(n)}$与 $h(G\wr\Sigma_n)$-上纤维化 $S^{m-1} \to D^m$的乘积；根据 [May72，引理 A.4]，以及 G在 S^{m-1}和 D^m上平凡作用这一事实，后者是一个$h(G\wr\Sigma_n)$-上纤维化。因此，根据定理 2.6，i 是一个$(\mathcal{C}\wr\mathcal{D}_n)$-上纤维化，所以 $M \to M'$ 是一个$(\mathcal{C}\wr\mathcal{D}_n)$-上纤维化，这就产生了矛盾。实际上，$X^n$ 是$(\mathcal{C}\wr\mathcal{D}_n)$-余纤维化的。□

如果我们忘掉对称作用，并允许 G 在 X^n 上作对角作用，那么引理 2.7 有如下推论:

推论 5.3： 如果 $\mathcal{C}$ 在共轭和有限交下封闭，并且 X 是一个 $\mathcal{C}$-余纤维化的 G-空间，那么 X^n 作为一个 G-空间是 $\mathcal{C}$-余纤维化的。

在转而考察对角映射之前，我们先记录下面这个稍后会用到的引理:

引理 5.4： 如果 M 是一个带边界的光滑 G-流形，那么将 M^n 的（拓扑）边界与对角线 Δ_M 的并集包含到 M^n 中的包含映射 i 是一个 $h(G\times\Sigma_n)$-上纤维化。

证明。若 U 是 M 的内部，则由 [Kan07 定理 4.4、引理 4.2]，对角映射 $\Delta\colon\ U \to U^n$ 是一个 $h(G\times\Sigma_n)$-上纤维化。类似地，由 [Kan07 定理 3.5] ， $\partial M \to M$ 是一个 hG-上纤维化，因此由引理 8.6，$\partial(M^n) \to M^n$ 是一个 $h(G\times\Sigma_n)$-上纤维化。由此可知，对于任何不属于 Δ_M 与 $\partial(M^n)$ 交集的点 x，根据 [Dol68，命题 1]，存在 x 的一个 $(G\times\Sigma_n)$-等变开邻域 V，使得 $i\cap V$ 是一个 $h(G\times\Sigma_n)$-上纤维化。由于 M^n 是仿紧 Hausdorff 的，任何 $(G\times\Sigma_n)$-等变开覆盖都有一个 $(G\times\Sigma_n)$-可数化细分，因此根据定理 4.4，只需在 $\partial(M^n)\cap\Delta_M$ 中的点周围找到这样的 V。根据 [Kan07 定理 3.5],，我们可以将问题归约到 $M = \partial M \times [0,1)$ 的情形。在这种情况下， i 是复合映射 $\partial(M^n)\cup\Delta_M \xrightarrow{j} \partial(M^n)\cup((\partial M)^n\times\Delta_{[0,1)}) \xrightarrow{k} (\partial M)^n\times[0,1)^n$。注意， j 是映射 $\Delta_{\partial M}\to(\partial M)^n$ 与 $\{0\}\to\Delta_{[0,1)}$ 的推出积的推出。因此，由 [Kan07 定理 4.4、引理 4.2]， j 是一个 $h(G\times\Sigma_n)$-上纤维化。此外， k 是 $(\partial M)^n$ 与 $\partial([0,1)^n)\cup\Delta_{[0,1)} \xrightarrow{\alpha} [0,1)^n$ 的积，因此我们只需证明 α 是一个 $h\Sigma_n$- 上纤维化。这是因为 $\partial((\Delta^1)^n)\cup\Delta_{\Delta^1}$ 是单纯集合 $(\Delta^1)^n$ 的一个 Σ_n- 等变子集，而该单纯集合带有 Σ_n 的置换作用；因此，经过几何实现并限制到一个 Σ_n-可数化开子集后，我们便得到所需的 α 是一个 $h(\Sigma_n)$-上纤维化。□

现在考虑对角映射 $\Delta\colon\ X \to X^n$。由于 $G\wr\Sigma_n$ 不作用于 X，我们将无法证明 Δ 是一个 $h(\mathcal{C}\wr\mathcal{D}_n)$-上纤维化。相反，我们考虑沿对角映射 $G \to G^n$限制所诱导的 $(G\times\Sigma_n)$-作用，在这种情况下，我们有如下 DE72 推论 III.2] 的等变类比:

定理 5.5： 若 X 是 $\mathcal{C}$-余纤维化的，则 $\Delta\colon\ X \to X^n$ 是一个 $((\mathcal{C}\wr\mathcal{D}_n)\cap(G\times\Sigma_n))$-上纤维化，见引理 2.7。特别地，若 X 是 qG-余纤维化的，则 Δ 是一个 $q(G\times\Sigma_n)$-上纤维化。

