arXiv:2602.08352v1 [math.DG] 9 Feb 2026

尖点数量不多的随机双曲曲面的一致谱隙

何雨欣、吴云辉和薛宇豪

Abstract. 本文研究尖点数量不多的 Weil-Petersson 随机双曲曲面的一致谱隙。我们证明，若 $n = O(g^{\alpha})$，其中 $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$，，则对任意 $\epsilon > 0$，$\mathcal{M}_{g,n}$ 中的随机带尖点双曲曲面都没有位于 $\left(0, \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{6}\right)^{(1-\alpha)}\right) - \epsilon$ 内的特征值。若 α 接近 $\frac{1}{2}$，这就为 Weil-Petersson 随机双曲曲面的谱隙给出了一个新的一致下界 $\frac{5}{36} - \epsilon$。本工作的主要贡献在于揭示了“二阶抵消”这一临界现象。

1. Introduction

设 $X_{g,n}$ 是一张亏格为 g 、有 n 个尖点的有限面积完备非紧双曲曲面。曲面 $X_{g,n}$ 上拉普拉斯算子的谱记为 Spec($X_{g,n}$)，由绝对连续谱 $[\frac{1}{4}, +\infty)$ 以及可能位于 $[0, +\infty)$ 中的离散特征值组成。0 始终是一个平凡特征值，其重数为一，对应于常数特征函数；然而，尚不清楚是否存在任何 $X_{g,n}$ 具有非零特征值 [Sar03]。曲面 $X_{g,n}$ 的谱隙记为 SpG($X_{g,n}$)，定义为平凡特征值 0 与 Spec($X_{g,n}$) 的本质下界 $\setminus\{0\}$ 之间的间隔；也就是说，若 (0, 1 4) 中没有离散特征值，则谱隙等于 1 4，否则等于最小的非零特征值。

令 $\mathcal{M}_{g,\ n}$ 为有限面积完备非紧双曲曲面的模空间，其曲面具有 g 亏格和 n 个尖点。Weil-Petersson度量是 ¨ 上的有限体积 K$\mathcal{M}_{gähler\ 度量,\ n}$因而诱导出概率测度 Prob$^{g,\ n}_{\text{WP}}$ 该测度经归一化而得（详见第2.2 节）。本文研究随机有限面积双曲曲面的谱隙。这里的随机性由 Weil-Petersson度量给出。

近年来，对 Weil-Petersson 随机双曲曲面的谱隙进行了深入研究。对于闭双曲曲面，拉普拉斯算子的谱由离散特征值组成

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to +\infty,$$

且没有连续谱部分。此时，谱隙就是第一非零特征值 λ_1。在她开创性的论文中 [米尔13], 米尔扎哈尼证明了谱隙的一致下界：

$$\lim_{g\to\infty} \text{Prob}^{g}_{\text{WP}}\left(X \in \mathcal{M}_g;\ \lambda_1(X) \geq \frac{1}{4}\left(\frac{\ln(2)}{\ln(2)+2\pi}\right)^2 \approx 0.00247\right) = 1.$$

她的证明运用了切格不等式 [Che70], , 但预计无法得到最优结果。通过应用塞尔伯格迹公式理论 [Sel56] 并建立关于填充闭测地线的有效计数结果, Wu-Xue[WX22a] 大幅提高了下界，从 0。00247 提高到 $\frac{3}{16}-\epsilon$ 对任意 $\epsilon>0$。也就是说,

$$\lim_{g\to\infty}\mathrm{Prob}_{\mathrm{WP}}^{g}\left(X\in\mathcal{M}_g;\ \lambda_1(X)>\frac{3}{16}-\epsilon\right)=1.$$

这一下界也由 Lipnowski-Wright 独立得到 [LW24]。随后，沿着相同思路，并通过对非简单闭测地线进行更精细的研究，Anantharaman-Monk 将 $\frac{3}{16}-\epsilon$ 改进为 $\frac{2}{9}-\epsilon$，并在 [AM23],中最终 [AM25]得到了以下引人注目的结果

$$\lim_{g\to\infty}\mathrm{Prob}_{\mathrm{WP}}^{g}\left(X\in\mathcal{M}_g;\ \lambda_1(X)>\frac{1}{4}-\epsilon\right)=1.$$

利用与 [AM25], Hide-Macera-Thomas [HMT25] 截然不同的多项式方法，证明了

$$\lim_{g\to\infty}\mathrm{Prob}_{\mathrm{WP}}^{g}\left(X\in\mathcal{M}_g;\ \lambda_1(X)>\frac{1}{4}-O\left(\frac{1}{g^c}\right)\right)=1$$

对于某个通用常数 $c>0$。这里1 4 是当 $g\Rightarrow\infty$时渐近最优的下界，因为 $\limsup_{g\to\infty}\sup_{X_g\in\mathcal{M}_g}\lambda_1(X_g)\leq\frac{1}{4}$ 由 [Hub74、Che75]给出。 -

对于尖点数量 $n=n(g)$也随亏格 g增长的情形，Hide [Hid23]将 Wu-Xue 的方法 [WX22a]推广到随机带尖点双曲曲面，并证明若 $n=O(g^{\alpha})$ 且 $\alpha\in[0,\frac{1}{2})$，则对于任意 $\epsilon>0$,

$$\lim_{g\to\infty}\mathrm{Prob}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left(X\in\mathcal{M}_{g,n};\ \mathrm{SpG}(X)>\frac{1}{4}-\left(\frac{1+2\alpha}{4}\right)^2-\epsilon\right)=1.$$

注意到 $\frac{1}{4}-\left(\frac{1+2\alpha}{4}\right)^2$ 等于 3 16 当 $\alpha=0$ 且当 $\alpha\to$1 2时趋于 0。 Shen-Wu [SW25a] 将米尔扎哈尼的方法推广到带尖点双曲曲面，并给出了一致下界，尤其是在 $\alpha\to\frac{1}{2}$ 时。他们证明，若 $n=o(\sqrt{g})$，则 -

$$\lim_{g\to\infty}\mathrm{Prob}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left(X\in\mathcal{M}_{g,n};\ \mathrm{SpG}(X)\geq\frac{1}{4}\left(\frac{\ln(2)}{\ln(2)+2\pi}\right)^2\approx0.00247\right)=1.$$

这给出了当 n 接近 $\sqrt{g}$时首个一致正谱隙。在 n 满足 $\frac{n}{\sqrt{g}}\to\infty$ 且 $\frac{n}{g}\to0$ 时，Shen-Wu [SW25a]证明，对任意 $\epsilon>0$,

$$\lim_{g\to\infty}\mathrm{Prob}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left(X\in\mathcal{M}_{g,n};\ \mathrm{SpG}(X)<\epsilon\right)=1.$$

在 [SW25a]中猜想

猜想 1.1。 如果 $n=o(\sqrt{g})$，那么对任意 $\epsilon>0$,

$$\lim_{g\to\infty}\mathrm{Prob}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left(X\in\mathcal{M}_{g,n};\ \mathrm{SpG}(X)>\frac{1}{4}-\epsilon\right)=1.$$

本文研究猜想 1.1。我们的结果如下。

定理 1.2。 若 $n = O(g^\alpha)$ 且 $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$，则对任意 $\epsilon > 0$,

$$\lim_{g\to\infty} \mathrm{Prob}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left(X \in \mathcal{M}_{g,n};\ \mathrm{SpG}(X) > \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{6(1-\alpha)}\right)^2 - \epsilon\right) = 1.$$

注意，$\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{6(1-\alpha)}\right)^2 > \frac{5}{36} > 0$对于 $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$，定理 1.2给出了新的谱隙一致下界，当 n 接近 $\sqrt{g}$时。事实上，这是首个通过塞尔伯格迹公式理论取得的此类结果。当$\alpha = 0$时，谱隙 $\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{2}{9}$与 [AM23]中的结果 1一致。见图 1,- 对比这些谱隙。

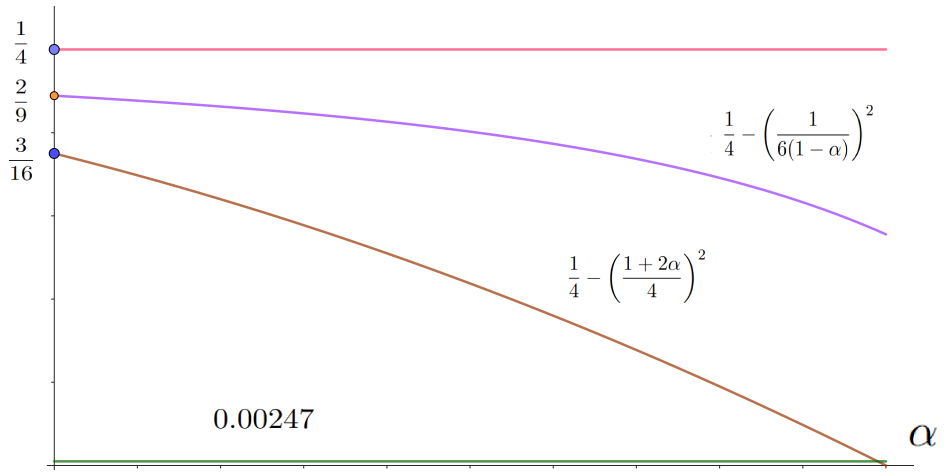


FIGURE 1. 关于随机 $X \in \mathcal{M}_g$的谱隙已知结果与猜想，n 其中 $n = O(g^\alpha)$

相关研究。 现在我们介绍一些特定曲面以及双曲曲面的另外两种随机模型的谱隙相关结果。

- 同余曲面。对于 $N \geq 1$，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 的主合同子群定义为 $\Gamma(N) = \{\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z});\ \gamma \equiv I \pmod N\}$。那么 $X(N) = \Gamma(N)\backslash\mathbb{H}^2$ 是一个双曲曲面（当 $N \geq 2$ 时），其亏格为$g(N)$，有 $n(N)$ 个尖点，其中 $g(N)$ 大致按 N^3增长，而$n(N)$ 大致按 N^2增长（当 $N \to \infty$ 时）。著名的塞尔伯格 1/4 猜想 [Sel65]断言，当 $\lambda_1(X(N)) \geq \frac{1}{4}$ 时成立；塞尔伯格 [Sel65]证明了 $\lambda_1(X(N)) \geq \frac{3}{16}$。迄今已知的最佳结果是 Kim-Sarnak [Kim03]证明的$\lambda_1(X(N)) \geq \frac{1}{4} - (7/64)^2 = \frac{975}{4096}$。中间结果参见例如[GJ78、Iwa89、LRS95、Sar95、Iwa96、KS02] 。

- **Brooks-Makover 模型。**Brooks-Makover 在 [BM04]通过 3-正则图粘合理想三角形并进行紧化，构造了首个随机双曲曲面模型。它也被

称为随机贝利曲面 [Bel79, Gam06]。在 [BM04] 中，他们证明，对于其随机模型，存在 $C > 0$，使得当理想三角形的数量趋于无穷时，$\mathrm{Prob}(\lambda_1(X) \geq C) \to 1$。最近，Shen-Wu [SW25b]使用多项式方法（参见例如 [CGVTvH24, CGVvH24, MdlS24, MPvH25]），证明了 Brooks-Makover 模型的近乎最优谱隙猜想：对于任意 $\epsilon > 0$，当理想三角形的数量趋于无穷时，$\mathrm{Prob}(\lambda_1(X) \geq \frac{1}{4} - \epsilon) \to 1$。

•覆盖模型。固定一个有限面积双曲曲面 X（有尖点或无尖点），并考虑其所有次数为 N 的覆盖，以均匀随机的方式选取 X。对于 X 为闭曲面的情形，Magee-Naud-Puder[MNP22] 证明，对于任意 $\epsilon > 0$，区间 $(0, \frac{3}{16} - \epsilon)$ 内不存在新特征值，且当 $N \to \infty$时，概率 $\to 1$。Magee-Puder-van Handel[MPvH25] 采用多项式方法，证明了一个显著且近乎最优的谱隙猜想，即将 3/16 提高到了 1/4。对于 X 有尖点的情形，Hide-Magee [HM23] 证明了近乎最优的谱隙猜想：区间 $(0, \frac{1}{4} - \epsilon)$ 内不存在新特征值；这是随机曲面领域首个此类重要定理。利用这一结果，他们证明了 $\lim_{g\to\infty} \sup_{X\in\mathcal{M}_g} \lambda_1(X_g) = \frac{1}{4}$ – 从而证实了 Buser 的一个旧猜想 [Bus84]。

证明思路。证明的主要思路延续了 [WX22a、AM23], 中的方法：对预迹不等式两边取积分（而非闭曲面情形下使用的塞尔伯格迹公式）。首先，我们将预迹不等式写成如下形式（见（6.1））：

(1.1)

$$
\begin{aligned}
&C(\epsilon)Te^{T(1-\epsilon)\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda_1(X)}} \cdot \mathbf{1}_{\lambda_1(X)\leq\frac{1}{4}-\epsilon_0} \\
&\leq \sum_{\gamma\in\mathcal{P}(X)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\left(\frac{k\ell_\gamma(X)}{2}\right)} f_T(k\ell_\gamma(X)) - \hat{f}_T(\frac{i}{2}) + O\left(\frac{g}{T}\right) \\
&= \underbrace{\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(X)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ell_\gamma(X) f_T(k\ell_\gamma(X))}{2\sinh\left(\frac{k\ell_\gamma(X)}{2}\right)}}_{\text{(I)}} + \underbrace{\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{sep}(X)} \frac{\ell_\gamma(X) f_T(\ell_\gamma(X))}{2\sinh\left(\frac{\ell_\gamma(X)}{2}\right)}}_{\text{(II)}} \\
&+ \underbrace{\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)} \frac{\ell_\gamma(X) f_T(\ell_\gamma(X))}{2\sinh\left(\frac{\ell_\gamma(X)}{2}\right)} - \hat{f}_T(\frac{i}{2})}_{\text{(III)}} + \underbrace{\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^{ns}(X)} \frac{\ell_\gamma(X) f_T(\ell_\gamma(X))}{2\sinh\left(\frac{\ell_\gamma(X)}{2}\right)}}_{\text{(IV)}} + O\left(\frac{g}{T}\right).
\end{aligned}
$$

这里我们始终假设谱隙小于 $1\,4$，因此为简便起见，我们用 λ_1 代替 $\mathrm{SpG}(X)$。我们选择满足命题 f_T 的测试函数5.1，如 [MNP22、WX22a、Hid23], 中所用，然后取 $T = 6(1-\alpha)$对数函数 g 来证明定理 1.2。对项 (I)、(II)、(III) 和 (IV) 的求和分别遍历所有非本原闭测地线、本原简单分离闭测地线、本原简单非分离闭测地线以及本原

非简单闭测地线。注意，在项 (III) 中，我们将$\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)}$和 $-\hat{}f_T(\frac{i}{2})$ 放在一起。在计算期望 $\mathbb{E}^{g,\,n}_{\mathrm{WP}}$时，这就是**“一阶抵消”**，这是 [WX22a]中的一个重要观察。定理 1.2 证明中的一个重要思路是，我们发现项 (III) 和 (IV) 的期望之间存在**“二阶抵消”**，稍后将对此作出解释。

然后，我们试图对 $\mathbb{E}^{g,\,n}_{\mathrm{WP}}$ 取上述不等式的期望。然而，与 [AM23, AM25], 中直接计算期望 $\mathbb{E}^{g,\,n}_{\mathrm{WP}}$时的情况类似，这并不能推出我们想要的结果。因此，我们需要运用容斥技巧（见第7节）：

$$\mathbf{1}_{\#N_\ell=0}(X)=1+\sum_{k=1}^{j}(-1)^k(\#N_\ell)_k(X)+O_j\Big((\#N_\ell)_{j+1}(X)\Big) \tag{1.2}$$

其中，$\#N_\ell(X)$表示 X 中边界长度小于 ℓ 且欧拉示性数等于 -1的嵌入子曲面数量，并且$(\#N_\ell)_k=\frac{1}{k!}\#N_\ell(\#N_\ell-1)\cdots(\#N_\ell-k+1)$。固定 $\alpha<\frac{1}{2}$和 $\overline{\ell}=\kappa\log\,g$，其中$0<\kappa<2-4\alpha$为一个数，我们将证明

$$\lim_{g\to\infty}\mathrm{Prob}^{g,n}_{\mathrm{WP}}(\#N_\ell\geq 1)=0\qquad(\text{see (11.1)}). \tag{1.3}$$

接着，我们将 $\mathbf{1}_{\#N_\ell=0}(X)$乘以(1.1)两边，并计算期望 $\mathbb{E}^{g,n}$ WP。这里与 [AM23]不同的是，我们的条件 $\mathbf{1}_{\#N_\ell=0}(X)$只要求欧拉示性数 -1大于 ℓ的子曲面满足边界长度条件；而在 [AM23] 中，他们还要求收缩长有一个下界，这使得讨论复杂得多。部分原因在于， [AM23] 中的测地线计数结果对收缩长较小且欧拉示性数为 -1的子曲面并不成立。尽管我们建立了若干精细的测地线计数结果——定理 3.4、定理 3.6 和定理 3.12——来处理困难情形，这些结果本身也具有独立意义。对于闭曲面情形 $n=0$，我们的证明可以大大简化 [AM23] 中的工作。本文一项艰巨的工作是处理尖点带来的新要素。

现在取 $T=6(1-\alpha)$ 对数函数 g 和 $\ell=\kappa$ 对数函数 g，对于 $0<\kappa<2-4\alpha$。我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}[\mathbf{1}_{\#N_\ell=0}\cdot\text{LHS of (1.1)}]\succ\log g\cdot g^{6(1-\epsilon)(1-\alpha)\sqrt{\left(\frac{1}{6(1-\alpha)}\right)^2+\epsilon_1}}\\&\cdot\left(\mathrm{Prob}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left(\lambda_1\leq\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{6(1-\alpha)}\right)^2-\epsilon_1\right)-\mathrm{Prob}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left(\#N_\ell\geq 1\right)\right).\end{aligned} \tag{1.4}$$

对于右侧，相对容易的部分是

$$\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}[\text{term (I)}]\prec(\log g)^2 g\qquad(\text{see Lemma 6.1}) \tag{1.5}$$

and

$$\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}[\text{term (II)}]\prec(\log g)^{22}\qquad(\text{see Lemma 6.2}). \tag{1.6}$$

难点在于 $\mathbb{E}^{g,\ n\ \mathrm{WP}}[\mathbf{1}_{\#N_\ell=0}\cdot$项 (III)$]$ 以及 $\mathbb{E}^{g,\ n\ \mathrm{WP}}[\mathbf{1}_{\#N_\ell=0}\cdot$项 (IV)$]$。对于项 (IV)，我们证明（见引理9.1）

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}[\mathbf{1}_{\#N_\ell=0}\cdot\text{term (IV)}] \leq &\frac{1}{\pi^2 g}\int_0^\infty f_T(x)e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x^2}{4}+\left(\frac{n}{2}-1\right)x\right)dx\\ &+O\left((\log g)^{230}g^{1+6\epsilon(1-\alpha)}\right).\end{aligned}\tag{1.7}$$

这里，右侧（1.7）中的主项来自嵌入的裤子曲面中非分离且具有 0 个或 1 个尖点的 8 字形曲线和单侧迭代闭测地线的贡献。如果直接计算$\mathbb{E}^{g,\ n\ \mathrm{WP}}[$项（IV）$]$ 而不乘以 $\mathbf{1}_{\#N_\ell=0}$，双填充测地线的贡献就无法得到良好控制。这正是它发挥作用之处。对于项（III），应用容斥公式（1.2），我们证明，对于固定的数值 $j_0\geq\frac{2-3\alpha}{1-2\alpha}-1\geq 1$ （见（11.9））,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}[\mathbf{1}_{\#N_\ell=0}\cdot\text{term (III)}] =&\frac{1}{\pi^2 g}\int_0^\infty f_T(x)e^{\frac{x}{2}}\left(\left(1-\frac{n}{2}\right)x-\frac{x^2}{4}\right)dx\\ &+O\left((\log g)^{366j_0+748}g^{1+5(j_0+1)\kappa}\right).\end{aligned}\tag{1.8}$$

这里，$\mathbb{E}^{g,n}\mathrm{WP}[1\cdot$项（III）$]$ 是右侧（1.8）中的主项，而其他 $\mathbb{E}^{g,n}\mathrm{WP}[(\#N_\ell)_k\cdot$项（III）$]$ 都相对较小。注意，右侧（1.7）和（1.8）中的主项彼此抵消，这就是“二阶抵消”。最后，结合以上所有（1.1）（1.3）（1.4）（1.5）（1.6）（1.7）和（1.8），对于任意 $\epsilon_1>0$，我们都可以选取合适的 $j_0,\kappa,\epsilon>0$，并得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{Prob}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left(\lambda_1\leq\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{6(1-\alpha)}\right)^2-\epsilon_1\right)\\ &\prec\mathrm{Prob}^{g,n}_{\mathrm{WP}}(\#N_\ell\geq 1)+O\left(g^{1+7\epsilon-6(1-\epsilon)(1-\alpha)\sqrt{\left(\frac{1}{6(1-\alpha)}\right)^2+\epsilon_1}}\right)\\ &\to 0,\end{aligned}\tag{1.9}$$

这证明了定理 1.2。

记号。对于任意两个函数 $f(g)$ 和 $h(g)$，若$|f|\leq Ch$ 对某个一致常数 $C>0$（与变量 g 无关）成立，则称 $f=O(h)$。若 $\frac{|f|}{h}\to 0$ 当 $g\to+\infty$ 时成立，则称 $f=o(h)$。若 $f=O(h)$，则称 $f\prec h$ 或 $h\succ f$；若 $f\prec h$ 和 $h\prec f$，则称 $f\asymp h$。

论文结构。在第 2 节中，我们回顾一些背景知识。在第3 节中，我们给出一些有效的测地线计数结果，部分证明见附录 A。在第 4 节中，我们给出魏尔-彼得森体积的估计，部分证明见附录B。在第 5、6 和7 节中，我们介绍预迹不等式和容斥公式，并展示主要证明中相对容易的部分（项 (I) 和 (II)）。随后，我们展示相对困难的部分：第8 节和第 10 节中的项 (III)，以及第 9 节中的项 (IV)。我们将在第 11 节完成主要定理的证明。

致谢。 我们感谢参加 Teichm¨uller 理论研讨会的所有与会者，他们就本项目进行了有益的讨论。我们也感谢 Hugo Parlier、Zeev Rudnick、Yang Shen、Weixu Su、Joe Thomas 和 Haohao Zhang，就这项工作提出了宝贵的讨论意见和建议。Y. W. 获得国家重点研发计划（2025YFA1017500）及国家自然科学基金委员会项目（编号 12361141813 和 12425107）的部分资助。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 8 2.1. 双曲黎曼曲面的模空间 8 2.2. Weil-Petersson度量 8 2.3. 米尔扎哈尼积分公式 9 3. 在子曲面中计数测地线 10 4. 魏尔-彼得森体积 22 5. 预迹不等式 25 6. 余项估计 29 7. 特征函数的展开 32 8. Int^{nsep} 与Int_{λ_0} 34之间的一阶抵消9. 与 Int_{ns} 36相关的二阶抵消9.1. Int_{ns} 36中的类型 1 9.2. Int_{ns} 48中的类型 2 9.3. Int_{ns} 51中的类型 3 9.4. Int_{ns} 55中的类型 4 9.5. Int_{ns} 59中的类型 5 9.6. Int_{ns} 66中的类型 6 10. $(\mathcal{N}_\ell)$上的余项 10.1. $\mathbb{E}^g$、n WP $\left[(\#N_\ell)^k \cdot \sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}}(X)\, H_X,1(\gamma)\right]$ 73˜的估计 10.2. 情形 1：对于某个 i_0 75˜，$\gamma \subset S_{i_0}$ 10.3. 情形 2：对于某个 i_0 80，$\gamma \subset \partial S_{i_0}$ 10.4. 情形 3：γ 与 $\cup_{i=1}^t \partial\tilde{S}_i$ 横截相交。81˜ 10.5. 情形 4：对于所有 i 88，$\gamma \cap S_i = \emptyset$ 10.6. 引理 10.1 和 10.2 的证明 98 10.7. $\mathbb{E}^g$、n WP $\lceil(\#N_\ell)^k\rceil$ 98的估计 10.8. 引理 10.3 和 10.4 的证明 103 11. 定理 1.2 的证明 104 附录 A. 计数填充测地线 107 A.1. 定理 3.5 的证明 107 A.2. 定理 3.4 的证明 110 附录 B. Weil–Petersson体积和交数的渐近行为 112 B.1. $\mathcal{M}_g$、n 上的重言类交数及递归公式。113 B.2. 基本估计 115 B.3. 引理 B.1 的证明 116

B.4. 交数的估计 117B.5. 定理 B.2 的证明 121B.6. 定理 B.3 的证明 122B.7. 若干粗略估计 125参考文献 132

2. Preliminaries

本节将介绍关于双曲黎曼曲面的模空间、魏尔–彼得森体积以及米尔扎哈尼积分公式的记号和广为人知的基础知识。

2.1. 双曲黎曼曲面的模空间。记$S_{g,n}$为一个亏格为 g 、有 n个穿孔或边界的定向拓扑曲面，其中 $-\chi(S_{g,n}) = 2g-2+n \geq 1$。与$S_{g,n}$ 同胚的黎曼曲面的 Teichmüller 空间$\mathcal{T}_{g,n}$ 由从$S_{g,n}$ 到完备双曲曲面 X的微分同胚 f 组成。映射 f 通过$S_{g,n}$在 X 上给出一个标记。若且唯若 $f\circ h^{-1}: Y \to X$ 同伦于一个保角映射，两个带标记曲面 $f: S_{g,n} \to X$ 和 $h: S_{g,n} \to Y$ 在$\mathcal{T}_{g,n}$ 中等价。映射类群 $\mathrm{Mod}_{g,n} := \mathrm{Diff}^+(S_{g,n})/\mathrm{Diff}^0(S_{g,n})$通过与标记映射复合而作用于$\mathcal{T}_{g,n}$ 。$\mathrm{Mod}_{g,n}$ 中的元素保持尖点和边界的标记不变。与$S_{g,n}$ 同胚的黎曼曲面的模空间$\mathcal{M}_{g,n}$ 定义为$\mathcal{T}_{g,n}/\mathrm{Mod}_{g,n}$。对于 $n=0$，令$\mathcal{T}_g = \mathcal{T}_{g,0}$ 且 $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_{g,0}$。给定 $\mathbf{L} = (L_1,\cdots,L_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$，加权 Teichmüller 空间$\mathcal{T}_{g,n}(\mathbf{L})$由满足以下条件、带有$S_{g,n}$标记的双曲曲面 X 组成：

(1) 若 $L_i = 0$，则 X 的第 i 个穿孔是一个尖点；(2) 若 $L_i > 0$，则 X 的第 i 条边界是一条长度为 L_i 的简单闭测地线。

加权模空间 $\mathcal{M}_{g,n}(\mathbf{L}) = \mathcal{T}_{g,n}(\mathbf{L})/\mathrm{Mod}_{g,n}$ 由具有固定边界长度的无标记双曲曲面组成。在不引起歧义的情况下，令 $\mathcal{T}_{g,n}(\mathbf{0}) = \mathcal{T}_{g,n}$ 与 $\mathcal{M}_{g,n}(\mathbf{0}) = \mathcal{M}_{g,n}$

2.2. Weil-Petersson度量。 Teichm¨uller空间 $\mathcal{T}_{g,n}(\mathbf{L})$ 带有一个自然的辛形式；由 Goldman[Gol84] 的工作可知，该辛形式在映射类群作用下不变。这个辛形式称为 *Weil-Petersson* 辛形式，记为 ω 或 ω_{wp}。对于$S_{g,n}$的一个裤子分解系统 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{3g-3+n}$，$\mathcal{T}_{g,n}(\mathbf{L})$ 的相应 *Fenchel-Nielsen* 坐标由 $X \mapsto (\ell_{\alpha_i}(X)\ \tau_\alpha(X))_{i=1}^{3g-3+n}$ 给出，由裤子分解中测地线的长度以及沿它们的扭转参数组成。该坐标诱导一个同构

$$\mathcal{T}_{g,n}(\mathbf{L}) \simeq \mathbb{R}^{3g-3+n} \times \mathbb{R}^{3g-3+n}_{>0}.$$

Wolpert 在 [Wol82] 证明，在 Fenchel–Nielsen 坐标下，Weil-Petersson 辛形式具有简单的表达式。

定理 2.1。 *Weil-Petersson* 辛形式为

$$\omega = \sum_{i=1}^{3g-3+n} d\ell_{\alpha_i} \wedge d\tau_{\alpha_i}.$$

Weil-Petersson辛形式将诱导Weil-Petersson体积形式

$$dvol_{wp} = \frac{1}{(3g-3+n)!} \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{3g-3+n \ copies}.$$

ω 与 $dvol_{wp}$ 在映射类群作用下均不变，因此 $dvol_{wp}$ 是$\mathcal{M}_{g,n}$(L)上测度 dX 的提升。$\mathcal{M}_{g,n}$(L)的总体积有限，记为$V_{g,n}$(L)。设$V_{g,n} = V_{g,n}$(0)。关于$V_{g,n}$(L)的细节见第 4 节和附录 B。

按照 [米尔13], ，函数 f : $\mathcal{M}_{g,\ n} \to \mathbb{R}$ 可视为关于概率测度$\mathrm{Prob}_{\mathrm{WP}}^{g,\ n}$的随机变量，该测度由对 dX归一化给出:

$$\mathrm{Prob}_{\mathrm{WP}}^{g,n}(A) = \frac{1}{V_{g,n}} \int_{\mathcal{M}_{g,n}} 1_A dX,$$

其中$A \subset \mathcal{M}_{g,\ n}$ 为任意博雷尔集， 1_A 为特征函数。

2.3. 米尔扎哈尼积分公式。 米尔扎哈尼积分公式对于模空间上随机变量的计算至关重要。

给定拓扑曲面$S_{g,n}$和$X \in \mathcal{T}_{g,n}$上的任意非外围闭曲线 γ ，记 $\ell_\gamma(X)$或 $\ell(\gamma)$为 X 上与 γ. 同伦类对应的唯一闭测地线的双曲长度。对于任意有序的 k元组$\Gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_k)$，其中 γ_i是$S_{g,n}$上互不相交的非外围简单闭曲线的不同同伦类，令 Γ的映射类群轨道为

$$O_\Gamma = \{(h \cdot \gamma_1, \cdots, h \cdot \gamma_k); h \in \mathrm{Mod}_{g,n}\}.$$

对于任意函数 F: $\mathbb{R}_{\geq 0}^k \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，定义函数 F^Γ 在$\mathcal{M}_{g,n}$ 上为:

$$\begin{aligned} F^\Gamma : \mathcal{M}_{g,n} &\to \mathbb{R} \\ X &\mapsto \sum_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_k) \in O_\Gamma} F(\ell_{\alpha_1}(X), \cdots, \ell_{\alpha_k}(X)). \end{aligned}$$

设 $\mathbf{x} = (x_1 \cdots, x_k) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^k$。 若 $S_{g,n} - \cup_{i=1}^k \gamma_i \simeq \cup_{i=1}^s S_{g_i,n_i}$，则考虑模空间 $\mathcal{M}(S_{g,n}(\gamma)\ \ell_\Gamma = \mathbf{x})$，其中包含与 $\cup_{i=1}^s S_{g_i,n_i}$ 同胚的双曲黎曼曲面；$S_{g,n}$ 的初始尖点所对应的边界长度为 0；若 γ_i^1, γ_i^2 是 $S_{g,n} - \cup_{i=1}^k \gamma_i$ 上对应于 γ_i. 的两个边界分支，则 $\ell(\gamma_i^1) = \ell(\gamma_i^2) = x_i$。 $\mathcal{M}(S_{g,n}(\gamma)\ \ell_\Gamma = \mathbf{x})$ 的 Weil–Petersson体积等于 $S_{g,n} - \cup_{i=1}^k \gamma_i$ 中所有连通分支对应模空间的 Weil–Petersson体积之积:

$$V_{g,n}(\Gamma, \mathbf{x}) = Vol\left(\mathcal{M}\left(S_{g,n}(\gamma), \ell_\Gamma = \mathbf{x}\right)\right) = \prod_{i=1}^s V_{g_i,n_i}(\mathbf{x}^{(i)}),$$

其中 $\mathbf{x}^{(i)}$ 是 x_j 在 $\mathbf{x}$中对应于曲线γ_j 且是 S_{g_i}的边界分支，n_i 以及与S_g的初始尖点对应的 0，n。以下积分公式归功于米尔扎哈尼。不同版本可参见 [Mir07a，定理 7。1], [Mir13，定理 2。2], [MP19，定理 2。2]以及[Wri20，定理 4。1] 。

定理 2.2。对于任意 $\Gamma=(\gamma_1、\cdots、\gamma_k)$，$F^\Gamma$ 在 $\mathcal{M}_{g、n}$ 上的积分相对于 *Weil-Petersson* 体积形式为

$$\int_{\mathcal{M}_{g,n}} F^\Gamma dX = C_\Gamma \int_{\mathbb{R}^k_{\geq 0}} F(x_1,\cdots,x_k)V_{g,n}(\Gamma,\mathbf{x})\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}$$

其中常数 $C_\Gamma \in (0,1]$ 仅取决于 Γ，而 $\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}$ 表示$x_1\cdots x_k dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k$.

注。常数 C_Γ 在 Γ的拓扑$S_{g上n}$有一个显式表达式。更多细节可参见 [Wri20，定理 4。1] 我们只会在本文确有必要时给出 C_Γ 的精确值。

3. Counting geodesics in subsurfaces

本节将介绍若干关于计算子曲面中充填测地线数量的结果。

如下构造由一个 k元组闭测地线所蕴含的子曲面，已被证明非常有用，例如见 [MP19、NWX23、WX22a、LW24、Hid23、SW25a、Rud23、AM23、HSWX23、HW25、AM25、HMT25]。

构造。设 $\Gamma=(\gamma_1,\cdots,\gamma_k)$ 是一个有序的 k 元组，其中 $\gamma_i\subset X$，且 γ_i 是双曲曲面 X 上非平凡、非周边、无向的本原闭测地线。令 $\gamma=\cup_{i=1}^k\gamma_i$。考虑 γ 的 ϵ 邻域 $N_\epsilon(\gamma)$，其中 $\epsilon>0$ 充分小，使得 $N_\epsilon(\gamma)$ 与 γ 同伦。对于每个边界分支 $\xi\subset\partial N_\epsilon(\gamma)$，若 ξ 是同伦平凡的，则将由 ξ 围成的圆盘填入 $N_\epsilon(\gamma)$。若 ξ 是同伦非平凡的，则将 ξ 变形为与其同伦的唯一简单闭测地线。现在得到一个具有测地边界的子曲面 $X(\gamma)$。若两个边界分支 ξ_1，ξ_2 变形为同一条简单闭测地线 ξ，则不将它们粘合，并且 ξ 会在 $X(\gamma)$ 的测地边界中出现两次。

对于一个可能具有非空边界的拓扑曲面 Y，设 $\mathcal{P}(Y)$ 为 Y 上本原闭曲线的同伦类集合。我们称$\gamma=\cup_{i=1}^k\gamma_i\subset Y$ 连同 $\gamma_i\in\mathcal{P}(Y)$ 在 Y 中是填充的，或者称 γ 填充了 Y，如果对于同伦类 γ_i' 的所有表示方式，补集 $Y\setminus\gamma$ 的每个连通分支要么同伦于一个点，要么同伦于 Y 的一个边界分支。图 2 给出了示意图。请注意，当我们说一条闭测地线 γ 填充一个子曲面时，总是假设 γ 是本原的。更一般地，对于具有分段光滑边界的 Y 的子集 A，如果 $Y\setminus A$的每个连通分支要么同伦于一个点，要么同伦于 Y 的一个边界分支，我们就称 A 在 Y 中是填充的，或者称 A 填充了 Y。

以下命题证明见 [NWX23]。

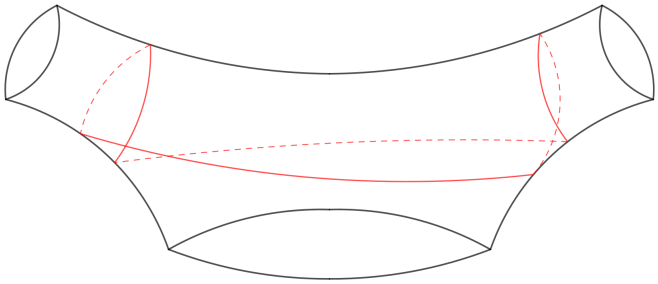


FIGURE 2. 裤子曲面中的一条填充测地线

命题 3.1。 [NWX23，命题 59] 设 X 是一个双曲曲面，且 $\gamma = \cup_{i=1}^{k}\gamma_i \subset X$ 是若干条内部本原闭测地线的并。则子曲面 $X(\gamma) \subset X$ 满足：

(1) $\gamma \subset X(\gamma)$ is filling;
(2) the boundary $\partial X(\gamma)$ consists of simple closed multi-geodesics with

$$\ell(\partial X(\gamma)) \leq 2\ell_\gamma(X),$$

where $\ell_\gamma(X) = \sum_{i=1}^{k} \ell_{\gamma_i}(X)$;
(3) the area

$$\mathrm{Area}(X(\gamma)) \leq 4\ell_\gamma(X).$$

定义。对任意 $k \geq 1$、 $L > 0$ 以及任意双曲曲面 X，我们将计数函数 $N_k^{fill}(X, L)$ 定义为

$$N_k^{fill}(X, L) = \#\{\Gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_k)\,;\, \gamma_i \in \mathcal{P}(X), \Gamma \textit{ fills } X,\ \sum_{i=1}^{k} \ell_{\gamma_i}(X) \leq L\}.$$

下述关于 $k = 1$ 的定理是 [WX22a] 中用以证明谱隙 $\frac{3}{16} - \epsilon$的关键定理。我们采用 [WX25] 中针对一般k的如下版本。

定理 3.2. [WX25，定理 18] 对任意 $k \geq 1$、 $\epsilon > 0$ 以及 $m = 2g - 2 + n \geq 1$，存在常数 $c(k, \epsilon, m)$，它仅依赖于 k、 m 与 ϵ，使得对任意双曲曲面 $X \in \mathcal{T}_{g,\,n}(x_1, \cdots, x_n)$，

$$N_k^{fill}(X, T) \leq c(k, \epsilon, m) \cdot (1 + L)^{k-1} \cdot e^{T - \frac{1-\epsilon}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

注。衰减因子 $e^{-\frac{1-\epsilon}{2}\ell_{(\partial X)}}$ 是本定理最重要的部分。它也大致蕴含如下关系：若 γ 填充 X，则 $\ell(\partial X) \leq 2\ell_\gamma(X)$。

现在考虑不等式 $\ell(\partial X(\gamma)) \leq 2\ell_\gamma(X)$。对于 $\partial X(\gamma)$ 的任意测地边界连通分支 η，存在唯一的 $X(\gamma)$ 的连通分支 $C(\eta) \setminus \gamma$，使得 $\eta \subset \partial C(\eta)$。由于测地线 γ 在 $X(\gamma)$中是填充的， $C(\eta)$ 是一个圆柱，且 $\partial C(\eta) = \eta \bigsqcup \tilde{\eta}$，其中 $\tilde{\eta}$ 是一条闭分段测地曲线。 $\tilde{\eta}$ 是测地线 γ 的子集，并且 $\ell_\eta(X) \leq \ell(\tilde{\eta})$。于是有

$$\ell(\partial X(\gamma)) = \sum_{\eta \subset \partial X(\gamma)} \ell_\eta(X) \leq \sum_{\eta \subset \partial X(\gamma)} \ell(\tilde{\eta}) \leq 2\ell_\gamma(X).$$

系数为 2，这是因为 γ 中的一条测地弧至多可以贡献给两条闭分段测地曲线 $\tilde{\eta_1}$, $\tilde{\eta_2}$。如果 γ 中的任意测地弧至多只贡献给一条闭分段测地曲线 $\tilde{\eta}$，那么

$$\ell(\partial X(\gamma)) \leq \ell_\gamma(X)$$

并且我们称 γ 在双重填充 于 $X(\gamma)$这一概念是在 [AM23第8节中引入的。1]更确切地说，

定义。 设 $X = S_{g,n}$ 是一个拓扑曲面，且 $\partial X = \{\eta_1, \cdots, \eta_n\}$。假设 $\gamma = \cup_{i=1}^{k} \gamma_i$ 在 X中是填充的。对于每个 η_i，存在唯一的圆柱分支 C_i 属于 $X \setminus \gamma$，使得 $\eta_i \subset \partial C_i$。我们称 γ 在 X 中是双重填充 的，如果对于同伦类 γ_i'的所有表示方式（假设所有交点均为横截交点），以下条件成立：

(1) 对任意 $i \neq j$， C_i 和 C_j 没有公共边界弧，或者等价地， $C_i \cap C_j$ 是一个有限集（可能为空）。(2) 对任意 $1 \leq i \leq n$，假设 $\partial C_i = \eta_i \cup \tilde{\eta}_i$。对于任意参数化 ϕ: $S^1 \to \tilde{\eta}_i$，集合

$$\{(t_1, t_2) \in S^1 \times S^1; t_1 \neq t_2, \phi(t_1) = \phi(t_2)\}$$

是一个有限集（可能为空）。

设 P 是一个有三个边界分支 η_1、η_2、η_3 的裤子曲面。固定 $x \in P$。则 π_1(P、 x) 由绕着 η_i 的曲线 $\tilde{\eta}_i$ 生成，其中 $i = 1$、2、3。

定义。 我们称 P 中恰有一个自交点的非简单闭曲线为八字形闭曲线。它必与某个 $i \neq j$ 的复合 $\tilde{\eta}_i \circ \tilde{\eta}_j$ 同伦。它们的定向满足： x 处的交点无法消去。

定义。 我们称 P 中与某个 $i \neq j$ 的复合 $\tilde{\eta}_i \circ \tilde{\eta}_j^n$ 同伦且迭代次数为 $n \geq 2$ 的非简单闭曲线为单侧迭代八字形闭曲线。我们对 $\tilde{\eta}_i$ 和 $\tilde{\eta}_j$ 进行定向，使得 $\tilde{\eta}_i \circ \tilde{\eta}_j$ 是一条 8 字形闭测地线。

图3展示了$S_{0中的一条3}$ 8字形闭测地线和一条迭代次数为 $n = 3$的单侧迭代 8 字形闭测地线。

设 P是一个裤子曲面，其三条边界测地线的长度分别为 x、y、$z \geq 0$。围绕长度为 x 和 y 的边界螺旋的 8 字形闭测地线的长度 l 由下式给出（参见例如 [Bus10，公式 4.2。）3])

$$\cosh\frac{l}{2} = 2\cosh\frac{x}{2}\cosh\frac{y}{2} + \cosh\frac{z}{2}. \tag{3.1}$$

