低正则性空间中整条实线上阻尼BBM方程的受迫振荡

Chun-Ho Lau † Taige Wang *

arXiv:2602.08327v1 [math.AP] 9 Feb 2026

摘要

本文将在低正则性空间 H^ℓ, $\ell \in [0,1)$ 中，建立受迫阻尼Benjamin-Bona-Mahony方程（BBM方程）一维柯西问题的时间周期解的存在性与稳定性结果。我们利用 I-能量方法的估计，为线性化问题推导所需的 H^ℓ 中的估计，然后将对流项视为线性问题的扰动，从而求解原柯西问题。

*2010*年数学主题分类：35D05, 35K55, 34K13, 35Q93。关键词：I-能量方法；低正则性空间；稳定性

1 引言

本文将研究定义在整条实线上的弱阻尼 Benjamin-Bona-Mahony方程（正则化长波方程或BBM方程）柯西问题的一般时间周期解的存在性与稳定性：

$$u_t - u_{xxt} + u - u_{xx} + uu_x = f, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \tag{1.1}$$

其初始数据为 $u(x,0) = \phi(x)$。J. Bona 和 H. Chen 在 [4, 11] 中讨论了这类方程在整条实线和环面上、对应于特定形式初始数据的适定性理论，例如局部适定性（LWP）和整体适定性（GWP）。除 BBM方程外，方程左侧还加入了项 $-u_{xx}$ 和/或零阶阻尼项 u，它们在正则化和稳定化方面发挥着关键作用。外力 f 作用于流体介质的每一点，其振幅必须较小，因此全文将假设 $f(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$；在我们的实验设定中，我们希望该外力具有时间周期性，因此由此产生的解 u 也会作为研究结果之一呈现时间周期性。阻尼对于决定解的稳定性至关重要。在 KdV（Korteweg-de Vries）方程和抛物型方程等偏微分方程中，阻尼的存在保证了解析半群的稳定；[5, 26, 15] 分别遵循这一机制，在无界区域和有界区域上获得结果。J. Bona 和 J. Wu 还分析了在 KdV 方程中加入 $-u_{xx}$ 或 u 等正则化项所产生的特定阻尼效应。对于定义在整条实线上的 BBM方程，也得到了类似的稳定化阻尼机制（例如参见 C. Amick、J. Bona 和 M. Shonbek 的 [1]）。

我们将探究 BBM 方程一般解在 $H^\ell, \ell \in [0,1)$,（给定 $\phi \in H^\ell, f \in L^2$）中的这些性质。KdV 方程解理论的这一框架，甚至可以扩展到负指标的 Sobolev 空间或 Bourgain 空间；这一思路源于 J. Bourgain 的开创性工作，他对这一方法进行了量化 [10], ，随后由 C. Kenig、G. Ponce 和 L. Vega（例如参见 [18, 19]）以及 J. Bona、B.-Y. Zhang 等人（参见

†国立台湾师范大学数学系，台湾台北市 106308。电子邮件：lauchho@ntnu.edu.tw

*辛辛那提大学数学科学系，美国俄亥俄州辛辛那提 45221。通讯邮箱：taige.wang@uc.edu

例如 [9, 28]）。本文所说的解的一般性，是指低于能量或处于低正则性空间且指标为正的解（H^ℓ 满足 $\ell \in [0,1)$），其正则性低于 H^1 且较为粗糙。由于 J. Bona 和 N. Tzvetkov 发现了 [7] 中的尖锐正则性，负指标下无法进一步降低正则性。数十年来，H^1 中的解理论已逐步建立；20世纪70年代，数学理论便与 KdV 方程和 BBM方程一同得到讨论 [3, 2] 。我们将具体采用 I-能量方法，技术上构造一个由算子 I_N 定义的、与 H^ℓ等价的范数：$H^\ell \mapsto H^1$，其中 N经过特意选取；J. Colliander 等人 [13, 14]曾以此技术研究 KdV 解的低正则性。值得指出的是，$I_N u$ 随后满足一个偏微分方程，可以运用经典能量方法处理；该方法由 J. Bona、S. Sun 和 B.-Y. Zhang 在 [5, 6, 29]中采用，近期作者也在 [15, 20]中使用。