证明。由引理 5.2 和引理 2.7 可知， X^n 是 $((\mathcal{C}\wr\mathcal{D}_n)\cap(G\times\Sigma_n))$-余纤维化的。由于任意 $\mathcal{C}$-余纤维化的G-空间都是某个 $\mathcal{C}$-胞腔复形的收缩，根据引理 2.2，只需证明：若 Z 是一个 $\mathcal{C}$-胞腔复形，则$\Delta\colon\ Z\to Z^n$ 是一个 $h(G\times\Sigma_n)$-上纤维化。为此，假设 $\Delta\colon\ Y\to Y^n$ 是一个 $h(G\times\Sigma_n)$-上纤维化，且 X 由 Y沿 $\alpha\colon\ G/H\times S^{k-1}\to Y$粘贴单个胞腔得到。我们将证明：若 (H,λ) 将 (Y^n,Y) 表示为一个 $(G\times\Sigma_n)$-NDR 对，则存在 (X^n,X) 的一个 $(G\times\Sigma_n)$-NDR 对 (K,μ)，使得 $K|_{Y^n\times I}=H$且 $\mu|_{Y^n}=\lambda$。首先，复合映射 $Y\to Y^n\to Y\times X^{n-1}\cup\ldots\cup X^{n-1}\times Y$是一个$h(G\times\Sigma_n)$-上纤维化，由引理 8.4，它可由一个延拓 (H,λ) 的 $(G\times\Sigma_n)$-NDR 对表示；其中注意，由引理 8.6 以及 [Str72 的引理 5] 的等变类比，$Y^n\to Y\times X^{n-1}\cup\ldots\cup X^{n-1}\times Y$是一个 $h(G\times\Sigma_n)$-上纤维化。然后我们考虑推出之间的映射：

$$\begin{array}{ccccc} G/H\times D^k & \longleftarrow & G/H\times S^{k-1} & \longrightarrow & Y \\ \downarrow\Delta & & \downarrow\Delta & & \downarrow\alpha \\ (G/H)^n\times D^{kn} & \longleftarrow & (G/H)^n\times\partial D^{kn} & \longrightarrow & Y\times X^{n-1}\cup\ldots\cup X^{n-1}\times Y \end{array}$$

我们已经看到， α是一个 $h(G\times\Sigma_n)$-上纤维化。推出之间的映射为 $\Delta\colon\ X\to X^n$。要证明它是一个 $h(G\times\Sigma_n)$-上纤维化，只需证明下方的推出积映射 ϕ 是一个 $h(G\times\Sigma_n)$-上纤维化：

$$\phi : G/H\times D^k\cup_{G/H\times S^{k-1}}(G/H)^n\times\partial D^{kn}\to(G/H)^n\times D^{kn}$$

这由引理 5.4 得出，因此 Δ 是一个 $h(G\times\Sigma_n)$-上纤维化，因为它是一个 α 的推出与一个 ϕ的推出的复合。此外，根据引理 8.4 和 8.5， $h(G\times\Sigma_n)$-上纤维化 $X\to X\times X$ 可由一个 $(G\times\Sigma_n)$-NDR 对表示，该对扩张了 (H,λ)。该引理现在可通过取余极限得出。□

推论 5.6： 若 $\mathcal{C}$ 在共轭和有限交下封闭，且 X 是 $\mathcal{C}$-余纤维化的，则 $\Delta\colon\ X\to X^n$是一个 $\mathcal{C}$-上纤维化。

6. A q-fibration between q-cofibrant spaces is an h-fibration

如 [DE72], 中所述，我们作如下定义：

定义 6.1： 若一个 G-空间 X是 G-等变局部等连接的（或称 *G-LEC*），则称之为 $\Delta\colon\ X\to X\times X$是一个 hG-上纤维化。

下一个引理是 [DE72，定理 II.3]的等变类比：

引理 6.2： 设 X 是 *G-LEC*，并假设 $x\in X$ 的各向同性群为 H。则存在一个 H-等变开邻域 U，它包含 x，使得 π_1、$\pi_2\colon\ U\times U\to X$ 同伦。这里， π_i 表示先投影到第 i个因子，再包含映入 X的映射。

证明。令（H，λ）表示对角线（$X\times X$，Δ）作为一个 G-NDR 对的包含映射。将 X与$\{x\}\times X$ 等同，并令 $U=\lambda^{-1}([0,1))\cap(\{x\}\times X)$。考虑 $H\colon\ \{x\}\times U\times I\to X\times X$。于是 π_2H 定义了一个 H-同伦，将包含映射 $i\colon\ U\to X$ 映至某个映射 f。此外， π_1H 定义了一个 H-同伦，将 f 映至到 x的常值映射。现在若考虑 π_1，$\pi_2\colon\ U\times U\to X$，可见 π_1 是复合映射$U\times U\to X\times U\xrightarrow{\pi_1}X$，它同伦于到 x的常值映射。类似地， π_2 同伦于到 x的常值映射，因此 π_1 与 π_2 同伦。□

引理 6.3： 设 X 是 $\mathcal{C}$-余纤维化的，并假设 $x\in X$ 的各向同性群为 H。则存在 H-等变开邻域 U，它是 x 的开邻域，使得 $\pi_1,\pi_2\colon\ U\times U\to X$ 可通过一个在 Δ上恒定的 H-同伦进行 H-同伦。