我们将 (3.1) 写作

$$\ell = L_{f-8}(x, y, z).$$

单侧迭代 8 字形闭测地线的长度 l，它绕着长度为 x 的边界缠绕一次，并绕着长度为y 的边界缠绕 $n \geq 2$ 次，其长度由下式给出（参见 例如 [Bar99，第 3] 节）

$$\cosh\frac{l}{2} = \frac{\sinh\frac{n+1}{2}y}{\sinh\frac{y}{2}}\cosh\frac{x}{2} + \frac{\sinh\frac{n}{2}y}{\sinh\frac{y}{2}}\cosh\frac{z}{2}. \tag{3.2}$$

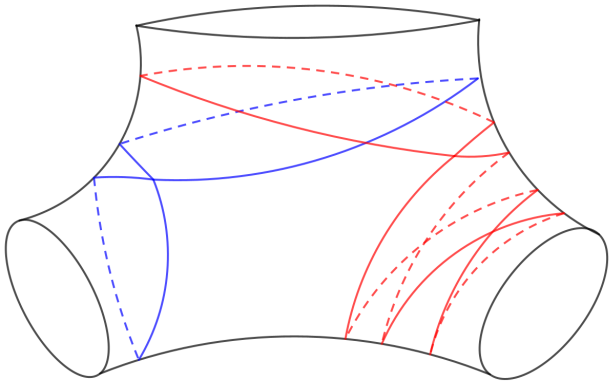


FIGURE 3. 8 字形曲线和单侧迭代八次闭测地线

我们可以将（3.2）写作

$$\ell_\gamma(X) = L_n(x, y, z).$$

Anantharaman-Monk 在 [AM23] 中对$S_{1,1}$ 和$S_{0,3}$中的填充测地线进行了分类。

定理 3.3。 [AM23，命题 8。8] $S_{1,1}$中的任意填充闭测地线都是双重填充的。在$S_{0,3}$ 中，一个填充测地线是双重填充的，当且仅当它既不是 *8* 字形曲线，也不是单侧迭代八次闭测地线。

对于 $k \geq 1$、 $L > 0$ 以及任意双曲曲面 X，我们将计数函数 $N_k^{2-fill}(X, L)$ 定义为

$$N_k^{2-fill}(X, L) = \#\{\Gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_k)\,;\, \Gamma \textit{ double-fills } X,\ \sum_{i=1}^{k} \ell_{\gamma_i}(X) \leq L\}.$$

我们将证明以下与定理 3.2类似的双重填充多重测地线计数结果。

定理 3.4。 对于任意 $k \geq 1$、 $\epsilon > 0$ 和 $m = 2g - 2 + n \geq 1$，存在常数 $C(k$、ϵ、$m)$，它仅取决于 k、m和 ϵ，使得对于任意双曲曲面 $X \in \mathcal{T}_{g,\ n}(x_1$、$\cdots$、$x_n)$，

$$N_k^{2-fill}(X, T) \leq C(k, \epsilon, m) \cdot (1 + L)^{k-1} \cdot e^{T-(1-\epsilon)\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

定理 3.2 和定理3.4 都遵循这样一条重要规律：对于 k-元组 γ 在 X中的给定填充拓扑类型，随着 ∂X 的长度增加， δL，γ也至少近似地增加 $\frac{1-\epsilon}{2}\delta L$(若 γ是填充曲线) 或 $(1-\epsilon)\delta L$(若 γ是双重填充曲线)。

对于熟悉瑟斯顿条带变形的专家而言，以下结果是众所周知的。可参见例如 [Thu86、PT10、DGK16]，其中有详细讨论。为求完整起见，我们将给出一个由 [Par05]推广而来的证明。两种证明都基于这样一种考量：缩短曲面的边界长度时，每条测地线的长度如何变化。定理 3.4 和3.5的证明见附录 A。

定理 3.5。 对于任意 $X \in \mathcal{T}_{g,\ n}(x_1, \cdots, x_n)$ 以及任意更短的边界长度 $(y_1, \cdots, y_n)$，只要满足 $x_i \geq y_i \geq 0$ 对所有 $i = 1, \cdots, n$都成立，就存在$Y \in \mathcal{T}_{g,\ n}(y_1, \cdots, y_n)$，使得任意闭曲线 $\eta \subset S_{g,\ n}$ 的长度满足

$$\ell_\eta(Y) \leq \ell_\eta(X).$$

由此可得填充测地线计数的以下单调性:

定理 3.6. 对于任意 $X \in \mathcal{T}_{g,n}(x_1, \cdots, x_n)$ 以及满足 $i = 1, \cdots, n$ 的 $x_i \geq y_i$，存在 $Y \in \mathcal{T}_{g,n}(y_1, \cdots, y_n)$ 使得

$$N_k^{fill}(X, L) \leq N_k^{fill}(Y, L)$$

对于任意 $L > 0$。

证明。取 $Y \in \mathcal{T}_{g,n}(y_1, \cdots, y_n)$ 为定理 3.5 中构造的曲面。设 $\Gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_k)$ 是在 $N_k^{fill}(X, L)$ 中计数的一个填充 k-元组（即 $\gamma_i \in P(X)$， Γ 填充 X，且 $\sum \ell_{\gamma_i}(X) \leq L$）。将 Γ 和 γ_i视为 S_g中的自由同伦类时，n, Γ 仍在 Y中填充。根据定理 3.5，$\sum \ell_{\gamma_i}(Y) \leq \sum \ell_{\gamma_i}(X) \leq L$。因此， Γ（作为自由同伦类）也计入 $N_k^{fill}(Y, L)$。故 $N_k^{fill}(X, L) \leq N_k^{fill}(Y, L)$。□

对于双曲曲面 X，我们用 $\mathcal{P}(X)$ 表示 X中所有定向本原测地线的集合。设

$$P(X, L) = \#\{\gamma \in \mathcal{P}(X); \ell_\gamma(X) \leq L\}$$

为 X上长度 $\leq L$ 的本原闭测地线的数目。经典领口引理（参见例如 [Bus10，定理 4.1.6]）指出，所有长度 ≤ 2反双曲正弦 1 的简单闭测地线两两不相交。由 [Bus10，引理 6.6.4] 亦可知，对任意 $X \in \mathcal{M}_{g,n}$ 与 $L > 0$， X 上长度 $\leq L$ 、且不是长度 ≤ 2 反双曲正弦 1 的闭测地线的迭代的闭测地线数目以 $(g - 1 + \frac{n}{2})e^{L+6}$. 为界。综合这两个估计，我们得到如下粗略估计，它足以近似余项。

引理 3.7. 对任意 $X \in \mathcal{M}_{g,n}(L_1, \cdots, L_n)$ 与 $L > 0$，我们有

$$P(X, L) \leq (g - 1 + \frac{n}{2})e^{L+6} + 3g - 3 + n.$$

有限体积黎曼曲面的著名素测地线定理如下:

定理 3.8。 设 X 是一个无边界且具有有限体积的几何有限完备双曲曲面。当 $L \to \infty$ 时，

$$P(X, L) = \mathrm{Li}(e^L) + \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Li}(e^{\alpha_k L}) + O\left(e^{\frac{3}{4}L}\right),$$

其中 对数积分函数$(x) = \int_2^x \frac{dt}{\text{对数函数}\ t}$，且 $\frac{1}{2} \leq \alpha_p \leq \alpha_{p-1} \leq \cdots < \alpha_0 = 1$ 对应于拉普拉斯算子在 $[0, \frac{1}{4}]$ 中的特征值 $\{\lambda_k\}_{k=0}^{p}$，由 $\alpha_k(1 - \alpha_k) = \lambda_k$ 给出。

紧曲面情形下的精确展开式归功于 Hejhal、Huber 和 Randol [Hej76，Hub61，Ran77]。非紧且有限体积的情形由 Sarnak 证明 [Sar80]。对于无限体积的情形，渐近形式如下:

定理 3.9。 设 $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}$ 是一个几何有限、无边界且无限体积的完备双曲曲面。那么

$$\lim_{L\to\infty} \frac{P(X,L)}{e^{\delta L}/\delta L} = 1,$$

其中 $\delta = \delta(X)$ 是 Γ 的极限集的豪斯多夫维数。

这一渐近主项由 Guillop´e 和 Lalley [Gui86,Lal89,Gui92]证明。关于精确的余项，请参见 Naud 的结果 [Nau05]。与素测地线定理形式非常相似的一个结果是下面这个定理。参见 例如 [Rob03，定理 4.1 的推论 2。1]。

定理 3.10. 设 $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}$ 是一个无边界、无限体积的几何有限完备双曲曲面。对于任意 p、$q \in \mathbb{H}$，存在 $C_{p,q,X}$ ，使得

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\#\{\gamma \in \Gamma; d(p,\gamma q) \le L\}}{e^{\delta L}} = C_{p,q,X}.$$

极限集 Γ 的豪斯多夫维数 δ 在 X 具有有限体积时为 1，而在 X 具有无限体积时为 $0 < \delta < 1$ 。当 X 含有尖点时，我们有 $\delta > \frac{1}{2}$ 。参见 Beardon [Bea68, Bea71]。我们研究双曲曲面 $X = \Gamma\backslash\mathbb{H} \in \mathcal{T}_0$ 上 Γ 的极限集的豪斯多夫维数 $\delta_l = \delta(l)$，其中 $X = \Gamma\backslash\mathbb{H} \in \mathcal{T}_0$ 为 3(*l*,0, 0)。这一函数已被广泛研究，例如见 [Bea68, Pat76, Pig84, PS85a, PS85b]。已知 $\delta_0 = 1$，$\lim_{l\to\infty} \delta_l = \frac{1}{2}$，且 δ_l 是 $l \in [0,\infty)$ 上严格递减的 Lipschitz 连续函数。因此，我们可以定义 $\delta \in (\frac{1}{2}, 1]$ 的反函数 $l_\delta = l(\delta)$。

定理 3.8 和定理3.9 适用于固定的双曲曲面。考虑一类曲面时，它们无法对满足素测地线定理精度足够高的区域 L给出统一估计。Wu 和 Xue 为 Weil-Petersson 随机闭双曲曲面证明了一个版本的素测地线定理，见 [WX25]。本文证明以下两个关于裤子曲面或单孔环面的计数结果。

引理 3.11。 对于任意 $\delta > \frac{1}{2}$，存在 $C_\delta > 0$，使得若 $x \ge l_\delta$ 且 $y, z \ge 0$，则对于任意 $X \in \mathcal{T}_{0,\,3}(x,y,z)$，长度为 $\le L$ 的 X 上的填充本原测地线数量满足

$$N_1^{fill}(X,L) \le C_\delta \cdot \frac{e^{\delta L}}{L}$$

对于任意 $L > 0$。

证明。 我们结合定理 3.6 和定理 3.9。根据定理 3.9，存在 $C_\delta > 0$ 使得

$$P(Y,L) \le C_\delta \cdot \frac{e^{\delta L}}{L}$$

对于$Y \in \mathcal{T}_{0,\,3}$（$l_\delta$，0，0）以及任意 $L > 0$。注意，在 Y中，所有本原闭测地线都是填充的，除了长度为 l_δ的边界测地线。于是对于$X \in \mathcal{T}_{0,\,3}$（$x$，$y$，$z$），其中 $x \ge l_\delta$，并且 y，$z \ge 0$，由定理3.6 可得

$$N_1^{fill}(X,L) \le N_1^{fill}(Y,L) \le P(Y,L) \le C_\delta \cdot \frac{e^{\delta L}}{L}.$$

证明完成。 □

定理 3.12. 令 δ_l 为 Γ˜的极限集的豪斯多夫维数，其中 $\Gamma\backslash\mathbb{H} \in \mathcal{T}_{0,\ 3}(l,0,0)$。对于任意 $\epsilon > 0$，存在常数 $s_{\epsilon,\ l}, C_{\epsilon,\ l} > 0$，它们依赖于 l, ϵ，使得对于任意满足条件 $_1(l)\ \mathrm{sys}(X) \leq s_{\epsilon,\ l}$的 $X \in \mathcal{T}_1$,

$$N_1^{fill}(X, L) \leq \tilde{C}_{\epsilon,l} \cdot e^{(1+\epsilon)\cdot\delta_l L}$$

对于任意 $L > 0$。

在本节余下部分，我们将证明定理 3.12。

设 $X \in \mathcal{T}_{1,\ 1}(l)$ 满足 $2s = \mathrm{sys}(X) < 2$ 反双曲正弦1。根据标准的 领口引理(参见例如 [Kee74])，收缩长由一条唯一的简单闭测地线 η实现，并且存在一个以 $C(\eta$为中心、嵌入的领口邻域η 位于 X 中，与之同构

$$(\rho, t) \in [-w(s), w(s)] \times \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$$

配备度量

$$ds^2 = d\rho^2 + (2s)^2 \cdot \cosh^2\rho \cdot dt^2,$$

其中

$$w(s) = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\sinh s}\right) = \log\left(\frac{1}{s}\right) + O(1). \tag{3.3}$$

沿着 γ 切开 X，将得到一个裤子曲面，记作 $X(l, s)$。领圈 $C(\gamma)$ 分成两个半领口 HC_1 和 HC_2。令 $X(l, s)\ \backslash(HC_1 \cup HC_2)$ 为 $X(l, s)$ 的内部部分 $\mathrm{Int}(X(l, s))$。于是，$\mathrm{Int}(X(l, s))$ 中任意一点到 γ 的距离至少为 $w(s)$。沿着连接其不同测地边界分支的三条最短垂直测地弧切开 $X(l, s)$，将得到两个全等的直角六边形 H_1 和 H_2。六个角依次记为 A_1、B_1、C_1、A_2、B_2、C_2，使得当 $i = 1$ 为 2 时，A_i、B_i 位于 HC_i 中，而 A_i、C_i 是相邻的直角。对于每个 $i = 1$ 为 2，边界∂HC_i 与测地弧 A_iC_i 交于 D_i，并与测地弧 B_1B_2 交于 E_i。见图 4。注意，当沿 γ 的扭转参数不为零时，在大多数情况下，A_1 和 A_2 在 X 中并未粘合在一起。

现在我们来估计 $\mathrm{Int}(X(l,\ s))$ 的大小。首先，根据例如 [Bus10，公式词汇表]

$$\begin{aligned}
&d(A_1, C_1) = d(A_2, C_2)\\
&= \operatorname{arccosh}\left(\frac{\cosh d(C_1, C_2)\cosh d(A_1, B_1) + \cosh d(A_2, B_2)}{\sinh d(C_1, C_2)\sinh d(A_1, B_1)}\right)\\
&= \operatorname{arccosh}\frac{\cosh s(\cosh\frac{l}{2} + 1)}{\sinh s\sinh\frac{l}{2}}\\
&= \log\frac{1}{s} + O_l(1).
\end{aligned}$$

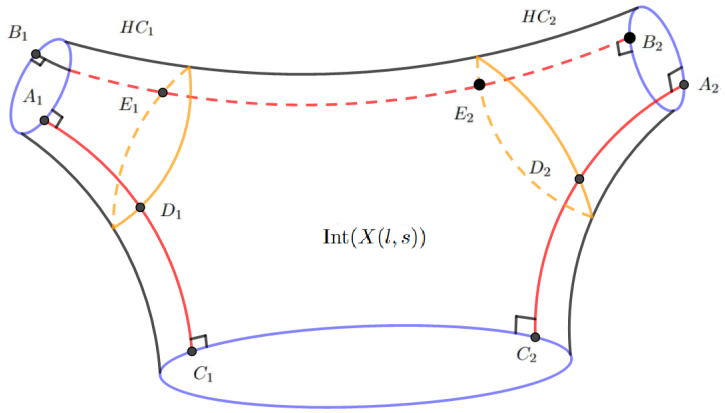


FIGURE 4. $X(l,\ s) = \mathrm{Int}(X(l,\ s)) \cup HC_1 \cup HC_2$

因此我们有

$$\begin{aligned} & d(D_1, C_1) = d(D_2, C_2) \\ =& d(A_1, C_1) - d(A_1, D_1) \\ =& d(A_1, C_1) - w(s) \\ =& O_l(1). \end{aligned} \tag{3.4}$$

$C(\gamma)$ 的一条边界的长度为

$$\ell(\partial HC_1) = \ell(\partial HC_2) = 2s \cdot \cosh\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\sinh s}\right)\right) = 2 + o(1). \tag{3.5}$$

根据（3.4）和（3.5），我们有

$$d(E_1, E_2) = O_l(1), \tag{3.6}$$

并且，对于任意 $P,\ Q \in \mathrm{Int}(X(l,s))$,

$$d(P, Q) = O_l(1). \tag{3.7}$$

现在我们来计算 $C(\gamma)$ 中测地弧的数量。

引理 3.13. 若 P、Q 属于 $\partial C(\gamma)$ 的不同边界分支，则存在一致常数 $R_0 > 0$，使得 $C(\gamma)$ 中连接 P、Q 且长度为 $\leq L$ 的测地弧的数目有上界

$$\frac{L - 2w(s) + R_0}{s}$$

对于 $L \geq 2w(s)$。

证明. 首先，由（3.5），我们可以假设连接 P 与 Q的最短测地弧的长度为 $2w(s)$，并与 γ垂直相交。对于一般的 P 与 Q，我们只需将 P 移动有限距离到 Q在领圈内的对称位置，并比较每条测地弧的长度。

我们将绕着 γ 螺旋 n 次的测地弧提升到配备度量 $\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ 的上半平面 $\mathbb{H}$。假设 γ 被提升到 $x = 0$，而P 被提升到圆 $|z| = 1$上的一点。如果 $n \geq 0$，那么 Q 被提升到一个

圆上的一点 $|z| = e^{2ns}$。见图5。角度 θ 向量之间 r

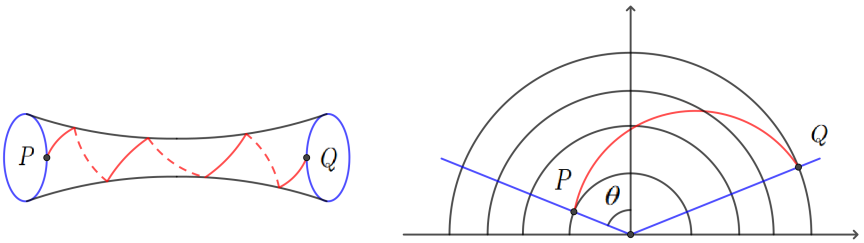


FIGURE 5. 一条螺旋 3 圈的测地弧

从 0 到 P，且 γ 的提升为

$$\cos\theta = \frac{1}{\cosh w(s)}. \tag{3.8}$$

注意，当 $s \to 0$时，$w(s) \to +\infty$ 以及 $\theta \to \frac{\pi}{2}$. 现在 P 提升为 $(-$ 正弦 θ，余弦 $\theta)$，而 Q 提升为 $(e^{2ns}$ 正弦 θ，e^{2ns} 余弦 $\theta)$。由 (3.3) 和 (3.8) 可知，测地弧的长度为

$$\begin{aligned}
&\cosh d\left((-\sin\theta, \cos\theta), (e^{2ns}\sin\theta, e^{2ns}\cos\theta)\right) \\
=&1 + \frac{(e^{2ns}+1)^2\sin^2\theta + (e^{2ns}-1)^2\cos^2\theta}{2e^{2ns}\cos^2\theta} \\
=&\exp(O(1)) \cdot \frac{e^{2ns}}{\cos^2\theta} = \exp(O(1)) \cdot \cosh^2 w(s) \cdot e^{2ns} \\
=&\exp(O(1)) \cdot \sinh^2 w(s) \cdot e^{2ns} = \exp(O(1)) \cdot \frac{e^{2ns}}{\sinh^2 s} \\
=&\exp(O(1)) \cdot \frac{e^{2ns}}{s^2},
\end{aligned}$$

其中，所有隐含常数对于 $s <$ 反双曲正弦 1 弧都是一致的。因此，如果连接 P、Q 并绕 γ 螺旋 $n \geq 0$ 次的测地弧长度为 $\leq L$，则有

$$\exp(O(1))\frac{e^{2ns}}{s^2} \leq \cosh L,$$

这意味着

$$n \leq \frac{L - 2\log\frac{1}{s} + R'}{2s}$$

存在某个统一的 $R' > 0$。可能的负 n 的数量具有相同的上界。最后，引理由（3.3）得证。□

设填充测地线 η 在 X 中与 γ 相交 $k \geq 1$ 次。那么，η可以分解为 $\eta_1 \cup \eta_2 \cdots \eta_{2k-1} \cup \eta_{2k}$，使得

(1) η_{2i-1} 是 $C(\gamma)$中的一条测地弧，其两个端点分别位于 $\partial C(\gamma)$的不同连通分支上，其中 $i = 1, \cdots, k$；(2) 对于 i =1，$\cdots$，k，η_{2i} 是 X $(l,\ s)$中的一条测地弧，其两个端点位于 $\partial C(\gamma)$上；(3) 对于 $i = 1, \cdots, 2k$，η_i 和 η_{i+1} 是连通的。η_{2k} 和 η_1 是连通的。

定义。对于任意收缩长为 ≤ 2 反双曲正弦 1 的$X \in \mathcal{T}_{1,\ 1}(l)$，令 $\gamma \in \mathcal{P}(X)$为长度为 sys$(X)$ 的唯一无向测地线。定义

$$N_1^{fill}(X, L, k) = \#\{\eta \in N_1^{fill}(X, L); \eta \ intersects\ \gamma \ for\ k \ times\}$$

对于任意 $k \geq 1$。

根据定义，对于任意 $X \in \mathcal{T}_{1,\ 1}(l)$，其收缩长为 ≤ 2 反双曲正弦 1，

$$N_1^{fill}(X, L) = \sum_{k=1}^{\infty} N_1^{fill}(X, L, k). \tag{3.9}$$

现在我们将 $N_1^{fill}(X,\ L,\ k)$ 作为定理 3.12 证明的开胃菜。

引理 3.14。存在一个依赖于 l 的常数 $C_l' > 0$，使得对于任意 $X \in \mathcal{T}_{1,\ 1}(l)$，其收缩长为 $2s \leq 2$反双曲正弦 1，

$$N_1^{fill}(X, L, 1) \leq C_l' \cdot s^{2\delta_l - 1} \cdot e^{\delta_l \cdot L}$$

对于任意 $L > 2w$。

证明。对于 $\eta = \eta_1 \cup \eta_2 \in N_1^{fill}(X, L, 1)$，我们假设 $\partial\eta_1 = \{p, q\}$ 与 $p \in \partial HC_1$, $q \in \partial HC_2$。我们在 $\partial C(\gamma)$ 中用线段连接 p 与 D_1 以及 q 与 D_2。我们可以假设这两条线段的定向与 Int$(X(l, s))$ 相容。通过与这两条线段复合，η_1 与 η_2 将形变为光滑测地弧 $\tilde{\eta}_1$ 与 $\tilde{\eta}_2$。由 (3.5)，存在一致的 $c > 0$，使得 $\tilde{\eta}_1$ 是 $C(\gamma)$ 中连接 D_1 与 D_2 的测地弧，其长度为 $2w(s) \leq \ell(\tilde{\eta}_1) \leq \ell(\eta_1) + c$，且 $\tilde{\eta}_2$ 是 $X(l, s)$ 中连接 D_1 与 D_2 的测地弧，其长度为 $\ell(\tilde{\eta}_2) \leq \ell(\eta_2) + c$。因此$\ell(\tilde{\eta}_1) + \ell(\tilde{\eta}_2) \leq \ell(\ell) + 2c \leq L + 2c$. 由构造，$\tilde{\eta}_1 \cup \tilde{\eta}_2$ 同伦于 η。因此我们有

$$\begin{aligned} & N_1^{fill}(X, L, 1) \\ & \leq \sum_{k=[2w(s)]}^{[L+2c]} \#\{\tilde{\eta}_1 : k \leq \ell(\tilde{\eta}_1) < k+1\} \#\{\tilde{\eta}_2 : \ell(\tilde{\eta}_2) < L + 2c - k\}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

根据引理 3.13，

$$\#\{\tilde{\eta}_1 : k \leq \ell(\tilde{\eta}_1) < k+1\} \leq \frac{k + 1 - 2w(s) + R_0}{s}. \tag{3.11}$$

我们将 $\tilde{\eta}_2$ 与测地线段 D_1C_1 和 D_2C_2复合，并将其变形为一条光滑测地弧 $\hat{}\eta_2$，其端点固定于 C_1 和 C_2。由（3.4）可知，存在某个 $c_l > 0$ 仅依赖于 l，使得 $\ell(\hat{}\eta_2) \leq \ell(\tilde{\eta}_2) + c_\ell$。因此我们有

$$\#\{\tilde{\eta}_2 : \ell(\tilde{\eta}_2) < L + 2c - k\} \leq \#\{\hat{\eta}_2 : \ell(\hat{\eta}_2) < L + 2c - k + c_l\}. \tag{3.12}$$

现在，我们在定理 3.2、定理 3.4和定理 3.6 的证明中采用非常相似的策略，来界定（3.12）的右侧。更多细节请参见附录 A，或 [WX22a，WX25]。

注意，$X(l,\ s) \in \mathcal{T}_{0,\ 3}(l,\ 2s,\ 2s)$。我们可以将与 HC_1 相邻的边界测地线缩短至一个尖点，并将 $X(l,\ s)$ 变形为 $X' \in \mathcal{T}_{0,\ 3}(l,\ 2s,\ 0)$。在 X' 上，我们可以定义交点 A_i', B_i', C_i'，用于

$i=1,2$，即三条最短垂直测地线与边界测地线之间的交点，如 A_i，B_i，C_i 在 $X(l,s)$ 中所示。注意，A_1' 和 B_1' 在尖点处重合。

沿着 A_1C_1 和 $B_1\overline{B_2}$ 切割 $X(\overline{l,s})$，得到一个八边形。对于任意 $\hat{}\eta_2$，我们可以根据 $\hat{}\eta_2$ 与 A_1C_1 和 B_1B_2 的连续交点 $p_1,\cdots,p_k$，将其分解为一系列连续的测地弧。假设对于 $i=1,\cdots,k+1$，有 $p_0=C_1$，$p_{k+1}=C_2$，且 $\gamma_i=\hat{}\eta_2|_{[p_{i-1},p_i]}$。现在我们令 $p_0'=C_1'$，$p_{k+1}'=C_2'$。对于 $i=1,\cdots,k$，若 $p_i\in A_1C_1$，则令 $p_i'\in A_1'C_1'$，其中 $d(p_i,C_1)=d(p_i',C_1')$；若 $p_i\in B_1B_2$，则令 $p_i'\in B_1'B_2'$，其中 $d(p_i,B_2)=d(p_i',B_2')$。现在，对于每个 i，我们可以用一条测地弧 γ_i' 连接 p_{i-1}' 和 p_i'，该测地弧连接 $X'\setminus\{A_1'C_1'\cup B_1'B_2'\}$ 的对应边，如八边形 $X(l,s)\setminus\{A_1C_1\cup B_1B_2\}$ 中的 γ_i 所示。现在，$\gamma_i'(i=1,\cdots,k+1)$ 将与一条连接 C_1',C_2' 的分段测地弧相连。由引理 3.5 中相同的论证可得，对于所有 $1\le i\le k+1$，有 $\ell(\gamma_i')\le\ell(\gamma_i)$。令 $\hat{}\eta_2'$ 为 X' 中的光滑测地弧，它连接 C_1' 和 C_2'，并与 $\cup_{i=1}^{k+1}\gamma_i'$ 同伦。于是 $\ell(\hat{}\eta_2')\le\sum\ell(\gamma_i')\le\sum\ell(\gamma_i)=\ell(\hat{}\eta_2)$。由此可得

$$\begin{aligned}&\#\{\hat{\eta_2}:\hat{\eta_2}\ connects\ C_1,C_2\ in\ X_{l,s},\ell(\hat{\eta_2})<L+2c-k+c_l\}\\ \le&\#\{\hat{\eta_2}':\hat{\eta_2}'\ connects\ C_1',C_2'\ in\ X',\ell(\hat{\eta_2}')<L+2c-k+c_l\}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

类似地，我们可以将与 HC_2 相邻的边界测地线缩短为一个尖点，并将 X' 变形为 $X''\in\mathcal{T}_{0,\ 3}(l,\ 0,\ 0)$。根据上述相同的论证，我们有

$$\begin{aligned}&\#\{\hat{\eta_2}':\hat{\eta_2}'\ connects\ C_1',C_2'\ in\ X',\ell(\hat{\eta_2}')<L+2c-k+c_l\}\\ \le&\#\{\hat{\eta_2}'':\hat{\eta_2}''\ connects\ C_1'',C_2''\ in\ X'',\ell(\hat{\eta_2}'')<L+2c-k+c_l\}\end{aligned}\tag{3.14}$$

其中 C_1''，C_2'' 是 C_1，C_2 在 X'' 中的对应点。现在我们可以结合（3.12）、（3.13）、（3.14）和定理 3.10 得到

$$\begin{aligned}&\#\{\tilde{\eta_2}:\ell(\tilde{\eta_2})<L+2c-k\}\\ \le&\#\{\hat{\eta_2}'':\hat{\eta_2}''\ connects\ C_1'',C_2''\ in\ X'',\ell(\hat{\eta_2}'')<L+2c-k+c_l\}\\ \le&\hat{C}_l\cdot e^{\delta_l(L+2c-k+c_l)}\\ =&\left(\hat{C}_le^{\delta_lc_l}\right)\cdot e^{\delta_l(L+2c-k)}.\end{aligned}\tag{3.15}$$

由（3.10）、（3.11）和（3.15）可得

$$\begin{aligned}&N_1^{fill}(X,L,1)\\ \le&\sum_{k=[2w(s)]}^{[L+2c]}\frac{k+1-2w(s)+R_0}{s}\cdot\left(\hat{C}_le^{\delta_lc_l}\right)e^{\delta_l(L+2c-k)}\\ \le&C_l''\cdot\frac{R_0}{s}\cdot e^{\delta_l(L+2c-[2w(s)])}\\ \le&C_l'\cdot s^{2\delta_l-1}\cdot e^{\delta_l\cdot L}\end{aligned}$$

对于某个 C_l'，$C_l''>0$ 它只取决于 l。在最后一个不等式中，我们使用了这一事实（3.3），即 $w(s)=$对数函数$\left(\frac{1}{s}\right)+O(1)$。□

定理 *3.12* 的证明。我们采用与引理 3.14 类似的论证，来估计 $N_1^{fill}(X,\ L,\ k)$，其中 $k\geq 2$。令 $\eta=\eta_1\cup\eta_2\cup\cdots\cup\eta_{2k-1}\cup\eta_{2k}\in N_1^{fill}(X,\ L,\ k)$。对于每条线段 η_i，我们在其两端各接上一条 $\partial C(\gamma)$ 中的线段，形成一条端点位于 $\{D_1,D_2\}$ 的分段光滑测地弧。然后将其变形为一条具有相同端点的测地弧 $\tilde{\eta}_i$。我们可以看出 $\tilde{\eta}_1\cup\tilde{\eta}_2\cup\cdots\cup\tilde{\eta}_{2k-1}\cup\tilde{\eta}_{2k}$ 同伦于 η 总长度为 $\leq L+2ck$ 对于 $c>0$ 在引理的证明中3.14。那么我们有

$$\begin{aligned}&N_1^{fill}(X,L,k)\\ \leq&\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k\leq L+2ck\\ n_i\geq[2w(s)]}}\#\{(\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2):n_1\leq\ell(\tilde{\eta}_1)+\ell(\tilde{\eta}_2)\leq n_1+1\}\\ &\cdot\#\{(\tilde{\eta}_3,\tilde{\eta}_4):n_2\leq\ell(\tilde{\eta}_3)+\ell(\tilde{\eta}_4)\leq n_2+1\}\\ &\cdots\\ &\cdot\#\{(\tilde{\eta}_{2k-1},\tilde{\eta}_{2k}):n_k\leq\ell(\tilde{\eta}_{2k-1})+\ell(\tilde{\eta}_{2k})\leq n_k+1\}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

根据引理3.14证明中的相同论证，我们有

$$\begin{aligned}&\#\{(\tilde{\eta}_{2i-1},\tilde{\eta}_{2i}):n_i\leq\ell(\tilde{\eta}_{2i-1})+\ell(\tilde{\eta}_{2i})\leq n_i+1\}\\ \leq&C'_\ell\cdot s^{2\delta_l-1}\cdot e^{\delta_l(n_i+1)}\end{aligned}\tag{3.17}$$

对于 $n_i\geq[2w(s)]$。将（3.17）代入（3.16），我们有

$$\begin{aligned}&N_1^{fill}(X,L,k)\\ \leq&\left(C'_ls^{2\delta_l-1}\right)^k\cdot\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k\leq L+2ck\\ n_i\geq[2w(s)]}}e^{\delta_l\sum_{j=1}^k(n_j+1)}\\ \leq&e^{\delta_l\cdot L}\left(C'_le^{\delta_l(2c+1)}s^{2\delta_l-1}\right)^k\cdot\sum_{m=k}^{[L+2ck+k]}\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=m\\ n_i\geq1}}1\\ =&e^{\delta_l\cdot L}\left(C'_le^{\delta_l(2c+1)}s^{2\delta_l-1}\right)^k\cdot\sum_{m=k}^{[L+2ck+k]}\binom{m-1}{k-1}\\ \leq&e^{\delta_l\cdot L}\left(C'_le^{\delta_l(2c+1)}s^{2\delta_l-1}\right)^k\cdot\binom{[L+2ck+k]}{k}\\ \leq&e^{\delta_l\cdot L}\left(C'_le^{\delta_l(2c+1)}s^{2\delta_l-1}\right)^k\cdot\frac{(L+2ck+k)^k}{k!}\\ \leq&e^{\delta_l\cdot L}\left(C'_le^{\delta_l(2c+1)}s^{2\delta_l-1}\right)^k\cdot\frac{e^{\epsilon\delta_l(L+2ck+k)}}{(\epsilon\delta_l)^k}.\end{aligned}\tag{3.18}$$

由（3.9）和（3.18），当 $s<$ 反双曲正弦 1 时，我们有

$$N_1^{fill}(X,L)\leq e^{\delta_l(1+\epsilon)\cdot L}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{C'_le^{\delta_l(1+\epsilon)(2c+1)}}{\epsilon\delta_l}s^{2\delta_l-1}\right)^k.\tag{3.19}$$

由于 $\delta_l > \frac{1}{2}$，存在 $s_{\epsilon,\,l} > 0$，它取决于 ϵ，l，使得 $s_{\epsilon,\,l} <$ 反双曲正弦 1 且

$$\frac{C_l' e^{\delta_l(1+\epsilon)(2c+1)}}{\epsilon\delta_l} s_{\epsilon,l}^{2\delta_l-1} < 1. \tag{3.20}$$

若取

$$\tilde{C}_{\epsilon,l} = \frac{1}{1 - \frac{C_l' e^{\delta_l(1+\epsilon)(2c+1)}}{\epsilon\delta_l} s_{\epsilon,l}^{2\delta_l-1}},$$

对于 $s < s_{\epsilon,\,l}$，由（3.19）和（3.20）可得

$$N_1^{fill}(X, L) \le \tilde{C}_{\epsilon,l} \cdot e^{\delta_l(1+\epsilon)\cdot L},$$

这就完成了证明。 □

4. Weil-Petersson volumes

本节列出关于双曲黎曼曲面模空间的 Weil-Petersson 体积的一些结果。记 $V_{g,\,n}(x_1, \cdots, x_n)$ 为 $\mathcal{M}_{g,\,n}(x_1, \cdots, x_n)$ 的魏尔-彼得森体积，并将 $V_{g,\,n} = V_{g,\,n}(0, \cdots, 0)$ 简记为此。

首先，我们列出米尔扎哈尼及其合作者的结果。

定理 4.1. [Mir07a，定理 1。1]。体积 $V_{g,\,n}(x_1, \cdots, x_n)$ 是关于 $x_1^2, \cdots, x_n^2$ 的 $3g-3+n$ 次多项式。此外，如果

$$V_{g,n}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\alpha:|\alpha|\le 3g-3+n} C_\alpha x_1^{2\alpha_1} \cdots x_n^{2\alpha_n},$$

那么 $C_\alpha > 0$ 且 $C_\alpha \in \pi^{6g-6+2n-2|\alpha|}$。这里 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ 且 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$。

引理 4.2. *(1)* [Mir13，引理 3。2]

$$V_{g,n} \le V_{g,n}(x_1, \cdots, x_n) \le e^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{2}} V_{g,n}.$$

(2) [Mir13，定理 3。5] 对于固定的 $n \ge 0$，当 $g \to \infty$，

$$\frac{V_{g-1,n+2}}{V_{g,n}} = 1 + O_n\left(\frac{1}{g}\right)$$

and

$$\frac{(2g-2+n)V_{g,n}}{V_{g,n+1}} = \frac{1}{4\pi^2} + O_n\left(\frac{1}{g}\right).$$

(3) [Mir13，推论 3。7] 对于任意固定的 b，k，$r \ge 0$ 且 $0 \le C < 2\ln 2$，

$$\sum_{\substack{g_1+g_2=g+1-k \\ r+1\le g_1\le g_2}} e^{Cg_1} \cdot g_1^b \cdot V_{g_1,k} V_{g_2,k} \asymp \frac{V_g}{g^{2r+k}}.$$

引理 4.3. [Mir13，引理 3。2] 对于任意 g，$n \ge 0$ 满足 $2g-2+n > 2$，

$$V_{g-1,n+4} \le V_{g,n+2}$$

and

$$b_0 \le \frac{4\pi^2(2g-2+n)V_{g,n}}{V_{g,n+1}} \le b_1$$

其中 $b_0 = \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^4}{30}$ 和 $b_1 =$ 双曲余弦 $\pi -$ 双曲正弦 π。

以下渐近式性质由 Mirzakhani-Zograf 给出。

定理 4.4。 [MZ15，定理 1。2] 存在一个通用常数 $C \in (0,\infty)$ 使得对于任意 $n = n(g) = o(\sqrt{g})$，当 $g \to \infty$，

$$V_{g,n} = C\frac{(2g-3+n)!(4\pi^2)^{2g-3+n}}{\sqrt{g}}\left(1+O\left(\frac{1+n^2}{g}\right)\right).$$

这里的隐含常数与 n 和 g 无关。

注。 根据数值数据，Zograf 提出了一个猜想，认为 $C = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ 在 [Zog08]。—

推论 4.5。 若 $n = n(g) = o(\sqrt{g})$，则

$$V_{g,n} = V_{g-1,n+2}\left(1+O\left(\frac{1+n^2}{g}\right)\right)$$

and

$$(2g-2+n)V_{g,n} = V_{g,n+1}\left(1+O\left(\frac{1+n^2}{g}\right)\right).$$

引理4.3 和定理4.4 直接推出以下推论：

推论 4.6。对于任意 $2g+n \geq 1$。

$$V_{g,n+2} \prec V_{g+1,n}.$$

以下估计见 [NWX23]。类似的版本见 [MP19] 。

引理 4.7。 [NWX23，引理 22] 存在一个常数 $c(n) > 0$，它与 g、x_1、$\cdots$ 无关，x_n 但与 n 有关，使得

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2}\left(1-c(n)\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{g}\right) \leq \frac{V_{g,n}(x_1,\cdots,x_n)}{V_{g,n}} \leq \prod_{i=1}^{n}\frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2}.$$

这些渐近性质被应用于 $\frac{3}{16}-\epsilon$ 随机闭双曲曲面谱隙的证明中 $X \in \mathcal{M}_g$，见 [WX22a]。将谱隙从 $\frac{3}{16}-\epsilon$ 提升到更高的谱隙时，上述余项不够精确。Mizakhani-Zograf [MZ15] 提出了一种算法，可以给出更精确的渐近展开，其余项相对于 $\frac{1}{g}$ 为 $g \to \infty$，当 n 为有限值时。实际上，本文其余部分中关于魏尔-彼得森体积的所有精确渐近结果，都可以由他们的算法推导得到。我们只列出带有误差项的形式$O(\frac{1}{g^2})$。

—

定理 4.8。 [MZ15] 对于任意固定的 $n \geq 0$:

$$\frac{V_{g,n+1}}{8\pi^2 g V_{g,n}} = 1+\left((\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi^2})n-\frac{5}{4}+\frac{2}{\pi^2}\right)\cdot\frac{1}{g}+O_n\left(\frac{1}{g^2}\right),$$

$$\frac{V_{g-1,n+2}}{V_{g,n}} = 1+\frac{3-2n}{\pi^2}\cdot\frac{1}{g}+O_n\left(\frac{1}{g^2}\right).$$

这里的隐含常数与 n 有关，并且在 g 上是一致的。

以下关于 V_g 的渐近式n（x_1，$\cdots$，x_n）由 [MZ15] 计算，并在 [AM22] 中重新计算。

定理 4.9。对于任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n_{\geq 0}$，当 $g\to\infty$ 时，

$$\frac{V_{g,n}(\boldsymbol{x})}{V_{g,n}}=\prod_{i=1}^{n}\frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2}+\frac{f_n^1(\boldsymbol{x})}{g}$$
$$+O_n\left(\frac{1+(x_1^2+\cdots+x_n^2)^2}{g^2}\exp\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{2}\right)\right),$$

其中

$$f_n^1(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\pi^2}\sum_{i=1}^{n}\left[\cosh(x_i/2)+1-(\frac{x_i^2}{16}+2)\frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2}\right]\prod_{k\neq i}\frac{\sinh(x_k/2)}{x_k/2}$$
$$-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\left[\cosh(x_i/2)\cosh(x_j/2)+1-2\frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2}\frac{\sinh(x_j/2)}{x_j/2}\right]$$
$$\cdot\prod_{k\neq i,j}\frac{\sinh(x_k/2)}{x_k/2}.$$

此处的隐含常数与 n 有关，且在 $g,x_1,\cdots,x_n.$ 上一致

在本文中，我们将引理 4.7、定理4.8和定理 4.9 推广到 $n=o(\sqrt{g})$。也就是说，我们将在以下结果中考察相关误差项如何依赖于 n 。

引理 4.10。对于 $n=n(g)=o(\sqrt{g})$，存在一个一致常数 $c>0$，使得

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2}\left(1-cn\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{g}\right)\leq\frac{V_{g,n}(x_1,\cdots,x_n)}{V_{g,n}}\leq\prod_{i=1}^{n}\frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2}.$$