从文献 [5, 6, 29], 可见，KdV方程的线性问题可通过构造温和解来求解，随后所建立的双线性估计给出了对流项 uu_x的估计，从而得到非线性问题的可解性。在本文中，该方法在函数空间 H^ℓ 和/或$Y^\ell_{\tau,T}$ 中得到了相应结果。鉴于该方法有助于温和解的存在性理论，B.-Y. Zhang等人（包括本文作者之一）分别在一维有限线段和二维有限区域上研究了KdV 方程与耗散型偏微分方程的时间周期解（参见例如 [22, 23, 29, 26, 15, 12]）。关于阻尼KdV方程的动力系统行为，环面 $\mathbb{T}$ 上解的全局吸引子的存在性已分别由O. Goubet等人在 [16, 17] 中以及在负指标 Sobolev空间中的 [21, 27] 中加以讨论。借助I-能量方法与高低频分解，J. Bona与N. Tzvetkov在 [7]中得到了BBM方程的全局适定性。阻尼BBM方程在正指标Sobolev空间 H^ℓ, $\ell \in [0,1)$中的全局吸引子由M. Wang [24, 25]进行了讨论。根据 [7])中的论证，上述动力学行为对 $\ell \geq 0$得以成立。遵循 [7] 与 [24, 25], ，本文讨论了 $\ell \in [0,1)$中的时间周期解。

全文结构安排如下：第 2 节介绍记号、相关定义和主要结果，第 3 节给出预备引理。定理的证明将在第 4 节给出。

2 主要结果

记号 $\|\cdot\|_X$ 表示特定巴拿赫空间 X所赋予的典范范数，$\|\cdot\|$表示平方可积空间 $L^2(\mathbb{R})$的范数。$\hat{\cdot}$ 表示傅里叶变换 $\mathcal{F}\cdot$，它在频率空间中定义为关于 $\xi \in \mathbb{R}$的函数。$(\cdot,\ \cdot)$表示 $L^2(\mathbb{R})$中的经典内积。在流动力学背景下，我们希望采用常微分方程的形式，例如 $u(t)$或 $\|u(t)\|_X$，来表示随时间递增的演化。

We w将在 $t \in [\tau, \tau+T]$上构造与接近 $H^1(\mathbb{R})$的函数空间相关的解 :

$$Y^1_{\tau,T} = \left\{ u \Big| \sup_{\tau \leq s \leq \tau+T} (\|u(s)\| + \|u_x(s)\|) + \left(\int_\tau^{t+T} (\|u(s)\|^2 + \|u_x(s)\|^2) ds \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

带有范数

$$\|u\|_{Y^1_{\tau,T}} = \sup_{\tau \leq s \leq \tau+T} (\|u(s)\| + \|u_x(s)\|) + \left(\int_\tau^{\tau+T} (\|u(s)\|^2 + \|u_x(s)\|^2) ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

同样，我们也可以定义函数空间$Y^{\ell}_{\tau,T}$，其通过范数与 $H^{\ell}(\mathbb{R})$相关

$$\|u\|_{Y^{\ell}_{\tau,T}} = \sup_{\tau\le s\le\tau+T}\|u(s)\|_{H^{\ell}} + \left(\int_{\tau}^{\tau+T}\|u(s)\|^2_{H^{\ell}}ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

其中 $\ell\in[0,1)$ 。

在陈述本文的结果之前，我们先通过以下定义区分两种解的稳定性:

定义 2.1 对于微分方程的动力学，若任意初始数据 $u_0\in X$ 生成的解 $\tilde{u}(t)$ 在 u_0 充分接近 $\tilde{u}$ 时， $u(t)$ 在 X 中收敛到 $\tilde{u}$ ，则称其为局部稳定。

定义 2.2 若任意初始数据 $u_0\in X$生成的 $\tilde{u}(t)$ 在 X 中收敛到 $\tilde{u}$ ，且无论 u_0 与 $\tilde{u}$相距多远，均成立，则称其为全局稳定。

下面给出弱阻尼 BBM 方程的主要结果。首先，证明其局部适定性:

定理 2.3 给定 $\tau\ge 0, T>0, \phi\in H^{\ell}, f\in L^2$，对于 $\ell\in[0,1)$，若存在常数 $\delta>0$，且满足小性条件 $\|\phi\|_{H^{\ell}}+\sup_{t\ge0}\|f(t)\|\le\delta$，则柯西问题 ***(1.1)*** 的解 u 局部适定，其中 u满足

$$\|u\|_{Y^{\ell}_{\tau,T}}\le C(\|\phi\|_{H^{\ell}}+\sup_{t\ge0}\|f(t)\|). \tag{2.1}$$

得益于局部适定性，根据以下定理中总结的定义 2.1 和 2.2，我们可以获得时间周期解 $\tilde{u}(x, t)$ 及其稳定性:

定理 2.4 若定理 *2.3* 中的条件成立，且 f 具有周期为 θ 的时间周期性，则存在一个初始条件 $\tilde{\phi}\in H^{\ell}$，生成具有周期 θ 的唯一周期解 $\tilde{u}\in H^{\ell}$ 。

此外，若 δ 足够小，则存在 $N_0\in\mathbb{N}$ 和 $\gamma_0(N_0)>0$，使得该周期解具有局部稳定性，其指数衰减率为 $2\gamma_0>0$。

本质上，对于任意大小的初值 ϕ，若 $\sup_{t\in[0,\infty)}\|f(t)\|<\delta$，则可以找到 $N_1\in\mathbb{N}$ 和 $\gamma_1(N_1)>0$，从而解具有正衰减率的全局稳定性 $2\gamma_1>0$。

3 预备知识

我们的目标是调整 I-方法的结果，以便在 $H^{\ell},\ell\in[0,1)$ 中建立解的理论。I-方法通过定义 I 算子来实现。给定一个 $N>0$，令光滑函数 m_N in $C^{\infty}(\mathbb{R})$ 为

$$m_N(\xi)=\begin{cases}1, & |\xi|\le N,\\ \frac{|\xi|^{s-1}}{N^{s-1}}, & |\xi|\ge 2N.\end{cases}$$

D定义算子 I_N，对于固定的 $N>0$: $H^\ell \mapsto H^1$，使得 $\widehat{I_N g}(\xi) = m_N(\xi)\hat{g}(\xi)$。

存在一个 关键引理，揭示了 $I_N g$ 与函数空间之间的联系 g.

引理 3.1 对于一个 $\ell \in [0,1)$ 和 $g \in H^\ell$，有

$$\|I_N g\|_{H^1} \sim \|g\|_{H^\ell}.$$

特别地， $C\|g\|_{H^\ell} \le \|I_N g\|_{H^1} \le CN^{1-\ell}\|g\|_{H^\ell}$，其中 C不依赖于 N .

这一引理可见于许多早期具有开创性的论文中。这些论文最初由 Colliander 等人将 I-方法应用于 [13, 14]，研究 KdV 方程的整体解；随后，J. Bona 和 N. Tzvetkov 在 [7]中进行了相关研究；之后，M. Wang 研究了整条实线和环面上的阻尼BBM方程 [24, 25] $\mathbb{T}$。

方程 (1.1) 被拆分为两个问题，即分别由以下两个系统控制的 $u = v + z$：

$$\begin{cases} v_t - v_{txx} + v - v_{xx} = f, \\ v(x,0) = \phi(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

and

$$\begin{cases} z_t - z_{txx} + z - z_{xx} + zz_x + (vz)_x = -vv_x, \\ z(x,0) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

引理 3.2 对于线性柯西问题 *(3.1)*，给定 $\tau \ge 0$、$T > 0$、$\phi \in H^\ell$ 和 $f \in L^2$，则$v \in Y^\ell_{\tau,\,T}$ 且满足

$$\sup_{t\in[\tau,\tau+T]} \|v(t)\|_{H^\ell} \le \|\phi\|_{H^\ell} + C \sup_{t\in[\tau,\tau+T]} \|f(t)\|,$$

and

$$\|v\|_{Y^\ell_{\tau,T}} \le C\|\phi\|_{H^\ell} + C \sup_{t\in[\tau,\tau+T]} \|f(t)\|.$$

证明。 固定任意的 $N>0$，并对 (3.1) 两边应用 I_N，可得

$$\partial_t I_N v - \partial_t I_N v_{xx} + I_N v - I_N v_{xx} = I_N f.$$

将 $I_N v$ 相乘并在 $\mathbb{R}$ 上积分，进行能量估计，得到

$$\frac{d}{dt}(\|I_N v\|^2 + \|\partial_x I_N v\|^2) + 2(\|I_N v\|^2 + \|\partial_x I_N v\|^2) = (I_N f, I_N v),$$

其中我们用到了以下事实：$(\widehat{\partial_{xx} I_N u},\ \widehat{I_N u}) = (\widehat{\partial_{xx} I_N u},\ \widehat{I_N u}) = (\widehat{I_N \partial_{xx} u},\ \widehat{I_N u})$。

求解常微分方程的积分因子法得到

$$\|I_N v(t)\|_{H^1}^2 = e^{-2t}\|I_N\phi\|_{H^1}^2 + \int_\tau^t e^{-2(t-s)}\|I_N f(s)\|^2 ds.$$