证明。由引理 5.5 和引理 6.2 可知， π_1 和 π_2 是 H-同伦的，譬如通过一个 H-同伦$L\colon U\times U\times I\to X$。定义 $\Gamma\colon\ \Delta\times I\to X$ 为将 L 限制到 $\Delta\times I$所得。令 Γ^{-1} 表示从 π_2 到 π_1的逆同伦。定义 K 为 L 和 $\Gamma^{-1}\pi_2$的复合（通过连接）同伦：

$$U\times U\times I\xrightarrow{\pi_2}U\times I\cong\Delta\times I\xrightarrow{\Gamma^{-1}}X$$

于是， K 到 $\Delta\times I$ 的限制是 Γ 与 Γ^{-1}的复合，而 K 是从 π_1 到 π_2的一个 H-同伦。 Γ 与 Γ^{-1} 的复合本身同伦于 H，例如通过 $\alpha\colon\ \Delta\times I\times I\to X$，同伦到$\pi_1|_\Delta$上的常值同伦，并且 α 可以取为相对于 $\Delta\times\{0,1\}\times I$的。于是我们可以定义一个提升问题：

$$\begin{array}{ccc} U\times U\times I\times\{0\}\cup\Delta\times I\times I\cup U\times U\times\{0,1\}\times I & \xrightarrow{K\cup\alpha\cup const(\{\pi_1,\pi_2\})} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ U\times U\times I\times I & \longrightarrow & * \end{array}$$

由于 U 是（$\mathcal{C}\cap H$）-余纤维化的，根据推论 2.5和引理 2.7，存在一个提升 $K\colon\ U\times U\times I\times I\to X$，因此，根据引理 5.5，它是 H-LEC的。这意味着左侧的垂直映射是一个 hH-无圈 hH-上纤维化。将 K 限制到 $U\times U\times I\times\{1\}$ 上，即得到所需的 H-同伦。□

我们将使用 [Las82 引理 2.8], 的如下推论，该推论在 [BJ15 引理 6.1]中被指出：

引理 6.4： 若 $p\colon\ E\to B$ 是一个 hH-纤维化，则 $1\times_H p\colon\ G\times_H E\to G\times_H B$ 是一个 hG-纤维化。

证明。考虑如下右方框中的 G-空间的提升问题：

$$\begin{array}{ccccc} G\times_H V_0 & \xrightarrow{\cong} & X & \xrightarrow{f} & G\times_H E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G\times_H (V_0\times I) & \xrightarrow[\cong]{} & X\times I & \xrightarrow[\alpha]{} & G\times_H B \end{array}$$

于是 $X\times I\cong G\times_H\alpha^{-1}(B)$，因此 [Las82 引理 2.8] 告诉我们存在一个 H-同胚 $\psi\colon V_0\times I\to V$，其中 $V=\alpha^{-1}(B)$，$V_0=V\cap(X\times\{0\})$，且 $\psi|_{V_0\times\{0\}}$ 是 V_0 到 V的包含映射。注意$G\times_H V_0\cong X$。该 H-同胚 ψ 诱导一个 G- 同胚 $G\times_H(V_0\times I)\to X\times I$，如上图所示，它在 $0\in I$ 处限制为到 $X\times\{0\}$ 上的一个同胚。因此，为了求解右方框的提升问题，只需求解 H-空间的伴随提升问题：

$$\begin{array}{ccc} V_0 & \xrightarrow{f} & G\times_H E \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_0\times I & \xrightarrow[\alpha\psi]{} & G\times_H B \end{array}$$

由于 $V=\alpha^{-1}(B)$，$\alpha\psi\colon V_0\times I\to G\times_H B$ 可经由 B分解，且 $f\colon V_0\to G\times_H E$ 可经由 E分解。由于 p 是一个 hH-纤维化，因此提升问题可以得到解。□

以下定理的一个版本最初由 Gevorgyan 和 Jimenez 在等变情形下于 [GJ19，定理 6], 中证明，所用的是 qG-模型结构，并假设 E 和 B 都是 G-CW 复形。下面的证明修正了该证明中的一个小疏漏，因为 X这个 G-CW 复形未必能被 X中的 G-等变开子空间覆盖，且这些开子空间在非等变意义下可缩。

定理 6.5： 假设 $\mathcal{C}$ 在共轭和交运算下封闭。若 $p\colon\ E\to B$ 是 $\mathcal{C}$-余纤维化空间之间的 $\mathcal{C}$-纤维化，则 p 是一个 hG- 纤维化。