定理 4.11。对于 $n=n(g)=o(\sqrt{g})$:

$$\frac{V_{g,n+1}}{8\pi^2gV_{g,n}}=1+\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi^2}\right)n-\frac{5}{4}+\frac{2}{\pi^2}\right)\cdot\frac{1}{g}+O\left(\frac{1+n^2}{g^2}\right),\tag{4.1}$$

$$\frac{V_{g-1,n+2}}{V_{g,n}}=1+\frac{3-2n}{\pi^2}\cdot\frac{1}{g}+O\left(\frac{1+n^2}{g^2}\right).\tag{4.2}$$

此处的隐含常数与 n 和 g 无关。

定理 4.12。对于任意固定整数 $k\geq 1$，若 $n=n(g)=o(\sqrt{g})$ 且$\overline{n}\geq k$，则对于任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_k,\cdots,0^{n-k})\in\mathbb{R}^n_{\geq 0}$，当 $g\to\infty$ 时，

$$\frac{V_{g,n}(\boldsymbol{x})}{V_{g,n}}=\prod_{i=1}^{n}\frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2}+\frac{f_n^1(\boldsymbol{x})}{g}$$
$$+O_k\left(\frac{n^3(1+x_1+\cdots+x_k)^4}{g^2}\exp\left(\frac{x_1+\cdots+x_k}{2}\right)\right),$$

其中 $f_n^1(\boldsymbol{x})$ 见定理 4.9 ，且此处的隐含常数与 n、g、x_1、$\cdots$、x_n无关

引理 4.7、定理 4.11和定理 4.12 的证明与 n固定时的证明类似。因此，我们将它们的证明留在附录 B 中。

5. Pre-trace inequality

本节将介绍如何将预迹不等式转化为定理5.3。

测试函数族 $\{f_T\}$ 构造于 [MNP22]，并被 [WX22a]采用。对于带尖点双曲曲面，在命题5.1 中为 f_T 添加一个额外条件 (4) 会很方便。

命题 5.1。 [Hid23，命题 2。4] 存在一个 $f_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$使得

(1) 支撑$(f_1) = [-1,1]$。*(2)* $f_1 \geq 0$ 非负且为偶函数。$\hat{}$ *(3)* 傅里叶变换 f_1 在 $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$上非负。*(4)* f_1 在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$上单调不增。

对于 $T \geq 1$，定义

$$f_T(x) = f_1\left(\frac{x}{T}\right). \tag{5.1}$$

则 f_T在 $\mathbb{R}$ 上非负、为偶函数、光滑，且支撑在 $[-T,T]$ 上。并且 $\hat{}$ 傅里叶变换 f_T在 $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ 上非负。下面的引理 $\hat{}$ 给出 f_T 在 $i\mathbb{R}$ 上的下界。

引理 5.2. [MNP22，引理 2。4] 对于任意 $\epsilon > 0$，存在常数C_ϵ 使得对所有 $t \geq 0$ 与 $T > 1$，

$$\hat{f}_T(it) \geq C_\epsilon T e^{T(1-\epsilon)t}.$$

在本节中，我们将证明以下不等式。

定理 5.3. 设 $g \geq 2$ 与 f_T 如上所述，对应于 $T \prec$ 对数函数 g。固定 $\epsilon_0 > 0$。对于任意 $\epsilon > 0$，存在常数 $C(\epsilon) > 0$，使得对任意非紧有限面积曲面 X（类型为 $X_{g,n}$），且满足 $n = o(g^{\frac{1}{2}})$ 与$\lambda_1(X) \leq \frac{1}{4} - \epsilon_0$，

$$\begin{aligned} &C(\epsilon) T e^{T(1-\epsilon)\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda_1(X)}} \\ &\leq \sum_{\gamma \in \mathcal{P}(X)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\left(\frac{k\ell_\gamma(X)}{2}\right)} f_T(k\ell_\gamma(X)) - \hat{f}_T\left(\frac{i}{2}\right) + O\left(\frac{g}{T}\right). \end{aligned} \tag{5.2}$$

注。我们将把 $T = 6(1-\alpha)$ 对数函数 g代入定理 5.3，以证明定理 1.2。定理 5.3 是针对具有余项 $O(ng)$ 的 $T = 4$对数函数 g 在 [Hid23] 中证明的。这里我们沿用他的证明，并将结果修改为上述定理。事实上，若对非紧有限面积双曲曲面应用塞尔伯格迹公式（例如参见 [Iwa02，定理 10.2]），并详细分析 X 的散射矩阵，我们便可建立带有误差项 $O(Tg)$ 的式 (5.2)，而无需 $\lambda_1(X) < \frac{1}{4} - \epsilon_0$。

令 k_T 为 f_T 的逆阿贝尔变换:

$$k_T(\rho) = \frac{-1}{\sqrt{2}\pi} \int_\rho^\infty \frac{f_T'(u)}{\sqrt{\cosh u - \cosh \rho}} du. \tag{5.3}$$

于是， k_T 非负。阿贝尔变换给出

$$f_T(u) = \sqrt{2} \int_{|u|}^\infty \frac{k_T(\rho) \sinh \rho}{\sqrt{\cosh \rho - \cosh u}} d\rho. \tag{5.4}$$

对于 z， $w \in \mathbb{H}$，令 $k_T(z, w) = k_T(d(z, w))$。对于双曲平面 $X = \Gamma_X \backslash \mathbb{H}$ 上关于特征值 λ_j 的拉普拉斯算子的归一化特征函数u_j，令

$$r_j(x) = \begin{cases} i\sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_j} & if\ 0 \le \lambda_j \le \frac{1}{4}; \\ \sqrt{\lambda_j - \frac{1}{4}} & if\ x > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

于是我们得到以下预迹不等式。

命题5.4。 [Gam02，命题5。2] 对所有 $T > 0$ 和 $z \in \mathbb{H}$,

$$\sum_{j:\lambda_j < \frac{1}{4}} \hat{f}_T(r_j) u_j^2(z) \le \sum_{\gamma \in \Gamma_X} k_T(z, \gamma z). \tag{5.5}$$

对于 $L > 2$，每个尖点区域 $C_i(L)$，其中 $\ell(C_i(L)) = \frac{1}{L}$属于 X，当 $i = 1$ 时， $\cdots$， n两两不相交，参见例如 [Bus10，引理4.4。6]。令

$$X(L) = X \setminus \cup_{i=1}^n C_i(L).$$

下面的引理表明， $||u||_{L^2}$ 不会集中在 $C_i(L)$ 上，只要u 是定义在 X 上的拉普拉斯特征函数，且其特征值为 $0 < \lambda < \frac{1}{4} - \epsilon_0$。例如，可参见 [Gam02，引理 4。1], [BM01，引理 4， 1] 或 [Mon15，引理 31]。

引理 5.5。 若 u 是定义在 X 上的拉普拉斯特征函数，其特征值为 $0 < \lambda < \frac{1}{4} - \epsilon_0$，则存在一个常数 $c_{\epsilon_0} > 1$，它仅取决于ϵ_0，使得

$$\frac{\int_{C_i(\frac{L}{2})} u^2(z) dz}{\int_{C_i(L)} u^2(z) dz} \ge c_{\epsilon_0}$$

对任意 $L > 2$ 和 i均成立。

定理 *5.3* 的证明。 设 $\lambda_1(X) \le \frac{1}{4} - \epsilon_0$。令 $\mathcal{F} \subset \mathbb{H}$ 为 X 相对于 Γ_X的基本区域。令 $\mathcal{C}_i(L)$ 为 $\mathcal{F}$ 中投影到 $C_i(L)$ 的子集，并且

$$\mathcal{F}(L) = \mathcal{F} \setminus \cup_{i=1}^n \mathcal{C}_i(L).$$

我们对 5.5 中的不等式进行积分，其中 $\mathcal{F}(L)$。容易计算得

$$\text{Area}\left(C_i(L)\right) = \text{Area}\left(\mathcal{C}_i(L)\right) = \frac{1}{L}.$$

由于 u_0 是一个常值函数，我们有

$$\begin{aligned}&\hat{f}_T(r_0(X))\int_{\mathcal{F}(L)}u_0^2(z)dz\\=&\hat{f}_T\left(\frac{i}{2}\right)\frac{\mathrm{Area}(\mathcal{F}(L))}{\mathrm{Area}(\mathcal{F})}=\hat{f}_T\left(\frac{i}{2}\right)\left(1+O\left(\frac{n}{gL}\right)\right).\end{aligned}\tag{5.6}$$

对于 u_1，由引理5.2 和引理5.5，存在一个常数 $C(\epsilon)$，使得

$$\hat{f}_T(r_1(X))\int_{\mathcal{F}(L)}u_1^2(z)dz\geq C(\epsilon)Te^{(1-\epsilon)\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda_1(X)}}.\tag{5.7}$$

我们可以将 Γ_X 分开如下

$$\Gamma_X=\{\mathrm{id}\}\cup\{\gamma\in\Gamma_X;|\mathrm{tr}\gamma|>2\}\cup\{\gamma\in\Gamma_X;\gamma\neq\mathrm{id},|\mathrm{tr}\gamma|=2\}.$$

关于阿贝尔变换的计算，参见 [Bus10，定理 9.5。3]例如，可推出

$$k_T(0)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r\hat{f}_T(r)\tanh(\pi r)dr.$$

由 [WX22a，命题 23]可得

$$\int_{\mathcal{F}(L)}k_T(z,z)dz=\frac{\mathrm{Area}(\mathcal{F}(L))}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r\hat{f}_T(r)\tanh(\pi r)dr=O\left(\frac{g}{T}\right).\tag{5.8}$$

对于双曲项，由于 k_T 非负，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{\{\gamma\in\Gamma_X;|\mathrm{tr}\gamma|>2\}}\int_{\mathcal{F}(L)}k_T(z,\gamma z)dz\\\leq&\sum_{\{\gamma\in\Gamma_X;|\mathrm{tr}\gamma|>2\}}\int_{\mathcal{F}}k_T(z,\gamma z)dz\\=&\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(X)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\left(\frac{k\ell_\gamma(X)}{2}\right)}f_T(k\ell_\gamma(X)).\end{aligned}\tag{5.9}$$

上述等式可参见 例如 [Iwa02，第 10 节。2]。

对于抛物项，任何满足 $|\mathrm{tr}\gamma|=2$ 的 $\gamma\in\Gamma_X\setminus\{\mathrm{id}\}$ 都必须与 $\gamma=\gamma_j^m$ 共轭，且 $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$，而 γ_j 是 Γ_X 中固定端点 $\mathcal{C}_j$（L）的两个素元之一 $\cap\partial\mathbb{H}$。存在 $\sigma_j\in\mathrm{SL}_2$（$\mathbb{R}$），使得

$$\sigma_j^{-1}\gamma_j\sigma_j=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

注意，γ_j 在 Γ_X 中的中心化子是由γ_j生成的自由群 $\langle\gamma_j\rangle$。由于 k_T 和 $d\mu$ 在 SL_2 ($\mathbb{R}$) 的作用下保持不变，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{\{\gamma\in\Gamma_X\setminus\{\mathrm{id}\};|\mathrm{tr}\gamma|=2\}}\int_{\mathcal{F}(L)}k_T(z,\gamma z)dz\\=&\sum_{j=1}^{n}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\sum_{\tau\in\langle\gamma_j\rangle\setminus\Gamma}\int_{\mathcal{F}(L)}k_T(z,\tau^{-1}\gamma_j^m\tau z)d\mu(z)\end{aligned}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\int_{\cup_{\tau\in\langle\gamma_j\rangle\setminus\Gamma}\tau\mathcal{F}(L)}k_T(z,\gamma_j^m z)d\mu(z).$$

$\langle\gamma_j\rangle$ 在 $\cup_{\gamma\in\Gamma}\gamma\mathcal{F}(L)$上的作用有一个基本区域 $\mathcal{F}_j$，使得

$$\mathcal{F}_j\subset\sigma_j\{z=x+iy\in\mathbb{H}\ 0<x\leq 1,0<y\leq L\}.$$

由于 k_T 非负，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{\{\gamma\in\Gamma_X\setminus\{\mathrm{id}\};|\mathrm{tr}\gamma|=2\}}\int_{\mathcal{F}(L)}k_T(z,\gamma z)d\mu(z)\\=&\sum_{j=1}^{n}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\int_{\mathcal{F}_j}k_T(z,\gamma_j^m z)d\mu(z)\\=&\sum_{j=1}^{n}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\int_{\sigma^{-1}\mathcal{F}_j}k_T(z,\sigma^{-1}\gamma_j^m\sigma z)d\mu(z)\\\leq&n\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{L}k_T(z,z+m)\frac{1}{y^2}dxdy.\end{aligned}$$

由于 $d(z,\ z+m)=\operatorname{arccosh}\left(1+\frac{m^2}{2y^2}\right)$ 对于 $z=x+iy$ 且 **支撑**$(k_T)\subset[0,T]$，通过使用变量替换 $t=\overline{\operatorname{arccosh}\left(1+\frac{m^2}{2y^2}\right)}$，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{\{\gamma\in\Gamma_X\setminus\{\mathrm{id}\};|\mathrm{tr}\gamma|=2\}}\int_{\mathcal{F}(L)}k_T(z,\gamma z)d\mu(z)\\\leq&n\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\int_0^L k_T\left(\operatorname{arccosh}\left(1+\frac{m^2}{2y^2}\right)\right)\frac{1}{y^2}dy\\=&n\sum_{m\in\mathbb{N}^*}\frac{\sqrt{2}}{m}\int_{\min\{\operatorname{arccosh}\left(1+\frac{m^2}{2L^2}\right),T\}}^{T}\frac{k_T(t)\sinh t}{\sqrt{\cosh t-1}}dt\\\leq&n\sum_{m=1}^{\left[\sqrt{L^2e^T}\right]}\frac{\sqrt{2}}{m}\int_0^\infty\frac{k_T(t)\sinh t}{\sqrt{\cosh t-1}}dt\\\prec&n\log\left(Le^{\frac{T}{2}}\right)f_T(0)\\=&n\log\left(Le^{\frac{T}{2}}\right)f_1(0).\end{aligned}\tag{5.10}$$

在最后一个不等式中，我们使用阿贝尔变换（5.4）。因此，若将不等式（5.5）在 $\mathcal{F}(L$ 上积分，根据估计（5.6）、（5.7）、（5.8）、（5.9）和（5.10），可得

$$\begin{aligned}&C(\epsilon)Te^{T(1-\epsilon)\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda_1(X)}}+\hat{f}_T(\frac{i}{2})\left(1+O\left(\frac{n}{gL}\right)\right)\\\leq&\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(X)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\left(\frac{k\ell_\gamma(X)}{2}\right)}f_T(k\ell_\gamma(X))\end{aligned}$$

$$+O\left(n\log\left(Le^{\frac{T}{2}}\right)f_1(0)\right)+O\left(\frac{g}{T}\right).$$

若 $T\le c$对数函数 g，则有 $\hat{f}_T(\frac{i}{2})=\int_0^\infty 2$双曲余弦 $\frac{x}{2}f_T(x)dx=O\left(g^{\frac{c}{2}}\right)$。我们可以取$L=g^{\frac{c}{2}}$ 以得到（5.2）。□

6. Remainder estimate

我们按照以下方式对 $\mathcal{P}(X)$ 中有向素测地线进行分类:

$$\mathcal{P}(X)=\mathcal{P}^s_{sep}(X)\cup\mathcal{P}^s_{nsep}(X)\cup\mathcal{P}^{ns}(X),$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^s_{sep}(X)&=\{\gamma\in\mathcal{P}(X);\gamma\ is\ simple\ and\ separating\};\\ \mathcal{P}^s_{nsep}(X)&=\{\gamma\in\mathcal{P}(X);\gamma\ is\ simple\ and\ non\text{-}separating\};\\ \mathcal{P}^{ns}(X)&=\{\gamma\in\mathcal{P}(X);\gamma\ is\ non\text{-}simple\}.\end{aligned}$$

定义

$$H_{X,k}(\gamma)=\frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\left(\frac{k\ell_\gamma(X)}{2}\right)}f_T(k\ell_\gamma(X))$$

and

$$\overline{H}_{X,k}(t)=\frac{t}{2\sinh\left(\frac{kt}{2}\right)}f_T(kt).$$

那么$H_{X,\ k}(\gamma)=\overline{H_{X,\ k}}(\ell_\gamma(X))$ 并且我们可以将式 (5.2) 的右侧分离出来，得到

$$\begin{aligned}&C(\epsilon)Te^{T(1-\epsilon)\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda_1(X)}}\cdot\mathbf{1}_{\lambda_1(X)\le\frac{1}{4}-\epsilon_0}\\ &\le\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(X)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\left(\frac{k\ell_\gamma(X)}{2}\right)}f_T(k\ell_\gamma(X))-\hat{f}_T(\frac{i}{2})+O\left(\frac{g}{T}\right)\\ &=\underbrace{\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(X)}\sum_{k=2}^{\infty}H_{X,k}(\gamma)}_{(I)}+\underbrace{\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{sep}(X)}H_{X,1}(\gamma)}_{(II)}\\ &+\underbrace{\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)}H_{X,1}(\gamma)-\hat{f}_T(\frac{i}{2})}_{(III)}+\underbrace{\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^{ns}(X)}H_{X,1}(\gamma)}_{(IV)}+O\left(\frac{g}{T}\right).\end{aligned}\tag{6.1}$$

项 (I) 的期望值已在 [WX22a]中估计。

引理 6.1。 [WX22a，命题 24] 对于 $n=o\left(g^{\frac{1}{2}}\right)$，

$$\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(X)}\sum_{k=2}^{\infty}H_{X,k}(\gamma)\right]=O\left(T^2g\right).$$

我们需要比II中的处理更精确地估计[WX22a] 以及带尖点曲面版本中的期望值。

引理 6.2. 对于 $n = o(g^{\frac{1}{2}})$ 以及- $T = a$ 对数函数 g,

$$\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{sep}^{s}(X)} H_{X,1}(\gamma)\right] = O_a\left(\log^{3a+4} g\right),$$

其中隐含常数仅依赖于 a。

证明。双曲平面 γ 上的一条简单分离闭测地线会将 $X \simeq S_{g,n}$ 切分为 $S_{g,n}$,$S_{g_1,n_1+1}\cup S_{g_2,n_2+1}$，其中 $g_1+g_2 = g, n_1+n_2 = n$ 且 $2g_1+n_1 \geq 2, 2g_2+n_2 \geq 2$。映射类群轨道 Mod $\cdot\gamma$ 由尖点的 n 个标记划分为 $I \cup J = \{1, \cdots, n\}$，且 $|I| = n_1, |J| = n_2$ 所确定。对于固定的 g_i, n_i，这样的划分有 $\binom{n}{n_1}$ 种。现在我们应用 Mirzakhani 积分公式，即定理 2.2，得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{sep}^{s}(X)} H_{X,1}(\gamma)\right] = \frac{1}{V_{g,n}}\int_{\mathcal{M}_{g,n}}\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{sep}^{s}(X)} H_{X,1}(\gamma)dX \\
\leq &\sum_{\substack{g_1+g_2=g, n_1+n_2=n \\ 2\leq 2g_1+n_1\leq 2g_2+n_2}} \binom{n}{n_1}\int_0^\infty \frac{V_{g_1,n_1+1}(x,0^{n_1})V_{g_2,n_2+1}(x,0^{n_2})}{V_{g,n}} \\
&\cdot\frac{x^2}{\sinh\frac{x}{2}} f_T(x)dx.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

对于 $2 \leq k < \frac{1}{2}(2g+n)$，我们将求和中的指标分为两部分:

$$\begin{aligned}
&\{(g_1,g_2,n_1,n_2); g_1+g_2 = g, n_1+n_2 = n, 2 \leq 2g_1+n_1 \leq 2g_2+n_2\} \\
=&\{(g_1,g_2,n_1,n_2); g_1+g_2 = g, n_1+n_2 = n, k+1 \leq 2g_1+n_1 \leq 2g_2+n_2\} \\
\cup&\{(g_1,g_2,n_1,n_2); g_1+g_2 = g, n_1+n_2 = n, 2 \leq 2g_1+n_1 \leq k\}.
\end{aligned}$$

对于指标第一部分上的求和，我们有

$$V_{g_i,n_i+1}(x,0^{n_i}) \leq V_{g_i,n_i+1}\frac{2\sinh\frac{x}{2}}{x}$$

由引理4.10，且

$$\frac{4}{V_{g,n}}\left(\sum_{\substack{g_1+g_2=g, n_1+n_2=n \\ k+1\leq 2g_1+n_1\leq 2g_2+n_2}} \binom{n}{n_1} V_{g_1,n_1+1}V_{g_2,n_2+1}\right) = O\left(\frac{1+n^{k+1}}{g^k}\right)$$

由引理 B.14。由此可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{g_1+g_2=g,n_1+n_2=n\\ k+1\le 2g_1+n_1\le 2g_2+n_2}} \binom{n}{n_1}\int_0^\infty \frac{V_{g_1,n_1+1}(x,0^{n_1})V_{g_2,n_2+1}(x,0^{n_2})}{V_{g,n}}\\
&\cdot\frac{x^2}{\sinh\frac{x}{2}}f_T(x)dx\\
\le&\frac{4}{V_{g,n}}\sum_{\substack{g_1+g_2=g,n_1+n_2=n\\ k+1\le 2g_1+n_1\le 2g_2+n_2}}\binom{n}{n_1}V_{g_1,n_1+1}V_{g_2,n_2+1}\int_0^\infty \sinh\frac{x}{2}f_T(x)dx\\
\prec&\frac{(1+n^{k+1})e^{\frac{T}{2}}}{g^k}.
\end{aligned}\tag{6.3}$$

在最后一个不等式中，我们用到了支撑$(f_T)=[-T,T]$.这一事实

对指标第二部分求和时，存在有限多个（g_1，g_2，n_1，n_2），满足$2\le 2g_1+n_1\le k$。定理 4.1 意味着

$$V_{g_1,n_1+1}(x,0^{n_1})\prec 1+x^{6g_1+2n_1-4}\prec 1+x^{3k-4},$$

并且引理 4.10意味着

$$V_{g_2,n_2+1}(x,0^{n_2})\le V_{g_2,n_2+1}\frac{2\sinh\frac{x}{2}}{x}.$$

根据引理B.14，我们有

$$\frac{1}{V_{g,n}}\left(\sum_{\substack{g_1+g_2=g,n_1+n_2=n\\ 2\le 2g_1+n_1\le k}}\binom{n}{n_1}V_{g_1,n_1+1}V_{g_2,n_2+1}\right)=O\left(\frac{1+n^2}{g}\right),$$

给出

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{g_1+g_2=g,n_1+n_2=n\\ 2\le 2g_1+n_1\le k}} \binom{n}{n_1}\int_0^\infty \frac{V_{g_1,n_1+1}(x,0^{n_1})V_{g_2,n_2+1}(x,0^{n_2})}{V_{g,n}}\\
&\cdot\frac{x^2}{\sinh\frac{x}{2}}f_T(x)dx\\
\prec&\sum_{\substack{g_1+g_2=g,n_1+n_2=n\\ 2\le 2g_1+n_1\le k}}\binom{n}{n_1}\frac{V_{g_1,n_1+1}V_{g_2,n_2+1}}{V_{g,n}}\int_0^\infty f_T(x)x(1+x^{3k-4})dx\\
\prec&\frac{1+n^2}{g}T^{3k-2}.
\end{aligned}\tag{6.4}$$

对于 $T=a$对数函数 g，取 $k=[a+2]>a+1$。于是由 (6.2)、(6.3) 和 (6.4)，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{sep}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right]\\
\prec& g^{\frac{a}{2}+\frac{k+1}{2}-k}+\log^{3k-2}g
\end{aligned}$$

$$\prec \log^{3a+4} g,$$

至此，证明完成。 □

7. The expansion of the characteristic function

现在我们可以将 T视为 $6(1-\alpha)$ 对数函数 g。除非另有特别说明，以下估计均适用于一般的 $T = a$对数函数 g。

我们取

$$\mathcal{N}_\ell = \{X \in \mathcal{M}_{g,n}; \forall \ embedded \ subsurface \ Y \subset X, \chi(Y) = -1, \ell(\partial Y) \geq \ell\}$$

and

$$N_\ell(X) = \{embedded \, Y \subset X; \chi(Y) = -1, \ell(\partial Y) < \ell\}$$

对于 $\ell = \kappa$对数函数 g和 $0 < \kappa < 1 - 2\alpha$。注意，在第二个集合中， Y 应当是 X 的一个带测地边界的嵌入子曲面， X 因此应避免$Y \simeq S_{0,\ 3}$ 是一个有一对重叠边界测地线的裤子曲面这种情形。子集 $\mathcal{N}_\ell \subset \mathcal{M}_{g,\ n}$ 可以写成如下形式。这个想法曾明确出现在 [Mir13]中。

引理 7.1. 对于任意 $\ell > 0$,

$$1_{X \in \mathcal{N}_\ell} = 1_{\#N_\ell = 0}(X) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\#N_\ell)_k(X)$$

其中 $(\#N_\ell)_k :=^{1}_{k!} \#N_\ell(\#N_\ell - 1) \cdots (\#N_\ell - k + 1)$。此外，对于任意 $j \geq 0$,

$$1_{X \in \mathcal{N}_\ell} = 1_{\#N_\ell = 0}(X) = 1 + \sum_{k=1}^{j} (-1)^k (\#N_\ell)_k(X) + O_j\Big((\#N_\ell)_{j+1}(X)\Big).$$

证明。 如果 $X \in \mathcal{N}_\ell$，那么 $\#N_\ell(X) = 0$。如果 $\#N_\ell(X) = 0$，那么对于 X 的任意子曲面 Y，若满足 $\chi(Y) = -1$，则有 $\ell(\partial Y) \geq \ell(\partial Y) \geq \ell$，这意味着$X \in \mathcal{N}_\ell$。因此 $1_{X \in \mathcal{N}_\ell} = 1_{\#N_\ell = 0}(X)$。

如果 $\#N_\ell(X) = 0$，那么

$$1_{X \in \mathcal{N}_\ell} = 1_{\#N_\ell = 0}(X) = 1$$

and

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\#N_\ell)_k(X) = 1.$$

若 $\#N_\ell(X) = k_0 > 0$，则

$$1_{X \in \mathcal{N}_\ell} = 1_{\#N_\ell = 0}(X) = 0$$

and

$$\begin{aligned} &1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\#N_\ell)_k(X) \\ =&1 + \sum_{k=1}^{k_0} (-1)^k \binom{k_0}{k} \\ =&(1-1)^{k_0} = 0. \end{aligned}$$

因此，第一个等式始终成立。对于第二个等式，若 $\#N_\ell(X) = k_0 \le j$，则

$$1_{X\in\mathcal{N}_\ell} = 1_{\#N_\ell=0}(X) = 1 + \sum_{k=1}^{j}(-1)^k(\#N_\ell)_k(X)$$

and

$$(\#N_\ell)_{j+1}(X) = 0.$$

如果 $\#N_\ell(X) = k_0 > j$，那么

$$\begin{aligned}
&\left|1_{X\in\mathcal{N}_\ell} - \left(1 + \sum_{k=1}^{j}(-1)^k(\#N_\ell)_k(X)\right)\right| \\
\le&\left|1 + \sum_{k=1}^{j}\frac{k_0(k_0-1)\cdots(k_0-k+1)}{k!}\right| \\
\le&\frac{k_0(k_0-1)\cdots(k_0-j+1)(k_0-j)}{(j+1)!} \\
&\cdot\sum_{k=0}^{j}\frac{(j+1)j\cdots(k+1)}{(j+1-j)(j+1-j+1)\cdots(j+1-k)} \\
=&O_j\left(\frac{k_0(k_0-1)\cdots(k_0-j+1)(k_0-j)}{(j+1)!}\right),
\end{aligned}$$

其中隐含常数仅依赖于 j。 □

现在对6.1）在 $\mathcal{N}_\ell$ 上进行积分，其中 $\ell = \kappa$对数函数 g 满足 $\kappa < 2 - 4\alpha$。然后由引理6.1 和引理6.2 可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[C(\epsilon)Te^{T(1-\epsilon)\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda_1(X)}}\cdot\mathbf{1}_{X\in\mathcal{N}_\ell}\cdot\mathbf{1}_{\lambda_1(X)\le\frac{1}{4}-\epsilon_0}\right] \\
\le&\underbrace{\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[1_{\mathcal{N}_\ell}\cdot\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right]}_{\mathrm{Int}_{nsep}} - \underbrace{\mathrm{Prob}_{\mathrm{WP}}^{g,n}(\mathcal{N}_\ell)\,\hat{f}_T(\frac{i}{2})}_{\mathrm{Int}_{\lambda_0}} \\
&+\underbrace{\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[1_{\mathcal{N}_\ell}\cdot\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^{ns}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right]}_{\mathrm{Int}_{ns}} + O\left(\frac{g}{T} + g\log^2 g + \log^{3a+4} g\right).
\end{aligned} \tag{7.1}$$

注。 这里我们使用$H_{X、k}$ 或 f_T的非负性。我们希望证明（7.1）的右边属于 $O\left(g^{1+\delta}\right)$，当 $T = 6\ (1-\alpha)$ 对数函数 g 且κ 对任意 $\delta > 0$都很小。

8. First order cancellation between Int_{nsep} and Int_{λ_0}

由引理7.1，项 Int_{nsep} 与 Int_{λ_0} 可写为（8.1）

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[1_{\mathcal{N}_\ell}\cdot\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right]-\mathrm{Prob}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left(\mathcal{N}_\ell\right)\hat{f}_T(\frac{i}{2})\\
=&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right]-\hat{f}_T(\frac{i}{2})+\sum_{k=1}^{j}(-1)^k\\
&\cdot\left(\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[(\#N_\ell)_k\cdot\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right]-\hat{f}_T(\frac{i}{2})\cdot\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[(\#N_\ell)_k\right]\right)\\
&+O_j\left(\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[(\#N_\ell)_{j+1}\cdot\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right]+\hat{f}_T(\frac{i}{2})\cdot\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[(\#N_\ell)_{j+1}\right]\right)
\end{aligned}$$

对于$\forall j\geq 0$。

In this section, we compute $\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right]-\hat{f}_T(\frac{i}{2})$.

引理 8.1。对于 $n=n(g)=o(\sqrt{g})$，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right]-\hat{f}_T(\frac{i}{2})\\
=&\frac{1}{\pi^2 g}\int_0^T f_T(x)\left(\left(1-\frac{n}{2}\right)x-\frac{x^2}{4}\right)e^{\frac{x}{2}}dx\\
&+O\left(1+\frac{(1+n)T^2}{g}+\frac{(1+n^3)T^6e^{\frac{T}{2}}}{g^2}\right).
\end{aligned}$$

证明。 我们直接应用米尔扎哈尼积分公式定理 2.2 得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right]\\
=&2\cdot\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{x}{2\sinh\frac{x}{2}}f_T(x)\frac{V_{g-1,n+2}(x,x,0^n)}{V_{g,n}}xdx.
\end{aligned}\tag{8.2}$$

这里 $C_\Gamma = \frac{1}{2}$，因子 2 来自一条非分离简单闭测地线的两种定向。结合定理 4.11 和 4.12 我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{V_{g-1,n+2}(x,x,0^n)}{V_{g,n}} = \frac{V_{g-1,n+2}(x,x,0^n)}{V_{g-1,n+2}} \frac{V_{g-1,n+2}}{V_{g,n}} \\
&= \left[\left(\frac{\sinh \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 + \frac{f^1_{n+2}(x,x,0^n)}{g-1} + O(\frac{(1+n^3)(1+x^4)e^x}{g^2}) \right] \\
&\cdot \left[1 + \frac{3-2n}{\pi^2 g} + O\left(\frac{1+n^2}{g^2} \right) \right] \\
&= \left(\frac{\sinh \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 + \frac{1}{\pi^2 g} \left[-\cosh^2 \frac{x}{2} + (2-n) \frac{\sinh x + 2\sinh \frac{x}{2}}{x} \right] \\
&+ O\left(\frac{(1+n^3)(1+x^4)e^x}{g^2} \right),
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
f^1_{n+2}(x,x,0^n) =& \frac{1}{\pi^2} \left(-\cosh^2 \frac{x}{2} + \frac{2\sinh x + 4\sinh \frac{x}{2}}{x} - \frac{12\sinh^2 \frac{x}{2}}{x^2} \right) \\
&- \frac{n}{\pi^2} \left(\frac{\sinh x + 2\sinh \frac{x}{2}}{x} - \frac{8\sinh^2 \frac{x}{2}}{x^2} \right).
\end{aligned}$$

将（8.3）代入（8.2）。由于 **支撑**（f_T） $= [-T, T]$ 且 $|f_T|$ 有界，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}} \left[\sum_{\gamma \in \mathcal{P}^s_{nsep}(X)} H_{X,1}(\gamma) \right] \\
&= \int_0^T 2\sinh \frac{x}{2} f_T(x) dx \\
&+ \frac{1}{\pi^2 g} \int_0^T f_T(x) \left(-\frac{x^2 \cosh^2 \frac{x}{2}}{2\sinh \frac{x}{2}} + (2-n)(x\cosh \frac{x}{2} + x) \right) dx \\
&+ O\left(\frac{(1+n^3)T^6 e^{\frac{T}{2}}}{g^2} \right) \\
&= \int_0^T e^{\frac{x}{2}} f_T(x) dx + \frac{1}{\pi^2 g} \int_0^T f_T(x) \left(\left(1 - \frac{n}{2}\right) x - \frac{x^2}{4} \right) e^{\frac{x}{2}} dx \\
&+ O\left(1 + \frac{(1+n)T^2}{g} + \frac{(1+n^3)T^6 e^{\frac{T}{2}}}{g^2} \right).
\end{aligned} \tag{8.3}$$

由于 $f_T(x)$ 是偶函数，我们得到

$$\hat{f}_T(\frac{i}{2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{x}{2}} f_T(x) dx = \int_0^{\infty} 2\cosh \frac{x}{2} f_T(x) dx. \tag{8.4}$$

该引理可由（8.3）和（8.4）推出。 □

我们发现， $\mathbb{E}^g$ 中的主项 $\int_0^\infty f_T(x)e^{\frac{x}{2}}dx$ 、 $_n\mathrm{WP}\left[\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)}H_X、\mathbf{1}(\gamma)\right]$ 以及 $\hat{}\, f_T(\frac{i}{2})$ 相互抵消。二阶项来源于按 $\frac{1}{g}$ 阶展开魏尔-彼得森体积。若为 $k\geq 1$，则对于 $\mathbb{E}^g$、$_n\mathrm{WP}\left[(\#N_\ell)^k\cdot\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)}H_X、\mathbf{1}(\gamma)\right]$ 以及 $\hat{}\, f_T(\frac{i}{2})\cdot\mathbb{E}^g$、$_n\mathrm{WP}\left[(\#N_\ell)_k\right]$，只需一阶主导项。我们在第 10 节中计算这些项。

9. Second order cancellation with Int_{ns}

本节中，我们将给出关于 $\mathbf{Int}_{ns}$ 的以下估计。

引理 9.1。若 $n=n(g)=o(\sqrt{g})$，则对于任意 $\delta>\frac{1}{2}$ 和 $\epsilon>0$，

$$\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[1_{N_\ell}\cdot\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^{ns}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right]\leq\frac{1}{\pi^2 g}\int_0^\infty f_T(t)e^{\frac{t}{2}}\left(\frac{t^2}{4}+\left(\frac{n}{2}-1\right)t\right)dt$$
$$+O\left((1+n^2)\frac{T^3e^{(\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{4})T}+T^3e^{(\delta-\frac{1}{4})T}}{g}+\frac{(1+n^3)T^{230}e^{(\frac{1}{2}+\epsilon)T}}{g^2}+\frac{T^6e^{\frac{9}{2}T}}{g^{27}}\right).$$

引理 9.1 是引理9.6、引理9.7、引理9.10、引理 9.13、引理 9.17以及引理 9.21的组合：我们将 $\gamma\in\mathcal{P}^{ns}(X)$ 分类如下，并估计每个子集中的 γ 对 $\mathbf{Int}_{ns}$ 的总贡献。我们通过以下方式分离 $\mathcal{P}^{ns}(X)$：

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{ns}(X)=&\{\gamma;\gamma\ fills\ Y\simeq S_{0,3},X\setminus Y\simeq S_{g-2,n+3}\}\\&\sqcup\{\gamma;\gamma\ fills\ Y\simeq S_{1,1},X\setminus Y\simeq S_{g-1,n+1}\}\\&\sqcup\{\gamma;\gamma\ fills\ Y\simeq S_{0,3},\overline{Y}\simeq S_{1,1},X\setminus Y\simeq S_{g-1,n+1}\}\\&\sqcup\{\gamma;\gamma\ fills\ Y\simeq S_{0,3},\overline{Y}\simeq S_{0,3},X\setminus Y\simeq S_{g,n-1}\}\\&\sqcup\{\gamma;\gamma\ fills\ Y\simeq S_{0,3},\overline{Y}\simeq S_{0,3},X\setminus Y\simeq S_{g-1,n+1}\}\\&\sqcup\{\gamma;\gamma\ fills\ Y,X\setminus Y\ is\ disconnected\ or\ |\chi(Y)|\geq 2\}.\end{aligned}\tag{9.1}$$

我们称非简单闭测地线属于类型 i，如果它属于（9.1）右侧的第 i 个集合。不同类型的 γ 所填充的子曲面示意见图 6 。

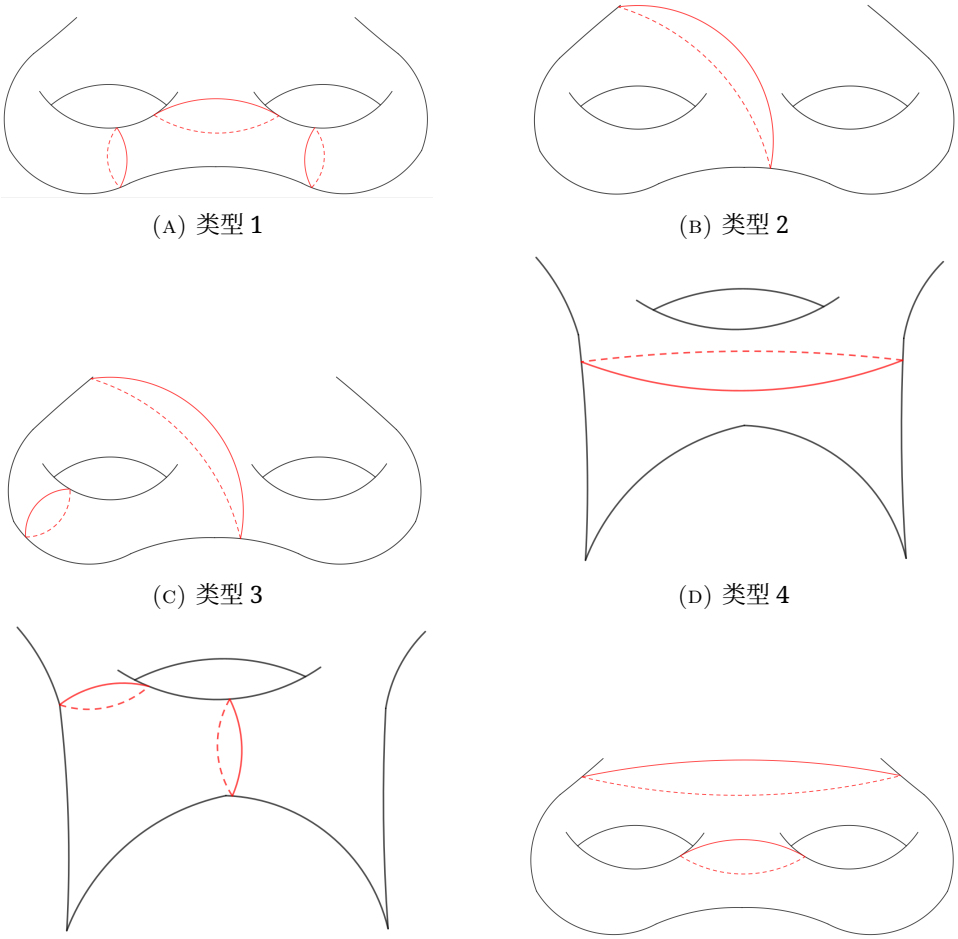
注。4 型的非简单测地线仅在 $n\geq 2$ 时存在，而 5 型的非简单测地线仅在 $n\geq 1$ 时存在。

我们计算属于各类型的非简单测地线对 Int_{ns} 的贡献。

9.1. Int_{ns} 中的类型 1。首先，我们计算 (7.1) 中 Int_{ns} 的类型 1 双重填充项。由于 $\mathrm{supp}(f_T)=[-T,T]$，我们只需考虑满足 $\ell_\gamma(X)\leq T$ 的 γ。若 γ 在 X 中双重填充 Y，则有 $\ell(\partial Y)\leq\ell_\gamma(X)\leq T$。

引理 9.2. 若 $n=n(g)=o(\sqrt{g})$，则对任意 $\delta>\frac{1}{2}$ 与 $\epsilon>0$，

$$\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[1_{\mathcal{N}_\ell}\sum_{\substack{\gamma\ double\text{-}fills\ of\ type\ 1\\ \ell_\gamma(X)\leq T}}H_{X,1}(\gamma)\right]\prec\frac{T^3e^{(\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{4})T}+T^2e^{(\delta-\frac{1}{4})T}}{g},$$



(A) 类型 1 (B) 类型 2

(C) 类型 3 (D) 类型 4

(E) 类型 5 (F) 类型 6

FIGURE 6. 由不同类型的 γ填充的子曲面

其中隐含常数依赖于 ϵ、δ，且与 T、g 无关。

证明。 由定理 3.4，若 $Y \simeq S_{0,\ 3}$ 且 $X \setminus Y \simeq S_{g-2,\ n+3}$，则对于任意 $\epsilon > 0$，有

$$
\begin{aligned}
&1_{\mathcal{N}_\ell} \sum_{\substack{\gamma \text{ double-fills } Y \\ \ell_\gamma(X)\in[k,k+1]}} \frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\frac{\ell_\gamma(X)}{2}} f_T(\ell_\gamma(X)) \\
\leq & C(1,\epsilon,1)e^{k+1-(1-\epsilon)\ell(\partial Y)} \frac{k+1}{2\sinh\frac{k}{2}} \mathbf{1}_{\ell(\partial Y)\leq k+1}.
\end{aligned} \tag{9.2}
$$

若 $X \in \mathcal{N}_\ell$ 对于 $\ell = \kappa$对数函数 g，对于任意 $Y \simeq S_{0,\ 3}$ 满足 $X \setminus Y \simeq S_{g-2,\ n+3}$的情形，我们有$\ell(\partial Y) \geq \ell \geq 3l_\delta$，对于任意 $\delta > \frac{1}{2}$，当 g 足够大时成立，其中 l_δ 满足： Γ 的极限集的豪多斯夫维数满足 $\Gamma\backslash\mathbb{H} \in \mathcal{T}_{0,\ 3}(l_\delta,\ 0,\ 0)$