由引理 3.1，我们得到 $\sup_{t\in[\tau,\tau+T]}\|v(t)\|_{H^\ell}$。注意

$$2\int_0^T \|I_N v(s)\|_{H^1}^2 ds = \|I_N v(0)\|_{H^1}^2 - \|I_N v(T)\|_{H^1}^2 + 2\int_0^T (I_N f(s), I_N v(s))ds.$$

由前面的估计和柯西-施瓦茨不等式可得 $\|I_N v\|_{Y^1_{0,T}}$的估计，进而得到 $\|v\|_{Y^\ell_{0,T}}$的估计。

□

为处理非线性问题 (3.2)，我们需要以下双线性估计，以将非线性项视为线性问题的扰动：

引理 3.3 给定 $T>0$，有如下双线性估计

$$\int_0^T \|(I-\partial_{xx})^{-1} I_N(uv_x)(s)\|_{H^1} ds \le C_T \|I_N u\|_{Y_{0,T}} \|I_N v\|_{Y_{0,T}} \tag{3.3}$$

其中常数 $C_T \sim T$ 与 N 无关。

证明。 相关引理可见 [7, 24]，其中

$$\|(I-\partial_{xx})^{-1} I_N(uv)_x\|_{H^1} \lesssim \|I_N u\|_{H^1}\|I_N v\|_{H^1}.$$

利用引理 3.1 并对 $[0,T]$ 积分，即可得到所需结果。 □

引理 *3.4 </style}*对于涉及 u、v、$w\in H^\ell$ 的内积，成立如下三线性估计：

$$|(I_N(uv)_x, I_N w)| \le CN^{-\frac{3}{2}+}\|I_N u\|_{H^1}\|I_N v\|_{H^1}\|I_N w\|_{H^1}, \tag{3.4}$$

其中 C 不依赖于 N。

证明。 这是引理 2.6 中得到的此类三线性估计的一个版本，见 M. Wang [24] 和[7], ; 其证明与其中的结果类似

$$|(I_N(w^2)_x, I_N w)| \lesssim N^{-\frac{3}{2}+}\|I_N w\|_{H^1}^3.$$

□

由方程 (3.2) 可推得

$$z_t + z + (I-\partial_{xx})^{-1}(zz_x + (zv)_x) = -(I-\partial_{xx})^{-1} v v_x,$$

因此，若应用 I_N

$$I_N z(t) = \int_0^t e^{-(t-s)} I_N (I-\partial_{xx})^{-1}(zz_x + (zv)_x + vv_x)(s)ds. \tag{3.5}$$

Let

$$S_v = \{I_N z \in Y^1_{0,T} | \|I_N z\|_{Y^1_{0,T}} \le \|I_N v\|_{Y^1_{0,T}}\},$$

并将 $G: q \mapsto G(q)$ 定义为映射

$$G(q;v) = -\int_0^t e^{-(t-s)} I_N (I-\partial_{xx})^{-1}(qq_x + (qv)_x + vv_x)ds,\ t \le T.$$

我们旨在利用 S_v 中的不动点定理，证明积分方程 (3.5) 存在解 $q = I_N z \in S_v$。按照 [26, 20] 中的做法，结合双线性估计引理 3.3，可以发现，若 $\|I_N v\|_{Y^1_{0,T}}$充分小：$\|I_N v\|_{Y^1_{0,T}} \le \frac{1}{C_T}$，那么对于 $q, \tilde{q} \in S_v$，有

$$\|G(q)\|_{Y^1_{0,T}} \le \|I_N v\|_{Y^1_{0,T}},$$
$$\|G(q) - G(\tilde{q})\|_{Y^1_{0,T}} \le \frac{1}{2}\|I_N q - I_N \tilde{q}\|_{Y^1_{0,T}},$$

从而得出不动点论证成立，证明 $I_N z \in S_v$。若 $\tau > 0$，并考虑映射 $\tilde{G}$:

$$\tilde{G}(q;v) = -\int_\tau^t e^{-(t-s)} I_N (I-\partial_{xx})^{-1}(qq_x + (qv)_x + vv_x)ds,$$

设界 $M = 2(\|I_N(\tau)\|_{H^1} + \|I_N v\|_{Y^1_{\tau,T}})$，并令 $\tilde{S}_M = \{I_N z \in Y^1_{0,T} | \|I_N z\|_{Y^1_{0,T}} \le 2\|I_N z(\tau)\|_{H^1} + \|I_N v\|_{Y^1_{0,T}}\}$，通过 G 中的不动点定理进行类似论证，可得存在满足以下条件的 $I_N z$

$$\|I_N z\|_{Y^1_{\tau,T}} \le 2(\|I_N z(\tau)\|_{H^1} + \|I_N v\|_{Y^1_{\tau,T}}).$$