证明。令 (H,λ) 表示 $(B\times B,\Delta_B)$ 是一个 G-NDR 对。如引理 6.3 所述，若 $b\in B$具有各向同性群 H，则存在一个 H-等变开邻域 U，它包含 b，以及一个 H-同伦 $K\colon U\times U\times I\to B$，连接 π_1和 π_2，使得对所有 $t\geq\lambda(u,v)$，都有 $K(u,v,t)=K(u,v,1)$。注意，$H\in\mathcal{C}$，因为存在一个从 B 到一个 $\mathcal{C}$-胞腔复形的包含映射。由于 $p\colon E\to B$ 是一个 $(\mathcal{C}\cap H)$- 纤维化，$\mathcal{C}$ 在交运算下封闭，且U 和 $p^{-1}(U)$ 都是 $(\mathcal{C}\cap H)$- 余纤维化的，因此我们可以解这个提升问题：

$$\begin{array}{ccc} U\times p^{-1}(U) & \xrightarrow{\pi_2} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ U\times p^{-1}(U)\times I & \xrightarrow[K\circ(1\times p\times 1)]{} & B \end{array}$$

以定义切片函数 $\tilde{K}\colon\ U\times p^{-1}(U)\times I\to E$。我们现在证明 $p\colon\ p^{-1}(U)\to U$是一个 hH-纤维化。事实上，给定一个 H-空间的提升问题：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & p^{-1}(U) \\ \downarrow & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow[L]{} & U \end{array}$$

˜ ˜一个提升可经由 $L(x,t) = K(L(x,t)\ f(x)\ \lambda(L(x,t)\ pf(x))$ 定义。

由于 B 是完全正则的，根据 [Bre72 定理 5.4]， b 也有一个 G-等变开邻域 G，它与 $G \times_H S$ 同胚，其中 S 是 B 的一个包含 b 的 H- 等变子空间。如有必要，将 S 替换为 $S \cap U$，我们不妨假设 $S \subset U$。在这种情况下，由上文可知， $p\colon\ p^{-1}(S) \to S$ 是一个 hH-纤维化，因此根据引理 6.4， $p\colon\ G \times_H p^{-1}(S) \to G \times_H S$ 是一个 hG-纤维化。由此可知，对每个 $b \in B$，都存在一个 b 的 G-等变邻域 V，使得 $p\colon\ p^{-1}(V) \to V$ 是一个 hG-纤维化。由于 B 是仿紧的，因此 p 是一个 hG-纤维化。□

7. An alternative proof of Waner's Theorem

到目前为止，我们已考虑 G-空间范畴上的 $\mathcal{C}$-模型结构与 hG-模型结构——然而，我们现在有理由考虑 $m\mathcal{C}$-模型结构，它是通过混合 $\mathcal{C}$ 与 hG 模型结构而得到的，如 [Col06，定理2.1]。由 [Col06，推论3.7], ，一个 G-空间是 $m\mathcal{C}$-余纤维化，当且仅当它具有一个 $\mathcal{C}$-余纤维化 G-空间的 G-同伦型。注意，若 X 是 $\mathcal{C}$-余纤维化，则在 G-CW逼近定理（ [M$^+$96，第I章，定理3.6], ）的证明中仅使用子群 $H \in \mathcal{C}$，我们便得到一个 $\mathcal{C}$-CW逼近$\gamma\colon\ Z \to X$，其中 γ 是一个 G-同伦等价，因为 $\mathcal{C}$-余纤维化 G-空间之间的 $\mathcal{C}$-等价是一个G-同伦等价。因此，一个 G-空间是 $m\mathcal{C}$-余纤维化，当且仅当它具有一个 $\mathcal{C}$-CW复形的 G-同伦型。注意，我们通篇所指的都是非基点同伦型。

利用前几节的结果，我们可以给出 Waner 关于具有 G-同伦类型（即某个 G-CW 复形的同伦类型）的 G-空间的定理的另一种证明， [Wan80，推论 4.14]:

定理 7.1： 设 $\mathcal{C}$ 在共轭和交运算下封闭。假设 $p\colon\ E \to B$ 是一个 hG-纤维化，且 $* \in B$ 是一个 G-固定基点。若 E 和 B 都是 $m\mathcal{C}$-余纤维化的，则 $F\colon = p^{-1}(*)$ 是 $m\mathcal{C}$-余纤维化的。

证明。 $\mathcal{C}$-模型结构在范畴 **(G-Sp)** $\downarrow B$ 上诱导出一个模型结构， [Hir03，定理 7.6.5]。设 $\tilde{p}$ 是该模型范畴中 p 的纤维化且余纤维化逼近， [Hir03，定义 8.1.22]。我们可以写成$\tilde{p} = qi$，其中 i 是平凡余纤维化，而 q 是 **(G-Sp)** $\downarrow B$ 中的纤维化。由于 i 的定义域是纤维化的，且 p 也是一个 $\mathcal{C}$-纤维化，存在一个弱等价 r，使得 $ri = 1$。由于我们是在 $(G - Sp) \downarrow B$ 中进行构造，因此得到如下交换方块:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} & \xrightarrow{q} & \tilde{B} \\ {\scriptstyle fr}\downarrow{\scriptstyle \simeq} & & {\scriptstyle \simeq}\downarrow{\scriptstyle g} \\ E & \xrightarrow[p]{} & B \end{array}$$