是 δ。根据引理 3.11，我们有

$$\begin{aligned}&1_{\mathcal{N}_\ell}\sum_{\substack{\gamma\ \text{double-fills } Y\\ \ell_\gamma(X)\in[k,k+1]}}\frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\frac{\ell_\gamma(X)}{2}}f_T(\ell_\gamma(X))\\ \le& C_\delta\frac{e^{\delta(k+1)}}{k+1}\frac{k+1}{2\sinh\frac{k}{2}}\mathbf{1}_{\ell(\partial Y)\le k+1}.\end{aligned}\tag{9.3}$$

对于 $Y\simeq S_{0,\ 3}$ 满足 $X\setminus Y\simeq S_{g-2,\ n+3}$ 的情形，若 $\ell(\partial Y)\le\frac{T}{2}$，则有

$$\begin{aligned}&1_{\mathcal{N}_\ell}\sum_{\substack{\gamma\ \text{double-fills } Y\\ \ell_\gamma(X)\le T}}\frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\frac{\ell_\gamma(X)}{2}}f_T(\ell_\gamma(X))\\ \le&\sum_{k=\max\{1,[\ell(\partial Y)]\}}^{[2\ell(\partial Y)]}1_{\mathcal{N}_\ell}\sum_{\substack{\gamma\ \text{double-fills } Y\\ \ell_\gamma(X)\in[k,k+1]}}\frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\frac{\ell_\gamma(X)}{2}}f_T(\ell_\gamma(X))\\ &+\sum_{k=\max\{1,[2\ell(\partial Y)]\}}^{[T]}1_{\mathcal{N}_\ell}\sum_{\substack{\gamma\ \text{double-fills } Y\\ \ell_\gamma(X)\in[k,k+1]}}\frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\frac{\ell_\gamma(X)}{2}}f_T(\ell_\gamma(X)).\end{aligned}\tag{9.4}$$

注意到这里我们利用了 $\ell_\gamma(X)\ge 4$反双曲正弦$1>1$ 这一事实。将估计式 (9.2) 和 (9.3) 代入 (9.4)。对于 $Y\simeq S_{0,\ 3}$ 满足 $X\setminus Y\simeq S_{g-2,\ n+3}$ 且 $\ell(\partial Y)\le\frac{T}{2}$ 的情形，则有 $^-$

$$\begin{aligned}&1_{\mathcal{N}_\ell}\sum_{\substack{\gamma\ \text{double-fills } Y\\ \ell_\gamma(X)\le T}}\frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\frac{\ell_\gamma(X)}{2}}f_T(\ell_\gamma(X))\\ \prec&\sum_{k=\max\{1,[\ell(\partial Y)]\}}^{[2\ell(\partial Y)]}e^{k-(1-\epsilon)\ell(\partial Y)}\frac{k+1}{2\sinh\frac{k}{2}}\\ &+\sum_{k=\max\{1,[2\ell(\partial Y)]\}}^{[T]}\frac{e^{\delta(k+1)}}{k+1}\frac{k+1}{2\sinh\frac{k}{2}}\\ \prec&(1+\ell(\partial Y))\,e^{\epsilon\ell(\partial Y)}+e^{(\delta-\frac{1}{2})T},\end{aligned}\tag{9.5}$$

其中隐含常数依赖于 ϵ，δ，且在 T，g，$\ell(\partial Y)$ 上一致。

对于 $Y \simeq S_{0,\ 3}$ 满足 $X \setminus Y \simeq S_{g-2,\ n+3}$ 以及 $\frac{T}{2} < \ell(\partial Y) \leq T$，由式（9.2）可得

$$
\begin{aligned}
& 1_{\mathcal{N}_\ell} \sum_{\substack{\gamma \text{ double-fills } Y \\ \ell_\gamma(X) \leq T}} \frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\frac{\ell_\gamma(X)}{2}} f_T(\ell_\gamma(X)) \\
\leq & 1_{\mathcal{N}_\ell} \sum_{\substack{\gamma \text{ double-fills } Y \\ [\ell(\partial Y)] \leq \ell_\gamma(X) \leq [T]+1}} \frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\frac{\ell_\gamma(X)}{2}} f_T(\ell_\gamma(X)) \\
\prec & \sum_{k=[\ell(\partial Y)]}^{[T]} e^{k-(1-\epsilon)\ell(\partial Y)} \frac{k+1}{2\sinh\frac{k}{2}} \\
\prec & T e^{\frac{T}{2}-(1-\epsilon)\ell(\partial Y)}
\end{aligned} \tag{9.6}
$$

其中隐含常数依赖于 ϵ，并且在 T，g，$\ell(\partial Y)$ 上一致。

结合（9.5）和（9.6），得到

$$
1_{\mathcal{N}_\ell} \sum_{\substack{\gamma \text{ double-fills } Y \\ \ell_\gamma(X) \leq T}} H_{X,1}(\gamma) \prec B^1_{\epsilon,\delta,T}\left(\ell(\partial Y)\right), \tag{9.7}
$$

其中

$$
B^1_{\epsilon,\delta,T}(x) = \begin{cases} (1+x)e^{\epsilon x} + e^{(\delta-\frac{1}{2})T}, & \text{if} \quad x \leq \dfrac{T}{2}; \\ T e^{\frac{T}{2}-(1-\epsilon)x}, & \text{if} \quad \dfrac{T}{2} < x \leq T; \\ 0 & \text{if} \quad x > T. \end{cases}
$$

令 Γ 为满足 $S_g \setminus \Gamma \simeq S_{0、\ 3} \cup S_{g-2、\ n+3}$的 3 条闭测地线的并集，并将其代入米尔扎哈尼积分公式定理2.2，由（9.7）可得

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}} \left[1_{\mathcal{N}_\ell} \sum_{\substack{\gamma \text{ double-fills of type 1} \\ \ell_\gamma(X) \leq T}} H_{X,1}(\gamma) \right] \\
\prec & \mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}} \left[\sum_{\Gamma' \in \mathrm{Mod}_{g,n} \cdot \Gamma} B^1_{\epsilon,\delta,T}(\ell_{\Gamma'}(X)) \right] \\
\prec & \frac{1}{V_{g,n}} \int_{\mathbb{R}^3_+} V_{0,3}(x,y,z) V_{g-2,n+3}(x,y,z,0^n) \\
& \cdot B^1_{\epsilon,\delta,T}(x+y+z) \cdot xyz \cdot dxdydz.
\end{aligned} \tag{9.8}
$$

根据定理 4.1、定理 4.4 和引理 4.10 可得

$$
\begin{aligned}
& \frac{V_{0,3}(x,y,z) V_{g-2,n+3}(x,y,z,0^n)}{V_{g,n}} \\
= & \frac{V_{g-2,n+3}}{V_{g,n}} \frac{V_{g-2,n+3}(x,y,z,0^n)}{V_{g-2,n+3}}
\end{aligned}
$$

$$\prec \frac{1}{g}\frac{\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}\sinh\frac{z}{2}}{xyz}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\int_{0\le x+y+z\le\frac{T}{2}} \frac{V_{0,3}(x,y,z)V_{g-2,n+3}(x,y,z,0^n)}{V_{g,n}} \\
&\cdot B^1_{\epsilon,\delta,T}(x+y+z)xyzdxdydz \\
&\prec \frac{1}{g}\int_{0\le x+y+z\le\frac{T}{2}} [(1+T)e^{\epsilon(x+y+z)}+e^{(\delta-\frac{1}{2})T}]e^{\frac{x+y+z}{2}}\cdot dxdydz \\
&\prec \frac{T^3e^{(\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{4})T}+T^2e^{(\delta-\frac{1}{4})T}}{g},
\end{aligned} \tag{9.9}$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{T}{2}\le x+y+z\le T} \frac{V_{0,3}(x,y,z)V_{g-2,n+3}(x,y,z,0^n)}{V_{g,n}} \\
&\cdot B^1_{\epsilon,\delta,T}(x+y+z)xyzdxdydz \\
&\prec \frac{1}{g}\int_{\frac{T}{2}\le x+y+z\le T} Te^{\frac{T}{2}-(1-\epsilon)(x+y+z)}e^{\frac{x+y+z}{2}}\cdot dxdydz \\
&\prec \frac{T^3e^{(\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{4})T}}{g}.
\end{aligned} \tag{9.10}$$

于是，引理可由（9.8）、（9.9）和（9.10）得出。 □

根据定理 3.3，若 γ 填充 $Y\simeq S_{0,3}$ 但并非双重填充，则 γ 是 8 字形曲线或单侧迭代 8 字形闭测地线。对于 Int_{ns}中的这些项，我们可以利用 $H_{X,1}$或 f_T的非负性去掉条件 $X\in\mathcal{N}_\ell$ 。

引理 9.3。若 $n=n(g)=o(\sqrt{g})$，则

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[\sum_{\substack{\gamma \text{ figure-eight of type 1}\\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\right] \\
=&\frac{1}{\pi^2 g}\int_0^\infty f_T(t)e^{\frac{t}{2}}\left[\frac{t^2}{4}-\left(\frac{1}{2}+\ln 2\right)t\right]dt+O\left(\frac{T^3}{g}+\frac{(1+n)T^4e^{\frac{T}{2}}}{g^2}\right).
\end{aligned}$$

其中隐含常数与 g 和 T无关。

证明。 在边界长度为 x、y、$z\ge 0$的裤子曲面中，有三条8 字形闭测地线，其长度分别为 $L_{f-8}(x,y,z)$、$L_{f-8}(y,z,x)$和$L_{f-8}(z,x,y)$，它们分别绕着不同的边界分支螺旋，其中 L_{f-8}由式（3.1）给出。令 Γ 为三条简单闭测地线的并集，它将 S_g分隔为$S_{0,3}\cup S_{g-2,n+3}$；它们构成裤子曲面的边界，而该裤子曲面填充 γ。我们将 Γ 代入米尔扎哈尼积分公式定理

2.2 to get

(9.11)
$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{\gamma \text{ figure-eight of type 1}\\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
=&2\times\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}_+^3}\left[\overline{H}_{X,1}(L_{f-8}(x,y,z))+\overline{H}_{X,1}(L_{f-8}(y,z,x))\right.\\
&\left.+\overline{H}_{X,1}(L_{f-8}(z,x,y))\right]\cdot\frac{V_{0,3}(x,y,z)V_{g-2,n+3}(x,y,z,0^n)}{V_{g,n}}xyzdxdydz\\
=&\int_{\mathbb{R}_+^3}\overline{H}_{X,1}(L_{f-8}(x,y,z))\frac{V_{0,3}(x,y,z)V_{g-2,n+3}(x,y,z,0^n)}{V_{g,n}}xyzdxdydz.
\end{aligned}$$

注意，因子1_6抵消了Γ中测地线排序所产生的重数，而因子2来自一条8字形闭测地线的两种定向。第二个等式由$V_{0,3}(x,y,z)$和$V_{g-2,n+3}(x,y,z,0^n)$关于x、y、z的对称性得到。

由引理 4.10 和定理 4.11，对于 $n=o(\sqrt{g})$，我们有

(9.12)
$$\begin{aligned}
&\frac{V_{0,3}(x,y,z)V_{g-2,n+3}(x,y,z,0^n)}{V_{g,n}}\\
=&\frac{V_{g-2,n+3}}{V_{g,n}}\frac{V_{g-2,n+3}(x,y,z,0^n)}{V_{g-2,n+3}}\\
=&\frac{1}{8\pi^2 g}\left(1+O\left(\frac{1+n}{g}\right)\right)\\
&\cdot\frac{2\sinh\frac{x}{2}}{x}\frac{2\sinh\frac{y}{2}}{y}\frac{2\sinh\frac{z}{2}}{z}\left(1+O\left(\frac{(1+n)(x^2+y^2+z^2)}{g}\right)\right)\\
=&\frac{1}{\pi^2 g}\frac{\sinh\frac{x}{2}}{x}\frac{\sinh\frac{y}{2}}{y}\frac{\sinh\frac{z}{2}}{z}\left(1+O\left(\frac{(1+n)(1+x^2+y^2+z^2)}{g}\right)\right).
\end{aligned}$$

将（9.12）代入（9.11）。根据（3.1），有 $x,\ y,\ z\prec T$若 $L_{f-8}(x,\ y,\ z)\le T$。由于 **支撑**$(H_{X,\ 1})$ = **支撑**(f_T) $=[-T,T]$，因此有

(9.13)
$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{\gamma \text{ figure-eight of type 1}\\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
=&\frac{1+O\left(\frac{(1+n)T^2}{g}\right)}{\pi^2 g}\int_{\substack{x,y,z\ge 0\\ L_{f-8}(x,y,z)\le T}}\overline{H}_{X,1}(L_{f-8}(x,y,z))\\
&\cdot\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}\sinh\frac{z}{2}dxdydz.
\end{aligned}$$

通过将变量（x， y， z）替换为（x， y， t），其中 $t = L_{f-8}（x$， y， $z）$。对（3.1）求微分可得

$$\sinh\frac{t}{2}dt = *dx + *dy + \sinh\frac{z}{2}dz,$$

其中 $*$ 表示定义在 x， y， z 上的一些函数，它们并不重要。积分域替换为

$$\begin{cases} x,y,z \geq 0 \\ t = L_{f-8}(x,y,z) \leq T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x,y,t \geq 0 \\ t \leq T \\ 2\cosh\frac{x}{2}\cosh\frac{y}{2} + 1 \leq \cosh\frac{t}{2}, \end{cases}$$

这等价于

$$\begin{cases} x,y,t \geq 0 \\ 2\operatorname{arccosh} 3 \leq t \leq T \\ 2\cosh\frac{y}{2} + 1 \leq \cosh\frac{t}{2} \\ \cosh\frac{x}{2} \leq \frac{\cosh\frac{t}{2} - 1}{2\cosh\frac{y}{2}}. \end{cases}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\substack{x,y,z\geq 0 \\ L_{f-8}(x,y,z)\leq T}} \overline{H}_{X,1}(L_{f-8}(x,y,z))\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}\sinh\frac{z}{2}dxdydz \\
&= \int_{2\operatorname{arccosh} 3}^{T} \overline{H}_{X,1}(t)\sinh\frac{t}{2}\left[\int_{2\cosh\frac{y}{2}+1\leq\cosh\frac{t}{2}} \sinh\frac{y}{2}\right. \\
&\quad \left.\left(\int_{\cosh\frac{x}{2}\leq\frac{\cosh\frac{t}{2}-1}{2\cosh\frac{y}{2}}} \sinh\frac{x}{2}dx\right)dy\right]dt \\
&= \int_{2\operatorname{arccosh} 3}^{T} \overline{H}_{X,1}(t)\sinh\frac{t}{2}\left[\int_{2\cosh\frac{y}{2}+1\leq\cosh\frac{t}{2}} 2\sinh\frac{y}{2}\left(\frac{\sinh^2\frac{t}{4}}{\cosh\frac{y}{2}} - 1\right)dy\right]dt \\
&= \int_{2\operatorname{arccosh} 3}^{T} \overline{H}_{X,1}(t)\sinh\frac{t}{2}\left[4\sinh^2\frac{t}{4}\log\left(\sinh^2\frac{t}{4}\right) - 4\sinh^2\frac{t}{4} + 4\right]dt \\
&= \int_{2\operatorname{arccosh} 3}^{T} \frac{1}{2}tf_T(t)\left[4\sinh^2\frac{t}{4}\log\left(\sinh^2\frac{t}{4}\right) - 4\sinh^2\frac{t}{4} + 4\right]dt \\
&= \int_{2\operatorname{arccosh} 3}^{T} \frac{1}{2}tf_T(t)\left[\left(e^{\frac{t}{2}} + O(1)\right)\left(\frac{t}{2} - 2\ln 2 + 2\log\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)\right)\right. \\
&\quad \left.-(e^{\frac{t}{2}} + O(1)) + 4\right]dt \\
&= \int_0^{\infty} f_T(t)e^{\frac{t}{2}}\left[\frac{t^2}{4} - \left(\frac{1}{2} + \ln 2\right)t\right]dt + O\left(T^3\right),
\end{aligned}$$

这与（9.13）结合即得到引理 9.3。 □

引理 9.4。 如果 $n = n(g) = o(\sqrt{g})$，那么对于任意 $k \geq 2$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{\gamma \text{ one-sided iterated}\\ \text{eight of type 1}\\ \text{iteration number } =k\\ \ell_\gamma(X)\leq T}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
=&\frac{1}{\pi^2 g}\left(\int_0^\infty \frac{\sinh^3\frac{y}{2}}{\sinh\frac{k}{2}y\sinh\frac{k+1}{2}y}dy\right)\left(\int_0^T t f_T(t)e^{\frac{t}{2}}dt\right)\\
&+O\left(\frac{\ln k+T^2}{k^3 g}+\frac{(1+n)T^3e^{\frac{T}{2}}}{k^4g^2}+\mathbf{1}_{k=2}\frac{T^3}{g}\right),
\end{aligned}$$

其中隐含常数与 g、k、T 无关。

证明。在边界长度为 $x,y,z\geq 0$ 的裤子曲面中，有 6 条单侧迭代八次、迭代次数为 $k\geq 2$ 、长度为 $L_k(x,y,z)$、$L_k(x,z,y)$、$L_k(y,x,z)$、$L_k(y,z,x)$、$L_k(z,x,y)$ 和 $L_k(z,y,x)$ 的闭测地线，其中 L_k 由 (3.2) 给出。我们可以像引理 9.3 中那样，通过变量代换使用类似的积分方法。令 Γ 为三条将 S_g 分隔为 S_0、$_3\cup S_{g-2}$、$_{n+3}$ 的简单闭测地线之并；它们构成 γ 所填充的裤子曲面的边界，并将其代入米尔扎哈尼积分公式定理 2.2。利用 V_0 的对称性、关于 x,y,z 的 3(x,y,z) 和 $V_{g-2,n+3}(x,y,z,0^n)$，以及估计 (9.12)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{\gamma \text{ one-sided iterated}\\ \text{eight of type 1}\\ \text{iteration number } =k\\ \ell_\gamma(X)\leq T}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
=&2\times\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}_+^3}\big[\overline{H}_{X,1}(L_k(x,y,z))+\overline{H}_{X,1}(L_k(x,z,y))+\overline{H}_{X,1}(L_k(y,x,z))\\
&+\overline{H}_{X,1}(L_k(y,z,x))+\overline{H}_{X,1}(L_k(z,x,y))+\overline{H}_{X,1}(L_k(z,y,x))\big]\\
&\cdot\frac{V_{0,3}(x,y,z)V_{g-2,n+3}(x,y,z,0^n)}{V_{g,n}}xyzdxdydz\\
=&2\int_{\mathbb{R}_+^3}\overline{H}_{X,1}(L_k(x,y,z))\cdot\frac{V_{0,3}(x,y,z)V_{g-2,n+3}(x,y,z,0^n)}{V_{g,n}}xyzdxdydz\\
=&\frac{2+O\left(\frac{(1+n)T^2}{g}\right)}{\pi^2 g}\\
&\cdot\int_{\substack{x,y,z\geq 0\\ L_k(x,y,z)\leq T}}\overline{H}_{X,1}(L_k(x,y,z))\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}\sinh\frac{z}{2}dxdydz.
\end{aligned}\tag{9.14}$$

我们将变量 $(x,\ y,\ z)$ 替换为 $(x,\ y,\ t)$，其中 $t = L_k(x,\ y,\ z)$。对 3.2) 求导可得

$$\sinh\frac{t}{2}dt = *dx + *dy + \frac{\sinh\frac{k}{2}y}{\sinh\frac{y}{2}}\sinh\frac{z}{2}dz,$$

其中，$*$ 均表示定义在 x, y, z 上的某些函数，这些函数并不重要。积分域可替换为

$$\begin{cases} x,y,z \geq 0 \\ t = L_k(x,y,z) \leq T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x,y \geq 0, 0 \leq t \leq T \\ \cosh\dfrac{t}{2} \geq \dfrac{\sinh\frac{k+1}{2}y}{\sinh\frac{y}{2}}\cosh\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sinh\frac{k}{2}y}{\sinh\frac{y}{2}}, \end{cases}$$

这等价于

$$\begin{cases} x,y \geq 0 \\ 2\operatorname{arccosh}(2k+1) \leq t \leq T \\ \cosh\dfrac{t}{2} \geq \dfrac{\sinh\frac{k+1}{2}y}{\sinh\frac{y}{2}} + \dfrac{\sinh\frac{k}{2}y}{\sinh\frac{y}{2}} \\ \cosh\dfrac{x}{2} \leq \dfrac{\cosh\frac{t}{2}\sinh\frac{y}{2} - \sinh\frac{k}{2}y}{\sinh\frac{k+1}{2}y}. \end{cases}$$

因此我们有

$$\begin{aligned} & 2\int_{\substack{x,y,z\geq 0 \\ L_k(x,y,z)\leq T}} \overline{H}_{X,1}(L_k(x,y,z))\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}\sinh\frac{z}{2}dxdydz \\ =& 2\int_{2\operatorname{arccosh}(2k+1)}^{T} \overline{H}_{X,1}(t)\sinh\frac{t}{2}\left[\int_{\cosh\frac{t}{2}\geq\frac{\sinh\frac{k+1}{2}y}{\sinh\frac{y}{2}}+\frac{\sinh\frac{k}{2}y}{\sinh\frac{y}{2}}} \frac{\sinh^2\frac{y}{2}}{\sinh\frac{k}{2}y}\right. \\ & \left.\left(\int_{\cosh\frac{x}{2}\leq\frac{\cosh\frac{t}{2}\sinh\frac{y}{2}-\sinh\frac{k}{2}y}{\sinh\frac{k+1}{2}y}} \sinh\frac{x}{2}dx\right)dy\right]dt \qquad (9.15) \\ =& \int_{2\operatorname{arccosh}(2k+1)}^{T} tf_T(t)\left[\int_{\cosh\frac{t}{2}\geq\frac{\sinh\frac{2k+1}{4}y}{\sinh\frac{y}{4}}} \frac{\sinh^2\frac{y}{2}}{\sinh\frac{k}{2}y}\right. \\ & \left. 2\left(\frac{\cosh\frac{t}{2}\sinh\frac{y}{2} - \sinh\frac{k}{2}y}{\sinh\frac{k+1}{2}y} - 1\right)dy\right]dt. \end{aligned}$$

注意，对于 $m \geq 3$，我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{\sinh^2\frac{y}{2}}{\sinh\frac{m}{2}y}dy \\ \prec & \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{y}{m}dy + \int_{\frac{1}{m}}^1 y^2 e^{-\frac{m}{2}y}dy + \int_1^\infty e^{-\frac{m-2}{2}y}dy \qquad (9.16) \\ \prec & \frac{1}{m^3}. \end{aligned}$$

将（9.16）代入（9.15）。由此可得

$$
\begin{aligned}
&2\int_{\substack{x,y,z\geq 0\\ L_k(x,y,z)\leq T}} \overline{H}_{X,1}(L_k(x,y,z))\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}\sinh\frac{z}{2}dxdydz\\
&=\int_{2\,\mathrm{arccosh}(2k+1)}^{T} tf_T(t)\left[\int_{\cosh\frac{t}{2}\geq\frac{\sinh\frac{2k+1}{4}y}{\sinh\frac{y}{4}}}\frac{2\cosh\frac{t}{2}\sinh^3\frac{y}{2}}{\sinh\frac{k}{2}y\sinh\frac{k+1}{2}y}dy\right.\\
&\left.+O\left(\frac{1}{k^3}\right)-\mathbf{1}_{k=2}\int_{\cosh\frac{t}{2}\geq\frac{\sinh\frac{2k+1}{4}y}{\sinh\frac{y}{4}}}\tanh\frac{y}{2}dy\right]dt.
\end{aligned}
\tag{9.17}
$$

注意，对于 $k\geq 3$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\cosh\frac{t}{2}\leq\frac{\sinh\frac{2k+1}{4}y}{\sinh\frac{y}{4}}}\frac{2\cosh\frac{t}{2}\sinh^3\frac{y}{2}}{\sinh\frac{k}{2}y\sinh\frac{k+1}{2}y}dy\\
&\prec\int_0^{\infty}\frac{\sinh\frac{2k+1}{4}y}{\sinh\frac{y}{4}}\frac{\sinh^3\frac{y}{2}}{\sinh\frac{k}{2}y\sinh\frac{k+1}{2}y}dy\\
&\prec\int_0^{\frac{1}{k}}\frac{y}{k}dy+\int_{\frac{1}{k}}^1 y^2e^{-\frac{2k+1}{4}y}dy+\int_1^{\infty}e^{(1-\frac{k}{2})y}dy\\
&\prec\frac{1}{k^3}.
\end{aligned}
\tag{9.18}
$$

而对于 $k=2$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\cosh\frac{t}{2}\leq\frac{\sinh\frac{2k+1}{4}y}{\sinh\frac{y}{4}}}\frac{2\cosh\frac{t}{2}\sinh^3\frac{y}{2}}{\sinh\frac{k}{2}y\sinh\frac{k+1}{2}y}dy\\
&\prec\int_0^1\frac{\sinh\frac{5}{4}y}{\sinh\frac{y}{4}}\frac{\sinh^3\frac{y}{2}}{\sinh y\sinh\frac{3}{2}y}dy\\
&+\cosh\frac{t}{2}\int_1^{\infty}\mathbf{1}_{\cosh\frac{t}{2}\leq\frac{\sinh\frac{5}{4}y}{\sinh\frac{y}{4}}}\frac{\sinh^3\frac{y}{2}}{\sinh y\sinh\frac{3}{2}y}dy\\
&\prec 1+\cosh\frac{t}{2}\int_{\max\{1,\frac{t}{2}-100\}}^{\infty}e^{-y}dy\prec 1,
\end{aligned}
\tag{9.19}
$$

and

$$
\int_{\cosh\frac{t}{2}\geq\frac{\sinh\frac{2k+1}{4}y}{\sinh\frac{y}{4}}}\tanh\frac{y}{2}dy\prec t+1. \tag{9.20}
$$

将（9.18）、（9.19）和（9.20）代入（9.17）。我们有

$$
\begin{aligned}
&2\int_{\substack{x,y,z\geq 0\\ L_k(x,y,z)\leq T}} \overline{H}_{X,1}(L_k(x,y,z))\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}\sinh\frac{z}{2}dxdydz\\
&=\int_{2\operatorname{arccosh}(2k+1)}^{T} tf_T(t)\left[\int_0^\infty \frac{2\cosh\frac{t}{2}\sinh^3\frac{y}{2}}{\sinh\frac{k}{2}y\sinh\frac{k+1}{2}y}dy\right.\\
&\left.+O\left(\frac{1}{k^3}+\mathbf{1}_{k=2}t\right)\right]dt\\
&=\left(\int_0^\infty \frac{\sinh^3\frac{y}{2}}{\sinh\frac{k}{2}y\sinh\frac{k+1}{2}y}dy\right)\left(\int_0^T 2tf_T(t)\cosh\frac{t}{2}dt\right.\\
&\left.-\int_0^{2\operatorname{arccosh}(2k+1)} 2tf_T(t)\cosh\frac{t}{2}dt\right)+O\left(\frac{T^2}{k^3}+\mathbf{1}_{k=2}T^3\right)\\
&=\left(\int_0^\infty \frac{\sinh^3\frac{y}{2}}{\sinh\frac{k}{2}y\sinh\frac{k+1}{2}y}dy\right)\left(\int_0^T 2tf_T(t)\cosh\frac{t}{2}dt+O(k\ln k)\right)\\
&+O\left(\frac{T^2}{k^3}+\mathbf{1}_{k=2}T^3\right).
\end{aligned}
\tag{9.21}
$$

注意，对于 $k\geq 2$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{\sinh^3\frac{y}{2}}{\sinh\frac{k}{2}y\sinh\frac{k+1}{2}y}dy\\
&\prec\int_0^{\frac{1}{k}}\frac{y}{k^2}dy+\int_{\frac{1}{k}}^1 y^3e^{-(k+\frac{1}{2})y}dy+\int_1^\infty e^{-(k-1)y}dy\\
&\prec\frac{1}{k^4}.
\end{aligned}
\tag{9.22}
$$

结合式9.14、式9.21和式9.22，可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{\gamma\ \textit{one-sided iterated}\\ \textit{eight of type 1}\\ \textit{iteration number}=k\\ \ell_\gamma(X)\leq T}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
&=\frac{1+O\left(\frac{(1+n)T^2}{g}\right)}{\pi^2 g}\left(\int_0^\infty \frac{\sinh^3\frac{y}{2}}{\sinh\frac{k}{2}y\sinh\frac{k+1}{2}y}dy\right)\left(\int_0^T 2tf_T(t)\cosh\frac{t}{2}dt\right)\\
&+O\left(\frac{\ln k}{k^3g}+\frac{T^2}{k^3g}+\mathbf{1}_{k=2}\frac{T^3}{g}\right)\\
&=\frac{1}{\pi^2 g}\left(\int_0^\infty \frac{\sinh^3\frac{y}{2}}{\sinh\frac{k}{2}y\sinh\frac{k+1}{2}y}dy\right)\left(\int_0^T tf_T(t)e^{\frac{t}{2}}dt\right)
\end{aligned}
$$

$$+O\left(\frac{\ln k+T^2}{k^3 g}+\frac{(1+n)T^3 e^{\frac{T}{2}}}{k^4 g^2}+\mathbf{1}_{k=2}\frac{T^3}{g}\right),$$

至此，证明完毕。 □

现在，我们可以计算非双重填充的类型 1 填充测地线对 Int 的总贡献 $_{ns}$ （7.1）中的贡献。令人惊叹的是，它恰好抵消了引理 8.1 中的主项 $n=0$。当 $n\neq 0$时，类型 5 的填充测地线也会参与这一抵消。

引理 9.5. 若 $n=n(g)=o(\sqrt{g}),^{-}$则

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{\gamma \text{ is not double-filling}\\ \text{of type 1, } \ell_\gamma(X)\leq T}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\ =&\frac{1}{\pi^2 g}\int_0^\infty f_T(t)e^{\frac{t}{2}}\left(\frac{t^2}{4}-t\right)dt+O\left(\frac{T^3}{g}+\frac{(1+n)T^4 e^{\frac{T}{2}}}{g^2}\right),\end{aligned}$$

其中，隐含常数与 g 和 T 无关。

证明。 根据引理9.3 和引理 9.4，只需证明

$$\sum_{k=2}^\infty\int_0^\infty\frac{\sinh^3\frac{y}{2}}{\sinh\frac{k}{2}y\sinh\frac{k+1}{2}y}dy=\ln 2-\frac{1}{2}. \tag{9.23}$$

通过将变量代入 $t=e^{\frac{y}{2}}$，我们得到 -

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\frac{\sinh^3\frac{y}{2}}{\sinh\frac{k}{2}y\sinh\frac{k+1}{2}y}dy\\ =&\int_1^\infty\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)^3}{t\left(t^k-\frac{1}{t^k}\right)\left(t^{k+1}-\frac{1}{t^{k+1}}\right)}dt\\ =&\int_1^\infty t^{2k-3}\frac{\left(t^2-1\right)^3}{\left(t^{2k}-1\right)\left(t^{2k+2}-1\right)}dt\\ =&\int_1^\infty\frac{t^2-1}{t^3}\frac{t^{2k}}{\left(1+t^2+\cdots+t^{2k-2}\right)\left(1+t^2+\cdots+t^{2k}\right)}dt\\ =&\int_1^\infty\frac{t^2-1}{t^3}\left(\frac{1}{1+t^2+\cdots+t^{2k-2}}-\frac{1}{1+t^2+\cdots+t^{2k}}\right)dt.\end{aligned}$$

根据控制收敛定理，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=2}^\infty\int_0^\infty\frac{\sinh^3\frac{y}{2}}{\sinh\frac{k}{2}y\sinh\frac{k+1}{2}y}dy\\ =&\int_1^\infty\frac{t^2-1}{t^3}\sum_{k=2}^\infty\left(\frac{1}{1+t^2+\cdots+t^{2k-2}}-\frac{1}{1+t^2+\cdots+t^{2k}}\right)dt\\ =&\int_1^\infty\frac{t^2-1}{t^3(1+t^2)}dt\end{aligned}$$

$$= \left(\ln \frac{t^2}{1+t^2} + \frac{1}{2t^2} \right) \Big|_{t=1}^{\infty}$$
$$= \ln 2 - \frac{1}{2},$$

即（9.23）。 □

现在结合引理9.2 和引理9.5 可得以下估计。

引理 9.6。若 $n = n(g) = o(\sqrt{g})$，则对任意 $\delta > \frac{1}{2}$ 和 $\epsilon > 0$，

$$\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n} \left[1_{N_\ell} \cdot \sum_{\substack{\gamma \text{ of type 1} \\ \ell_\gamma(X) \le T}} H_{X,1}(\gamma) \right] \le \frac{1}{\pi^2 g} \int_0^\infty f_T(t) e^{\frac{t}{2}} \left(\frac{t^2}{4} - t \right) dt$$
$$+ O\left(\frac{T^3 e^{(\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{4})T} + T^2 e^{(\delta-\frac{1}{4})T}}{g} + \frac{(1+n)T^4 e^{\frac{T}{2}}}{g^2} \right),$$

其中隐含常数与 g 和 T无关。

9.2。**类型2 在**Int_{ns}。类型 2 的填充测地线对 Int_{ns} 在（7.1）中的贡献，可以像引理9.2中类型 1 的双填充测地线的贡献一样进行估计，因为根据定理3.3，任意填充测地线γ 在$Y \simeq S_{1,\ 1}$ 都是双重填充的。特别地，$\ell(\partial Y) \le \ell_\gamma(X)$。对于类型 2 的测地线，定理3.4 同样适用，但应将引理3.11 替换为定理3.12。

引理 9.7. 若 $n = n(g) = o(\sqrt{g})$，则对任意 $\delta > \frac{1}{2}$ 和 $\epsilon > 0$，

$$\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n} \left[1_{\mathcal{N}_\ell} \sum_{\substack{\gamma \text{ of type 2} \\ \ell_\gamma(X) \le T}} H_{X,1}(\gamma) \right] \prec \frac{T^3 e^{(\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{4})T} + T^3 e^{(\delta-\frac{1}{4})T}}{g},$$

其中隐含常数取决于 ϵ、δ、κ 和 a，若 $T = a$ 对数函数 g。

证明。 根据定理 3.4，若 $Y \simeq S_{1,\ 1}$ 且 $X \setminus Y \simeq S_{g-1,\ n+1}$，则对任意$\epsilon > 0$，

$$1_{\mathcal{N}_\ell} \sum_{\substack{\gamma \text{ double-fills } Y \\ \ell_\gamma(X) \le \in [k,k+1]}} \frac{\ell_\gamma(X)}{2 \sinh \frac{\ell_\gamma(X)}{2}} f_T(\ell_\gamma(X))$$
$$\le C(1,\epsilon,1) e^{k+1-(1-\epsilon)\ell(\partial Y)} \frac{k+1}{2 \sinh \frac{k}{2}} \mathbf{1}_{\ell(\partial Y) \le k+1}. \tag{9.24}$$

考虑满足以下条件的 $l_{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}} > 0$： Γ 的极限集的豪斯多夫维数为 $\frac{1}{4} + \frac{\delta}{2}$，其中 $\Gamma \backslash \mathbb{H} \in \mathcal{T}_{0,3}(0,0,l_{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}})$。将 $\epsilon_\delta = \frac{2\delta-1}{1+2\delta}$代入定理3.12。那么存在 $s_\delta = s_{\epsilon_\delta, l_{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}} > 0$和 $C_{\epsilon_\delta, l_{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}}$，使得对于任意满足 $\mathrm{sys}(Y_0) \le s_\delta$ 的$Y_0 \in \mathcal{T}_{1,1}(l_{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}})$，我们有

$$N_1^{fill}(Y_0, L) \le \tilde{C}_{\epsilon, l_{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}} \cdot e^{(1+\epsilon_\delta)(\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2})L} = \tilde{C}_{\epsilon, l_{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}} \cdot e^{\delta \cdot L}. \tag{9.25}$$

假设 $X \in \mathcal{N}_\ell$ 对于 $\ell = \kappa$对数函数 g。当 g 足够大时，对于任意 $Y \simeq S_{1,1}$ 满足 $X \setminus Y \simeq S_{g-1,n+1}$，我们有 $\ell(\partial Y) \geq l_{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}$。由定理 3.6，存在某个 $Y' \in \mathcal{T}_{1,1}(l_{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}})$，使得 - -

$$N_1^{fill}(Y, L) \leq N_1^{fill}(Y', L) \tag{9.26}$$

对于任意 $L > 0$。若单射半径$(Y') \leq s_\delta$，估计 (9.25) 对 $Y_0 = Y'$成立。因此由 (9.26)，若单射半径$(Y') \leq s_\delta$，则有

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{\mathcal{N}_\ell} \sum_{\substack{\gamma \text{ fills } Y \\ \ell_\gamma(X)\in[k,k+1]}} \frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\frac{\ell_\gamma(X)}{2}} f_T(\ell_\gamma(X)) \\
\leq & N_1^{fill}(Y, k+1)\frac{k+1}{2\sinh\frac{k}{2}} \cdot \mathbf{1}_{\ell(\partial Y)\leq k+1} \\
\leq & N_1^{fill}(Y', k+1)\frac{k+1}{2\sinh\frac{k}{2}} \cdot \mathbf{1}_{\ell(\partial Y)\leq k+1} \\
\leq & \tilde{C}_{\epsilon, l_{\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}} e^{\delta(k+1)} \frac{k+1}{2\sinh\frac{k}{2}} \cdot \mathbf{1}_{\ell(\partial Y)\leq k+1}.
\end{aligned} \tag{9.27}$$

若单射半径$(Y') > s_\delta$，且 $k \leq T = a$对数函数 g，(9.26) 和 [AM23，引理 10。5] 推出

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{\mathcal{N}_\ell} \sum_{\substack{\gamma \text{ fills } Y \\ \ell_\gamma(X)\in[k,k+1]}} \frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\frac{\ell_\gamma(X)}{2}} f_T(\ell_\gamma(X)) \\
\leq & N_1^{fill}(Y, k+1)\frac{k+1}{2\sinh\frac{k}{2}} \cdot \mathbf{1}_{\ell\leq\ell(\partial Y)\leq k+1} \\
\leq & N_1^{fill}(Y', k+1)\frac{k+1}{2\sinh\frac{k}{2}} \cdot \mathbf{1}_{\ell\leq\ell(\partial Y)\leq k+1} \\
\prec & \frac{k+1}{\kappa\log g}\left(1+\frac{k+1}{\min\{\kappa, s_\delta\}}\right)^{36\frac{k+1}{\kappa\log g}} \frac{k+1}{2\sinh\frac{k}{2}} \mathbf{1}_{\ell(\partial Y)\leq k+1} \\
\prec & e^{\delta(k+1)}\frac{k+1}{2\sinh\frac{k}{2}} \mathbf{1}_{\ell(\partial Y)\leq k+1},
\end{aligned} \tag{9.28}$$

其中隐含常数仅依赖于 κ, A, δ。使用与（9.4）和（9.5）相同的论证，对于 $Y \simeq S_{1,1}$ 且 $X \setminus Y \simeq S_{g-1,n+1}$ 和 $\ell(\partial Y) \leq \frac{T}{2}$， -

由（9.24）、（9.27）和（9.28），可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{\mathcal{N}_\ell} \sum_{\substack{\gamma \text{ fills } Y \\ \ell_\gamma(X)\le T}} \frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\frac{\ell_\gamma(X)}{2}} f_T(\ell_\gamma(X)) \\
\le &\sum_{k=\max\{1,[\ell(\partial Y)]\}}^{[2\ell(\partial Y)]} 1_{\mathcal{N}_\ell} \sum_{\substack{\gamma \text{ fills } Y \\ \ell_\gamma(X)\le\in[k,k+1]}} \frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\frac{\ell_\gamma(X)}{2}} f_T(\ell_\gamma(X)) \\
&+ \sum_{k=\max\{1,[2\ell(\partial Y)]\}}^{[T]} 1_{\mathcal{N}_\ell} \sum_{\substack{\gamma \text{ fills } Y \\ \ell_\gamma(X)\le\in[k,k+1]}} \frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\frac{\ell_\gamma(X)}{2}} f_T(\ell_\gamma(X)) \\
&\prec \sum_{k=\max\{1,[\ell(\partial Y)]\}}^{[2\ell(\partial Y)]} e^{k-(1-\epsilon)\ell(\partial Y)} \frac{k}{2\sinh\frac{k}{2}} + \sum_{k=\max\{1,[2\ell(\partial Y)]\}}^{[T]} e^{\delta k} \frac{k}{\sinh\frac{k}{2}} \\
&\prec (1+\ell(\partial Y))\, e^{\epsilon\ell(\partial Y)} + Te^{(\delta-\frac{1}{2})T}.
\end{aligned} \tag{9.29}
$$

采用与（9.6）相同的论证，对于 $Y \simeq S_{1,\ 1}$ 其中 $X \setminus Y \simeq S_{g-1,\ n+1}$ 且 $\frac{T}{2} \le \ell\left(\partial Y\right) \le T$，由（9.24）可得

$$
\begin{aligned}
&1_{\mathcal{N}_\ell} \sum_{\substack{\gamma \text{ fills } Y \\ \ell_\gamma(X)\le T}} \frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\frac{\ell_\gamma(X)}{2}} f_T(\ell_\gamma(X)) \\
\le &\sum_{k=[\partial Y]}^{[T]} \mathbf{1}_{\mathcal{N}_\ell} \sum_{\substack{\gamma \text{ double-fills } Y \\ \ell_\gamma(X)\le\in[k,k+1]}} \frac{\ell_\gamma(X)}{2\sinh\frac{\ell_\gamma(X)}{2}} f_T(\ell_\gamma(X)) \\
&\prec \sum_{k=[\partial Y]}^{[T]} e^{k+1-(1-\epsilon)\ell(\partial Y)} \frac{k+1}{\sinh\frac{k}{2}} \\
&\prec Te^{\frac{T}{2}-(1-\epsilon)\ell(\partial Y)}.
\end{aligned} \tag{9.30}
$$

结合（9.29）和（9.30）可得

$$
1_{\mathcal{N}_\ell} \sum_{\substack{\gamma \text{ fills } Y \\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma) \prec B^2_{\epsilon,\delta,T}(\ell(\partial Y)), \tag{9.31}
$$

其中

$$
B^2_{\epsilon,\delta,T}\left(x\right) = \begin{cases} (1+x)e^{\epsilon x} + Te^{(\delta-\frac{1}{2})T}, & \text{if} \quad x \le \dfrac{T}{2}; \\ Te^{\frac{T}{2}-(1-\epsilon)x}, & \text{if} \quad \dfrac{T}{2} < x \le T; \\ 0 & \text{if} \quad x > T. \end{cases}
$$