因此，我们得到

引理 3.5 问题 *(3.2)* 存在一个解 $I_N z \in Y^1_{0,T}$ 满足

$$\|I_N z\|_{Y^1_{0,T}} \le C\|I_N v\|_{Y^1_{0,T}}. \tag{3.6}$$

如果 $\tau > 0$，在 $[\tau, \tau+T]$ 上，

$$\|I_N z\|_{Y^1_{\tau,T}} \le 2\|I_N z\|_{H^1} + 2\|I_N v\|_{Y^1_{\tau,T}}. \tag{3.7}$$

引理 3.6 如果 $\tau > 0$，$\|I_N v\|_{Y^1_{0,T}} \le \delta'$，则有

$$\|I_N z\|_{Y^1_{\tau,T}} \le \|I_N v\|_{Y^1_{0,T}}. \tag{3.8}$$

证明。根据定义在 $[\tau, \tau+t]$ 上的温和解形式，可写为

$$\begin{aligned} I_N z(\tau+t) &= e^{-t} I_N z(\tau) - \int_\tau^{\tau+t} e^{-(\tau+t-s)}(I-\partial_{xx})^{-1} I_N (zz_x + zv_x + z_x v)ds \\ &\quad - \int_\tau^{\tau+t} e^{-(\tau+t-s)}(I-\partial_{xx})^{-1} I_N v v_x ds \\ &= W(t)z(\tau) + P(\tau+t, \tau, z(\tau), v) + Q(\tau+t, \tau, v) \end{aligned}$$

在网格 $\{$上T，$2T$，$3T$，$\cdots$，kT，$\cdots\}$其中 $k\in\mathbb{N}$ 为一般形式，并定义 $I_Nz_k=I_Nz(kT)$，我们有 e

$$I_Nz_k=W(T)I_Nz_{k-1}+P(kT,(k-1)T,I_Nz_{k-1},I_Nv)+Q(kT,(k-1)T,I_Nv).$$

应用引理 3.3 和柯西-施瓦茨不等式，我们推得

$$\|I_Nz_k\|_{H^1}\le(e^{-T}+C_T\|I_Nz_{k-1}\|)\|I_Nz_{k-1}\|_{H^1}+C_T\|I_Nv\|_{H^1}^2.$$

由引理 3.5， I_Nz 在 $Y^1_{\tau,\ T}$中足够小，当 $\|I_Nv\|_{Y^1_{\tau,\ T}}<\delta'$时，对任意 $\tau>0$ 均成立。记 $\zeta=e^{-T}+C_T\delta'$，则

$$\begin{aligned}\|I_Nz_k\|_{H^1} &\le \zeta\|I_nz_{k-1}\|+C_T\|I_Nv\|^2_{Y^1_{(k-1)T,T}}\\ &\le \zeta^2\|I_Nz_{k-2}\|_{H^1}+C_T\|I_Nv\|^2_{Y^1_{(k-1)T,T}}\\ &\vdots\\ &\le \zeta^kC_T\|I_Nv\|^2_{Y^1_{(k-1)T,T}}\end{aligned}$$

当 $z_0\equiv0$ 时。

根据上述关于 I_Nz_k 的结果和估计式 (3.7)，可立即证明 $\|I_N\|_{kT,\ T}$。利用 [26]，中引理 3.4 的论证，任意 $\tau\neq kT$ 也满足相同的估计，由此完成证明。□

为了研究所需解的稳定性，我们需要证明 BBM方程误差 w 的衰减性质。该性质意味着任何非周期解都具有渐近周期性。从偏微分方程的动力学角度看，这种渐近时间周期性是由指定为时间周期的外力 f 引起的。在 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ 上提出误差方程如下:

$$\begin{cases}w_t-w_{xxt}+w-w_{xx}+(aw)_x=0,\\ w(x,0)=\psi(x).\end{cases}\tag{3.9}$$

其中，参考量 a 是 $(x,\ t)$ 的函数，并满足某种小量条件。

引理 3.7 若 $\|I_Na\|_{Y^1_{\tau,\ T}}$ 关于 $\tau\in\mathbb{R}_+$ 有界，则可将 N 选取得足够大，使得常数 $\gamma_0=1-CN_0^{-\frac{3}{2}+}\|I_Na\|_{H^1}>0$，于是 $\|w\|_{Y^\ell_{\tau,\ T}}\lesssim e^{-2\gamma_0\tau}$。