˜ ˜由于 E 和 B 是 $\mathcal{C}$-余纤维化的，根据定理 6.5， q 是一个 hG-纤维化。根据˜的假设，我们知道 p 是一个 hG-纤维化。由于 E 和 B 是 $m\mathcal{C}$-余纤维化的，竖直映射是 hG-等价。因此， B 包含˜一个 G-不动点，因而 $G \in \mathcal{C}$，因为 B 是一个 $\mathcal{C}$-胞腔复形的收缩。由于 g 是一个 $\mathcal{C}$-无挠 $\mathcal{C}$-纤维化，我们˜可以为 B 选取一个 G-不动基点，使其在 g下映到 $*$。我们也用 $*$表示这个基点。由于hG-模型结构是右正则的，诱导映射 $q^{-1}(*) \to F$ 是一个 G-同伦等价。由于 $* \to \tilde{B}$是一个 hG-上纤维化，而 q 是一个 hG-纤维化，根据 [MP12，引理 1.3， $q^{-1}(*) \to \tilde{E}$ 是一个 hG-上纤维化。1]由于 $\tilde{E}$ 是 $\mathcal{C}$-余纤维化的，根据定理 2.6， $q^{-1}(*)$ 是 $\mathcal{C}$-余纤维化的。因此， F 是 $m\mathcal{C}$-余纤维化的，正如所需。□

B在讨论 Waner 定理的逆命题之前，我们先记录几个常规引理:

引理 7.2： 若 X 是一个 $m\mathcal{C}$-余纤维化的 G-空间，且 H 是 G的子群，则 X 作为 H-空间是 $m(H \cap \mathcal{C})$-余纤维化的。

证明。 我们知道， X 与一个 $\mathcal{C}$-胞腔复形 Y 是 G-同伦等价的，而后者根据引理 2.7，作为一个 H-空间是 ($H \cap \mathcal{C}$)-余纤维化的。□

下一个引理可仿照 [May75, 引理 2.4] 得出：

引理 7.3： 如果 $p\colon E \to B \times I$ 是一个 hG-纤维化，那么存在一个在 B 上的 G-同伦等价， $E_0 \simeq E_1$，其中 E_t 是 $B \times \{t\}$的原像。

推论 7.4： 如果 $p: E \to \frac{G}{H}\times D^n$ 是一个 hG-纤维化且 $* \in D^n$，那么 E 在 $\frac{G}{H} \times D^n$ 上与 $(G \times_H F) \times D^n$ 是 G-同伦等价的，其中 $F = p^{-1}(1, *)$。

证明。 考虑沿着一个 G-同伦 $G/H \times D^n \times I \to G/H \times D^n$ 对 p 的拉回，该同伦连接恒等映射与由 $D^n \to * \to D^n$ 诱导的映射。根据引理 7.3 和 [Ron25 中的引理 3.1 和 3.2]， E 在 $\frac{G}{H} \times D^n$ 上与 $(G \times_H F) \times D^n$ 是 G- 同伦等价的。□

我们还需要以下引理，由此可知，若 X 是一个 $m\mathcal{D}$-余纤维化的 H-空间，则 $G \times_H X$ 作为一个 G-空间是 $m\mathcal{D}$-余纤维化的：

引理 7.5： 若 H 是 G 的一个子群，且 X 是一个 $\mathcal{D}$-余纤维化的 H-空间，则 $G \times_H X$ 作为一个 G-空间是 $\mathcal{D}$-余纤维化的，其中 $\mathcal{D}$ 是将 $\mathcal{D}$ 视为 G的子群集合所得的共轭闭包。

证明。 不妨设 X 是一个 $\mathcal{D}$-胞腔复形，此时它是由形如 $i\colon H/K \times S^{n-1} \to H/K \times D^n$ 且满足 $K \in \mathcal{D}$的映射的推出所构成的超限复合。由于 $G \times_H -$ 保余极限，因此只需证明 $G \times_H i$ 是一个 $\mathcal{D}$-上纤维化。这可由以下观察得出： $G \times_H (H/K) \cong G/K$。□

现在我们可以证明 Waner 定理及其逆命题的一般形式：

定理 7.6： 设 $\mathcal{C}$ 对共轭和交封闭。设 $p\colon E \to B$ 是一个 hG-纤维化，且 B 是 $m\mathcal{C}$-余纤维化。那么， E 是 $m\mathcal{C}$-余纤维化，当且仅当对于任意 H 以及各向同性群为 H 的 $b \in B$， $p^{-1}(b)$ 是$m(H \cap \mathcal{C})$-余纤维化。

证明。($\Longrightarrow$) 若 E 是 $m\mathcal{C}$-余纤维化，且 $b \in B$ 的各向同性群为 H，则根据引理 7.2， E 和 B 都是作为 H-空间的 $m(H \cap \mathcal{C})$-余纤维化。此外，将 p 视为 H-映射时，它是一个 hH-纤维化，因此根据定理 7.1， $p^{-1}(b)$ 是 $m(H \cap \mathcal{C})$-余纤维化。

($\Longleftarrow$) 我们先说明，可以将问题归结为 B 是一个 $\mathcal{C}$-CW 复形的情形。令 $h: B \to B$ 为一个 $\mathcal{C}$-CW 近似，并考虑以下拉回：