注意到 $V_{1,\ 1}(x)\ \prec 1+x^2$ 由定理 4.1。利用对 (9.8)、(9.9) 和 (9.10) 的类似计算，由 (9.31) 可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[1_{\mathcal{N}_\ell}\sum_{\substack{\gamma\ of\ type\ 2\\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
\prec&\int_0^\infty \frac{V_{1,1}(x)V_{g-1,n+1}(x,0^n)}{V_{g,n}} B^2_{\epsilon,\delta,T}(x)\,x dx\\
\prec&\frac{1}{g}\int_0^\infty \left(1+x^2\right)\sinh\frac{x}{2}B^2_{\epsilon,\delta,T}(x)\,dx\\
=&\frac{1}{g}\int_0^{\frac{T}{2}} \left(1+x^2\right)\sinh\frac{x}{2}\left[(1+x)e^{\epsilon x}+Te^{(\delta-\frac12)T}\right]dx\\
+&\frac{1}{g}\int_{\frac{T}{2}}^{T} \left(1+x^2\right)\sinh\frac{x}{2}\left[Te^{\frac{T}{2}-(1-\epsilon)x}\right]dx\\
\prec&\frac{T^3e^{(\frac{\epsilon}{2}+\frac14)T}+T^3e^{(\delta-\frac14)T}}{g},
\end{aligned}$$

其中隐含常数取决于 κ、A、δ、ϵ。 □

9.3. 类型 3 在 Int_{ns}. 任何类型 3 的填充测地线的长度都由其所填充的裤子曲面 Y 决定，与类型 1 的情形相同。对于类型 3，裤子曲面 Y 的两个边界分支会粘合在一起。因此，我们可以用 $\gamma_b\cup\gamma_{in}$ 来描述 Y，其中 γ_b 是 Y 的边界测地线，使得$X\setminus\gamma_b\simeq S_{1,\ 1}\cup S_{g-1,\ n+1}$，而 γ_{in} 是 $S_{1,\ 1}$ 部分中的一条简单闭测地线，使得 $S_{1,\ 1}\setminus\gamma_{in}=Y$。

对于类型 3 的双重填充项对 Int_{ns} 中（7.1）的贡献，我们可以得到与引理 9.2 中类似的估计。

引理 9.8。 如果 $n=n(g)\ =o(\sqrt{g})$,-那么对于任意的 $\delta>\frac12$ 和 $\epsilon>0$,

$$\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[1_{\mathcal{N}_\ell}\sum_{\substack{\gamma\ double\text{-}fills\ of\ type\ 3\\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\right]\prec\frac{T^3e^{(\frac{\epsilon}{2}+\frac14)T}+T^2e^{(\delta-\frac14)T}}{g},$$

其中隐含常数依赖于 ϵ、δ，且与 T、g 无关。

证明。 采用与估算双重填充项（9.7）相同的论证，对于 $Y\simeq S_{0,3}$ 和 $Y\simeq S_{1,1}$，其中 $X\setminus Y\simeq\overline{S}_{g-1,n+1}$，我们有

$$1_{\mathcal{N}_\ell}\sum_{\substack{\gamma\ double\text{-}\ fills\ Y\\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\prec B^1_{\epsilon,\delta,T}\left(\ell_{\gamma_b}(X)+2\ell_{\gamma_{in}}(X)\right), \tag{9.32}$$

其中

$$B^1_{\epsilon,\delta,T}(x)=\begin{cases}(1+x)e^{\epsilon x}+e^{(\delta-\frac{1}{2})T}, & if \quad x\le\dfrac{T}{2};\\ Te^{\frac{T}{2}-(1-\epsilon)x}, & if \quad \dfrac{T}{2}<x\le T;\\ 0 & if \quad x>T.\end{cases}$$

将 (9.32) 对 $\gamma_b\cup\gamma_{in}$ 的映射类群轨道取平均，代入 Mirza-Khani 积分公式定理 2.2。由定理 4.1、定理 4.4和引理 4.10，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[1_{\mathcal{N}_\ell}\sum_{\substack{\gamma\ double\text{-}\ fills\ of\ type\ 3\\ \ell_\gamma(X)\le T}}H_{X,1}(\gamma)\right]\\ \prec&\frac{1}{V_{g,n}}\int_{\mathbb{R}^2_+}V_{0,3}(x,x,y)V_{g-1,n+1}(y,0^n)B^1_{\epsilon,\delta,T}(2x+y)\,xydxdy\\ \prec&\frac{V_{g-1,n+1}}{V_{g,n}}\int_{\mathbb{R}^2_+}B^1_{\epsilon,\delta,T}(2x+y)\,x\sinh\frac{y}{2}dxdy\\ \prec&\frac{1}{g}\int_{\mathbb{R}^2_+}B^1_{\epsilon,\delta,T}(2x+y)\,x\sinh\frac{y}{2}dxdy.\end{aligned}\tag{9.33}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}&\int_{2x+y\le\frac{T}{2}}B^1_{\epsilon,\delta,T}(2x+y)\,x\sinh\frac{y}{2}dxdy\\ \prec&\int_{2x+y\le\frac{T}{2}}\left[(1+2x+y)e^{\epsilon(2x+y)}+e^{(\delta-\frac{1}{2})T}\right]x\sinh\frac{y}{2}dxdy\\ \prec&T^3e^{(\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{4})T}+T^2e^{(\delta-\frac{1}{4})T},\end{aligned}\tag{9.34}$$

and

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{T}{2}\le2x+y\le T}B^1_{\epsilon,\delta,T}(2x+y)\,x\sinh\frac{y}{2}dxdy\\ \prec&\int_{\frac{T}{2}\le2x+y\le T}Te^{\frac{T}{2}-(1-\epsilon)(2x+y)}x\sinh\frac{y}{2}dxdy\\ \prec&T^3e^{(\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{4})T}.\end{aligned}\tag{9.35}$$

该引理由 (9.33)、(9.34) 和 (9.35) 得证。 □

非双重填充的3型测地线对 Int_{ns} in（7.1）的贡献可以像引理9.3 和引理9.4那样精确估计，但由于模空间 $V_{0,3}(\ell_{\gamma_{in}}(X)\ \ell_{\gamma_{in}}(X)\ \ell_{\gamma_b}(X))\cdot V_{g-1,n+1}(\ell_{\gamma_b}(X)\ 0^n)$ 的魏尔-彼得森体积关于 $\ell_{\gamma_{in}}(X)$ 不是指数型的，因此它将是一个小项。我们仅给出其有效上界。若将8字形闭测地线视为迭代次数为 $k=1$ 的单侧迭代闭测地线，则有如下估计。

引理 9.9. 若 $n = n(g) = o(\sqrt{g}),^{-}$则对任意 $k \geq 1$,

$$\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{\gamma \text{ one-sided iterated} \\ \text{eight of type 3} \\ \text{iteration number } =k \\ \ell_\gamma(X)\leq T}} H_{X,1}(\gamma)\right] \prec \frac{T^4}{gk^2},$$

其中隐含常数与 g、k 和 T 无关。

证明。在 $Y = S_1$ 中，单侧迭代 8 字形闭测地线有 3 种不同类型。第一类会绕长度为 $\ell_{\gamma_b}(X)$ 的边界测地线螺旋 1 圈，并绕长度为 $\ell_{\gamma_{in}}(X)$ 的边界测地线螺旋 k 圈。第二类会绕长度为 $\ell_{\gamma_b}(X)$ 的边界测地线螺旋 k 圈，并绕长度为 $\ell_{\gamma_{in}}(X)$ 的边界测地线螺旋 1 圈。第三类会分别绕两条长度为 $\ell_{\gamma_{in}}(X)$ 的边界测地线螺旋 1 圈和 k 圈。注意，对于 $k = 1$，前两类测地线会重合。它们的长度为 $L_k(\ell_{\gamma_b}(X)\ \ell_{\gamma_{in}}(X)\ \ell_{\gamma_{in}}(X))$、$L_k(\ell_{\gamma_{in}}(X)\,\ell_{\gamma_b}(X)\ \ell_{\gamma_{in}}(X))$ 和 $L_k(\ell_{\gamma_{in}}(X)\ \ell_{\gamma_{in}}(X)\ell_{\gamma_b}(X))$，其中 L_k 由 (3.2) 给出。将 $\gamma_{in} \cup \gamma_b$ 的映射类群轨道代入米尔扎哈尼积分公式定理 2.2，根据定理 4.1、定理 4.4 和引理 4.10，我们得到 (9.36

)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{\gamma \text{ one-sided iterated} \\ \text{eight of type 3} \\ \text{iteration number } =k \\ \ell_\gamma(X)\leq T}} H_{X,1}(\gamma)\right] \\
&\prec \frac{1}{V_{g,n}} \int_{\mathbb{R}_+^2} \left[\overline{H}_{X,1}(L_k(y,x,x)) + \overline{H}_{X,1}(L_k(x,y,x)) + \overline{H}_{X,1}(L_k(x,x,y))\right] \\
&\cdot V_{0,3}(x,x,y) V_{g-1,n+1}(y,0^n) xy\,dx\,dy \\
&\prec \frac{1}{g} \int_{\mathbb{R}_+^2} \left[\overline{H}_{X,1}(L_k(y,x,x)) + \overline{H}_{X,1}(L_k(x,y,x)) + \overline{H}_{X,1}(L_k(x,x,y))\right] \\
&\cdot x \sinh \frac{y}{2}\, dx\,dy.
\end{aligned}$$

注意，由（3.2）可知

$$\cosh \frac{L_k(x,y,z)}{2} \geq \cosh \frac{ky}{2} \cosh \frac{x}{2} + \cosh \frac{z}{2} \geq \cosh \frac{x+ky}{2} + \cosh \frac{z}{2}.$$

So

$$L_k(x,y,z) \geq \max\{x+ky, z\}.$$

由于**支撑**$(f_T) \subset [-T,T]$，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^2} \overline{H}_{X,1}(L_k(y,x,x)) x \sinh\frac{y}{2} dxdy \\
\prec &\int_{kx,y\le L_k(y,x,x)\le T} \frac{L_k(y,x,x)}{\sinh\frac{L_k(y,x,x)}{2}} x\sinh\frac{y}{2} dxdy \\
\prec &\int_{x\le\frac{T}{k}}\int_{y\le T} \frac{y}{\sinh\frac{y}{2}} x\sinh\frac{y}{2} dxdy \\
\prec &\frac{T^4}{k^2},
\end{aligned} \tag{9.37}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^2} \overline{H}_{X,1}(L_k(x,y,x)) x \sinh\frac{y}{2} dxdy \\
\prec &\int_{x+ky\le L_k(x,y,x)\le T} \frac{L_k(x,y,x)}{\sinh\frac{L_k(x,y,x)}{2}} x\sinh\frac{y}{2} dxdy \\
\le &\int_{x+ky\le T} \frac{x+ky}{\sinh\frac{x+ky}{2}} x\sinh\frac{y}{2} dxdy \\
\prec &\int_{x+ky\le T} \frac{x+ky}{\sinh\frac{x+ky}{2}} \sinh\frac{x}{2}\frac{\sinh\frac{k}{2}y}{k} dxdy \\
\prec &\frac{1}{k}\int_{x+ky\le T} (x+ky) dxdy \\
\prec &\frac{T^3}{k^2},
\end{aligned} \tag{9.38}$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^2} \overline{H}_{X,1}(L_k(x,x,y)) x \sinh\frac{y}{2} dxdy \\
\prec &\int_{kx,y\le L_k(x,x,y)\le T} \frac{L_k(x,x,y)}{\sinh\frac{L_k(x,x,y)}{2}} x\sinh\frac{y}{2} dxdy \\
\prec &\int_{x\le\frac{T}{k}}\int_{y\le T} \frac{y}{\sinh\frac{y}{2}} x\sinh\frac{y}{2} dxdy \\
\prec &\frac{T^4}{k^2}.
\end{aligned} \tag{9.39}$$

现在，引理可由（9.36）、（9.37）、（9.38）和（9.39）推出。 □

现在，我们可以估计（ns 中的 Int 内所有 3 型填充测地线对（7.1）的总贡献。

引理 9.10. 若 $n = n(g) = o(\sqrt{g})$，则对于任意 $\delta > \frac{1}{2}$ 和 $\epsilon > 0$，

$$\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[1_{\mathcal{N}_\ell} \sum_{\substack{\gamma \text{ of type 3} \\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\right] \prec \frac{T^3 e^{(\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{4})T} + T^2 e^{(\delta-\frac{1}{4})T}}{g},$$

其中隐含常数取决于 ϵ、δ，且与 T、g 无关。

证明。由引理9.8 和引理9.9，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[1_{\mathcal{N}_\ell}\sum_{\substack{\gamma \text{ of type 3}\\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
&\prec \frac{T^3 e^{(\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{4})T}+T^2 e^{(\delta-\frac{1}{4})T}}{g}+\frac{T^4}{g}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\\
&\prec \frac{T^3 e^{(\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{4})T}+T^2 e^{(\delta-\frac{1}{4})T}+T^4}{g}\\
&\prec \frac{T^3 e^{(\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{4})T}+T^2 e^{(\delta-\frac{1}{4})T}}{g},
\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

9.4. **类型4于**Int_{ns}。在此类型中，非简单闭测地线 γ 将填满一个具有两个尖点的子曲面 $Y\subset X$。该子曲面由一条简单闭测地线 η 围成，且$X\setminus\eta = Y\cup S_{g,\ n-1}$。

引理 9.11。若 $n=n(g)\ =o(\sqrt{g})\ \geq 2$，则对于任意 $\delta>\frac{1}{2}$ 和 $\epsilon>0$，

$$\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[1_{\mathcal{N}_\ell}\sum_{\substack{\gamma \text{ double-fills of type 4}\\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\right]\prec n^2\frac{Te^{(\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{4})T}+e^{(\delta-\frac{1}{4})T}}{g},$$

其中隐含常数依赖于 ϵ、δ，且与 T、g无关。

证明。沿用双重填充项估计（9.7）中的相同论证，对于 $Y\simeq S_{0,3}$ 和 $Y\simeq S_{0,3}$，其中 $X\setminus Y\simeq S_{g,n-1}$，若 η 是双曲平面上的一条简单闭测地线，将 Y 切除，则有

$$1_{\mathcal{N}_\ell}\sum_{\substack{\gamma \text{ double-fills } Y\\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\prec B^1_{\epsilon,\delta,T}\left(\ell_\eta(X)\right), \tag{9.40}$$

其中

$$B^1_{\epsilon,\delta,T}(x)=\begin{cases}(1+x)e^{\epsilon x}+e^{(\delta-\frac{1}{2})T}, & \text{if}\quad x\le\dfrac{T}{2};\\ Te^{\frac{T}{2}-(1-\epsilon)x}, & \text{if}\quad \dfrac{T}{2}<x\le T;\\ 0 & \text{if}\quad x>T.\end{cases}$$

将（9.40）对 η 的每个映射类群轨道应用米尔扎哈尼积分公式定理2.2，根据定理 4.1、定理 4.4 和引理4.10，可得

$$\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[1_{\mathcal{N}_\ell}\sum_{\substack{\gamma \text{ double-fills of type 4}\\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&\prec \frac{\binom{n}{2}}{V_{g,n}} \int_{\mathbb{R}_+} V_{0,3}(0,0,x) V_{g,n-1}(x,0^{n-2}) B^1_{\epsilon,\delta,T}(x)\, x dx \\
&\prec \frac{n^2}{g} \int_{\mathbb{R}_+} B^1_{\epsilon,\delta,T}(x) \sinh \frac{x}{2} dx \\
&\leq \frac{n^2}{g} \int_0^{\frac{T}{2}} \left[(1+x) e^{\epsilon x} + e^{(\delta - \frac{1}{2})T} \right] \sinh \frac{x}{2} dx \\
&+ \frac{n^2}{g} \int_{\frac{T}{2}}^{\infty} \left[T e^{\frac{T}{2} - (1-\epsilon)x} \right] \sinh \frac{x}{2} dx \\
&\prec \frac{n^2}{g} \left(T e^{\left(\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2}\right)T} + e^{\left(\delta - \frac{1}{4}\right)T} \right),
\end{aligned}
$$

其中，因子 $\binom{n}{2}$ 来源于从 n 个边界分支中选取 Y 的两个尖点边界的可能方式，这是因为 η 的轨道可以由其所界定的两个尖点连通分支的标记确定。□

与非双重填充的类型 3 测地线类似，非双重填充的类型 4 测地线对 Int_{ns} 的贡献无需精确估计。我们还将一条 8 字形闭测地线视为迭代次数为 $k = 1$ 的单侧迭代闭测地线。于是有以下估计。

引理 9.12。若 $n = n(g) = o(\sqrt{g}) \geq 2$，则对任意 $k \geq 1$，

$$
\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}} \left[\sum_{\substack{\gamma \text{ one-sided iterated} \\ \text{eight of type 4} \\ \text{iteration number } = k \\ \ell_\gamma(X) \leq T}} H_{X,1}(\gamma) \right] \prec \frac{n^2 T^2}{gk} \cdot \mathbf{1}_{k \leq \frac{\cosh \frac{T}{2} - 1}{2}},
$$

其中隐含常数与 g、k 和 T 无关。

证明。在 $Y \simeq S_0$ 中，η 将其与带有两个尖点边界的 X 隔开，其中有 3 种不同类型的单侧迭代 8 字形闭测地线。第一类会围绕两个尖点边界螺旋。第二类会围绕 η 螺旋 k 次，并围绕一个尖点边界螺旋 1 次。第三类会围绕 η 螺旋 1 次，并围绕一个尖点边界螺旋 k 次。注意，对于 $k = 1$，后两类测地线会重合。它们的长度分别为 $L_k(0, 0, \ell_\eta(X))$、$L_k(0, \ell_\eta(X), 0)$ 和 $L_k(\ell_\eta(X), 0, 0)$，其中 L_k 由 (3.2) 给出。将 η 的所有映射类群轨道代入米尔扎哈尼积分公式定理 2.2，根据定理 4.1，定理

4.4 和引理4.10，我们有

(9.41)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{\gamma \text{ one-sided iterated}\\ \text{eight of type 4}\\ \text{iteration number } =k\\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
&\prec \frac{\binom{n}{2}}{V_{g,n}}\int_{\mathbb{R}_+}\left[\overline{H}_{X,1}(L_k(0,0,x))+\overline{H}_{X,1}(L_k(0,x,0))+\overline{H}_{X,1}(L_k(x,0,0))\right]\\
&\cdot V_{0,3}(0,0,x)V_{g-1,n+1}(x,0^{n-2})x\,dx\\
&\prec \frac{n^2}{g}\int_{\mathbb{R}_+}\left[\overline{H}_{X,1}(L_k(0,0,x))+\overline{H}_{X,1}(L_k(0,x,0))+\overline{H}_{X,1}(L_k(x,0,0))\right]\\
&\cdot \sinh\frac{x}{2}dx,
\end{aligned}$$

其中因子 $\binom{n}{2}$ 来自于在 n 个边界分支中选取两个尖点边界的可能方式。注意，**支撑**$(H_{X,\,1})\subset[-T,T]$。 —

对于第一类单侧迭代 8 字形闭测地线的项，注意

$$\cosh\frac{L_k(0,0,x)}{2}=k+1+k\cosh\frac{x}{2}.$$

作变量替换 $x\mapsto t=L_k(0,\ 0,\ x)$，我们有

$$\sinh\frac{t}{2}dt=k\sinh\frac{x}{2}dx$$

and

$$t\ge 2\,\mathrm{arccosh}(2k+1).$$

由此可得

(9.42)

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+}\overline{H}_{X,1}(L_k(0,0,x))\sinh\frac{x}{2}dx\\
&\prec\int_{L_x(0,0,x)\le T}\frac{L_x(0,0,x)}{\sinh\frac{L_x(0,0,x)}{2}}\sinh\frac{x}{2}dx\\
&=\int_{2\,\mathrm{arccosh}(2k+1)}^{T}\frac{t}{\sinh\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{k}\sinh\frac{t}{2}dt\cdot\mathbf{1}_{k\le\frac{\cosh\frac{T}{2}-1}{2}}\\
&\prec\frac{T^2}{k}\mathbf{1}_{k\le\frac{\cosh\frac{T}{2}-1}{2}}.
\end{aligned}$$

对于第二类单侧迭代八次闭测地线，we have

$$L_k(0,x,0)\ge\max\{kx,2\,\mathrm{arccosh}(2k+1)\}.$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+} \overline{H}_{X,1}(L_k(0,x,0)) \sinh \frac{x}{2} dx \\
\prec &\int_{kx \le L_k(0,x,0) \le T} \frac{L_k(0,x,0)}{\sinh \frac{L_k(0,x,0)}{2}} \sinh \frac{x}{2} dx \cdot \mathbf{1}_{k \le \frac{\cosh \frac{T}{2}-1}{2}} \\
\prec &\int_{kx \le T} \frac{kx}{\sinh \frac{k}{2}x} \sinh \frac{x}{2} dx \cdot \mathbf{1}_{k \le \frac{\cosh \frac{T}{2}-1}{2}} \\
\prec &\int_{kx \le T} x dx \cdot \mathbf{1}_{k \le \frac{\cosh \frac{T}{2}-1}{2}} \\
\prec &\frac{T^2}{k^2} \cdot \mathbf{1}_{k \le \frac{\cosh \frac{T}{2}-1}{2}}.
\end{aligned} \tag{9.43}
$$

第三类单侧迭代 8 字形闭测地线的项可用与第一类相同的方法估计。我们有

$$\cosh \frac{L_k(x,0,0)}{2} = (k+1) \cosh \frac{x}{2} + k.$$

在变量替换 $x \mapsto t = L_k(x, 0, 0)$ 下，我们有

$$\sinh \frac{t}{2} dt = (k+1) \sinh \frac{x}{2} dx$$

and

$$t \ge 2 \operatorname{arccosh}(2k+1).$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+} \overline{H}_{X,1}(L_k(x,0,0)) \sinh \frac{x}{2} dx \\
\prec &\int_{L_k(x,0,0) \le T} \frac{L_x(x,0,0)}{\sinh \frac{L_x(x,0,0)}{2}} \sinh \frac{x}{2} dx \\
= &\int_{2 \operatorname{arccosh}(2k+1)}^{T} \frac{t}{\sinh \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{k+1} \sinh \frac{t}{2} dt \cdot \mathbf{1}_{k \le \frac{\cosh \frac{T}{2}-1}{2}} \\
\prec &\frac{T^2}{k+1} \mathbf{1}_{k \le \frac{\cosh \frac{T}{2}-1}{2}}.
\end{aligned} \tag{9.44}
$$

该引理由（9.41）、（9.42）、（9.43）和（9.44）可得。 □

现在我们可以将（7.1）中类型 4 填充测地线对 Int_{ns} 的总贡献界定为

引理 9.13。若 $n = n(g) = o(\sqrt{g}) \ge 2$，则对于任意 $\delta > \frac{1}{2}$和 $\epsilon > 0$，

$$\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n} \left[1_{\mathcal{N}_\ell} \sum_{\substack{\gamma \text{ of type 4} \\ \ell_\gamma(X) \le T}} H_{X,1}(\gamma) \right] \prec n^2 \frac{T e^{(\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{4})T} + e^{(\delta-\frac{1}{4})T}}{g},$$

其中隐含常数依赖于 ϵ、δ，且与 T、g无关。

证明。 由引理9.11和引理 9.12，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[1_{\mathcal{N}_\ell}\sum_{\substack{\gamma \text{ of type 4}\\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
&\prec n^2\frac{Te^{(\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{4})T}+e^{(\delta-\frac{1}{4})T}}{g}+\frac{n^2T^2}{g}\sum_{k=2}^{\left[\frac{\cosh\frac{T}{2}-1}{2}\right]}\frac{1}{k}\\
&\prec n^2\frac{Te^{(\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{4})T}+e^{(\delta-\frac{1}{4})T}}{g}+\frac{n^2T^2}{g}\log\left(\frac{\cosh\frac{T}{2}-1}{2}\right)\\
&\prec n^2\frac{Te^{(\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{4})T}+e^{(\delta-\frac{1}{4})T}}{g}+\frac{n^2T^3}{g}\\
&\prec n^2\frac{Te^{(\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{4})T}+e^{(\delta-\frac{1}{4})T}}{g},
\end{aligned}$$

由此证明完毕。 □

9.5. 类型 5 在 Int_{ns}. 在这种类型中，非简单闭测地线 γ 将填满一个带有一个尖点的子曲面 $Y\subset X$。它由两条简单闭测地线 $\eta_1\cup\eta_2$ 围成，且 $X\setminus\{\eta_1\cup\eta_2\}=Y\cup S_{g-1,n+1}$。在此先提醒读者，在我们所考虑的问题中，与类型 3 不同，4 型测地线项的总贡献并非一个小量。

引理 9.14。 若 $n=n(g)=o(\sqrt{g})\ge 1$，则对任意 $\delta>\frac{1}{2}$ 和 $\epsilon>0$，

$$\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[1_{\mathcal{N}_\ell}\sum_{\substack{\gamma \text{ double-fills of type 5}\\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\right]\prec n\frac{T^2e^{\left(\frac{1}{4}+\frac{\epsilon}{2}\right)T}+Te^{\left(\delta-\frac{1}{4}\right)T}}{g},$$

其中隐含常数依赖于 ϵ、δ，且与 T、g无关。

证明。 对双重填充项采用与估计式（9.7）相同的论证。对于 $Y\simeq S_{0,3}$ 和 $Y\simeq S_{0,3}$ 且 $X\setminus Y\simeq S_{g-1,n+1}$，若 $\eta_1,\overline{\eta_2}$ 是曲面 X 上截出 Y的两条简单闭测地线，则有

$$1_{\mathcal{N}_\ell}\sum_{\substack{\gamma \text{ double- fills } Y\\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\prec B^1_{\epsilon,\delta,T}\left(\ell_{\eta_1}(X)+\ell_{\eta_2}(X)\right), \tag{9.45}$$

其中

$$B^1_{\epsilon,\delta,T}(x)=\begin{cases}(1+x)e^{\epsilon x}+e^{(\delta-\frac{1}{2})T}, & \text{if}\quad x\le\dfrac{T}{2};\\ Te^{\frac{T}{2}-(1-\epsilon)x}, & \text{if}\quad \dfrac{T}{2}<x\le T;\\ 0 & \text{if}\quad x>T.\end{cases}$$

将映射类群轨道上的 9.45 求和，并对 $\eta_1\cup\eta_2$ 应用 Mirzakhani 积分公式定理 2.2，根据定理 4.1、定理 4.4 以及

引理4.10，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[1_{\mathcal{N}_\ell}\sum_{\substack{\gamma \text{ double-fills of type } 5\\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
\prec&\frac{\binom{n}{1}}{V_{g,n}}\int_{\mathbb{R}_+^2} V_{0,3}(0,x,y)V_{g-1,n+1}(x,y,0^{n-1})B^1_{\epsilon,\delta,T}(x+y)\,xydxdy\\
\prec&\frac{n}{g}\int_{\mathbb{R}_+^2} B^1_{\epsilon,\delta,T}(x+y)\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}dxdy\\
\le&\frac{n}{g}\int_{x+y\le\frac{T}{2}}\left[(1+x+y)e^{\epsilon(x+y)}+e^{(\delta-\frac12)T}\right]\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}dxdy\\
+&\frac{n}{g}\int_{\frac{T}{2}\le x+y\le T}\left[Te^{\frac{T}{2}-(1-\epsilon)(x+y)}\right]\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}dxdy\\
\prec&\frac{n}{g}\left(T^2e^{\left(\frac14+\frac{\epsilon}{2}\right)T}+Te^{\left(\delta-\frac14\right)T}\right),
\end{aligned}
$$

其中因子 $\binom{n}{1}$ 源于在 X的 n 个边界分支中，为 Y 选择尖点边界的可能方式。□

引理 9.15。若 $n=n(g)\ =o(\sqrt{g})^{-}\ge 1$，则

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{\gamma \text{ figure-eight of type } 5,\\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
=&\frac{n}{\pi^2 g}\left(\int_0^\infty f_T(t)e^{\frac{t}{2}}\cdot\frac{t}{4}dt+O\left(T^3\right)\right)\left(1+O\left(\frac{nT^2}{g}\right)\right),
\end{aligned}
$$

其中隐含常数在 g 和 T上是一致的。

证明。在 $Y\simeq S_0$中，3 与 X 相距 $\eta_1\cup\eta_2$，且有一个尖点边界，存在两种不同类型的 8 字形闭测地线。一种将绕着 η_1 和 η_2螺旋，另一种将绕着尖点边界和 $\{\eta_1,\eta_2\}$之一螺旋。它们的长度分别为 $L_{f-8}(\ell_{\eta_1}(X)\ \ell_{\eta_2}(X),0)$ 和$L_{f-8}(0,\ell_{\eta_i}(X)\ \ell_{\eta_{3-i}}(X))$，其中 L_{f-8} 由公式 (3.1) 给出。

根据引理 4.10 和定理4.11(或引理 B.8)，对于 $n=o(\sqrt{g})$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{V_{0,3}(x,y,0)V_{g-1,n+1}(x,y,0^{n-1})}{V_{g,n}}\\
=&\frac{1}{2\pi^2 g}\frac{\sinh\frac{x}{2}}{x}\frac{\sinh\frac{y}{2}}{y}\left(1+O\left(\frac{n(1+x^2+y^2)}{g}\right)\right).
\end{aligned}
\tag{9.46}
$$

将 $\eta_1 \cup \eta_2$ 的所有映射类群轨道代入米尔扎哈尼积分公式定理 2.2，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{\gamma \text{ figure-eight of type } 5,\\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
=&2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\binom{n}{1}}{V_{g,n}}\int_{\mathbb{R}_+^2}\left[\overline{H}_{X,1}(L_{f-8}(x,0,y))+\overline{H}_{X,1}(L_{f-8}(y,0,x))\right.\\
&\left.+\overline{H}_{X,1}(L_{f-8}(x,y,0))\right]\cdot V_{0,3}(x,y,0)V_{g-1,n+1}(x,y,0^{n-1})xydxdy\\
=&\frac{n}{2\pi^2 g}\int_{\mathbb{R}_+^2}\left[2\overline{H}_{X,1}(L_{f-8}(x,0,y))+\overline{H}_{X,1}(L_{f-8}(x,y,0))\right]\\
&\cdot\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}\left(1+O\left(\frac{n(1+x^2+y^2)}{g}\right)\right)dxdy\\
=&\frac{n}{2\pi^2 g}\int_{\mathbb{R}_+^2}\left[2\overline{H}_{X,1}(L_{f-8}(x,0,y))+\overline{H}_{X,1}(L_{f-8}(x,y,0))\right]\\
&\cdot\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}dxdy\left(1+O\left(\frac{nT^2}{g}\right)\right).
\end{aligned}
\tag{9.47}
$$

在第二行，因子$_{1\ 2}$ 抵消了 $\{\gamma_1,\gamma_2\}$排序的重数，而因子 2 则源自任意 γ的两种定向。在最后一行，我们利用了以下事实： $x,y,z\le L_{f-8}(x,y,z)$，且**支撑**$(f_T)=[-T,T]$。

由于 $L_{f-8}(x,y,z)\ge \max\{x+y,z\}$，因此

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^2}\overline{H}_{X,1}(L_{f-8}(x,y,0))\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}dxdy\\
\prec&\int_{x+y\le L_{f-8}(x,y,0)\le T}\frac{L_{f-8}(x,y,0)}{\sinh\frac{L_{f-8}(x,y,0)}{2}}\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}dxdy\\
\prec&\int_{x+y\le T}\frac{x+y}{\sinh\frac{x+y}{2}}\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}dxdy\\
\prec&\int_{x+y\le T}(x+y)dxdy\\
\prec&T^3.
\end{aligned}
\tag{9.48}
$$

如果我们将变量$(x,y)\mapsto(x,t)$与 $t=L_{f-8}(x,0,y)$作如下变换：

$$\cosh\frac{L_{f-8}(x,0,y)}{2}=2\cosh\frac{x}{2}+\cosh\frac{y}{2},$$

我们将得到

$$\sinh\frac{t}{2}dt=2\sinh\frac{x}{2}dx+\sinh\frac{y}{2}dy,$$

and

$$2\cosh\frac{x}{2}\le\cosh\frac{t}{2}-1.$$

Then

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^2} \overline{H}_{X,1}(L_{f-8}(x,0,y)) \sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}dxdy \\
=&\int_{t=2\operatorname{arccosh} 3}^{T} \int_{2\cosh\frac{x}{2}\le\cosh\frac{t}{2}-1} \frac{t}{2\sinh\frac{t}{2}} f_T(t)\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{t}{2}dxdt \\
=&\int_{t=2\operatorname{arccosh} 3}^{T} \frac{t}{2}\left(\cosh\frac{t}{2}-3\right) f_T(t)dt \\
=&\int_0^{\infty} f_T(t)e^{\frac{t}{2}}\cdot\frac{t}{4}\cdot dt + O\left(T^2\right).
\end{aligned} \tag{9.49}
$$

将（9.48）和（9.49代入（9.47），即可得到该引理。 □

引理 9.16。 若 $n = n(g) = o(\sqrt{g})$，则对任意 $k \ge 2$，

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{\gamma \text{ one-sided iterated eight of type 5} \\ \text{iteration number } =k \\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\right] \\
=&\frac{n}{2\pi^2 g}\left(\int_0^{\infty}\frac{tf_T(t)e^{\frac{t}{2}}}{k(k+1)}dt + O\left(\frac{T^3}{k}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{nT^2}{g}\right)\right)\cdot \mathbf{1}_{k\le\frac{\cosh\frac{T}{2}-1}{2}},
\end{aligned}
$$

其中隐含常数与 g、k、T 无关。

证明。对于任意由 $\eta_1\cup\overline{\eta_2}$ 与 X 隔开的、具有一个尖点边界的 $Y\simeq S_0$ 中的 $k\ge 2$，都存在三种不同类型、迭代次数为 k 的单侧迭代 8 字形闭测地线。第一种将围绕 η_i 中的某一个螺旋 k 次，并围绕 η_{3-i} 螺旋 1 次。第二种将围绕 η_i 中的某一个螺旋 k 次，并围绕尖点边界螺旋 1 次。第三种将围绕 η_i 中的某一个螺旋 1 次，并围绕尖点边界螺旋 k 次。它们的长度分别为 $L_k(\ell_{\eta_{3-i}}(X)\ \ell_{\eta_i}(X), 0)$、$L_k(0, \ell_{\eta_i}(X)\ \ell_{\eta_{3-i}}(X))$ 和 $L_k(\ell_{\eta_i}(X)\ 0, \ell_{\eta_{3-i}}(X))$，其中 L_k 由公式 (3.2) 给出。

将 $\eta_1 \cup \eta_2$ 的所有映射类群轨道代入米尔扎哈尼积分公式定理 2.2，由 (9.46)，可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{\gamma \text{ one-sided iterated eight of type 5} \\ \text{iteration number } =k \\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\right] \\
=&2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\binom{n}{1}}{V_{g,n}}\int_{\mathbb{R}_+^2}\big[\overline{H}_{X,1}(L_k(x,y,0))+\overline{H}_{X,1}(L_k(y,x,0)) \\
&+\overline{H}_{X,1}(L_k(x,0,y))+\overline{H}_{X,1}(L_k(y,0,x))+\overline{H}_{X,1}(L_k(0,x,y)) \\
&+\overline{H}_{X,1}(L_k(0,y,x))\big]\cdot V_{0,3}(x,y,0)V_{g-1,n+1}(x,y,0^{n-1})xydxdy \\
=&\frac{n}{\pi^2 g}\int_{\mathbb{R}_+^2}\big[\overline{H}_{X,1}(L_k(x,y,0))+\overline{H}_{X,1}(L_k(x,0,y)) \\
&+\overline{H}_{X,1}(L_k(0,x,y))\big]\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}dxdy\left(1+O\left(\frac{nT^2}{g}\right)\right).
\end{aligned}
\tag{9.50}
$$

这里在第二行，因子 $_1$ $_2$ 抵消了 $\{\eta_1,\eta_2\}$ 排序的重数，而因子 2 则来自任意 γ 的两种定向。在最后一行，我们使用了如下事实： $x,y,z\le L_k(x,y,z)$，且 **支撑**$(f_T)=[-T,T]$。

由于 $L_k(x,y,0)\ge x+ky$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^2}\overline{H}_{X,1}(L_k(x,y,0))\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}dxdy \\
\prec&\int_{x+ky\le L_k(x,y,0)\le T}\frac{L_k(x,y,0)}{\sinh\frac{L_k(x,y,0)}{2}}\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}dxdy \\
\prec&\int_{x+ky\le L_k(x,y,0)\le T}\frac{x+ky}{\sinh\frac{x+ky}{2}}\sinh\frac{x}{2}\frac{\sinh\frac{ky}{2}}{k}dxdy \\
\prec&\frac{1}{k}\int_{x+ky\le T}(x+ky)dxdy \\
\prec&\frac{T^3}{k^2}.
\end{aligned}
\tag{9.51}
$$

如果我们通过以下方式进行变量替换 $(x,y)\mapsto(x,t)$，其中 $t=L_k(0,x,y)$

$$
\cosh\frac{L_k(0,x,y)}{2}=\frac{\sinh\frac{k+1}{2}x}{\sinh\frac{x}{2}}+\frac{\sinh\frac{k}{2}x}{\sinh\frac{x}{2}}\cosh\frac{y}{2},
$$

我们将有

$$
\sinh\frac{t}{2}dt=*dx+\frac{\sinh\frac{k}{2}x}{\sinh\frac{x}{2}}\sinh\frac{y}{2}dy,
$$

其中 $*$ 是 x 上的某个函数， y。于是

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^2} \overline{H}_{X,1}(L_k(0,x,y)) \sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}dxdy \\
\prec &\int_{L_k(0,x,y)\le T} \frac{L_k(0,x,y)}{\sinh\frac{L_k(0,x,y)}{2}} \sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}dxdy \\
\prec &\int_{t=0}^{T}\int_{kx\le t} t\frac{\sinh^2\frac{x}{2}}{\sinh\frac{k}{2}x}dxdt.
\end{aligned} \tag{9.52}$$

对于 $k=2$ ，我们有

$$\int_{kx\le t}\frac{\sinh^2\frac{x}{2}}{\sinh\frac{k}{2}x}dx \le t.$$

对于 $k\ge 3$ ，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{kx\le t}\frac{\sinh^2\frac{x}{2}}{\sinh\frac{k}{2}x}dx \\
\le &\int_0^{\frac{1}{k}}\frac{x}{k}dx+\int_{\frac{1}{k}}^1 x^2e^{-\frac{k}{2}x}dx+\int_1^\infty e^{(1-\frac{k}{2})x}dx \\
\prec &\frac{1}{k^3}.
\end{aligned}$$

因此，由（9.52）可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^2} \overline{H}_{X,1}(L_k(0,x,y)) \sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}dxdy \\
\prec &\mathbf{1}_{k\ge 3}\frac{T^2}{k^3}+\mathbf{1}_{k=2}T^3 \\
\prec &\frac{T^3}{k^3}.
\end{aligned} \tag{9.53}$$

若通过以下方式进行变量替换：$(x,\ y)\mapsto(y,\ t)$，其中 $t=L_k(x,\ 0,\ y)$，则

$$\cosh\frac{L_k(x,0,y)}{2}=(k+1)\cosh\frac{x}{2}+k\cosh\frac{y}{2},$$

我们将有

$$\sinh\frac{t}{2}dt=(k+1)\sinh\frac{x}{2}dx+k\sinh\frac{y}{2}dy$$

and

$$\cosh\frac{t}{2}\ge k+1+k\cosh\frac{y}{2}.$$

由此可得

(9.54)

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^2} \overline{H}_{X,1}(L_k(x,0,y)) \sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}dxdy \\
=&\int_{t=2\,\mathrm{arccosh}(2k+1)}^{T} \frac{t}{2(k+1)} f_T(t)\left(\int_{\cosh\frac{t}{2}\geq k+1+k\cosh\frac{y}{2}} \sinh\frac{y}{2}dy\right)dt \\
=&\int_{2\,\mathrm{arccosh}(2k+1)}^{T} \frac{t}{k+1} f_T(t)\frac{\cosh\frac{t}{2}-2k-1}{k}dt\cdot \mathbf{1}_{k\leq\frac{\cosh\frac{T}{2}-1}{2}} \\
=&\int_{2\,\mathrm{arccosh}(2k+1)}^{T} \frac{1}{k(k+1)} t f_T(t)\cosh\frac{t}{2}dt\cdot \mathbf{1}_{k\leq\frac{\cosh\frac{T}{2}-1}{2}} \\
&+O\left(\frac{T^2}{k}\right)\cdot \mathbf{1}_{k\leq\frac{\cosh\frac{T}{2}-1}{2}} \\
=&\int_{0}^{T} \frac{1}{k(k+1)} t f_T(t)\cosh\frac{t}{2}dt\cdot \mathbf{1}_{k\leq\frac{\cosh\frac{T}{2}-1}{2}} + O\left(\frac{T^2}{k}\right)\cdot \mathbf{1}_{k\leq\frac{\cosh\frac{T}{2}-1}{2}}.
\end{aligned}
$$

该引理由（9.50）、（9.51）、（9.53）和（9.54）可得。 □

现在，我们可以计算式ns （7.1）中类型 5 的填充测地线的总贡献。它完全抵消了引理 8.1的主项中包含 n 的部分。

引理 9.17。 若 $n=n\ (g)\ =o\ (\sqrt{g})\ \geq 1$，则对于任意 $\delta\geq\frac{1}{2}$ 和 $\epsilon>0$，

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[1_{\mathcal{N}_\ell}\sum_{\substack{\gamma\ of\ type\ 5\\ \ell_\gamma(X)\leq T}} H_{X,1}(\gamma)\right] \\
\leq&\frac{n}{2\pi^2 g}\int_0^\infty t f_T(t)e^{\frac{t}{2}}dt + O\left(n\frac{T^2e^{\left(\frac{1}{4}+\frac{\epsilon}{2}\right)T}+Te^{\left(\delta-\frac{1}{4}\right)T}}{g}+\frac{n^2T^3e^{\frac{T}{2}}}{g^2}\right),
\end{aligned}
$$

其中，隐含常数取决于 ϵ、δ，且与 T、g 无关。

证明。 由引理 9.14、引理 9.15 和引理 9.16，可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[1_{\mathcal{N}_\ell}\sum_{\substack{\gamma\ of\ type\ 5\\ \ell_\gamma(X)\leq T}} H_{X,1}(\gamma)\right] \\
\leq&O\left(n\frac{T^2e^{\left(\frac{1}{4}+\frac{\epsilon}{2}\right)T}+Te^{\left(\delta-\frac{1}{4}\right)T}}{g}\right)+\frac{n}{\pi^2 g}\left(1+O\left(\frac{nT^2}{g}\right)\right) \\
&\cdot\left[\int_0^T t f_T(t)e^{\frac{t}{2}}dt\cdot\left(\frac{1}{4}+\sum_{k=2}^{\left[\frac{\cosh\frac{T}{2}-1}{2}\right]}\frac{1}{2k(k+1)}\right)+O\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{\cosh\frac{T}{2}-1}{2}\right]}\frac{T^3}{k}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&O\left(n\frac{T^2e^{\left(\frac{1}{4}+\frac{\epsilon}{2}\right)T}+Te^{\left(\delta-\frac{1}{4}\right)T}}{g}\right)+\frac{n}{\pi^2 g}\left(1+O\left(\frac{nT^2}{g}\right)\right)\\
&\cdot\left[\int_0^T tf_T(t)e^{\frac{t}{2}}dt\cdot\left(\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{\cosh\frac{T}{2}}\right)\right)+O\left(T^3\log\left(\frac{\cosh\frac{T}{2}-1}{2}\right)\right)\right]\\
=&\frac{n}{2\pi^2 g}\int_0^\infty tf_T(t)e^{\frac{t}{2}}dt+O\left(n\frac{T^2e^{\left(\frac{1}{4}+\frac{\epsilon}{2}\right)T}+Te^{\left(\delta-\frac{1}{4}\right)T}}{g}+\frac{n^2T^3e^{\frac{T}{2}}}{g^2}\right),
\end{aligned}
$$

至此，证明完成。 □

9.6. **类型** 6 **在** Int_{ns}。 对于类型 6 的非简单测地线，定理 3.2和引理 3.7 中的计数函数足以给出如下命题。

命题 9.18. [WX22a，命题 30] 对任意 $\epsilon>0$，当 $g\to\infty$，

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{\gamma\ of\ type\ 6\\ \ell_\gamma(X)\le T}} H_{X,1}(\gamma)\prec T^2e^T\sum_{\substack{Y\ subsurface\ of\ X\\ 56\le|\chi(Y)|\le\frac{2T}{\pi}}} e^{-\frac{1}{4}\ell(\partial Y)}\mathbf{1}_{[0,2T]}(\ell(\partial Y))\\
+T\sum_{\substack{Y\ subsurface\ of\ X,\\ 2\le|\chi(Y)|\le 55,\ or\\ \chi(X)=-1,and\\ Y\setminus X\ is\ disconnected}} e^{\frac{T}{2}-\frac{1-\epsilon}{2}\ell(\partial Y)}\mathbf{1}_{[0,2T]}(\ell(\partial Y)).
\end{aligned}
$$

引理 9.19. 若 $n=o(\sqrt{g})$，则对任意 $\epsilon>0$，

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[T^2e^T\sum_{\substack{Y\ subsurface\ of\ X\\ 56\le|\chi(Y)|\le\frac{2T}{\pi}}} e^{-\frac{1}{4}\ell(\partial Y)}\mathbf{1}_{[0,2T]}(\ell(\partial Y))\right]\\
+&\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[T\sum_{\substack{Y\ subsurface\ of\ X\\ 2\le|\chi(Y)|\le 55}} e^{\frac{T}{2}-\frac{1-\epsilon}{2}\ell(\partial Y)}\mathbf{1}_{[0,2T]}(\ell(\partial Y))\right]\\
\prec&\frac{T^6e^{\frac{9}{2}T}}{g^{27}}+T^{230}e^{(\frac{1}{2}+\epsilon)T}\frac{1+n^3}{g^2}.
\end{aligned}
$$

证明。我们将 Y的可能轨道分类。假设 $X\setminus Y$有 q 个类型为$S_{g_i\text{的连通分支},\ n_i+a_i}$其中 $i=1,\ \cdots,\ q$，其中 a_i是尖点的数量， n_i 是边界测地线的数量。假设 Y 属于$S_{g_0\text{类型},\ k+a_0}$，其中 a_0 是尖点的数量， k 是边界测地线的数量，且有 $n_0\ge 0$ 对边界测地线在X上重合。示意见图7。于是有

(1) $\sum_{i=1}^q(2g_i+n_i+a_i-2)=2g+n-2-|\chi(Y)|$;
(2) $\sum_{i=1}^q n_i=k-2n_0$;
(3) $\sum_{i=1}^q a_i=n-a_0$.