证明。 应用 I_N，可得

$$\partial_tI_Nw-\partial_tI_Nw_{xx}+I_Nw-I_Nw_{xx}+I_N(aw)_x=0,$$

由此 L^2 能量恒等式给出 H^1-估计

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|I_Nw(t)\|^2_{H^1}+\|I_Nw(t)\|^2_{H^1}+(I_N(aw)_x,I_Nw)=0.$$

由引理 3.4，可得一个三线性估计

$$|(I_N(aw)_x, I_N w)| \lesssim N^{-\frac{3}{2}+}\|I_N w\|_{H^1}^2 \|I_N a\|_{H^1}.$$

因此，如果 $N = N_0$ 足够大，使得 $\gamma_0 = 1 - CN_0^{-\frac{3}{2}+}\|I_{N_0} a\|_{H^1} > 0$，那么便得到指数衰减：

$$\|I_N w(t)\|_{H^1} \le e^{-2\gamma_0 t}\|I_N \psi\|_{H^1}^2$$

对任意 $t > 0$。另一方面，对于 $\|I_N w\|_{Y^1_{\tau,\,T}}$ 其中 $\tau > 0$,

$$2\int_\tau^{\tau+T} \|I_N w(s)\|_{H^1}^2 \le \|I_N w(\tau)\|_{H^1}^2 + \|I_N w(\tau+T)\|_{H^1}^2 + 2CN^{-\frac{3}{2}+}\int_\tau^{\tau+T} \|I_N a(s)\|_{H^1}\|I_N w(s)\|_{H^1}^2 ds.$$

由于 $N = N_0$ 和 $\gamma_0 = 1 - CN_0^{-\frac{3}{2}+}\|I_{N_0} a\|_{H^1} > 0$，右侧的积分项可被吸收到左侧，因此结合刚得到的 $\|I_N w(t)\|_{H^1}$ 估计，由引理 3.1 可推出结果，其衰减率为 $2\gamma_0$。□

4 主要定理的证明

定理 2.3 的证明。给定 $\tau,\ T > 0$，由引理 3.2 和引理 3.5，我们得到总和 $I_N u \in Y^1_{\tau,\,T}$ 因此 $u \in Y^\ell_{\tau,\,T}$ 由引理 3.1 得出。□

定理 2.4 的证明。首先，我们将证明周期解的存在性。注意到，局部适定性已由定理 2.3 证明。

在本部分中，我们将证明渐近周期性，即，由任意 ϕ 生成的 u 都是渐近时间周期的。设 $w = u(t+\theta,\ x) - u(t,\ x)$，则 w 直接满足式 (3.9)，其中 $\psi(x) = u(\theta,\ x) - \phi(x)\ a = \frac{1}{2}(u(t,\ x) + u(t+\theta,\ x))$。如果 δ 足够小，则 $\|I_N a\|_{H^1}$ 具有足够小的量，使得 $\gamma_0 > 0$。引理 3.7 明确表明了如下的渐近周期性：

$$\|u(\cdot+\theta) - u(\cdot)\|_{Y^\ell_{\tau,T}} \lesssim e^{-2\gamma_1 \tau}.$$

如果 $u_k = u(k\theta,\ x)\ k \in \mathbb{N}$，则可以证明序列 $\{u_k\}_k$ 在 H^ℓ 中是柯西序列。令 $\tilde{}$ 趋于极限，得到唯一的 $\lim_{k\to\infty} u_k = \phi$，并在下一步中将其提取为生成精确周期解 $\tilde{u} \in H^\ell$ 的初始数据。值得指出的是，Bona 等人及其后续研究者以 [5] 中的详细方式 [22, 23, 26, 15]，从而帮助得到该柯西序列 $\tilde{}$。从证明中可以看出，ϕ 的大小必须足够小，因此 $\tilde{u}$ 的范数也很小。

此外，$\tilde{u}$的唯一性也成立。假设存在两个不同的周期解 $\tilde{u}_1$ 和 $\tilde{u}_2$。令 $w = \tilde{u}_1(t,\ x) - \tilde{u}_2(t,\ x)$ 再次满足 (3.9)。由于引理 3.7，$w \equiv 0$ 作为初始数据。$\tilde{}\psi = \phi - \phi = 0.$

其次，我们讨论解的局部稳定性。令 $w = u(x,t) - \tilde{u}(x,t)\ a = \frac{1}{2}(u(t,x) + \tilde{u}(t,x))$。$w$ 满足 (3.9)。根据引理 3.2 中提出的小性条件，$I_N a$ 能够从 $u(t,x)$ 和 $\tilde{u}(t,x)$ 继承在 (ϕ, f) 上的小性，使得 $\gamma_1 > 0$。因此，