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} & \xrightarrow{k} & E \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \tilde{B} & \xrightarrow[h]{} & B \end{array}$$

由于 B 是 $m\mathcal{C}$余纤维化，且 hG模型结构是适当的，因此依据 [Ron23, 定理 6.1.2], ， h 和 k 都是 G同伦等价。若 $b \in B$, $b = h(b)$， b 的各向同性群为 H，且 b 的各向同性群为 H，则$H \supseteq \tilde{H}$。根据假设， $p^{-1}(b)$是 $m(H \cap \mathcal{C})$余纤维化，因此由引理 7.2， $q^{-1}(\tilde{b})$是 $m(\tilde{H} \cap \mathcal{C})$余纤维化，因为它作为一个 $\tilde{H}$空间等于 $p^{-1}(b)$。因此，从现在起我们假设 B 是一个 $\mathcal{C}$-CW 复形。

假设 B 的 n 骨架 $B_{(n)}$ 由粘附映射 $\alpha_i: G/H_i \times S^{n-1} \to B_{(n-1)}$ 定义，其中 i 遍历某个指标集 I，且对每个 i， $H_i \in \mathcal{C}$。令 e_i 表示第 i 个胞腔到 $B_{(n)}$ 中的包含映射， $e_i\colon G/H_i \times D^n \to B_{(n)}$。定义 $P_i^{S^{n-1}}$ 为 α_i 沿 p 的拉回，并定义 $P_i^{D^n}$ 为 e_i 沿 p 的拉回。于是，利用推论 7.4， $P_i^{S^{n-1}} \simeq (G \times_{H_i} F_i) \times S^{n-1}$ 且 $P_i^{D^n} \simeq (G \times_{H_i} F_i) \times D^n$，其中 $F_i = p^{-1}(b_i)$，对某个各向同性群为 H_i 的 $b_i \in B$ 成立。由于 B 是 $\mathcal{C}$-余纤维化的，且 $b_i \in B$， $H_i \in \mathcal{C}$。此外，根据假设， F_i 是 $m(H_i \cap \mathcal{C})$-余纤维化的，因此由引理 7.5 以及 $\mathcal{C}$ 对交封闭这一事实可知， $P_i^{S^{n-1}}$ 和 $P_i^{D^n}$ 是 $m\mathcal{C}$-余纤维化的。利用 Ron23，引理 6.2， [，我们得到一个推出：3],

$$\begin{array}{ccc} \sqcup_i P_i^{S^{n-1}} & \longrightarrow & p^{-1}(B_{(n-1)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqcup_i P_i^{D^n} & \longrightarrow & p^{-1}(B_{(n)}) \end{array}$$

由于 hG-上纤维化沿 hG-纤维化的拉回是 hG-上纤维化，故由 MP12，引理 1.3，[1]，$P_i^{S^{n-1}} \to P_i^{D^n}$ 是 hG-上纤维化。因此，左侧映射是 hG-上纤维化，且其两端都是 $m\mathcal{C}$-余纤维化对象，因此根据 [Col06，命题 3.11]，它是 $m\mathcal{C}$-上纤维化。因此，右侧也为 $m\mathcal{C}$-上纤维化，于是通过归纳，$p^{-1}(B) = E$ 是 $m\mathcal{C}$-余纤维化的。□

8. Appendix of point set topology

引理 8.1:设 I 是一个滤过范畴，且 $D: I \to \mathcal{U}$ 是一个函子，它将 I 中的映射映为闭包含。设 $A := colim D$ 和 $f: X \to A$ 是一个映射。定义 $Y(i)$ 为 $D(i)$ 沿 f 的拉回。那么典范映射 $colim Y \to X$ 是一个同胚。

证明。我们可以将闭包含的滤过余极限（例如 A）表示为余极限子空间的不交并的商，即 $\sqcup_{i\in I} D(i) \to A$, [Str09，引理 3.3]。我们有一个拉回：

$$\begin{array}{ccc} \sqcup_{i\in I} Y_i & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \sqcup_{i\in I} D_i & \longrightarrow & A \end{array}$$

由于商映射的拉回仍是商映射，[Str09，命题 2.36], 由此得到所求结果。 □

引理 8.2：空间 X 的下列性质在直缩下封闭：*i)* 豪斯多夫，*ii)* 仿紧，*iii)* 完全正则。

证明。假设我们有映射 $i: A \to X$，$r: X \to A$，且满足 $ri = 1$。若 X 是豪斯多夫的，设 a 与 b 为 A中的不同点。则在 X 中存在不相交的开集合 U 与 V，将 $i(a)$ 与 $i(b)$ 分离。因此 $i^{-1}(U)$ 与 $i^{-1}(V)$ 不相交，并将 a 与 b分离。故 A 是豪斯多夫的。