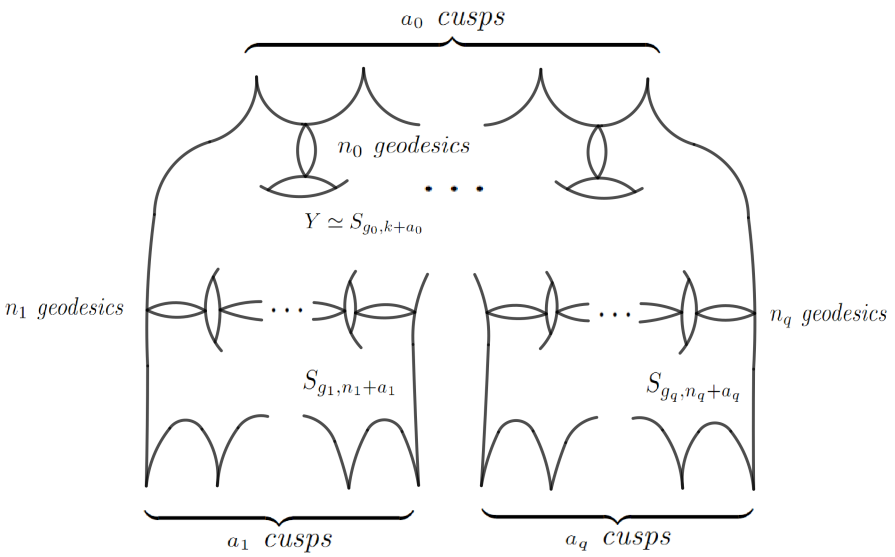


FIGURE 7. $Y \subset X$ 与 $|\chi(Y)| \geq 2$

我们记 $\mathcal{A}$ 为固定g_0, k, a, n_0, q时所有可能的 $\{(g_i,\ n_i,\ a_i)\}_{i=1}^q$ 的指标集。对于 $56 \leq 2g_0 + a_0 + k - 2 \leq \frac{2T}{\pi}$, 根据[WX22a中的相同论证, 命题 31], 给出

$$\begin{aligned}(9.55)\quad &\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{Y\simeq S_{g_0,k+a_0}\subset X\\ \text{with } a_0 \text{ cusps}}} e^{-\frac{1}{4}\ell(\partial Y)}\mathbf{1}_{[0,2T]}(\ell(\partial Y))\right]\\ &\prec e^{\frac{7}{2}T}\sum_{n_0=0}^{[\frac{k-1}{2}]}\sum_{q=1}^{k-2n_0}\sum_{\{(g_i,n_i,a_i)\}_{i=1}^q\in\mathcal{A}}\binom{n}{a_0,\cdots,a_q}\frac{V_{g_0,a_0+k}\prod_{i=1}^q V_{g_i,n_i+a_i}}{V_{g,n}n_0!n_1!\cdots n_q!}.\end{aligned}$$

由于 $q \prec T = O$(对数函数 g), 我们可以应用引理 B.17 得到

$$\begin{aligned}(9.56)\quad &\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[T^2e^T\sum_{\substack{Y\simeq S_{g_0,k+a_0}\subset X\\ \text{with } a_0 \text{ cusps}}} e^{-\frac{1}{4}\ell(\partial Y)}\mathbf{1}_{[0,2T]}(\ell(\partial Y))\right]\\ &\prec\sum_{n_0=0}^{[\frac{k-1}{2}]}\sum_{q=1}^{k-2n_0}T^2e^{\frac{9}{2}T}(2g_0+k+a_0-3)!\frac{1+n^{a_0}}{g^{2g_0+a_0+k-2}}\\ &\prec T^2k^2e^{\frac{9}{2}T}(2g_0+k+a_0-3)!\frac{1+n^{a_0}}{g^{2g_0+a_0+k-2}}.\end{aligned}$$

对所有可能的 (9.56,g_0, a_0, k) 求和，我们有

(9.57)
$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[T^2e^T\sum_{56\le|\chi(Y)|\le\frac{2T}{\pi}}e^{-\frac{1}{4}\ell(\partial Y)}\mathbf{1}_{[0,2T]}(\ell(\partial Y))\right]\\
\prec& T^2e^{\frac{9}{2}T}\sum_{a_0\le\frac{2T}{\pi}+1}\sum_{1\le k\le\frac{2T}{\pi}+2-a_0}\\
&\cdot\sum_{56\le 2g_0+k+a_0-2\le\frac{2T}{\pi}}k^2\frac{(1+n^{a_0})(2g_0+k+a_0-3)!}{g^{2g_0+a_0+k-2}}\\
\prec& T^2e^{\frac{9}{2}T}\sum_{a_0\le\frac{2T}{\pi}+1}\sum_{1\le k\le\frac{2T}{\pi}+2-a_0}\sum_{56\le 2g_0+k+a_0-2\le\frac{2T}{\pi}}k^2\frac{(2g_0+k+a_0-3)!}{g^{2g_0+\frac{a_0}{2}+k-2}}\\
\prec& T^2e^{\frac{9}{2}T}\sum_{a_0\le\frac{2T}{\pi}+1}\sum_{1\le k\le\frac{2T}{\pi}+2-a_0}k^2\frac{1}{g^{27}}\\
\prec&\frac{T^6e^{\frac{9}{2}T}}{g^{27}}.
\end{aligned}$$

若 $2\le 2g_0+a_0+k-2\le 55$，根据 [WX22a中的命题 34] 和引理 B.17中的相同论证，对于任意 $\epsilon>0$，我们有（9.58）

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[T\sum_{\substack{Y\simeq S_{g_0,k+a_0}\subset X\\ \text{with } a_0 \text{ cusps}}}e^{\frac{T}{2}-\frac{1-\epsilon}{2}\ell(\partial Y)}\mathbf{1}_{[0,2T]}(\ell(\partial Y))\right]\\
\prec& T^{230}e^{(\frac{1}{2}+\epsilon)T}\sum_{n_0=0}^{[\frac{k-1}{2}]}\sum_{q=1}^{k-2n_0}\sum_{\{(g_i,n_i,a_i)\}_{i=1}^q}\binom{n}{a_0,\cdots,a_q}\frac{V_{g_0,a_0+k}\prod_{i=1}^qV_{g_i,n_i+a_i}}{V_{g,n}n_0!n_1!\cdots n_q!}\\
\prec& T^{230}e^{(\frac{1}{2}+\epsilon)T}\sum_{n_0=0}^{[\frac{k-1}{2}]}\sum_{q=1}^{k-2n_0}(2g_0+k+a_0-3)!\frac{1+n^{a_0}}{g^{2g_0+a_0+k-2}}\\
\prec& T^{230}e^{(\frac{1}{2}+\epsilon)T}\frac{1+n^{a_0}}{g^{2g_0+a_0+k-2}}.
\end{aligned}$$

So

(9.59)
$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[T\sum_{2\le|\chi(Y)|\le 55}e^{\frac{T}{2}-\frac{1-\epsilon}{2}\ell(\partial Y)}\mathbf{1}_{[0,2T]}(\ell(\partial Y))\right]\\
\prec&\sum_{2\le 2g_0+a_0+k-2\le 55}T^{230}e^{(\frac{1}{2}+\epsilon)T}\frac{1+n^3}{g^2}\\
\prec& T^{230}e^{(\frac{1}{2}+\epsilon)T}\frac{1+n^3}{g^2}.
\end{aligned}$$

现在由引理可得（9.57）和（9.59）。 □

如果 $|\chi(Y)|=1$ 且 $X\setminus Y$不连通，则 Y必为类型 $S_{0,\ 3}$ 且尖点不超过 1 个。我们有：

引理 9.20. 若 $n=o(\sqrt{g})$，则对任意 $\epsilon>0$,

$$\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[T\sum_{\substack{Y\simeq S_{0,3}\subset X\\ X\setminus Y\ is\ disconnected}} e^{\frac{T}{2}-\frac{1-\epsilon}{2}\ell(\partial Y)}\mathbf{1}_{[0,2T]}(\ell(\partial Y))\right]\prec T^{230}e^{(\frac{1}{2}+\epsilon)T}\frac{1+n^3}{g^2}.$$

证明。有三种情形。第一种情形下，$X\setminus Y$有三个类型为 $S_{g_i,\ a_i+1}$ 的连通分支，$i=1$分别有 a_i 个尖点、2 个尖点和 3 个尖点，且每个连通分支都与 Y共享一条边界测地线。在这种情形下，$\sum_{i=1}^3 g_i=g$ 且 $\sum_{i=1}^n a_i=n$。第二种情形下，$X\setminus Y$ 有两个连通分支，类型分别为 $S_{g_1,\ a_1+1}$ 和$S_{g_2,\ a_2+2}$，其中 $S_{g_1,\ a_1+1}$ 与 Y 共享一条边界测地线，而$S_{g_2,\ a_1+2}$ 与 Y共享两条边界测地线。在这种情形下，$g_1+g_2=g-1$ 且 $a_1+a_2=n$。第三种情形下，Y有一个尖点，且 $X\setminus Y$ 有两个类型为 $S_{g_i,\ a_i+1}$ 的连通分支，$i=1$分别有 a_i 个尖点和 2 个尖点，且每个连通分支都与 Y共享一条边界测地线。在这种情形下，$g_1+g_2=g$ 且 $a_1+a_2=n-1$。由与 [WX22a 命题 34] 相同的论证可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[T\sum_{\substack{Y\simeq S_{0,3}\subset X\\ X\setminus Y\ is\ disconnected}} e^{\frac{T}{2}-\frac{1-\epsilon}{2}\ell(\partial Y)}\mathbf{1}_{[0,2T]}(\ell(\partial Y))\right]\\
\prec&\left[\sum_{\substack{g_1+g_2+g_3=g\\ a_1+a_2+a_3=n\\ 2\le 2g_1+a_1\le 2g_2+a_2\le 2g_3+a_3}}\binom{n}{a_1,a_2,a_3}\frac{V_{0,3}V_{g_1,a_1+1}V_{g_2,a_2+1}V_{g_3,a_3+1}}{V_{g,n}}\right.\\
&+\sum_{\substack{g_1+g_2=g-1\\ a_1+a_2=n\\ 2g_1+a_1\ge 2, 2g_2+a_2\ge 1}}\binom{n}{a_1}\frac{V_{0,3}V_{g_1,a_1+1}V_{g_2,a_2+2}}{V_{g,n}}\\
&\left.+\sum_{\substack{g_1+g_2=g\\ a_1+a_2=n-1\\ 2\le 2g_1+a_1\le 2g_2+a_2}}\binom{n}{1,a_1,a_2}\frac{V_{0,3}V_{g_1,a_1+1}V_{g_2,a_2+1}}{V_{g,n}}\right]\cdot T^{230}e^{(\frac{1}{2}+\epsilon)T}.
\end{aligned}\tag{9.60}$$

对于式（9.60）中的第一个求和，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{g_1+g_2+g_3=g\\ a_1+a_2+a_3=n\\ 2\le 2g_1+a_1\le 2g_2+a_2\le 2g_3+a_3}}\binom{n}{a_1,a_2,a_3}\frac{V_{0,3}V_{g_1,a_1+1}V_{g_2,a_2+1}V_{g_3,a_3+1}}{V_{g,n}}\\
\prec&\sum_{1\le 2g_1+a_1-1\le\frac{2g+n-3}{3}}\binom{n}{a_1}\frac{V_{g_1,a_1+1}V_{g-g_1,n-a_1}}{V_{g,n}}
\end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{g_2+g_3=g-g_1\\ a_2+a_3=n-a_1\\ 2g_1+a_1\le 2g_2+a_2\le 2g_3+a_3}} \binom{n-a_1}{a_2}\frac{V_{g_2,a_2+1}V_{g_3,a_3+1}}{V_{g-g_1,n-a_1}}.$$

由于 $g-g_1=g_2+g_3\asymp g$，由引理 B.14 针对 $k=1$，我们有

$$\sum_{\substack{g_2+g_3=g-g_1\\ a_2+a_3=n-a_1\\ 2g_1+a_1\le 2g_2+a_2\le 2g_3+a_3}} \binom{n-a_1}{a_2}\frac{V_{g_2,a_2+1}V_{g_3,a_3+1}}{V_{g-g_1,n-a_1}} \prec \frac{1+(n-a_1)^2}{g}.$$

根据定理4.4 和引理B.14 对于 $k=1$，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{1\le 2g_1+a_1-1\le\frac{2g+n-3}{3}} \binom{n}{a_1}\frac{V_{g_1,a_1+1}V_{g-g_1,n-a_1}}{V_{g,n}}\\ \prec&\frac{1}{g}\sum_{1\le 2g_1+a_1-1\le\frac{2g+n-3}{3}} \binom{n}{a_1}\frac{V_{g_1,a_1+1}V_{g-g_1,n-a_1+1}}{V_{g,n}}\\ \prec&\frac{1+n^2}{g^2}.\end{aligned}$$

So

$$\sum_{\substack{g_1+g_2+g_3=g\\ a_1+a_2+a_3=n\\ 2\le 2g_1+a_1\le 2g_2+a_2\le 2g_3+a_3}} \binom{n}{a_1,a_2,a_3}\frac{V_{0,3}V_{g_1,a_1+1}V_{g_2,a_2+1}V_{g_3,a_3+1}}{V_{g,n}}\prec\frac{1+n^4}{g^3}. \tag{9.61}$$

对于式（9.60）中的第二个求和，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{g_1+g_2=g-1\\ a_1+a_2=n\\ 2g_1+a_1\ge 2, 2g_2+a_2\ge 1}} \binom{n}{a_1}\frac{V_{0,3}V_{g_1,a_1+1}V_{g_2,a_2+2}}{V_{g,n}}\\ \prec&\sum_{\substack{g_1+g_2=g-1\\ a_1+a_2=n\\ g_1\ge g_2\\ 2g_2+a_2\ge 1}} \binom{n}{a_1}\frac{V_{g_1,a_1+1}V_{g_2,a_2+2}}{V_{g,n}}\\ +&\sum_{\substack{g_1+g_2=g-1\\ a_1+a_2=n\\ g_1\le g_2\\ 2g_1+a_1\ge 2}} \binom{n}{a_1}\frac{V_{g_1,a_1+1}V_{g_2,a_2+2}}{V_{g,n}}\end{aligned}$$

根据定理 4.4 和引理 B.16 对于 $k=1$，我们有

$$\sum_{\substack{g_1+g_2=g-1\\ a_1+a_2=n\\ g_1\ge g_2\\ 2g_2+a_2\ge 1}} \binom{n}{a_1}\frac{V_{g_1,a_1+1}V_{g_2,a_2+2}}{V_{g,n}}$$

$$\prec \frac{1}{g} \sum_{\substack{g_1+g_2=g-1\\ a_1+a_2=n\\ g_1\geq g_2\\ 2g_2+a_2\geq 1}} \binom{n}{a_1} \frac{V_{g_1,a_1+2}V_{g_2,a_2+2}}{V_{g-1,n+2}} \prec \frac{1+n}{g^2}.$$

根据定理 4.4 和引理 B.14 对于 $k=1$，我们有

$$\sum_{\substack{g_1+g_2=g-1\\ a_1+a_2=n\\ g_1\leq g_2\\ 2g_1+a_1\geq 2}} \binom{n}{a_1} \frac{V_{g_1,a_1+1}V_{g_2,a_2+2}}{V_{g,n}} \prec g \sum_{\substack{g_1+g_2=g-1\\ a_1+a_2=n\\ g_1\leq g_2\\ 2g_1+a_1\geq 2}} \binom{n}{a_1} \frac{V_{g_1,a_1+1}V_{g_2,a_2+1}}{V_{g,n}}$$
$$\prec \frac{1}{g} \sum_{\substack{g_1+g_2=g-1\\ a_1+a_2=n\\ g_1\leq g_2\\ 2g_1+a_1\geq 2}} \binom{n}{a_1} \frac{V_{g_1,a_1+1}V_{g_2,a_2+1}}{V_{g-1,n}} \prec \frac{1+n^2}{g^2}.$$

So

$$\sum_{\substack{g_1+g_2=g-1\\ a_1+a_2=n\\ 2g_1+a_1\geq 2, 2g_2+a_2\geq 1}} \binom{n}{a_1} \frac{V_{0,3}V_{g_1,a_1+1}V_{g_2,a_2+2}}{V_{g,n}} \prec \frac{1+n^2}{g^2}. \tag{9.62}$$

对于（9.60）中的第三个求和，由定理4.4 和引理 B.14 针对$k=1$，可得

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{g_1+g_2=g\\ a_1+a_2=n-1\\ 2\leq 2g_1+a_1\leq 2g_2+a_2}} \binom{n}{1,a_1,a_2} \frac{V_{0,3}V_{g_1,a_1+1}V_{g_2,a_2+1}}{V_{g,n}} \\ \prec &\frac{1}{g} \sum_{\substack{g_1+g_2=g\\ a_1+a_2=n-1\\ 2\leq 2g_1+a_1\leq 2g_2+a_2}} n\binom{n-1}{a_1} \frac{V_{g_1,a_1+1}V_{g_2,a_2+1}}{V_{g,n-1}} \prec \frac{1+n^3}{g^2}. \end{aligned} \tag{9.63}$$

现在，引理可由（9.60）、（9.61）、（9.62）和（9.63）推出。 □

综合命题 9.18、引理 9.19 和引理 9.20，可得类型 6 的填充测地线对（$_{ns}$ 中的Int的总贡献的如下估计（7.1）。

引理 9.21。若 $n=n(g)=o(\sqrt{g})\geq 1$，则对于任意 $\epsilon>0$,

$$\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{\gamma \text{ of type } 6\\ \ell_\gamma(X)\leq T}} H_{X,1}(\gamma)\right] \prec \frac{T^6 e^{\frac{9}{2}T}}{g^{27}} + T^{230}e^{(\frac{1}{2}+\epsilon)T}\frac{1+n^3}{g^2},$$

其中隐含常数取决于 ϵ，且与 T、g无关。

10. Remainder terms on $(\mathcal{N}_\ell)^c$

本节中，我们估计 $\mathbb{E}^{g,\ n\,\mathrm{WP}}\left[(\#N_\ell)^k\cdot\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)}H_{X,\ 1}(\gamma)\right]$ 以及 $\hat{}\ f_T(\frac{i}{2})$ $\mathbb{E}^{g,\ n\ \mathrm{WP}}[(\#N_\ell)_k]$ 在固定 $k\geq 1$的条件下，这将完成对（8.1）的估计。根据定义，我们有

$$\begin{aligned}(\#N_\ell(X))_k=&\#\{unorder\ pairs\ of\ (Y_1,\cdots,Y_k)\\&\in N_\ell(X)^k; Y_i\text{'s are }different\},\end{aligned}\tag{10.1}$$

其中

$$N_\ell(X)=\{embedded\ Y\subset X;\chi(Y)=-1,\ell(\partial Y)<\ell\}.$$

我们将证明以下四个引理。

引理 10.1. 若对于某个 $\epsilon>0$，有 $n=o(g^{\frac{1}{2}-\epsilon})$，则对于 $1\prec\ell\prec T\prec$对数函数 g以及任意固定的 $k\geq 2$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[(\#N_\ell)_k\cdot\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right]\\=&\frac{1}{k!}\binom{n}{2,\cdots,2,n-2k}\left(\frac{\cosh\frac{\ell}{2}-1}{2\pi^2g}\right)^k\int_0^T 2\sinh\frac{y}{2}f_T(y)dy\left(1+O\left(\frac{nT^2}{g}\right)\right)\\&+O\left(\ell^{6k+1}e^{5k\ell}\right)+O\left(T^{366k+365}e^{\frac{T}{2}+5k\ell}\frac{\log^{14}g(\log g+n)^3}{g^2}\right)\\&+O\left(T^{6k+4}e^{\frac{9}{2}T+5k\ell}\frac{\log^{427}g(\log g+n)^{62}}{g^{61}}\right).\end{aligned}$$

引理 10.2. 若对于某个 $\epsilon>0$，有 $n=o(g^{\frac{1}{2}-\epsilon})$，则对于 $1\prec\ell\prec T\prec$对数函数 g,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[(\#N_\ell)\cdot\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right]\\=&\frac{1}{\pi^2g}\left[\frac{n(n-1)}{4}\left(\cosh\frac{\ell}{2}-1\right)+\frac{n}{4}\int_{x_1+x_2\leq\ell}\sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}dx_1dx_2\right.\\&+\frac{1}{6}\int_{x_1+x_2+x_3\leq\ell}\sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}\sinh\frac{x_3}{2}dx_1dx_2dx_3\\&\left.+\frac{1}{8}\int_0^\ell V_{1,1}(x)\sinh\frac{x}{2}dx\right]\cdot\int_0^T 2\sinh\frac{y}{2}f_T(y)dy+O\left(T^7e^{5\ell}\right)\\&+O\left(T^{731}e^{\frac{T+7\ell}{2}}\frac{\log^{14}g(\log g+n)^3}{g^2}\right)+O\left(T^{10}e^{\frac{9}{2}T+5\ell}\frac{\log^{427}g(\log g+n)^{62}}{g^{61}}\right).\end{aligned}$$

引理 10.3. 若对某个 $\epsilon>0$，$n=o(g^{\frac{1}{2}-\epsilon})$，则对于 $1\prec\ell\prec$对数函数 g 以及任意固定的 $k\geq 2$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}[(\#N_\ell)_k]\\=&\frac{1}{k!}\binom{n}{2,\cdots,2,n-2k}\left(\frac{\cosh\frac{\ell}{2}-1}{2\pi^2g}\right)^k\left(1+O\left(\frac{n\ell^2}{g}\right)\right)\end{aligned}$$

$$+O\left(\ell^{6k+3}e^{5k\ell}\frac{\log^{14}g(\log g+n)^3}{g^2}\right).$$

引理 10.4. 若对某个 $\epsilon>0$，$n=o(g^{\frac{1}{2}-\epsilon})$，则对于 $1\prec\ell\prec$对数函数 g，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}[\#N_\ell]\\=&\frac{1}{\pi^2g}\left[\frac{n(n-1)}{4}\left(\cosh\frac{\ell}{2}-1\right)+\frac{n}{4}\int_{x_1+x_2\le\ell}\sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}dx_1dx_2\right.\\&+\frac{1}{6}\int_{x_1+x_2+x_3\le\ell}\sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}\sinh\frac{x_3}{2}dx_1dx_2dx_3\\&\left.+\frac{1}{8}\int_0^\ell V_{1,1}(x)\sinh\frac{x}{2}dx\right]+O\left(\frac{(1+n^3)\ell^4e^{\frac{\ell}{2}}}{g^2}\right).\end{aligned}$$

10.1. $\mathbb{E}^g$,n WP $\left[(\#N_\ell)^k\cdot\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right]$的估计。对于$(\gamma,Y_1,\cdots,Y_k)\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)\times N_\ell(X)^k$，若满足 $\ell_\gamma(X)\le T$，则存在一种特殊情形：每个 Y_i 都有两个尖点，且彼此不相交，也与 γ不相交。此时，$X\setminus\bigsqcup_{i=1}^k Y_i\simeq S_{g,n-k}$和 γ将S_g,$_{n-k}$部分切分为$S_{g-1,n-k+2}$。我们称这类$(k+1)$–的$(\gamma,Y_1,\cdots,Y_k)$元组为主导类型。

引理 10.5. 若 $n=o(\sqrt{g})$，则对任意固定的 k，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^g\left[\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)\\(Y_1,\cdots,Y_k)\in N_\ell(X)^k\\Y_i\ \textit{unordered, leading type}}}H_{X,1}(\gamma)\right]\\=&\frac{1}{k!}\binom{n}{2,\cdots,2,n-2k}\left(\frac{\cosh\frac{\ell}{2}-1}{2\pi^2g}\right)^k\int_0^T2\sinh\frac{y}{2}f_T(y)dy\\&\cdot\left(1+O\left(\frac{nT^2}{g}\right)\right).\end{aligned}$$

证明。我们对主导类型的每个映射类群轨道应用米尔扎哈尼积分公式定理 2.2，其中包含$(\gamma、Y_1、\cdots、Y_k)$。注意，根据尖点的分组方式，共有 $\frac{1}{k!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\cdots\binom{n-2k+2}{2}$ 个轨道。由引理4.10 和引理 B.8，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^g\left[\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)\\(Y_1,\cdots,Y_k)\in N_\ell(X)^k\\Y_i\ \textit{unordered, leading type}}}H_{X,1}(\gamma)\right]\\=&\frac{1}{k!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\cdots\binom{n-2k+2}{2}\cdot2\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{V_{g,n}}\int_{x_1,\cdots,x_k\le\ell,y\le T}H_{X,1}(y)\end{aligned}$$

$$\prod_{i=1}^{k} V_{0,3}(0,0,x_i)V_{g-1,n-k+2}(x_1,\cdots,x_k,y,y,0^{n-2k})x_1\cdots x_k y dx_1\cdots dx_k dy$$

$$=\frac{1}{k!}\binom{n}{2,\cdots,2,n-2k}\frac{V_{g-1,n-k+2}}{V_{g,n}}\int_{x_1,\cdots,x_k\le\ell,y\le T}\prod_{i=1}^{k}\left(2\sinh\frac{x_i}{2}\right)$$

$$\cdot 2\sinh\frac{y}{2}f_T(y)\left(1+O\left(\frac{n(\sum_{i=1}^{k}x_i^2+y^2)}{g}\right)\right)dx_1\cdots dx_k dy$$

$$=\frac{1}{k!}\binom{n}{2,\cdots,2,n-2k}\left(\frac{1}{8\pi^2 g}\right)^k\int_{x_1,\cdots,x_k\le\ell,y\le T}\prod_{i=1}^{k}\left(2\sinh\frac{x_i}{2}\right)$$

$$\cdot 2\sinh\frac{y}{2}f_T(y)dx_1\cdots dx_k dy\left(1+O\left(\frac{n(T^2+\ell^2)}{g}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{k!}\binom{n}{2,\cdots,2,n-2k}\left(\frac{\cosh\frac{\ell}{2}-1}{2\pi^2 g}\right)^k\int_0^T 2\sinh\frac{y}{2}f_T(y)dy$$

$$\cdot\left(1+O\left(\frac{n(T^2+\ell^2)}{g}\right)\right),$$

其中隐含常数仅取决于 k。由于当 κ 较小时，$\ell=\kappa\log g$，且 $T\prec\log g$，因此引理得证。□

我们引入以下记号。

定义。设 $X_{g,n}$ 是一个亏格为 g 且有 n 个尖点的双曲曲面。对于 $2g_i+a_i+n_i-2\ge 1$ 和 $n_i\ge 1$，假设 $S_i\simeq S_{g_i,n_i+a_i}$ 是一个亏格为 g_i、带有尖点和非空边界的拓扑曲面，其中 n_i 是边界圈的数量，a_i 是穿孔的数量。我们还用 $(g_i,n_i,a_i)=(0,2,0)$ 表示 S_i 是一条简单曲线。定义 $\mathcal{B}^s_{S}{}^{(g,n)}$ 关于 $S=\{(g_i,n_i,a_i)\}_{i=1}^s$ 的可容许集为 $X_{g,n}$ 中 $S_1,\cdots,S_s$ 的所有可能的互不重叠轨道组成的集合。更准确地说，$\mathcal{B}^s_{S}{}^{(g,n)}$ 由 $F=\left(\{f_i\}_{i=1}^s,\{V_j\}_{j=1}^r,\{h_j,m_j,b_j\}_{j=1}^r\right)$ 的等价类构成，其中

(1) 若 $2g_i+a_i+n_i-2\ge 1$，则局部同胚 $f_i\colon S_{g_i,n_i+a_i}\to X_{g,n}$ 在 S_{g_i,n_i+a_i} 上是单射，且 $f_i(\partial S_{g_i,n_i+a_i})$ 由 $X_{g,n}$ 中的简单闭测地线组成。(2) 若 $(g_i,n_i,a_0)=(0,2,0)$，则嵌入 $f_i\colon S_{g_i,n_i+a_i}\to X_{g,n}$ 的像是一条简单闭测地线。(3) 对于不同的 i，$f_i(S_{g_i,n_i+a_i})$ 的内部不相交。(4) 补集 $X_{g,n}\setminus\cup_{i=1}^s f_i(S_{g_i,n_i+a_i})$ 有 r 个连通分支，对于 $j=1,\cdots,r$，记作 V_j，其中 V_j 的亏格为 h_j，有 b_j 个尖点和 m_j 个测地边界分支。(5) 若 $i<j$，则 $2h_i+m_i+b_i\le 2h_j+m_j+b_j$。(6) 若存在一个同胚

$H : X_{g,\ n} \to X_{g,\ n}$，它可能不会固定尖点的标号以及置换元素 $\sigma_1 \in S_s$，$\sigma_2 \in S_r$（此处 S_s 和 S_r 分别是 s 的置换群和 r 个元素），使得 $H \circ f_i = f_{\sigma_1(i)}$ 且 $H(V_j) = V_{\sigma_2(j)}$。

我们称 $f_i(S_{g_i,\ n_i+a_i})$ 对于 $i = 1, \cdots, s$ 以及 V_j 对于 $j = 1, \cdots, r$ 都是从属于 F 的所有连通分支。

注。在 $\mathcal{B}^{s,\ S}{}^{(g,n)}_{\left(a_1 \cdots a_s\right)^{n},\ ,\ ,\ b_1,\ \cdots,\ b_r}$ 的定义中，如果在条件 (6) 中要求同胚 H 固定尖点，那么 F 将在 $\mathcal{B}^{s,\ S}{}^{(g,n)}_{\left(a_1 \cdots a_s\right)^{n},\ ,\ ,\ b_1,\ \cdots,\ b_r}$ 中计数相应次数。

现在我们假设 $(\gamma,\ Y_1,\ \cdots,\ Y_k)$ 不属于主导类型。假设 $\tilde{\ }\quad\quad \tilde{\ }Y_1,\ \cdots,\ Y_k$ 填满了由具有测地边界的子曲面组成的并集 $S_1 \cup \cdots S_t$，其中每个 S_i 都是连通的，且内部互不相交。每个 S_i 都可能有一些重叠的边界测地线对。我们有

$$\sum_{i=1}^{t} \ell(\partial \tilde{S}_i) \le \sum_{i=1}^{k} \ell(\partial Y_i) \le k\ell \tag{10.2}$$

对于 $\ell = \kappa$对数函数 g。根据双曲曲面上的等周不等式（例如，参见 [Bus10]或 [WX22b]），

$$\mathrm{Area}(Y_1) \le \sum_{i=1}^{t} \mathrm{Area}(\tilde{S}_i) \le 2\pi k + 2\sum_{i=1}^{k} \ell(\partial Y_i) \le 2\pi k + 2k\ell. \tag{10.3}$$

So

$$1 \le \sum_{i=1}^{t} \left|\chi(\tilde{S}_i)\right| \le k + \frac{k\ell}{\pi} = O(\log g), \tag{10.4}$$

且仅当 $k = 1$ 时，才可能出现 $\sum_{i=1}^{t} \left|\chi(\tilde{S}_i)\right| = 1$。现在我们对 γ 与 $\cup_{i=1}^{t} \tilde{S}_i$. 的相对位置进行分类

$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$**10.2.** 情形 1：对于某个 i_0，$\gamma \subset S_{i_0}$。在此情形下，子曲面 $S_{i_0} \setminus \gamma$ 可能不连通。于是我们可以假设 $\cup_{i=1}^{t} \tilde{S}_i \setminus \gamma = \cup_{i=1}^{s} S_i$，其中每个 S_i 都是连通的，且其内部互不相交。对于 $k \ge 2$，我们有 $s \le t + 1 \le k + 1$、$2 \le \sum_{i=1}^{s} |\chi(S_i)| \le k + \frac{k\ell}{\pi}$，并且 γ 是 $\cup_{i=1}^{s} S_i$ 的一条边界测地线。对于边界的长度，由 (10.2) 可得 $\ell(\gamma) \le T$ 和 $\sum_{i=1}^{s} \ell(\partial S_i - \gamma) \le k\ell$。现在，对任意固定的 $\gamma \cup (\cup_{i=1}^{s} S_i)$，我们可以估计生成 $\cup_{i=1}^{s} S_i$ 且满足情形 1 中 γ 的 $(Y_1, \cdots, Y_k)$ 的数量。对我们而言，一个非常粗略的估计就足够了。每个 Y_i 的边界都是长度为 $\le \ell$ 的简单闭测地线。根据引理 3.7，映射

$$(\gamma, Y_1, \cdots, Y_k) \mapsto (\gamma, \cup_{i=1}^{s} S_i)$$

至多为 $\left(\left(k + \frac{k\ell}{\pi}\right)^{\frac{e^{\ell+6}+3}{2}}\right)^{3k}$ 到 1。设 $S_i \simeq S_{g_i,\ n_i,\ a_i}$，其中$n_i$ 是边界测地线的数量，a_i 是S_i的尖点数量。令 $S = \{(g_i,\ n_i,\ a_i)\}_{i=1}^{s}$。我们可以将 $\cup_{i=1}^{s} S_i$ 视为$\mathcal{B}^{s,\ S}{}^{(g,n)}$. 中的一个元素 $\mathcal{F}$。注意，并非所有的 S_i 都可以是带有两个尖点的裤子曲面，或者

~它们将彼此不相交，并且 γ 不能作为 S_{i_0}的内部测地线。令 $\Gamma_0 = \cup_{i=1}^s f_i(\partial S_{g_i,\ n_i+a_i})$。那么 γ 将作为 Γ_0中的一条简单闭测地线。根据（10.4），γ 数量的选择受$\sum_{i=1}^s n_i \leq 3\sum_{i=1}^s(2g_i + a_i + \cancel{n_i} - 2) \leq 3k + \frac{3k\ell}{\pi}$限制。令 $\mathrm{Mod}_{g,\ n}$为$S_{g,\ n}$ 的广义映射类群，允许对尖点的标记进行置换。那么对于 $k \geq 2$，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X),\ell_\gamma(X)\leq T\\ (Y_1,\cdots,Y_k)\in N_\ell(X)^k\\ \textit{of case 1}}} H_{X,1}(\gamma)\\
&\prec \left(\left(k+\frac{k\ell}{\pi}\right)\frac{e^{\ell+6}+3}{2}\right)^{3k} \sum_{1\leq s\leq k+1}\sum_{S\in\mathbf{Ind}_1}\\
&\sum_{F\in\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}}\sum_{\gamma_0\subset\Gamma_0}\sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)} H_{X,1}(\gamma)\mathbf{1}_{[0,k\ell]}(\ell(\Gamma-\gamma)),
\end{aligned} \tag{10.5}$$

其中 S 取遍

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ind}_1 = \{\ S=\{(g_i,n_i,a_i)\}_{i=1}^s \neq (0,1,2)^s; 1\leq 2g_i+n_i+a_i-2,\\
1\leq n_i,\ 2\leq \sum_{i=1}^s(2g_i+n_i+a_i-2)\leq k+\frac{k\ell}{\pi}\Big\}.
\end{aligned}$$

引理 10.6. 固定 $k \geq 2$ 和 $1 \leq s \leq k+1$。对于任意 $S \in \boldsymbol{Ind}_1$, $F \in \mathcal{B}^s_{S}{}^{(g,n)}$，以及 $\Gamma_0 = \cup_{i=1}^s f_i(\partial S_{g_i,n_i+a_i})$，以下估计成立：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[\sum_{\gamma_0\subset\Gamma_0}\sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)} H_{X,1}(\gamma)\boldsymbol{1}_{[0,k\ell]}(\ell(\Gamma-\gamma))\right]\\
&\prec \frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^s V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^r V_{h_j,m_j+b_j}\cdot e^{\frac{T}{2}+2k\ell}\cdot k\ell.
\end{aligned}$$

证明。对于每个 $\gamma_0 \subset \Gamma_0$，我们将 $\mathrm{Mod}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\ \Gamma_0)$ 分为$\binom{n}{a_1\cdots\ a_s,\ ,\ b_1,\cdots,\ b_r}$个映射类群轨道，并将每个轨道应用于米尔扎哈尼积分公式定理2.2。令 x_p 表示 γ_p中简单闭测地线 $\Gamma\setminus\gamma$ 的长度，其中 p 属于指标集 I，并令 x_0 表示 γ的长度。于是有（10.6）

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[\sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)} H_{X,1}(\gamma)\mathbf{1}_{[0,k\ell]}(\ell(\Gamma-\gamma))\right]\\
&\prec \frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\int_{\substack{\sum_{p\in I}x_p\leq T\\ x_p\leq k\ell}} H_{X,1}(x_0)\prod_{i=1}^s V_{g_i,n_i+a_i}(x_{p_1^i},\cdots,x_{p_{n_i}^i},0^{a_i})\\
&\cdot\prod_{j=1}^r V_{h_j,m_j+b_j}(x_{q_1^j},\cdots,x_{q_{m_j}^j},0^{b_j})x_0\prod_{p\in I}x_p\cdot dx_0\prod_{p\in I}dx_p,
\end{aligned}$$

其中 p_1^i，$\cdots$，$p_{n_i}^i$ 是 ∂S_i上的测地线标记，而 q_1^j，$\cdots$，$q_{m_j}^j$ 是 ∂V_j上的测地线标记。根据引理4.10，我们有

$$V_{g_i,n_i+a_i}(x_{p_1^i},\cdots,x_{p_{n_i}^i},0^{a_i}) \le V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{n_i}\frac{2\sinh\frac{x_{p_j^i}}{2}}{x_{p_j^i}},$$

and

$$V_{h_j,m_j+b_j}(x_{q_1^j},\cdots,x_{q_{m_j}^j},0^{b_j}) \le V_{h_j,m_j+b_j}\prod_{i=1}^{m_j}\frac{2\sinh\frac{x_{q_{m_i}^j}}{2}}{x_{q_{m_i}^j}}.$$

由于 Γ 的每个连通分支都与由 Γ 分隔的两个子曲面相邻，因此我们有

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{s}V_{g_i,n_i+a_i}(x_{p_1^i},\cdots,x_{p_{n_i}^i},0^{a_i})\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}(x_{q_1^j},\cdots,x_{q_{m_j}^j},o^{b_j})\\
\le&\prod_{i=1}^{s}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}\prod_{p\in I}\left(\frac{2\sinh\frac{x_p}{2}}{x_p}\right)^2\cdot\left(\frac{2\sinh\frac{x_0}{2}}{x_0}\right)^2 \qquad (10.7)\\
\le&\prod_{i=1}^{s}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}\prod_{p\in I}\cosh^2\frac{x_p}{2}\cdot\left(\frac{2\sinh\frac{x_0}{2}}{x_0}\right)^2.
\end{aligned}$$