根据引理 3.7， w 的指数衰减导出了所需的稳定性。

事实证明，与 KdV、Burgers 和二维流体动力学模型中解的动力学行为类似，这种局部稳定性可以提升为全局稳定性（例如参见 [6, 22, 26, 15]）。这是通过 $I_N u$ 的全局吸收性质实现的。事实上，由于

$$\partial_t I_N u - \partial_t I_N u_{xx} + I_N u - I_N u_{xx} + I_N(uu_x) = I_N f,$$

该 L^2 能量估计可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|I_N u(t)\|_{H^1}^2 + \|I_N u(t)\|_{H^1}^2 = (I_N(f - uu_x), I_N u).$$

注意

$$\begin{aligned} |(I_N f, I_N f)| &\leq \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|I_N u\|^2, \\ |(I_N u u_x, I_N u)| &\leq C N^{-\frac{3}{2}+}\|I_N u\|_{H^1}^3, \end{aligned}$$

后者的推导方式与引理 3.7 或引理 3.4 相同。若选取 N_1充分大，使得 $\gamma_1 = 1 - C N_1^{-\frac{3}{2}+}\|I_N u\|_{H^1} > 0$，则可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|I_N u(t)\|_{H^1}^2 + \gamma_1\|I_N u(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}\|f(t)\|^2,$$

由此，吸收不等式成立：

$$\|I_N u(t)\|^2 \leq e^{-2\gamma_1 t}\|I_N\phi\|_{H^1}^2 + \int_0^t e^{-2\gamma_1(t-s)}\|f(s)\|^2 ds \leq e^{-2\gamma_1 t}\|I_N\phi\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\sup_{t\in[0,\infty]}\|f(t)\|^2.$$

这表明，对于任意 $I_N\phi \in H^1$，存在充分大的 $\tau > 0$，使得$I_N u(t)$ 将被吸收到 H^1 中以 0 为中心的小球内；当 $\gamma_0 > 0$ 时，随着 $t > \tau_0$，局部稳定性将主导流的行为，最终实现全局稳定。□

注4.1 类似的工作可以用于证明定义在一维环面 $\mathbb{T}$上的 *BBM-Burgers* 方程的 H^ℓ-周期解：

$$u_t - u_{txx} - u_{xx} + u_x + uu_x = f.$$

在本讨论中，长时间稳定性行为由 *Burgers*项 $-u_{xx}$生成的半群的指数衰减所保证；无需添加零阶项。长时间行为——全局吸引子的存在性，已在 *[25]*中得到证明。

注4.2 我们还可以继续在能量空间 $H^\ell, \ell \in [1,2]$. 中建立该结果。该结果与同一作者在预印本 *[20]* 中的结果相同。

注4.3 本文旨在展示这项工作如何将 *BBM*方程解的存在性结果推进到 $\mathbb{R}$ 低正则性空间（低于经典能量空间）。正如 *[7],* 所指出的，*I*-能量方法所追求的局部适定性只能在 H^{ℓ}的显著低阶空间 $\ell = 0$中实现，但不能低至 $\ell < 0$。相较之下，对于阻尼*KdV*方程，不仅在当前空间中，而且在更低阶空间中也已发现全局吸引子的存在性（例如参见 *[16, 17, 21]*）。

致谢

作者谨借此机会感谢审稿人和编辑的辛勤工作及宝贵意见。

作者之一 Taige Wang 持续获得辛辛那提大学文理学院提供的 Faculty Development Fund 以及辛辛那提大学塔夫脱研究中心颁发的塔夫脱奖的支持。