若 X 是仿紧的，且 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 A的一个开覆盖，则 $\{r^{-1}(U_i)\}$ 是 X 的一个开覆盖，它容许一个局部有限开细化 $\{V_j\}_{j\in J}$。于是，对每个 j $i^{-1}(V_j)$ 包含于某个i的 $i^{-1}r^{-1}(U_i) = U_i$ 之中，因此 $\{i^{-1}(V_j)\}$ 是 $\{U_i\}$的一个开细化。此外，对每个 $a \in A$，存在 $i(a)$ 的一个开邻域 W，它仅与有限多个 V_j相交。于是 $i^{-1}(W)$ 是 a的一个开邻域，仅与有限多个 $i^{-1}(V_j)$ 相交。故 A 是仿紧的。

接下来假设 X 是完全正则的。设 $a \in A$与 C 是 A 的一个不含 a的闭子空间。则$r^{-1}(C)$是 X 的一个不含 $i(a)$的闭子空间。因此存在连续函数 $\lambda: X \to [0,1]$，使得 $\lambda i(a) = 0$ 且 $\lambda(r^{-1}(C)) = 1 \implies \lambda i(C) = 1$。所以 A 是完全正则的。□

引理8.3： 设 C是 X的一个闭子集，并在 $X \times I$上按如下方式定义等价关系：$(x,t) \sim (y,s)$当且仅当 $x = y$，且要么 $s = t$ 要么 $x \in C$。设 $f: A \to X$ 与 $g: f^{-1}(X/C) \to I$ 为连续映射。定义函数 $F: A \to (X \times I)/\sim$ 如下：

$$F(a) = \begin{cases} (f(a), g(a)) & if \ \ a \in f^{-1}(X/C) \\ (f(a), 1) & otherwise \end{cases}$$

则 F 是连续的。

证明。设 $V = X/C$ 与 $\pi: (X \times I)/\sim \to X$ 为投影。由于 $\sim$ 是闭等价关系，$(X \times I)/\sim$ 在通常的商拓扑下是紧生成弱豪斯多夫的，[May99，第 40]页。由于 I 是紧豪斯多夫的，π 是闭映射。设 $E \subset (X \times I)/\sim$ 为闭集。则由 f与 g的连续性，$F^{-1}(E) \cap f^{-1}(V)$在 $f^{-1}(V)$中是闭的。此外，$F^{-1}(E) \cap f^{-1}(V) \subset f^{-1}(\pi(E))$，由于 π是闭映射且 f连续，故其为闭集。因此，存在 $f^{-1}(\pi(E))$的闭子集 B，使得 $B \cap f^{-1}(V) = F^{-1}(E) \cap f^{-1}(V)$。现在$F^{-1}(E) \cap f^{-1}(C) = f^{-1}(C \cap \pi(E))$是闭的，因为 C是闭的。所以：

$$F^{-1}(E) = B \cup f^{-1}(C \cap \pi(E))$$

是闭的，因此 F 是连续的。 □

引理 8.4： 设 $i: A \to B$ 是由 *G-NDR* 对 (H, λ) 表示的 hG-上纤维化，并假设 $j: B \to C$ 是一个 hG-上纤维化。那么存在一个 *G-NDR* 对 (L, τ)，表示复合映射 $k := ji: A \to C$ 是一个 hG-上纤维化，并且满足 $L|_{B\times I} = H$ 和 $\tau|_B = \lambda$。

证明。 设 (K,μ) 是表示 j 的一个 G-NDR 对，使得对于所有 $t \le 1-\mu(c)$，都有 $K(c,t) = K(c,0)$，这由引理 8.3可得。令 D 为 $\mu^{-1}([0,1))$ 的闭包，并通过连接 K 和 H 定义映射 $E\colon C\times I\cup D\times[0,2]\to C$。定义：

$$\tilde{\mu}(c) = \begin{cases} 0 & \text{if } \mu(c) \le \frac{1}{2} \\ 2(\mu(c)-\frac{1}{2}) & \text{if } \mu(c) \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

现在定义 $L(c,t) = E(c,(1-t)(1-\mu(c)) + t(2-\tilde{\mu}(c)))$ 和 $\tau(c) = \min\{1, \max\{2\mu(c)\ \lambda(K(c,1))\}\}$，如果$\mu(c) < 1$，否则 $\tau(c) = 1$。□

引理8.5： 给定一个推出方块:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ B & \xrightarrow[g]{} & D \end{array}$$

其中 i 是一个 hG-上纤维化，由 *G-NDR* 对 (H,λ) 表示，那么存在一个 *G-NDR* 对 (K,μ)，将 j 表示为一个 hG-上纤维化，使得 $K\circ(g\times 1) = H$ 且 $\mu g = \lambda$。

证明。 我们可以利用关系 $K\circ(g\times 1) = H$和 $K\circ(j\times 1) = \pi_C$以及推出的泛性质来定义 K。 μ也类似。□

我们还记录以下引理，它由这样一个事实得出：在 [May72,Lemmma A.4] 的证明中给出的 Σ_n-等变 NDR 对也是 G^n-等变的:

引理 8.6: 若 $i\colon A\to B$ 是一个 hG-上纤维化，则 n 重推出积 $i^{\times n}\colon A\times B^{n-1}\cup\ldots\cup B^{n-1}\times A\to B^n$ 是一个 $h(G\wr\Sigma_n)$-上纤维化。