现在我们可以结合（10.6）和（10.7）得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)}H_{X,1}(\gamma)\mathbf{1}_{[0,k\ell]}(\ell(\Gamma-\gamma))\right]\\
\prec&\frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^{s}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j} \qquad (10.8)\\
&\cdot\int_{x_0\le T}2\sinh\frac{x_0}{2}f_T(x_0)dx_0\cdot\int_{\sum_{p\in I}x_p\le k\ell}e^{\sum_{p\in I}x_p}\prod_{p\in I}x_p\prod_{p\in I}dx_p\\
\prec&\frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^{s}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}e^{\frac{T}{2}+2k\ell}.
\end{aligned}$$

这里我们用到了这一事实：

$$\int_{\sum_{p\in I}x_p\le k\ell}\prod_{p\in I}x_p\prod_{p\in I}dx_p=\frac{(k\ell)^{2|I|}}{(2|I|)!}\le e^{k\ell}. \qquad (10.9)$$

该引理由（10.8）以及 $\gamma_0\subset\Gamma_0$ 至多有$3k+\frac{3k\ell}{\pi}$ 种可能的选择这一事实得出。□

引理 10.7。若 $n=o\left(g^{\frac{1}{2}-\epsilon}\right)$ 对某个 $\epsilon>0$ 成立，则对于任意 $k\geq 2$,

$$\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X),\ell_\gamma(X)\leq T\\(Y_1,\cdots,Y_k)\in N_\ell(X)^k\\ of\ case\ 1}} H_{X,1}(\gamma)\right]$$
$$\prec\left(\left(k+\frac{k\ell}{\pi}\right)\frac{e^{\ell+6}+3}{2}\right)^{3k}(k\ell)^{3k+4}\frac{\log^{14}g(\log g+n)^3}{g^2}e^{\frac{T}{2}+2k\ell}.$$

证明。由（10.5）和引理 10.6，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X),\ell_\gamma(X)\leq T\\(Y_1,\cdots,Y_k)\in N_\ell(X)^k\\ of\ case\ 1}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\&\prec\left(\left(k+\frac{k\ell}{\pi}\right)\frac{e^{\ell+6}+3}{2}\right)^{3k}e^{\frac{T}{2}+2k\ell}\cdot k\ell\cdot\sum_{1\leq s\leq k+1}\sum_{S\in\mathbf{Ind}_1}\\&\frac{1}{V_{g,n}}\sum_{F\in\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}}\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots,b_r}\prod_{i=1}^{s}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}.\end{aligned}\tag{10.10}$$

注意到 $2n_i\leq 7(2g_i+n_i+a_i-2)$。因此对于 $s=1$，由引理 B.18 我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{S=(g_1,n_1,a_1),n_1\geq 1\\2\leq 2g_1+n_1+a_1-2\leq k+\frac{k\ell}{\pi}}}\sum_{\mathcal{B}_S^{1,(g,n)}}\binom{n}{a_1,b_1\cdots,b_r}\frac{V_{g_1,n_1+a_1}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}}{V_{g,n}}\\&\prec\sum_{N=2}^{k+[\frac{k\ell}{\pi}]}\sum_{\substack{2g_1+n_1+a_1-2=N\\n_1\geq 1}}\left((N+2)!\right)^2(C\log g)^{7N}\frac{(C\log g+Cn)^{N+1}}{g^N}\\&\prec\sum_{N=2}^{k+[\frac{k\ell}{\pi}]}N^3\left((N+2)!\right)^2(C\log g)^{7N}\frac{(C\log g+Cn)^{N+1}}{g^N}\\&\prec\frac{\log^{14}g\,(\log g+n)^3}{g^2}.\end{aligned}\tag{10.11}$$

对于 $s\geq 2$，由于 $\{(g_i,\ n_i,\ a_i)\}_{i=1}^{s}\neq(0,\ 1,\ 2)^s$，存在一些 i_0 使得 $2g_{i_0}+n_{i_0}+a_{i_0}-2=1$，其中 $a_{i_0}\leq 1$ 或 $2g_{i_0}+n_{i_0}+a_{i_0}-2\geq 2$。我们假设

即 $i_0=1$。由引理 B.18 可得 (10.12
)

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=2}^{k+1}\sum_{S\in\mathbf{Ind}_1}\sum_{F\in\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}}\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots,b_r}\cdot\prod_{i=1}^{s}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}\\
\prec&\sum_{s=2}^{k+1}\sum_{\substack{2g_1+n_1+a_1-2\geq 2\\ 1\leq n_i,1\leq 2g_i+n_i+a_i-2\\ \sum_{i=1}^{s}(2g_i+n_i+a_i-2)\leq k+\frac{k\ell}{\pi}}}\left((2g_1+a_1+n_1)!\right)^2(C\log g)^{2n_1}\\
&\cdot\frac{(Cn+C\log g)^{a_1}}{g^{2g_1+n_1+a_1-2}}+\sum_{s=2}^{k+1}\sum_{\substack{(2g_1+n_1+a_1-2)=1,a_1\leq 1\\ 1\leq n_i,1\leq 2g_i+n_i+a_i-2\\ \sum_{i=1}^{s}(2g_i+n_i+a_i-2)\leq k+\frac{k\ell}{\pi}}}\frac{\log^7 g(\log g+n)^{a_1}}{g}\\
&\cdot\left((2g_2+a_2+n_2)!\right)^2(C\log g)^{2n_2}\frac{(Cn+C\log g)^{a_2}}{g^{2g_2+n_2+a_2-2}}\\
\prec&\sum_{s=2}^{k+1}(k\ell)^{3s}\sum_{N=2}^{k+[\frac{k\ell}{\pi}]}\left((N+2)!\right)^2(C\log g)^{7N}\frac{(Cn+C\log g)^{N+1}}{g^N}\\
&+\sum_{s=2}^{k+1}(k\ell)^{3s}\frac{\log^7 g(\log g+n)}{g}\\
&\cdot\sum_{N=1}^{k+[\frac{k\ell}{\pi}]}\left((N+2)!\right)^2(C\log g)^{7N}\frac{(Cn+C\log g)^{N+1}}{g^N}\\
\prec&(k\ell)^{3k+3}\frac{\log^{14} g(\log g+n)^3}{g^2}.
\end{aligned}$$

这里我们使用这一事实：$|\mathbf{Ind}_1|\prec(k\ell)^{3s}$ 以及 $s\leq k+1$。结合上述估计与（10.10）和（10.11），我们证明该引理。□

对于 $k=1$，我们有

引理 10.8。若对于某个 $\epsilon>0$，$n=o(g^{\frac{1}{2}-\epsilon})$，则

$$\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{(\gamma,Y_1)\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X)\times N_\ell(X),\\ \ell_\gamma(X)\leq T,\ of\ case\ 1}}H_{X,1}(\gamma)\right]\prec\frac{T^2e^{\frac{\ell}{2}}}{g}.$$

证明。若 $\gamma\subset Y_1$ 且 $\chi(Y_1)=-1$，则 $Y_1\simeq S_{1,\ 1}$，$X\setminus Y_1\simeq S_{g-1,\ n+1}$，且 $Y_1\setminus\gamma\simeq S_{0,\ 3}$。由 Mirzakhani积分公式定理 2.2、定理 4.4和引理 4.10，可得

$$\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{(\gamma,Y_1)\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X)\times N_\ell(X),\\ \ell_\gamma(X)\leq T,\ of\ case\ 1}}H_{X,1}(\gamma)\right]$$

$$\begin{aligned}&\prec\frac{1}{V_{g,n}}\int_{x\le\ell.y\le T}V_{0,3}(x,y,y)V_{g-1,n+1}(x,0^n)xydxdy\\&\prec\frac{V_{g-1,n+1}}{V_{g,n}}\int_{x\le\ell.y\le T}\sinh\frac{x}{2}ydxdy\\&\prec\frac{T^2e^{\frac{\ell}{2}}}{g},\end{aligned}$$

这弥补了遗漏的 $k=1$ 情形的估计。 □

~10.3. **情形 2：** $\gamma\subset\partial S_{i_0}$ **对于某个** i_0。 在这种情形下，我们只需令 $s=t\le k$~并令 $S_i=S_{i_0}$。简单测地线 γ 是$\cup_{i=1}^s S_i$的一条边界测地线。按照小节 10.2中情形 1 的相同论证，如果

$$\mathbf{Ind}_2=\{S=\{(g_i,n_i,a_i)\}_{i=1}^s;\,2g_i+n_i+a_i\ge3,n_i\ge1,\\1\le\sum_{i=1}^s(2g_i+n_i+a_i-2)\le k+\frac{k\ell}{\pi}\Big\},$$

对于任意 $k\ge1$，我们都有

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X),\ell_\gamma(X)\le T\\(Y_1,\cdots,Y_k)\in N_\ell(X)^k\\of\ case\ 2}}H_{X,1}(\gamma)\\&\prec\left(\left(k+\frac{k\ell}{\pi}\right)\frac{e^{\ell+6}+3}{2}\right)^{3k}\sum_{1\le s\le k}\sum_{S\in\mathbf{Ind}_2}\\&\sum_{F\in\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}}\sum_{\gamma_0\subset\Gamma_0}\sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)}H_{X,1}(\gamma)\mathbf{1}_{[0,k\ell]}(\ell(\Gamma)),\end{aligned}\tag{10.13}$$

其中 $\Gamma_0=\cup_{i=1}^s f_i(\partial S_{g_i,\ n_i+a_i})$ 对于 $F\in\mathcal{B}^s,\ {}_S{}^{(g,n)}$。这里唯一的区别是条件 $\ell(\Gamma-\gamma)\le k\ell-\ell(\gamma)$，并且 S_i 可以同时是具有两个尖点的裤子曲面。

引理 10.9。 固定 $k\ge1$ 和 $1\le s\le k$。对于任意 $S\in\mathbf{Ind}_2$, $F\in\mathcal{B}^s$, ${}_S{}^{(g,n)}$ 和 $\Gamma_0=\cup_{i=1}^s f_i(\partial S_{g_i,n_i+a_i})$，以下估计成立：

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[\sum_{\gamma_0\subset\Gamma_0}\sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)}H_{X,1}(\gamma)\,\mathbf{1}_{[0,k\ell]}(\ell(\Gamma))\right]\\&\prec\frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^s V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^r V_{h_j,m_j+b_j}\cdot e^{2k\ell}\cdot k\ell.\end{aligned}$$

证明。 与引理 10.6 的证明类似，对于每个 $\gamma_0\subset\Gamma_0$，令 x_p 为 γ_p 在 $\Gamma\setminus\gamma$ 中对应于 p 指标集 I中的 x_0的简单闭测地线的长度，并令 γ为 p_1^i、$\cdots$、$p_{n_i}^i$在

∂S_i、 q_1^j、 $\cdots$、 $q_{m_j}^j$为 ∂V_j上测地线的标记。于是有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)} H_{X,1}(\gamma)\mathbf{1}_{[0,k\ell]}(\ell(\Gamma))\right]\\
&\prec\frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\int_{x_0+\sum_{p\in I}x_p\le k\ell} H_{X,1}(x_0)\prod_{i=1}^{s}V_{g_i,n_i+a_i}(x_{p_1^i},\cdots,x_{p_{n_i}^i},0^{a_i})\\
&\cdot\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}(x_{q_1^j},\cdots,x_{q_{m_j}^j},0^{b_j})x_0\prod_{p\in I}x_p\cdot dx_0\prod_{p\in I}dx_p\\
&\prec\frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^{s}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}\\
&\cdot\int_{x_0\le k\ell}2\sinh\frac{x_0}{2}f_T(x_0)\left(\int_{\sum_{p\in I}x_p\le k\ell-x_0}e^{\sum_{p\in I}x_p}\prod_{p\in I}x_p\prod_{p\in I}dx_p\right)dx_0\\
&\prec\frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^{s}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}\int_{x_0\le k\ell}2\sinh\frac{x_0}{2}f_T(x_0)\cdot e^{2k\ell-2x_0}dx_0\\
&\prec\frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^{s}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}\cdot e^{2k\ell}.
\end{aligned}$$

这里我们再次使用估计（10.7）和（10.9）。由于$\gamma_0\subset\Gamma_0$至多有 $3k+\frac{3k\ell}{\pi}$ 种可能的选择，因此引理得证。□

引理 10.10。若 $n=o\left(g^{\frac{1}{2}-\epsilon}\right)$ 对某个 $\epsilon>0$ 成立，则对于 $k\ge 1$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X),\ell_\gamma(X)\le T\\(Y_1,\cdots,Y_k)\in N_\ell(X)^k\\ \textit{of case 2}}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
&\prec\left(\left(k+\frac{k\ell}{\pi}\right)\frac{e^{\ell+6}+3}{2}\right)^{3k}(k\ell)^{3k+1}e^{2k\ell}.
\end{aligned}$$

证明。此引理可直接由（10.13）、引理 10.9、引理 B.18以及以下事实推出：$|\mathbf{Ind}_2|\prec(k\ell)^{3s}\prec(k\ell)^{3k}$。□

10.4. **情形 3：** γ **与** $\cup_{i=1}^{t}\partial\tilde{S}_i$ **横截地相交**。在此情形下，我们假设 $\cup_{i=1}^{t}\partial\tilde{S}_i\cup\gamma$ 填满并集 $\cup_{i=1}^{t'}S_i'$ 具有测地边界的子曲面，其中每个 S_i' 均为连通，且其内部互不相交。我们有 $t'\le t$ 并且 γ 是 $\cup_{i=1}^{t'}S_i'$内部的一条简单闭测地线。因此我们可以假设 $\cup_{i=1}^{t'}S_i'\setminus\gamma=\cup_{i=1}^{s}S_i$ 满足 $s\le t'+1\le t+1\le k+1$。由（10.2）

我们有

$$\ell(\cup_{i=1}^{s}\partial S_i \setminus \gamma) = \sum_{i=1}^{s}\ell(\partial S_i) - 2\ell(\gamma) = \sum_{i=1}^{t'}\ell(\partial S_i')$$
$$\leq \sum_{i=1}^{t}\ell(\partial \tilde{S}_i) + 2\ell(\gamma) \leq k\ell + 2\ell(\gamma),$$

并由双曲曲面上的等周不等式，结合10.2和（10.3），可得

$$\sum_{i=1}^{t}\mathrm{Area}(\tilde{S}_i) < \sum_{i=1}^{s}\mathrm{Area}(S_i) = \sum_{i=1}^{t'}\mathrm{Area}(S_i')$$
$$\leq \sum_{i=1}^{t}\mathrm{Area}(\tilde{S}_i) + 2\left(\sum_{i=1}^{t}\ell(\partial\tilde{S}_i) + 2T\right) \leq 2\pi k + 4k\ell + 4T.$$

由此可知

$$2 \leq \sum_{i=1}^{t}|\chi(S_i)| \leq k + \frac{2k\ell + 2T}{\pi} = O(\log g).$$

由引理3.7，映射

$$(\gamma, Y_1, \cdots, Y_k) \mapsto (\gamma, \cup_{i=1}^{s} S_i)$$

至多为 $\left(\left(k + \frac{2k\ell+2T}{\pi}\right)\frac{e^{\ell+6}+3}{2}\right)^{3k}$ 到 1。假设 $S_i \simeq S_{g_i,\ n_i,\ a_i}$，其中$n_i$ 是边界测地线的数量，a_i 是 S_i的尖点数量。令 $S = \{(g_i,\ n_i,\ a_i)\}_{i=1}^{s}$。我们还将 $\cup_{i=1}^{s} S_i$ 视为 $\mathcal{B}^{s}_{,\ S}{}^{(g,n)}$ 中的一个元素 $\mathcal{F}$。在此情形下，$S \neq (0,\ 1,\ 2)^s$，且 γ 不是 $X \setminus \cup_{i=1}^{s} S_i$的边界测地线。令$\Gamma_0 = \cup_{i=1}^{s} f_i(\partial S_{g_i,\ n_i+a_i})$，则 γ 将作为 Γ_0 中的一条简单闭测地线，而 $\cup_{j=1}^{r}\partial V_j \subset \Gamma_0 - \gamma$。类似于情形 1，我们有

$$\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}^{s}_{nsep}(X),\ell_\gamma(X)\leq T\\(Y_1,\cdots,Y_k)\in\mathcal{N}_\ell^k\\ \textit{of case 3}}} H_{X,1}(\gamma)$$
$$\prec \left(\left(k + \frac{2k\ell+2T}{\pi}\right)\frac{e^{\ell+6}+3}{2}\right)^{3k} \sum_{1\leq s\leq k+1}\ \sum_{S\in\mathbf{Ind}_3}\ \sum_{F\in\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}} \tag{10.14}$$
$$\sum_{\gamma_0\subset\Gamma_0\setminus\cup_{j=1}^{r}\partial V_j}\ \sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)} H_{X,1}(\gamma)\mathbf{1}_{\ell(\Gamma-\gamma)\leq 2\ell(\gamma)+k\ell},$$

其中 S 取遍

$$\mathbf{Ind}_3 = \{S = (g_i, a_i, n_i)_{i=1}^{s} \neq (0,1,2)^s\ ; 1 \leq 2g_i + n_i + a_i - 2,$$
$$1 \leq n_i,\ 2 \leq \sum_{i=1}^{s}(2g_i + n_i + a_i - 2) \leq k + \frac{2k\ell+2T}{\pi}\Bigg\}.$$

引理 10.11. 固定 $1 \le s \le k+1$。对于任意 $S \in \mathit{Ind}_3$, $F \in \mathcal{B}^s{}_{,S}{}^{(g,n)}$ 和 $\Gamma_0 = \cup_{i=1}^s f_i(\partial S_{g_i,n_i+a_i})$，以下估计成立：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\gamma_0\subset\Gamma_0\setminus\cup_{j=1}^r\partial V_j}\ \sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)} H_{X,1}(\gamma)\mathbf{1}_{\ell(\Gamma-\gamma)\le 2\ell(\gamma)+k\ell}\right]\\
&\prec \frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^s V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^r V_{h_j,m_j+b_j}\cdot e^{2k\ell+\frac{9}{2}T}\cdot(T+k\ell).
\end{aligned}$$

如果 $\sum_{i=1}^s(2g_i+n_i+a_i-2)\le 60(k+1)$，则该估计可以改进为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\gamma_0\subset\Gamma_0\setminus\cup_{j=1}^r\partial V_j}\ \sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)} H_{X,1}(\gamma)\mathbf{1}_{\ell(\Gamma-\gamma)\le 2\ell(\gamma)+k\ell}\right]\\
&\prec \frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^s V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^r V_{h_j,m_j+b_j}\cdot e^{\frac{T+k\ell}{2}}(T+k\ell)^{360k+362}.
\end{aligned}$$

证明。类似于引理 10.6 的证明，对于任意固定的 $\gamma_0\subset\Gamma_0\setminus\cup_{j=1}^r\partial V_j$，令 x_p 为 γ_p 在 $\Gamma\setminus\gamma$ 中对应于指标集 I 内的 p 的简单闭测地线的长度，并令 x_0 为 γ 的长度。我们有 $\sum_{p\in I}x_p\le 2x_0+k\ell$。令 p_1^i、$\cdots$、$p_{n_i}^i$ 为 ∂S_i 上测地线的标记，q_1^j、$\cdots$、$q_{m_j}^j$ 为 ∂V_j 上测地线的标记。将引理 4.10 导出的估计 (10.7) 代入 Mirzakhani积分公式定理 2.2，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)} H_{X,1}(\gamma)\mathbf{1}_{\ell(\Gamma-\gamma)\le 2\ell(\gamma)+k\ell}\right]\\
&\prec \frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots,b_r}}{V_{g,n}}\int_{\substack{x_0\le T\\ \sum_{p\in I}x_p\le 2x_0+k\ell}} H_{X,1}(x_0)\prod_{i=1}^s V_{g_i,n_i+a_i}(x_{p_1^i},\cdots,x_{p_{n_i}^i},0^{a_i})\\
&\cdot\prod_{j=1}^r V_{h_r,m_j+b_j}(x_{q_1^j},\cdots,x_{q_{m_j}^j},0^{b_j})x_0\prod_{p\in I}x_p\cdot dx_0\prod_{p\in I}dx_p\\
&\prec \frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^s V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^r V_{h_j,m_j+b_j}\\
&\cdot\int_{x_0\le T}2\sinh\frac{x_0}{2}f_T(x_0)\left(\int_{\sum_{p\in I}x_p\le k\ell+2x_0}e^{\sum_{p\in I}x_i}\prod_{p\in I}x_p\prod_{p\in I}dx_p\right)dx_0\\
&\prec \frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^s V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^r V_{h_j,m_j+b_j}\\
&\cdot\int_{x_0\le T}2\sinh\frac{x_0}{2}f_T(x_0)\cdot e^{2k\ell+4x_0}dx_0
\end{aligned}$$

$$\prec \frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}} \prod_{i=1}^{s} V_{g_i,n_i+a_i} \prod_{j=1}^{r} V_{h_j,m_j+b_j} \cdot e^{2k\ell+\frac{9}{2}T}.$$

由于 $\gamma_0 \subset \Gamma_0 \setminus \cup_{j=1}^{r} \partial V_j$ 至多有 $\sum_{i=1}^{s} n_i \le 3\sum_{i=1}^{s}(2g_i+n_i+a_i-2) \le 3k+\frac{6k\ell+6T}{\pi}$ 种选择，引理中的第一个估计即得。

现在，若 $\sum_{i=1}^{s}(2g_i+n_i+a_i-2) \le 60(k+1)$，则由定理 4.1 可得

$$V_{g_i,n_i+a_i}(x_{x_{p_1}^i},\cdots,x_{p_{n_i}^i},0^{a_i}) \prec V_{g_i,n_i+a_i}\left(1+x_0+\sum_{p\in I} x_p\right)^{6g_i-6+2n_i+2a_i},$$

因此

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{s} V_{g_i,n_i+a_i}(x_{p_1}^i,\cdots,x_{p_{n_i}^i},0^{a_i}) \\
&\prec \prod_{i=1}^{s} V_{g_i,n_i+a_i} \cdot \left(1+x_0+\sum_{p\in I} x_p\right)^{\sum_{i=1}^{s}(6g_i-6+2n_i+2a_i)} \\
&\prec \prod_{i=1}^{s} V_{g_i,n_i+a_i} \cdot \left(1+x_0+\sum_{p\in I} x_p\right)^{180k+180}.
\end{aligned} \tag{10.15}$$

由于不同的 V_j 在 Γ_0 中没有公共边界测地线，且 $\gamma_0 \subset \Gamma_0 \setminus \cup_{j=1}^{r} \partial V_j$，由引理 4.10 可得

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^{r} V_{h_r,m_j+b_j}(x_{q_1^j},\cdots,x_{q_{m_j}^j},0^{b_j}) \\
&\le \prod_{j=1}^{r}\left(V_{h_r,m_j+b_j} \cdot \prod_{i=1}^{m_j} \frac{2\sinh\frac{x_{q_i^j}}{2}}{x_{q_i^j}}\right) \\
&\prec \prod_{j=1}^{r} V_{h_r,m_j+b_j} \cdot \prod_{p\in I} \frac{2\sinh\frac{x_p}{2}}{x_p}.
\end{aligned} \tag{10.16}$$

若 $\sum_{i=1}^{s}(2g_i+n_i+a_i-2) \le 60(k+1)$，则有 $|I| \le 3\sum_{i=1}^{s}(2g_i+n_i+a_i-2) \le 180k+180$。由（10.15）和（10.16）可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)} H_{X,1}(\gamma)\mathbf{1}_{\ell(\Gamma-\gamma)\le 2\ell(\gamma)+k\ell}\right] \\
&\prec \frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots,b_r}}{V_{g,n}} \int_{\substack{x_0\le T \\ \sum_{p\in I} x_p \le 2x_0+k\ell}} H_{X,1}(x_0) \prod_{i=1}^{s} V_{g_i,n_i+a_i}(x_{p_1^i},\cdots,x_{p_{n_i}^i},0^{a_0}) \\
&\cdot \prod_{j=1}^{r} V_{h_r,m_j+b_j}(x_{q_1^j},\cdots,x_{q_{m_j}^j},0^{b_j}) x_0 \prod_{p\in I} x_p \cdot dx_0 \prod_{p\in I} dx_p \\
&\prec \frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}} \prod_{i=1}^{s} V_{g_i,n_i+a_i} \prod_{j=1}^{r} V_{h_j,m_j+b_j} \cdot \int_{\substack{x_0\le T \\ \le \sum_{p\in I} x_p \le 2x_0+k\ell}} \frac{x_0 f_T(x_0)}{\sinh\frac{x_0}{2}}
\end{aligned}$$

$$\cdot \left(1+x_0+\sum_{p\in I} x_p\right)^{180k+180} \cdot x_0 \cdot \prod_{p\in I}\left(2\sinh\frac{x_p}{2}\right)\cdot dx_0\prod_{p\in I}dx_p$$
$$\prec \frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^{s}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}\cdot(T+k\ell)^{180k+180}$$
$$\cdot\int_{x_0\le T}\frac{x_0^2 f_T(x_0)}{\sinh\frac{x_0}{2}}e^{\frac{2x_0+k\ell}{2}}(2x_0+k\ell)^{|I|}dx_0$$
$$\prec \frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^{s}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}\cdot e^{\frac{T+k\ell}{2}}(T+k\ell)^{360k+362}.$$

由于 $\gamma_0\subset\Gamma_0\setminus\cup_{j=1}^{r}\partial V_j$至多有 $180k+180$种选择，引理中的第二个估计便得证。□

引理 10.12。 如果 $n=o(g^{\frac{1}{2}-\epsilon})$对某个 $\epsilon>0$成立，那么对于 $k\ge 1$,

$$\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X),\ell_\gamma(X)\le T\\(Y_1,\cdots,Y_k)\in N_\ell(X)^k\\ \textit{of case 3}}} H_{X,1}(\gamma)\right]$$
$$\prec\left(\left(k+\frac{2k\ell+2T}{\pi}\right)\frac{e^{\ell+6}+3}{2}\right)^{3k}\left[e^{\frac{T+k\ell}{2}}(T+k\ell)^{363k+365}\frac{\log^{14}g(\log g+n)^3}{g^2}\right.$$
$$\left.+e^{2k\ell+\frac{9}{2}T}(T+k\ell)^{3k+4}\frac{\log^{427}g(\log g+n)^{62}}{g^{61}}\right].$$

证明. By (10.14) 我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X),\ell_\gamma(X)\le T\\(Y_1,\cdots,Y_k)\in\mathcal{N}_\ell^k\\ \textit{of case 3}}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
&\prec\left(\left(k+\frac{2k\ell+2T}{\pi}\right)\frac{e^{\ell+6}+3}{2}\right)^{3k}\sum_{1\le s\le k+1}\sum_{\substack{S\in\mathbf{Ind}_3\\ \sum_{i=1}^{s}(2g_i+n_i+a_i-2)\le 60k+60}}\\
&\sum_{\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}}\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\gamma_0\subset\Gamma_0\setminus\cup_{j=1}^{r}\partial V_j}\ \sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)} H_{X,1}(\gamma)\mathbf{1}_{\ell(\Gamma-\gamma)\le 2\ell(\gamma)+k\ell}\right]\\
&+\left(\left(k+\frac{2k\ell+2T}{\pi}\right)\frac{e^{\ell+6}+3}{2}\right)^{3k}\sum_{1\le s\le k+1}\sum_{\substack{S\in\mathbf{Ind}_3\\ \sum_{i=1}^{s}(2g_i+n_i+a_i-2)>60k+60}}\\
&\sum_{\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}}\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\gamma_0\subset\Gamma_0\setminus\cup_{j=1}^{r}\partial V_j}\ \sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)} H_{X,1}(\gamma)\mathbf{1}_{\ell(\Gamma-\gamma)\le 2\ell(\gamma)+k\ell}\right].
\end{aligned}
\tag{10.17}
$$

根据引理 10.11，我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1\le s\le k+1}\sum_{\substack{S\in\mathbf{Ind}_3\\ \sum_{i=1}^{s}(2g_i+n_i+a_i-2)\le 60k+60}}\sum_{F\in\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}}\\
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\gamma_0\subset\Gamma_0\setminus\cup_{j=1}^{r}\partial V_j}\ \sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)} H_{X,1}(\gamma)\mathbf{1}_{\ell(\Gamma-\gamma)\le 2\ell(\gamma)+k\ell}\right]\\
&\prec e^{\frac{T+k\ell}{2}}(T+k\ell)^{360k+362}\cdot\sum_{1\le s\le k+1}\sum_{\substack{S\in\mathbf{Ind}_3\\ \sum_{i=1}^{s}(2g_i+n_i+a_i-2)\le 60k+60}}\\
&\sum_{F\in\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}}\frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^{s}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}.
\end{aligned}
\tag{10.18}
$$

由于

$$
\{S\in\mathbf{Ind}_3;\sum_{i=1}^{s}(2g_i+n_i+a_i-2)\le 60k+60\}\subset\mathbf{Ind}_1
$$

对于充分大的 g，根据引理 10.7 的证明中的估计，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{1\le s\le k+1}\sum_{\substack{S\in\mathbf{Ind}_3\\ \sum_{i=1}^s(2g_i+n_i+a_i-2)\le 60k+60}}\\ &\sum_{F\in\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}}\frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^s V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^r V_{h_j,m_j+b_j}\\ &\prec(k\ell)^{3k+3}\frac{\log^{14} g(\log g+n)^3}{g^2}.\end{aligned}\tag{10.19}$$

再次由引理10.11，可得

$$\begin{aligned}&\sum_{1\le s\le k+1}\sum_{\substack{S\in\mathbf{Ind}_3\\ \sum_{i=1}^s(2g_i+n_i+a_i-2)>60k+60}}\sum_{F\in\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}}\\ &\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\gamma_0\subset\Gamma_0\setminus\cup_{j=1}^r\partial V_j}\ \sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)}H_{X,1}(\gamma)\mathbf{1}_{\ell(\Gamma-\gamma)\le 2\ell(\gamma)+k\ell}\right]\\ &\prec e^{2k\ell+\frac{9}{2}T}\cdot(T+k\ell)\cdot\sum_{1\le s\le k+1}\sum_{\substack{S\in\mathbf{Ind}_3\\ \sum_{i=1}^s(2g_i+n_i+a_i-2)>60k+60}}\\ &\sum_{F\in\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}}\frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^s V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^r V_{h_j,m_j+b_j}.\end{aligned}\tag{10.20}$$

若 $\sum_{i=1}^s(2g_i+n_i+a_i-2)>60k+60$ 且 $s\le k+1$，则存在某个 i_0使得 $2g_{i_0}+n_{i_0}+a_{i_0}-2>60$。我们可以假设 $i_0=1$。由引理

B.18 可知

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{k+1} \sum_{\substack{S\in\mathbf{Ind}_3 \\ \sum_{i=1}^{s}(2g_i+n_i+a_i-2)>60k+60}} \sum_{F\in\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}} \frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}} \prod_{i=1}^{s} V_{g_i,n_i+a_i} \prod_{j=1}^{r} V_{h_j,m_j+b_j} \\
\prec &\sum_{s=1}^{k+1} \sum_{\substack{2g_1+n_1+a_1-2>60 \\ 1\le n_i,1\le 2g_i+n_i+a_i-2 \\ \sum_{i=1}^{s}(2g_i+n_i+a_i-2)\le k+\frac{2k\ell+2T}{\pi}}} ((2g_1+n_1+a_1)!)^2 \\
&\cdot (C\log g)^{2n_1} \frac{(Cn+C\log g)^{a_1}}{g^{2g_1+n_1+a_1-2}} \\
\prec &\sum_{s=1}^{k+1} \left(k+\frac{2k\ell+2T}{\pi}\right)^{3s} \\
&\cdot \sum_{N=61}^{k+\left[\frac{2k\ell+2T}{\pi}\right]} ((N+2)!)^2 (C\log g)^{7N} \frac{(Cn+C\log g)^{N+1}}{g^N} \\
\prec &(T+k\ell)^{3k+3} \frac{\log^{427} g(\log g+n)^{62}}{g^{61}}.
\end{aligned} \tag{10.21}
$$

该引理由以下各式合并得证：(10.17)、(10.18)、(10.19)、(10.20)以及(10.21)。
□

~10.5. 情形 4： $\gamma\cap S_i=\emptyset$ 对所有 i成立。首先，我们假设 $k\ge 2$。在此~情形下，令 $s=t+1\ge 2$, $S_i=S_i$对于 $i=1,\cdots,t$ 以及 $S_{t+1}=\gamma$为类型S_0,2,0。若每个 S_i 对于 $i\le s-1$ 均为类型S_0,1,2，由于 γ 在$X_{g,n}$中是非分离的，因此 γ 在$X_{g,n}\setminus\cup_{i=1}^{s-1}S_i\simeq X_{g,n-s+1}$ 中也非分离，且$(\gamma,Y_1,\cdots,Y_k)$属于主导类型。根据第10.2小节中情形 1 的相同论证，对于 $F\in\mathcal{B}^s,_S{}^{(g,n)}$ ，若令 $\Gamma_0=\cup_{i=1}^{s-1}f_i$(∂$S_{g_i,n_i+a_i}$)对于$i\le s-1$ 以及 $\gamma_0=f_s$(S_0,2,0)，则有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X),\ell_\gamma(X)\le T \\ (Y_1,\cdots,Y_k)\in N_\ell(X)^k \\ \textit{of case 4, not leading type}}} H_{X,1}(\gamma) \\
\prec &\left(\left(k+\frac{k\ell}{\pi}\right)\frac{e^{\ell+6}+3}{2}\right)^{3k} \sum_{2\le s\le k+1} \sum_{S\in\mathbf{Ind}_4^{\ge 2}} \\
&\sum_{F\in\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}} \sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)} H_{X,1}(\gamma)\mathbf{1}_{[0,k\ell]}(\ell(\Gamma)),
\end{aligned} \tag{10.22}
$$

其中 S 取遍

$$\mathbf{Ind}_4^{\ge 2}=\{\ S=\{(g_i,n_i,a_i)\}_{i=1}^{s};(g_s,n_s,a_s)=(0,2,0),1\le n_i,$$

$$\{(g_i,n_i,a_i)\}_{i=1}^{s-1}\neq(0,1,2)^{s-1}; 1\leq 2g_i+n_i+a_i-2,\ for\ i\leq s-1,$$
$$2\leq\sum_{i=1}^{s-1}(2g_i+n_i+a_i-2)\leq k+\frac{k\ell}{\pi}\Bigg\}.$$

引理 10.13. 固定 $2\leq s\leq k+1$ 和 $k\geq 2$。对于任意 $S\in\boldsymbol{Ind}_4^{\geq 2}$，$F\in\mathcal{B}^{s,\ (g,n)}_{S}$，$\Gamma_0=\cup_{i=1}^{s-1}f_i(\partial S_{g_i,\ n_i+a_i})$ 以及 $\gamma_0=f_s(S_{0,\ 2,\ 0})$，有如下估计：

$$\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[\sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)}H_{X,1}(\gamma)\boldsymbol{1}_{[0,k\ell]}(\ell(\Gamma))\right]$$
$$\prec\frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^{s-1}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}\cdot e^{\frac{T}{2}+2k\ell}.$$

证明。类似于引理 10.6 的证明，令 x_p 表示简单闭测地线的长度 γ_p 在 Γ 中，对 p 指标集 I中的，并令 x_0 表示γ的长度。令 p_1^i、$\cdots$、$p_{n_i}^i$表示 ∂S_i上测地线的标记，并令 q_1^j、$\cdots$、$q_{m_j}^j$表示 ∂V_j上测地线的标记。于是有

$$\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[\sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)}H_{X,1}(\gamma)\mathbf{1}_{[0,k\ell]}(\ell(\Gamma))\right]$$
$$\prec\frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\int_{\substack{x_0\leq T\\ \sum_{p\in I}x_p\leq k\ell}}H_{X,1}(x_0)\prod_{i=1}^{s-1}V_{g_i,n_i+a_i}(x_{p_1^i},\cdots,x_{p_{n_i}^i},0^{a_i})$$
$$\cdot\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}(x_{q_1^j},\cdots,x_{q_{m_j}^j},0^{b_j})x_0\prod_{p\in I}x_p\cdot dx_0\prod_{p\in I}dx_p$$
$$\prec\frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^{s-1}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}$$
$$\cdot\int_{x_0\leq T}2\sinh\frac{x_0}{2}f_T(x_0)dx_0\int_{\sum_{p\in I}x_p\leq k\ell}e^{\sum_{p\in I}x_p}\prod_{p\in I}x_p\prod_{p\in I}dx_p$$
$$\prec\frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^{s-1}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}e^{\frac{T}{2}+2k\ell}.$$

这里再次使用估计（10.7）和（10.9）。 □

引理 10.14. 如果 $k\geq 2$和 $n=o(g^{\frac{1}{2}-\epsilon})$对于某个 $\epsilon>0$，那么

$$\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X),\ell_\gamma(X)\leq T\\ (Y_1,\cdots,Y_k)\in N_\ell(X)^k\\ of\ case\ 4,\ not\ leading\ type}}H_{X,1}(\gamma)\right]$$

$$\prec \left(\left(k+\frac{k\ell}{\pi}\right)\frac{e^{\ell+6}+3}{2}\right)^{3k}\frac{\log^{14} g(n+\log g)^3}{g^2}(k\ell)^{3k}e^{\frac{T}{2}+2k\ell}.$$

证明. 对于 $S\in \mathbf{Ind}_4^{\geq 2}$，若 $2g_i+n_i+a_i-2\geq 2$ 对于某个 i，根据引理10.13引理 B.18，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{F\in\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}}\sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)}H_{X,1}(\gamma)\mathbf{1}_{[0,k\ell]}(\ell(\Gamma))\right]\\
\prec& e^{\frac{T}{2}+2k\ell}\cdot((2g_i+n_i+a_i)!)^2(C\log g)^{2n_i}\frac{(Cn+C\log g)^{a_i}}{g^{2g_i+n_i+a_i-2}}\\
\prec& e^{\frac{T}{2}+2k\ell}\cdot((N+2)!)^2(C\log g)^{7N}\frac{(Cn+C\log g)^{N+1}}{g^N}
\end{aligned}\tag{10.23}$$

对于 $N=2g_i+n_i+a_i-2\geq 2$。如果 $2g_i+n_i+a_i-2=1$ 对所有 $1\leq i\leq s-1$，则存在某个 i_0 使得$a_{i_0}\leq 1$。假设 $i_0=1$，则由引理10.13和引理B.18，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{F\in\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}}\sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)}H_{X,1}(\gamma)\mathbf{1}_{[0,k\ell]}(\ell(\Gamma))\right]\\
\prec& e^{\frac{T}{2}+2k\ell}\cdot\frac{\log^{14} g(n+\log g)^{a_1+a_2}}{g^2}\\
\prec& e^{\frac{T}{2}+2k\ell}\cdot\frac{\log^{14} g(n+\log g)^3}{g^2}.
\end{aligned}\tag{10.24}$$

结合（10.23）和（10.24），可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{2\leq s\leq k+1}\sum_{S\in\mathbf{Ind}_4^{\geq 2}}\sum_{F\in\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}}\sum_{(\gamma,\Gamma)\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot(\gamma_0,\Gamma_0)}H_{X,1}(\gamma)\mathbf{1}_{[0,k\ell]}(\ell(\Gamma))\right]\\
\prec& e^{\frac{T}{2}+2k\ell}\sum_{2\leq s\leq k+1}\left|\mathbf{Ind}_4^{\geq 2}\right|\left(\sum_{N=2}^{\left[k+\frac{k\ell}{\pi}\right]}((N+2)!)^2(C\log g)^{7N}\right.\\
&\left.\cdot\frac{(Cn+C\log g)^{N+1}}{g^N}+\frac{\log^{14} g(n+\log g)^3}{g^2}\right)\\
\prec& e^{\frac{T}{2}+2k\ell}\cdot(k\ell)^{3k}\cdot\frac{\log^{14} g(n+\log g)^3}{g^2}.
\end{aligned}\tag{10.25}$$

由（10.22）和（10.25）可得此引理。 □

当 $k=1$ 时，情形 4 中关于（γ，Y_1）的项所产生的贡献，对我们证明定理1.2而言并非一个小余项。我们将（γ，Y_1）可能的映射类群轨道分类如下。首先，如果 Y_1 有两个尖点，那么 $X\setminus Y_1\simeq S_{g,\ n-1}$。由于 γ 在 X 中是非分离的，因此在 $X\setminus Y_1$ 中也非分离。这对应于主导类型。因此 Y_1 至多有一个尖点。

引理 10.15。如果 $n=o\left(g^{\frac{1}{2}}\right)$，那么

$$\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{(\gamma,Y_1)\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)\times N_\ell(X)\\ of\ case\ 4, Y_1\simeq S_{1,1}}} H_{X,1}(\gamma)\right]$$
$$=\frac{1}{4\pi^2 g}\int_{x\le\ell}\sinh\frac{x}{2}V_{1,1}(x)dx\int_{y\le T}\sinh\frac{y}{2}f_T(y)dy\left(1+O\left(\frac{(1+n)(T^2)}{g}\right)\right).$$

证明。如果 $Y_1\simeq S_{1,\ 1}$，那么 $X\setminus Y_1\simeq S_{g-1,\ n+1}$，并且 γ 在 $X\setminus Y_1$ 中是非分离的。于是 $X\setminus(\gamma\cup Y_1)\simeq S_{g-2,\ n+3}$ 根据 Mirzakhani 积分公式定理2.2、定理4.8和引理4.10，有

$$\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{(\gamma,Y_1)\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)\times N_\ell(X)\\ of\ case\ 4, Y_1\simeq S_{1,1}}} H_{X,1}(\gamma)\right]$$
$$=2\cdot\frac{1}{4}\frac{1}{V_{g,n}}\int_{x\le\ell,y\le T}V_{1,1}(x)V_{g-2,n+3}(x,y,y,0^n)\frac{yf_T(y)}{2\sinh\frac{y}{2}}xydxdy$$
$$=\frac{V_{g-2,n+3}}{2V_{g,n}}\int_{x\le\ell,y\le T}\frac{2\sinh\frac{x}{2}}{x}\left(\frac{2\sinh\frac{y}{2}}{y}\right)^2\left(1+O\left(\frac{(1+n)(x^2+y^2)}{g}\right)\right)$$
$$\cdot V_{1,1}(x)\frac{yf_T(y)}{2\sinh\frac{y}{2}}xydxdy$$
$$=\frac{1}{4\pi^2 g}\int_{x\le\ell}\sinh\frac{x}{2}V_{1,1}(x)dx\int_{y\le T}\sinh\frac{y}{2}f_T(y)dy\left(1+O\left(\frac{(1+n)(T^2)}{g}\right)\right).$$