参考文献

[1] C. Amick、J. Bona 和 M. Shonbek，若干非线性波方程解的衰减，《微分方程杂志》，81（1989），1–49。[2] T. Benjamin、J. Bona 和 J. Mahony，非线性色散系统中长波的模型方程，《伦敦皇家学会哲学汇刊 A 辑》，272（1972），47 - 78。[3] J. Bona 和 P. Bryant，非线性色散系统中造波机产生长波的数学模型，《剑桥哲学学会会刊》，73（1973），391-405。[4] J. Bona 和 H. Chen，正则化非线性色散波方程的适定性，《离散与连续动力系统》，23（4）（2009），1253 - 1275。[5] J. Bona、S. Sun 和 B.-Y. Zhang，四分之一平面上阻尼柯特韦格–德弗里斯方程的受迫振荡，《连续数学与应用通讯》，5（3）（2003），369-400。[6] J. Bona、S. Sun 和 B.-Y. Zhang，有限区域上柯特韦格–德弗里斯方程的非齐次边值问题，《偏微分方程通讯》，28（7–8）（2003），1391 - 1436。[7] J. Bona 和 N. Tzvetkov，BBM方程的尖锐适定性结果，《离散与连续动力系统》，23（4）（2009），1241 - 1252。[8] J. Bona 和 J. Wu，四分之一平面上色散波方程的时间增长与最终周期性，《离散与连续动力系统》，23（4）（2009），1141 - 1168。[9] J. Bona 和 B.-Y. Zhang，受迫柯特韦格–德弗里斯方程的初值问题，《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑》，126（1996），571 - 598。[10] J. Bourgain，某些格点子集的傅里叶变换限制现象及其在非线性演化方程中的应用 II：KdV方程，《几何与泛函分析》，3（1993），209 - 262。

[11]H. Chen，BBM方程的周期初值问题，《计算数学与应用》，48（9）（2004），1305 - 1318。[12] Z. Chen、T. Wang 和 X. Xie，二维和三维有限区域上的双线性估计，《电子微分方程杂志》，会议卷 26（2025），171 - 178。[13] J. Colliander、M. Keel、G. Staffilani、H. Takaoka 和陶哲轩，$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T}$上的KdV与修正KdV的尖锐全局适定性，《美国数学会杂志》，16（3）（2003），705 - 749。[14] J. Colliander、M. Keel、G. Staffilani、H. Takaoka 和陶哲轩，周期KdV方程的多线性估计及其应用，《泛函分析杂志》，211（2004），173 - 218。[15] X. Gong、T. Wang 和 X. Xie，抽象发展方程受迫振荡的存在性与稳定性，《亚洲控制杂志》，（2025），1 - 13。[16] O. Goubet，弱阻尼受迫柯特韦格–德弗里斯方程的渐近平滑效应，《离散与连续动力系统》，6（2000），625 - 644。[17] O. Goubet 和 R. Rosa，实直线上弱阻尼KdV方程的渐近平滑性与全局吸引子，《微分方程杂志》，185（2002），25 - 53。[18] C. Kenig、G. Ponce 和 L. Vega，负指标 Sobolev空间中柯特韦格–德弗里斯方程的柯西问题，《杜克数学杂志》，71（1993），1 - 21。[19] C. Kenig、G. Ponce 和 L. Vega，一个应用于KdV方程的双线性估计，《美国数学会杂志》，9（1996），573 - 603。[20] C. Lau 和 T. Wang，Benjamin-Bona-Mahony-Burgers方程的周期解，已投稿，可见 arxiv: 2510.16162，2025。[21] K. Tsugawa，负指标 Sobolev空间上弱阻尼受迫KdV方程全局吸引子的存在性，《纯粹与应用分析通讯》，3（2004），301–318。[22] M. Usman 和 B.-Y. Zhang，一类非线性色散波方程的受迫振荡及其稳定性，《系统科学与计算杂志》，20（2007），284 - 292。[23] M. Usman 和 B.-Y. Zhang，有界区域上柯特韦格–德弗里斯方程的受迫振荡及其稳定性，《离散与连续动力系统》，26（4）（2010），1509 - 1523。[24] M. Wang，低正则性空间中阻尼Benjamin-Bona-Mahony方程的长时间动力学，《非线性分析》，105（2014），134 - 144。[25] M. Wang，低正则性空间中阻尼广义BBM方程的长时间行为，《数学方法与应用科学》，38（18）（2015），4852 - 4866。[26] T. Wang 和 B.-Y. Zhang，时间周期力作用下黏性Burgers方程的受迫振荡，《离散与连续动力系统 B 辑》，26（2）（2021），1205 - 1221。[27] X. Yang，低正则性 Sobolev空间中弱阻尼受迫KdV方程的全局吸引子，《非线性微分方程及其应用》，18（2011），273–285。[28] X. Yang 和 B.-Y. Zhang，$\mathbb{R}$上耦合KdV-KdV系统的局部适定性，《演化方程与控制理论》，11（5）（2022），1829-1871。

[29] B.-Y. Zhang，Korteweg-de Vries-Burgers 方程的受迫振荡及其稳定性，载于《非线性分布参数系统的控制》（德克萨斯州大学城，1999），337–357 页，《纯粹与应用数学讲义》，第 218 卷，Dekker，纽约，2001。