References

[ACB25] Omar Antol´ín-Camarena 和 Tobias Barthel。《集合范畴上的九种模型范畴结构》，2025 年。[BJ15] Alexander Bykov 和 Ra´ul Ju´arez Flores。《G-纤维化与扭曲积》。 *Topology and its Applications*，196：379–397，2015 年。2013年国际拓扑与几何会议论文集，与第六届日墨拓扑研讨会联合举行（2013 年 9 月 2–6 日，日本松江）。[Bre72] G. Bredon。 *Introduction to Compact Transformation Groups*，第 *Pure annd Applied Mathematics*46 卷。爱思唯思，1972 年。[Cau92] Robert Cauty。关于 CW 复形的开集与 Serre 纤维。 *Colloquium Mathematicae*，63(1)：1–7，1992 年。[Col06] M. Cole。混合模型结构。 *Topology Appl.*，153(7)：1016–1032，2006 年。[DE72] Eldon Dyer 和 S. Eilenberg。局部等连通空间的伴随定理。 *Pacific Journal of Mathematics*，41 3 669 ( )：– 685，1972 年。[Dol63] Albrecht Dold。纤维化理论中的单位分解。 *Annals of Mathematics*，78(2)：223–255，1963 年。[Dol68] A. Dold。Die homotopieerweiterungseigenschaft (=hep) ist eine lokale eigenschaft。 *Inventiones mathematicae*，6(3)：185–189，1968 年。[GG16] S. Gorchinskiy 和 V. Guletski˘ı。抽象同伦范畴中的对称幂。 *Advances in Mathematics*，292 707 754，2016：–。[GJ19] P. S. Gevorgyan 和 R. Jimenez。关于 g-CW复形的等变纤维化。 *Sbornik: Mathematics*，210(10)：1428，2019 年 10 月。[Hir03] P. Hirschhorn。 *Model Categories and Their Localizations*，第 *Mathematical Surveys and Monographs*99 卷。美国数学学会，2003 年。[Ill83] S. Illman。紧李群作用的等变三角剖分定理。 *Mathematische Annalen*，262：487–501，1983 年。[Kan07] Marja Kankaanrinta。适当李群作用的等变领圈、管状邻域与粘合定理。*Algebr. Geom. Topol.*，7：1–27，2007 年。[Las82] R. K. Lashof。等变丛。 *Illinois Journal of Mathematics*，26(2)：257–271，1982 年。[M+96] J. P. May 等。 *Equivariant Homotopy and Cohomology Theory* 91 *CBMS Regional Conference Series in*，第 卷。*Mathematics* 1996 美国数学学会，。[May72] J.P. May。 *The Geometry of Iterated Loop Spaces*。《数学讲义》。施普林格出版社（柏林、海德堡），1972 年。[May75] J.P. May。《分类空间与纤维化》。 *Memoirs of the American Mathematical Society*，1(155)，1975 年。[May99] J.P. May。 *A Concise Course in Algebraic Topology*。《芝加哥数学讲座》。芝加哥大学出版社，1999 年。[MP12] J. P. May 和 K. Ponto。 *More Concise Algebraic Topology: localization, completion, and model categories*。《芝加哥数学讲座》。芝加哥大学出版社，2012 年。

[Ron23] A. Ronan。 *Nilpotent Groups Spaces and G-Spaces* 2023 https://wrap.warwick. , 。博士论文, ac.uk/id/eprint/187006/1/WRAP_Theses_Ronan_2023.pdf 华威大学，。。[Ron25] A. Ronan。等变覆盖同伦性质。 *J. Homotopy Relat. Struct.*，2025 年。[RV22] Emily Riehl 和 Dominic Verity。 *Elements of infinity-category Theory*。《剑桥高级数学研究》。剑桥大学出版社，2022 年。[Sch77] R. Sch¨on。CWh-基上的纤维化。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，62(1)：165–166，1977 年。[Sch18] Stefan Schwede。 *Global Homotopy Theory*。《新数学专著》。剑桥大学出版社，2018 年。[Sta63] James Stasheff。纤维空间分类定理。 *Topology*，2(3)：239–246，1963 年。[Str72] A. Strøm。同伦范畴是一个同伦范畴。 *Arch. Math.*，23：435–441，1972 年。[Str09] Neil P. Strickland。CGWH 空间范畴。2009 年。 https://ncatlab.org/nlab/files/StricklandCGHWSpaces.pdf。[SW84] Mark Steinberger 和 James West。CW 复形或 ANR 之间映射的覆盖同伦性质。*of the American Mathematical Society* 92 4 573 577, 1984 *Proceedings* , ( )： –。

[tD08] Tammo tom Dieck。 *Algebraic Topology*。欧洲数学会，2008 年。[Wan80] Stefan Waner。等变同伦论与 Milnor 定理。 *ciety* 258 2 351 368, 1980 *Transactions of the American Mathematical So-* , ( )： –。