这里的因子 2 来自 γ 的两种定向，且 1 4 在定理2.2中为 C_Γ。-□

引理 10.16。如果 $n=o\left(g^{\frac{1}{2}}\right)$，那么

$$\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{(\gamma,Y_1)\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)\times N_\ell(X)\\ of\ case\ 4, Y_1\simeq S_{0,3}\ with\ one\ cusp}} H_{X,1}(\gamma)\right]$$
$$=\frac{n}{2\pi^2 g}\int_{x_1+x_2\le\ell}\sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}dx_1dx_2\int_0^T\sinh\frac{y}{2}f_T(y)dy$$
$$\cdot\left(1+O\left(\frac{nT^2}{g}\right)\right)+O\left(\frac{n^3}{g^2}\cdot\ell\cdot e^{\frac{\ell+T}{2}}\right).$$

证明。若 $Y_1\simeq S_{0,\ 3}$ 且有一个尖点，并且 $X\setminus Y_1$ 是连通的，则 $X\setminus Y_1\simeq S_{g-1,\ n+1}$。若 γ 在 $X\setminus Y_1$ 中是分离的，由于 γ 在 X 中是非分离的，$X\setminus Y_1$ 的两条边界测地线将不属于 $X\setminus(\gamma\cup Y_1)$ 的同一个连通分支。我们可以假设 $X\setminus(\gamma\cup Y_1)\simeq S_{g_1,\ n_1+2}\cup S_{g_2,\ n_2+2}$，其中 $g_1+g_2=g-1$ 和 $n_1+n_2=n-1$。这里 n_i 是连通分支 $S_{g_i,\ n_i+2}$ 的尖点数。若 γ 在 $X\setminus Y_1$ 中是非分离的，则

$X\setminus(\gamma\cup Y_1)\simeq S_{g-2,\ n+3}$。根据 Mirzakhani积分公式定理 2.2、定理4.8 和引理4.10，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{(\gamma,Y_1)\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)\times N_\ell(X)\\ \text{of case 4,}Y_1\text{ has one cusp}\\ X\setminus Y_1\cup\gamma\text{ is connected}}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
=&\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{\binom{n}{1}}{V_{g,n}}\int_{\substack{x_1+x_2\le\ell\\ y\le T}} V_{0,3}(x_1,x_2,0)V_{g-2,n+3}(x_1,x_2,y,y,0^{n-1})\\
&\cdot\frac{yf_T(y)}{2\sinh\frac{y}{2}}x_1x_2ydx_1dx_2dy \qquad (10.26)\\
=&\frac{nV_{g-2,n+3}}{2V_{g,n}}\int_{\substack{x_1+x_2\le\ell\\ y\le T}}\left(1+O\left(\frac{(1+n)(x_1^2+x_2^2+y^2)}{g}\right)\right)\\
&\cdot 8\sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}\sinh\frac{y}{2}f_T(y)dx_1dx_2dy\\
=&\frac{n}{2\pi^2g}\int_{x_1+x_2\le\ell}\sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}dx_1dx_2\\
&\cdot\int_0^T\sinh\frac{y}{2}f_T(y)dy\left(1+O\left(\frac{nT^2}{g}\right)\right),
\end{aligned}
$$

其中 $\binom{n}{1}$ 是本情形下（γ，Y_1）的映射类群轨道数，而 $C_\Gamma=\frac{1}{4}$ 见定理 2.2。并且由引理 B.16 可知，对于 $k=1$ 此外，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{(\gamma,Y_1)\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)\times N_\ell(X)\\ \text{of case 4,}Y_1\text{ has one cusp}\\ X\setminus Y_1\text{ is connected}\\ X\setminus Y_1\cup\gamma\text{ is not connected}}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
\prec&\sum_{\substack{g_1+g_2=g-1\\ n_1+n_2=n-1\\ 2g_i+n_i\ge 1}}\frac{\binom{n}{1}\binom{n-1}{n_1}}{V_{g,n}}V_{g_1,n_1+2}V_{g_2,n_2+2}\\
&\cdot\int_{\substack{x_1+x_2\le\ell\\ y\le T}}\sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}\sinh\frac{y}{2}f_T(y)dx_1dx_2dy \qquad (10.27)\\
\prec&\frac{n}{g}\sum_{\substack{g_1+g_2=g-1\\ n_1+n_2=n-1\\ 2g_i+n_i\ge 1}}\frac{\binom{n-1}{n_1}}{V_{g-1,n+1}}V_{g_1,n_1+2}V_{g_2,n_2+2}\cdot\ell\cdot e^{\frac{T+\ell}{2}}\\
\prec&\frac{n^2}{g^2}\cdot\ell\cdot e^{\frac{T+\ell}{2}},
\end{aligned}
$$

其中 $\binom{n}{1}\binom{n-1}{n_1}$ 是给定 (g_1,g_2,n_1,n_2) 时 (γ,Y_1) 的映射类群轨道数。若 Y_1 有一个尖点，且 $X\setminus Y_1\simeq X_1\cup X_2$ 对于 $X_i\simeq S_{g_i},\ n_i+1$ 不连通，其中 $g_1+g_2=g,\ n_1+n_2=n-1$ 和 $\gamma\subset X_1$，那么 $g_1\geq 1$ 且 $X_1\setminus\gamma\simeq S_{g_1-1,n_1+3}$ 连通，因为 γ 在 X中是非分离的。这里 n_i 是 X_i的尖点数。因此，由 Mirzakhani积分公式定理 2.2、定理 4.4、推论 4.6、引理 4.10 和引理 B.14，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{(\gamma,Y_1)\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)\times N_\ell(X)\\ \text{of case 4},Y_1\text{ has one cusp}\\ X\setminus Y_1\text{ is not connected}}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
&\prec\sum_{\substack{g_1+g_2=g,g_1\geq 1\\ n_1+n_2=n-1\\ 2g_i+n_i\geq 2}}\frac{\binom{n}{1}\binom{n-1}{n_1}}{V_{g,n}}\int_{\substack{x_1+x_2\leq\ell\\ y\leq T}}V_{g_1-1,n_1+3}(x_1,y,y,0^{n_1})\\
&\cdot V_{g_2,n_2+1}(x_2,0^{n_2})V_{0,3}(x_1,x_2,0)\frac{yf_T(y)}{2\sinh\frac{y}{2}}\cdot x_1x_2y\cdot dx_1dx_2dy\\
&\prec\sum_{\substack{g_1+g_2=g,g_1\geq 1\\ n_1+n_2=n-1\\ 2g_i+n_i\geq 2}}\frac{\binom{n}{1}\binom{n-1}{n_1}}{V_{g,n}}V_{g_1-1,n_1+3}V_{g_2,n_2+1}\\
&\cdot\int_{\substack{x_1+x_2\leq\ell\\ y\leq T}}\sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}\sinh\frac{y}{2}f_T(y)dx_1dx_2dy\\
&\prec\frac{n}{g}\cdot\ell\cdot e^{\frac{\ell+T}{2}}\sum_{\substack{g_1+g_2=g,g_1\geq 1\\ n_1+n_2=n-1\\ 2g_i+n_i\geq 2}}\frac{\binom{n-1}{n_1}}{V_{g,n-1}}V_{g_1,n_1+1}V_{g_2,n_2+1}\\
&\prec\frac{n^3}{g^2}\cdot\ell\cdot e^{\frac{\ell+T}{2}},
\end{aligned}
\tag{10.28}
$$

其中 $\binom{n}{1}\binom{n-1}{n_1}$ 是给定 (γ,Y_1) 时，(g_1,g_2,n_1,n_2) 的映射类群轨道数。该引理由 (10.26)、(10.27) 和 (10.28) 得出。□

引理 10.17. 若 $n=o(g^{\frac{1}{2}})$, -则

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{(\gamma,Y_1)\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)\times N_\ell(X)\\ \text{of case 4},Y_1\simeq S_{0,3}\text{ with no cusp}}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
=&\frac{1}{3\pi^2g}\int_{x_1+x_2+x_3\leq\ell}\sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}\sinh\frac{x_3}{2}dx_1dx_2dx_3\\
&\cdot\int_0^T\sinh\frac{y}{2}f_T(y)dy\left(1+O\left(\frac{(1+n)T^2}{g}\right)\right)+O\left(\frac{1+n^2}{g^2}\cdot\ell^2\cdot e^{\frac{\ell+T}{2}}\right).
\end{aligned}
$$

证明。若 $Y_1 \simeq S_{0,\ 3}$ 没有尖点，则 $X\backslash Y_1$ 至多有三个连通分支。若~ ~γ 属于某个连通分支 X_0，且 $X_0\backslash\gamma = X_1\cup X_2$ 不连通，则~两者都至少包含 X_0 的一条边界测地线。特别地，若 X_0与 Y_1仅有一条公共边界测地线，则 γ 在 X_0中是非分离的。

对于$Y_1 \simeq S_{0,\ 3}$ 且没有尖点的情形，$X \setminus Y_1 \simeq S_{g-2,\ n+3}$，并且 γ 在 $X \setminus Y_1$中是非分离的，由 Mirzakhani积分公式定理 2.2、定理4.8和引理4.10，可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{(\gamma,Y_1)\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)\times N_\ell(X)\\ \text{of case 4},Y_1\simeq S_{0,3}\ \text{has no cusp}\\ X\setminus(Y_1\cup\gamma)\simeq S_{g-3,n+5}}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
=&2\cdot\frac{1}{12V_{g,n}}\int_{\substack{x_1+x_2+x_3\le\ell\\ y\le T}} V_{0,3}(x_1,x_2,x_3)V_{g-3,n+5}(x_1,x_2,x_3,y,y,0^n)\\
&\cdot\frac{yf_T(y)}{2\sinh\frac{y}{2}}x_1x_2x_3ydx_1dx_2dx_3dy \qquad (10.29)\\
=&\frac{V_{g-3,n+5}}{6V_{g,n}}\int_{x_1+x_2+x_3\le\ell} 8\sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}\sinh\frac{x_3}{2}dx_1dx_2dx_3\\
&\cdot\int_0^T 2\sinh\frac{y}{2}f_T(y)dy\left(1+O\left(\frac{(1+n)T^2}{g}\right)\right)\\
=&\frac{1}{3\pi^2g}\int_{x_1+x_2+x_3\le\ell}\sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}\sinh\frac{x_3}{2}dx_1dx_2dx_3\\
&\cdot\int_0^T\sinh\frac{y}{2}f_T(y)dy\left(1+O\left(\frac{(1+n)T^2}{g}\right)\right).
\end{aligned}
$$

如果$X\setminus Y_1 \simeq S_{g-2,\ n+3}$是连通的，且 γ将 $X\setminus Y_1$ 分成 $X_1\cup X_2$，那么我们可以假设 X_1 与 Y_1 共享一条边界测地线，且 X_2 与 Y_1共享两条边界测地线。于是我们可以假设$X_1 \simeq S_{g_1,\ n_1+2}$ 且$X_2 \simeq S_{g_2,\ n_2+3}$ 其中 $g_1+g_2 = g-2$ 且 $n_1+n_2 = n$。这里 n_i 是 X_i的尖点数。由 Mirzakhani积分公式定理2.2，定理

4.8，以及引理4.10，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{(\gamma,Y_1)\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X)\times N_\ell(X)\\ \text{of case 4},Y_1\simeq S_{0,3}\text{ has no cusp}\\ X\setminus Y_1\text{ is connected}\\ X\setminus(Y_1\cup\gamma)\text{ is not connected}}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
&\prec \sum_{\substack{g_1+g_2=g-2\\ n_1+n_2=n\\ 2g_1+n_1\geq 1}} \frac{\binom{n}{n_1}}{V_{g,n}} \int_{\substack{x_1+x_2+x_3\leq \ell\\ y\leq T}} V_{g_1,n_1+2}(x_1,y,0^{n_1})\\
&\quad \cdot V_{g_2,n_2+3}(x_2,x_3,y,0^{n_2})V_{0,3}(x_1,x_2,x_3)\cdot x_1x_2x_3y\cdot dx_1dx_2dx_3dy \qquad (10.30)\\
&\prec \sum_{\substack{g_1+g_2=g-2\\ n_1+n_2=n\\ 2g_1+n_1\geq 1}} \frac{\binom{n}{n_1}}{V_{g,n}} V_{g_1,n_1+2}V_{g_2,n_2+3}\\
&\quad \cdot \int_{\substack{x_1+x_2+x_3\leq \ell\\ y\leq T}} \sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}\sinh\frac{x_3}{2}\sinh\frac{y}{2} f_T(y)dx_1dx_2dx_3dy\\
&\prec \ell^2\cdot e^{\frac{T+\ell}{2}}\cdot \sum_{\substack{g_1+g_2=g-2\\ n_1+n_2=n\\ 2g_1+n_1\geq 1}} \frac{\binom{n}{n_1}V_{g_1,n_1+2}V_{g_2,n_2+3}}{V_{g,n}}\\
&\prec \frac{1+n^2}{g^2}\cdot \ell^2\cdot e^{\frac{T+\ell}{2}}.
\end{aligned}
$$

这里我们使用推论4.6以及估计（9.62）来得到最后一个不等式。

若 $X\setminus Y_1 = X_1\cup X_2\cup X_3$ 有三个连通分支，且 $\gamma\subset X_1$和$X_i\simeq S_{g_i,\,n_i+1}$，其中 $g_1+g_2+g_3=g$，$n_1+n_2+n_3=n$，那么 γ 在 X_1中是非分离的。这里 n_i 是 X_i的尖点数。因此 $X_1\setminus\gamma\simeq S_{g_1-1,\,n_1+3}$。结合（10.30）中的类似估计以及（9.61）中的估计，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{(\gamma,Y_1)\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X)\times N_\ell(X)\\ \text{of case 4},Y_1\simeq S_{0,3}\text{ has no cusp}\\ X\setminus Y_1\text{ has three components}}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
&\prec \ell^2\cdot e^{\frac{T+\ell}{2}}\cdot \sum_{\substack{g_1+g_2+g_3=g,g_1\geq 1\\ n_1+n_2+n_3=n\\ 2g_i+n_i\geq 2}} \frac{\binom{n}{n_1,n_2,n_3}V_{g_1-1,n_1+3}V_{g_2,n_2+1}V_{g_3,n_3+1}}{V_{g,n}} \qquad (10.31)\\
&\prec \frac{1+n^4}{g^3}\cdot \ell^2\cdot e^{\frac{T+\ell}{2}}.
\end{aligned}
$$

现在假设 $X \setminus Y_1 = X_1 \cup X_2$ 有两个连通分支， X_1 有一条边界测地线， X_2 有两条边界测地线。若 $\gamma \subset X_1$，则$X_1 \setminus \gamma$ 必定是连通的，因此我们可以假设$X_1 \simeq S_{g_1、\ n_1+1}$、 $X_2 \simeq S_{g_2、\ n_2+2}$以及$X_1 \setminus \gamma \simeq S_{g_1-1、\ n_1+3}$，其中 $g_1 \geq 1$、 $n_1 + n_2 = n$ 和 $g_1 + g_2 = g - 1$。若$\gamma \subset X_2$ 是非分离的，我们可以假设$X_1 \simeq S_{g_1、\ n_1+1}$、 $X_2 \simeq S_{g_2、\ n_2+2}$以及$X_2 \setminus \gamma \simeq S_{g_2-1、\ n_2+4}$，其中 $g_2 \geq 1$、 $n_1 + n_2 = n$ 和 $g_1 + g_2 = g - 1$。这里 n_i 是 X_i的尖点数。结合（10.30）中的类似估计，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[\sum_{\substack{(\gamma,Y_1)\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)\times N_\ell(X)\\ \textit{of case 4},Y_1\simeq S_{0,3}\ \textit{has no cusp}\\ X\setminus Y_1\ \textit{has two components}\\ X\setminus(Y_1\cup\gamma)\ \textit{has two components}}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
&\prec \ell^2\cdot e^{\frac{T+\ell}{2}}\cdot\left(\sum_{\substack{g_1+g_2=g-1,g_1\geq 1\\ n_1+n_2=n\\ 2g_2+n_2\geq 1}}\binom{n}{n_1}\frac{V_{g_1-1,n_1+3}V_{g_2,n_2+2}}{V_{g,n}}\right)\\
&+\ell^2\cdot e^{\frac{T+\ell}{2}}\cdot\left(\sum_{\substack{g_1+g_2=g-1,g_2\geq 1\\ n_1+n_2=n\\ 2g_1+n_1\geq 2}}\binom{n}{n_1}\frac{V_{g_1,n_1+1}V_{g_2-1,n_2+4}}{V_{g,n}}\right)\\
&\prec \ell^2\cdot e^{\frac{T+\ell}{2}}\cdot\frac{1+n^2}{g^2}.
\end{aligned}
\tag{10.32}
$$

这里我们还使用推论 4.6 以及估计（9.62）来得到最后一个不等式。

现在假设 $X \setminus Y_1 = X_1 \cup X_2$ 有两个连通分支， X_1 有一条边界测地线，且 X_2 有两条边界测地线。如果 $\gamma \subset X_2$ 是分离的，我们可以假设 $X_2 \setminus \gamma = \tilde{X}_2^1 \cup \tilde{X}_2^2$， $X_1 \simeq S_{g_1,\ n_1+1}$， $\tilde{X}_2^1 \simeq S_{g_2,\ n_2+2}$ 以及$\tilde{X}_2^2 \simeq S_{g_3,\ n_3+2}$ 其中 $n_1 + n_2 + n_3 = n$， $g_1 + g_2 + g_3 = g - 1$ 且$g_2 \geq g_3$。这里 n_i 表示每个连通分支的尖点数。由与（10.30）相同的估计，我们得到（10.33）

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[\sum_{\substack{(\gamma,Y_1)\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)\times N_\ell(X)\\ \textit{of case 4},Y_1\simeq S_{0,3}\ \textit{has no cusp}\\ X\setminus Y_1\ \textit{has two components}\\ X\setminus(Y_1\cup\gamma)\ \textit{has three components}}} H_{X,1}(\gamma)\right]\\
&+\ell^2\cdot e^{\frac{T+\ell}{2}}\cdot\sum_{\substack{g_1+g_2+g_3=g-1,g_2\geq g_3\\ n_1+n_2+n_3=n\\ 2g_1+n_1\geq 2,2g_i+n_i\geq 1}}\binom{n}{n_1,n_2,n_3}\frac{V_{g_1,n_1+1}V_{g_2,n_2+2}V_{g_3,n_3+2}}{V_{g,n}}.
\end{aligned}
\tag{10.33}
$$

由推论4.6、（9.62）以及引理B.16 对于 $k=1$，我们得到（10.34）

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{g_1+g_2+g_3=g-1,g_2\geq g_3\\ n_1+n_2+n_3=n\\ 2g_1+n_1\geq 2,2g_i+n_i\geq 1}}\binom{n}{n_1,n_2,n_3}\frac{V_{g_1,n_1+1}V_{g_2,n_2+2}V_{g_3,n_3+2}}{V_{g,n}}\\
\prec&\sum_{\substack{g_0+g_3=g-1,g_0\geq g_3\\ n_0+n_3=n,2g_3+n_3\geq 1}}\sum_{\substack{g_1+g_2=g_0\\ n_1+n_2=n_0\\ 2g_1+n_1\geq 2,2g_2+n_2\geq 1}}\binom{n}{n_1,n_2,n_3}\frac{V_{g_1,n_1+1}V_{g_2,n_2+2}V_{g_3,n_3+2}}{V_{g,n}}\\
\prec&\sum_{\substack{g_0+g_3=g-1,g_0\geq g_3\\ n_0+n_3=n,2g_3+n_3\geq 1}}\binom{n}{n_0}\frac{V_{g_0+1,n_0}V_{g_3,n_3+2}}{V_{g,n}}\\
&\cdot\left(\sum_{\substack{g_1+g_2=g_0\\ n_1+n_2=n_0\\ 2g_1+n_1\geq 2,2g_2+n_2\geq 1}}\binom{n_0}{n_1}\frac{V_{g_1,n_1+1}V_{g_2,n_2+2}}{V_{g_0+1,n_0}}\right)\\
\prec&\frac{1+n^2}{g^2}\sum_{\substack{g_0+g_3=g-1,g_0\geq g_3\\ n_0+n_3=n}}\binom{n}{n_0}\frac{V_{g_0+1,n_0}V_{g_3,n_3+2}}{V_{g,n}}\\
\prec&\frac{1+n^2}{g^2}\sum_{\substack{g_0+g_3=g-1,g_0\geq g_3\\ n_0+n_3=n}}\binom{n}{n_0}\frac{V_{g_0,n_0+2}V_{g_3,n_3+2}}{V_{g,n}}\\
\prec&\frac{1+n^3}{g^3}.
\end{aligned}$$

引理由（10.29）、（10.30）、（10.31）、（10.32）、（10.33）和（10.34）得出。□

综合引理 10.15、引理 10.16和引理 10.17，我们得到如下结果。

引理 10.18。 如果 $n=o(g^{\frac{1}{2}})$，那么对于 $k=1$，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X),\ell_\gamma(X)\leq T\\ Y_1\in N_\ell(X),\ of\ case\ 4}}H_{X,1}(\gamma)\right]\\
=&\frac{1}{\pi^2 g}\left(\frac{1}{4}\int_{x\leq\ell}\sinh\frac{x}{2}V_{1,1}(x)dx+\frac{n}{2}\int_{x_1+x_2\leq\ell}\sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}dx_1dx_2\right.\\
&\left.+\frac{1}{3}\int_{x_1+x_2+x_3\leq\ell}\sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}\sinh\frac{x_3}{2}dx_1dx_2dx_3\right)\\
&\cdot\int_0^T\sinh\frac{y}{2}f_T(y)dy\cdot\left(1+O\left(\frac{(1+n)T^2}{g}\right)\right)+O\left(\frac{1+n^3}{g^2}\cdot\ell^2\cdot e^{\frac{\ell+T}{2}}\right).
\end{aligned}$$

10.6. **引理 10.1 和 10.2的证明。** 基于前面所有的估计，我们对引理 10.1 和引理10.2的证明作简要总结。引理 10.1 是引理10.5、引理 10.7、引理 10.10、引理 10.12和引理 10.14的组合。引理 10.2 是引理10.5、引理10.8、引理10.10、引理 10.12和引理 10.18的组合。

10.7. 对 $\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[(\#N_\ell)_k\right]$ 的估计。 若每个 Y_i 都有两个尖点，且彼此不相交，则称 $(Y_1,\cdots,Y_k)$ 为主导类型，这与在 $\mathbb{E}^{g,n}_{\mathrm{WP}}\left[(\#N_\ell)^k\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^s_{nsep}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right]$ 的估计中对 $(\gamma,Y_1,\cdots,Y_k)$ 的分类类似。在这种情况下，$X\setminus\sqcup_{i=1}^k Y_i\simeq S_{g,n-k}$。

引理 10.19。 若 $n=o(\sqrt{g})$，则对任意固定的 k，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^g_{\mathrm{WP}}\left[\#\left\{(Y_1,\cdots,Y_k)\in N_\ell(X)^k;\ \textit{unordered, leading type}\right\}\right]\\=&\frac{1}{k!}\binom{n}{2,\cdots,2,n-2k}\left(\frac{\cosh\frac{\ell}{2}-1}{2\pi^2 g}\right)^k\left(1+O\left(\frac{n\ell^2}{g}\right)\right).\end{aligned}$$

证明。 我们将米尔扎哈尼积分公式定理 2.2 应用于所有主导类型的（$Y_1,\cdots,Y_k$）的映射类群轨道。恰有$\frac{1}{k!}\binom{n}{2\,2\,\cdots\,2,,,,n-2k}$个轨道，由尖点的分组确定。由引理 4.10和引理 B.8，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^g_{\mathrm{WP}}\left[\#\left\{(Y_1,\cdots,Y_k)\in N_\ell(X)^k;\ \textit{unordered, leading type}\right\}\right]\\=&\frac{1}{k!}\binom{n}{2,2,\cdots,2,n-2k}\frac{1}{V_{g,n}}\int_{x_1,\cdots,x_k\le\ell}\prod_{i=1}^k V_{0,3}(x_i,0,0)\\&\cdot V_{g,n-k}(x_1,\cdots,x_k,0^{n-2k})x_1\cdots x_k dx_1\cdots dx_k\\=&\frac{1}{k!}\binom{n}{2,2,\cdots,2,n-2k}\frac{V_{g,n-k}}{V_{g,n}}\int_{x_1,\cdots,x_k\le\ell}\prod_{i=1}^k\left(2\sinh\frac{x_i}{2}\right)\\&\cdot\left(1+O\left(\frac{n(\sum_{i=1}^k x_i^2)}{g}\right)\right)dx_1\cdots dx_k\\=&\frac{1}{k!}\binom{n}{2,2,\cdots,2,n-2k}\left(\frac{1}{8\pi^2 g}\right)^k\left(1+O\left(\frac{1+n}{g}\right)\right)\\&\cdot\left(\int_0^\ell 2\sinh\frac{x}{2}dx\right)^k\left(1+O\left(\frac{n\ell^2}{g}\right)\right)\\=&\frac{1}{k!}\binom{n}{2,2,\cdots,2,n-2k}\left(\frac{\cosh\frac{\ell}{2}-1}{2\pi^2 g}\right)^k\left(1+O\left(\frac{1+n(1+\ell^2)}{g}\right)\right).\end{aligned}$$

由于对于较小的 $\kappa>0$，$\ell=\kappa$对数函数 g，我们得到该引理。 □

现在我们计算 $\mathbb{E}^g{}_{\mathrm{WP}}\left[\#\left\{(Y_1,\cdots,Y_k)\in N_\ell(X)^k;\ \text{非主导类型}\right\}\right]$。我们首先假设 $k\ge 2$。可以假设 $Y_1\cup\cdots\cup Y_k$ 填满了 X 中由带测地边界的子曲面构成的并集 $S_1\cup\cdots\cup S_s$，其中每个 S_i 都是连通的

且彼此内部不相交，并且 $1 \le s \le k$。我们有

$$\sum_{i=1}^{s} \ell(\partial S_i) \le \sum_{i=1}^{k} \ell(\partial Y_i) \le k\ell$$

and

$$\mathrm{Area}(Y_1) < \sum_{i=1}^{s} \mathrm{Area}(S_i) \le 2\pi k + 2\sum_{i=1}^{k} \ell(\partial Y_i) \le 2\pi k + 2k\ell.$$

由双曲曲面上的等周不等式可得。因此

$$2 \le \sum_{i=1}^{s} |\chi(S_i)| \le k + \frac{k\ell}{\pi} = O(\log g).$$

根据引理3.7，映射

$$(Y_1, \cdots, Y_k) \mapsto \cup_{i=1}^{s} S_i$$

至多为 $\left(\binom{k+\frac{k\ell}{\pi}}{2}\right)^{3k}$ 比 1。设 $S_i \simeq S_{g_i, n_i+a_i}$，其中 n_i 是边界测地线的数量，a_i 是 S_i的尖点数量。令$S = \{(g_i, n_i, a_i)\}_{i=1}^{s}$。我们将 $\cup_{i=1}^{s} S_i \subset X$视为 ${\mathcal{B}^s}_{,S}^{(g,n)}$中的一个元素 $\mathcal{F}$。令 $\Gamma_0 = \cup_{i=1}^{s} f_i(\partial S_{g_i,n_i+a_i})$。若 $(Y_1, \cdots, Y_k)$ 不是主导类型，则有$\{(g_i, n_i, a_i)\}_{i=1}^{s} \neq (0,1,2)^s$。因此对于 $k \ge 2$，有

$$\begin{aligned} &\#\left\{(Y_1, \cdots, Y_k) \in N_\ell(X)^k;\ \textit{not leading type}\right\} \\ &\prec \left(\left(k + \frac{k\ell}{\pi}\right)\frac{e^{\ell+6}+3}{2}\right)^{3k} \sum_{1\le s\le k} \sum_{S\in \mathbf{Ind}_0} \\ &\sum_{F\in \mathcal{B}_S^{s,(g,n)}} \sum_{\Gamma \in \overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot\Gamma_0} \mathbf{1}_{[0,k\ell]}(\ell(\Gamma)), \end{aligned} \tag{10.35}$$

其中 S 取遍

$$\begin{aligned} \mathbf{Ind}_0 = \{S = \{(g_i, n_i, a_i)\}_{i=1}^{s} \neq (0,1,2)^s; 1 \le 2g_i + n_i + a_i - 2, \\ 1 \le n_i,\ 2 \le \sum_{i=1}^{s}(2g_i + n_i + a_i - 2) \le k + \frac{k\ell}{\pi}\}. \end{aligned}$$

引理 10.20. 固定 $k \ge 2$ 与 $1 \le s \le k$。对任意 $S \in \boldsymbol{Ind}_0$，$F \in {\mathcal{B}^s}_{,S}^{(g,n)}$ 以及 $\Gamma_0 = \cup_{i=1}^{s} f_i(\partial S_{g_i,n_i+a_i})$，如下估计成立：

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\Gamma\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot\Gamma_0} \boldsymbol{1}_{[0,k\ell]}(\ell(\Gamma))\right] \\ &\prec \frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}} \prod_{i=1}^{s} V_{g_i,n_i+a_i} \prod_{j=1}^{r} V_{h_j,m_j+b_j} \cdot e^{2k\ell}. \end{aligned}$$

证明。 我们可以将 $\mathrm{Mod}_{g,n}\cdot\Gamma_0$ 划分为 $\binom{n}{a_1\ \cdots\ a_s\ 、\ 、\ 、\ b_1、\ \cdots、\ b_r}$ 映射类群轨道，并对其应用米尔扎哈尼积分公式定理2.2。

令 x_p 表示 Γ 中 p 对应于指标集 I的简单闭测地线 γ_p 的长度。我们有 $\sum_{p\in I} x_p \le k\ell$，并且

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\Gamma\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot\Gamma_0}\mathbf{1}_{[0,k\ell]}(\ell(\Gamma))\right]\\&\prec\frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots,b_r}}{V_{g,n}}\int_{\sum_{p\in I}x_p\le k\ell}\prod_{i=1}^{s}V_{g_i,n_i+a_i}(x_{p_1^i},\cdots,x_{p_{n_i}^i},0^{a_i})\\&\cdot\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}(x_{p_1^j},\cdots,x_{p_{m_j}^j},0^{b_j})\prod_{p\in I}x_p\cdot\prod_{p\in I}dx_p,\end{aligned}$$

其中 $p_1^i,\ \cdots,\ p_{n_i}^i$ 是 ∂S_i 上测地线的标记，而 $q_1^j,\ \cdots,\ q_{m_j}^j$ 是 ∂V_j 上测地线的标记。由于每个 γ_p 都是被 Γ 两次切割所得某个区域的边界测地线，根据估计（10.7）和（10.9），我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\Gamma\in\overline{\mathrm{Mod}}_{g,n}\cdot\Gamma_0}\mathbf{1}_{[0,k\ell]}(\ell(\Gamma))\right]\\&\prec\frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots,b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^{s}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}\int_{\sum_{p\in I}x_p\le k\ell}e^{\sum_{p\in I}x_p}\prod_{p\in I}x_p\prod_{p\in I}dx_p\\&\prec\frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots,b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^{s}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}\cdot e^{2k\ell},\end{aligned}$$

由此证明得证。 □

引理 10.21。 若 $n=o(g^{\frac{1}{2}-\epsilon})$ 对某个 $\epsilon>0$ 成立，则对任意 $k\ge 2$，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\#\left\{(Y_1,\cdots,Y_k)\in N_\ell(X)^k;\ \textit{not leading type}\right\}\right]\\&\prec\left(\left(k+\frac{k\ell}{\pi}\right)\frac{e^{\ell+6}+3}{2}\right)^{3k}\cdot e^{2k\ell}\cdot(k\ell)^{3k+3}\cdot\frac{\log^{14}g(\log g+n)^3}{g^2}.\end{aligned}$$

证明。 由（10.35）和引理 10.20，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\#\left\{(Y_1,\cdots,Y_k)\in N_\ell(X)^k;\ \textit{not leading type}\right\}\right]\\&\prec\left(\left(k+\frac{k\ell}{\pi}\right)\frac{e^{\ell+6}+3}{2}\right)^{3k}\cdot e^{2k\ell}\cdot\sum_{1\le s\le k}\sum_{S\in\mathbf{Ind}_0}\\&\sum_{F\in\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}}\frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^{s}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}.\end{aligned}\tag{10.36}$$

由于 $\mathbf{Ind}_0 = \mathbf{Ind}_1$ 定义于小节 10.2，我们可以将估计（10.11）和（10.12）应用于（10.36）中关于 $S \in \mathbf{Ind}_0$的求和。因此可得

$$\sum_{1\le s\le k}\sum_{S\in\mathbf{Ind}_0}\sum_{F\in\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}}\frac{\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots b_r}}{V_{g,n}}\prod_{i=1}^{s}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j} \tag{10.37}$$
$$\prec (k\ell)^{3k+3}\cdot\frac{\log^{14} g(\log g+n)^3}{g^2}.$$

该引理由（10.36）和（10.37）推出。 □

对于 $k=1$ 我们计算 $\mathbb{E}^{g,\,n\,\mathrm{WP}}[\#N_\ell(X)]$ 更确切地说，对于 $Y\in N_\ell$，如果 Y有两个尖点， $Y\subset X$ 属于主导类型，则这类 Y的期望值由引理10.19计算得到。

引理 10.22。如果 $n=o(\sqrt{g})$ ，则

$$\mathbb{E}^{g,\,n\,\mathrm{WP}}[\#\{Y\in N_\ell(X)\ ;\ Y\text{有一个尖点}\}]$$
$$=\frac{n}{4\pi^2 g}\int_{x+y\le\ell}\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}dxdy\left(1+O\left(\frac{n\ell^2}{g}\right)\right)+O\left(\frac{n^3\cdot\ell\cdot e^{\frac{\ell}{2}}}{g^2}\right).$$

证明。 对于 $Y\in N_\ell$ 具有一个尖点时，若 $X\setminus Y$是连通的，则 $X\setminus Y\simeq S_{g-1,\,n+1}$。若 $X\setminus Y$不连通，我们可以假设 $X\setminus Y\simeq S_{g_1,\,n_1+1}\cup S_{g_2,\,n_2+1}$其中 $n_1+n_2=n-1$ 且 $g_1+g_2=g$。根据 Mirzakhani 积分公式定理2.2、引理4.10和引理 B.8，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}[\#\{Y\in N_\ell(X);Y\ \textit{has one cusp, }Y\setminus X\ \textit{is connected}\}]\\
=&\frac{1}{2}\frac{n}{V_{g,n}}\int_{x+y\le\ell}V_{0,3}(0,x,y)V_{g-1,n+1}(x,y,0^{n-1})xydxdy\\
=&\frac{n}{2}\frac{V_{g-1,n+1}}{V_{g,n}}\int_{x+y\le\ell}4\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}\left(1+O\left(\frac{n(x^2+y^2)}{g}\right)\right)dxdy\\
=&\frac{n}{4\pi^2 g}\int_{x+y\le\ell}\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}dxdy\left(1+O\left(\frac{n\ell^2}{g}\right)\right),
\end{aligned}$$

其中 1 2 是积分公式中的 C_Γ ， 而 n是 ∂Y的映射类轨道数。类似地，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}[\#\{Y\in N_\ell(X);Y\ \textit{has one cusp, }Y\setminus X\ \textit{is not connected}\}]\\
\prec&\sum_{\substack{n_1+n_2=n-1\\ g_1+g_2=g\\ 2g_i+n_i\ge 2}}\frac{\binom{n}{1,n_1,n_2}}{V_{g,n}}\int_{x,y\le\ell}V_{0,3}(0,x,y)V_{g_1,n_1+1}(x,0^{n_1})V_{g_2,n_2+1}(y,0^{n_2})xydxdy\\
\prec&\sum_{\substack{n_1+n_2=n-1\\ g_1+g_2=g\\ 2g_i+n_i\ge 2}}\frac{\binom{n}{1,n_1,n_2}}{V_{g,n}}V_{g_1,n_1+1}V_{g_2,n_2+1}\int_{x+y\le\ell}\sinh\frac{x}{2}\sinh\frac{y}{2}dxdy\\
\prec&\frac{n}{g}\cdot\ell\cdot e^{\frac{\ell}{2}}\cdot\sum_{\substack{n_1+n_2=n-1\\ g_1+g_2=g\\ 2g_i+n_i\ge 2}}\frac{\binom{n-1}{n_1}}{V_{g,n-1}}V_{g_1,n_1+1}V_{g_2,n_2+1}
\end{aligned}$$

$\prec \frac{n^3}{g^2}\cdot \ell \cdot e^{\frac{\ell}{2}}$,
其中 $\binom{n}{n_1,\ n_2}$ 是给定 ∂Y 时$g_i,\ \ n_i$，最后一个不等式由引理 B.14给出。
□

引理 10.23。若 $n=o(\sqrt{g})$,¯ 则

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\#\left\{Y\in N_\ell(X);Y\simeq S_{1,1}\right\}\right]\\ =&\frac{1}{8\pi^2 g}\int_0^\ell V_{1,1}(x)\sinh\frac{x}{2}dx\left(1+O\left(\frac{(1+n)\ell^2}{g}\right)\right).\end{aligned}$$

证明。 若 $Y\simeq S_{1,\ 1}$，则 $X\setminus Y\simeq S_{g-1,\ n+1}$ 必须连通。根据 Mirzakhani 积分公式定理2.2、引理 4.10 和引理 B.8，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\#\left\{Y\in N_\ell(X);Y\simeq S_{1,1}\right\}\right]\\ =&\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{V_{g,n}}\int_0^\ell V_{1,1}(x)V_{g-1,n+1}(x,0^n)xdx\\ =&\frac{V_{g-1,n+1}}{2V_{g,n}}\int_0^\ell V_{1,1}(x)2\sinh\frac{x}{2}\left(1+O\left(\frac{(1+n)x^2}{g}\right)\right)dx\\ =&\frac{1}{8\pi^2 g}\int_0^\ell V_{1,1}(x)\sinh\frac{x}{2}dx\left(1+O\left(\frac{(1+n)\ell^2}{g}\right)\right),\end{aligned}$$

这就结束了证明。 □

引理 10.24。若 $n=o(\sqrt{g})$,¯ 则

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\#\left\{Y\in N_\ell(X);Y\simeq S_{0,3}\ \textit{with no cusp}\right\}\right]\\ =&\frac{1}{6\pi^2 g}\int_{\sum_{i=1}^3 x_i\le\ell}\sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}\sinh\frac{x_3}{2}dx_1dx_2dx_3\cdot\left(1+O\left(\frac{(1+n)\ell^2}{g}\right)\right)\\ &+O\left(\ell^2\cdot e^{\frac{\ell}{2}}\cdot\frac{1+n^2}{g^2}\right).\end{aligned}$$

证明。对于没有尖点的 $Y\simeq S_{0,3}$，如果 $X\setminus Y$连通，则 $Y\setminus X\simeq S_{g-2,3}$。如果 $X\setminus Y$有两个连通分支，我们可以假设 $X\setminus Y\simeq S_{g_1,n_1+1}\cup S_{g_2,n_2+2}$，其中 $n_1+n_2=n$ 和 $g_1+g_2=g-1$，这里 n_i 是相应连通分支的尖点数。如果 $X\setminus Y$有三个连通分支，我们可以假设 $X\setminus Y\simeq S_{g_1,n_1+1}\cup S_{g_2,n_2+1}\cup S_{g_3,n_3+1}$，其中 $n_1+n_2+n_3=n$ 和 $g_1+g_2+g_3=g$。由 Mirzakhani 积分公式定理 2.2、引理 4.10 和引理 B.8，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\#\left\{Y\in N_\ell(X);Y\simeq S_{0,3},\ \textit{with no cusp, } X\setminus Y\ \textit{is connected}\ \right\}\right]\\ =&\frac{1}{6}\frac{1}{V_{g,n}}\int_{\sum_{i=1}^3 x_i\le\ell}V_{0,3}(x_1,x_2,x_3)V_{g-2,n+3}(x_1,x_2,x_3,0^n)x_1x_2x_3dx_1dx_2dx_3\\ =&\frac{V_{g-2,n+3}}{6V_{g,n}}\int_{x_1+x_2+x_3\le\ell}8\sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}\sinh\frac{x_3}{2}\\ &\cdot\left(1+O\left(\frac{(1+n)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{g}\right)\right)dx_1dx_2dx_3\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{6\pi^2 g}\int_{\sum_{i=1}^3 x_i\le \ell}\sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}\sinh\frac{x_3}{2}dx_1dx_2dx_3\left(1+O\left(\frac{(1+n)\ell^2}{g}\right)\right).$$

同样由米尔扎哈尼积分公式定理2.2、引理 4.10、引理B.8，以及估计（9.62），可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\#\left\{Y\in N_\ell(X); Y\simeq S_{0,3},\ \textit{with no cusp, } X\setminus Y \textit{ has two components }\right\}\right]\\
\prec&\sum_{\substack{n_1+n_2=n, g_1+g_2=g-1\\ 2g_1+n_1\ge 2, 2g_2+n_2\ge 1}}\frac{\binom{n}{n_1}}{V_{g,n}}\int_{\sum_{i=1}^3 x_i\le\ell}V_{0,3}(x_1,x_2,x_3)V_{g_1,n_1+1}(x_1,0^{n_1})\\
&\cdot V_{g_2,n_2+2}(x_2,x_3,0^{n_2})\cdot x_1x_2x_3dx_1dx_2dx_3\\
\prec&\sum_{\substack{n_1+n_2=n, g_1+g_2=g-1\\ 2g_1+n_1\ge 2, 2g_2+n_2\ge 1}}\frac{\binom{n}{n_1}}{V_{g,n}}V_{g_1,n_1+1}V_{g_2,n_2+2}\int_{\sum_{i=1}^3 x_i\le\ell}e^{\frac{x_1+x_2+x_3}{2}}dx_1dx_2dx_3\\
\prec&\ell^2\cdot e^{\frac{\ell}{2}}\cdot\frac{1+n^2}{g^2}.
\end{aligned}$$

同理，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\#\left\{Y\in N_\ell(X); Y\simeq S_{0,3},\ \textit{with no cusp, } X\setminus Y \textit{ has three components }\right\}\right]\\
\prec&\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n\\ g_1+g_2+g_3=n\\ 2g_i+n_i\ge 2}}\frac{\binom{n}{n_1,n_2,n_3}}{V_{g,n}}\int_{\sum_{i=1}^3 x_i\le\ell}V_{0,3}(x_1,x_2,x_3)V_{g_1,n_1+1}(x_1,0^{n_1})\\
&\cdot V_{g_2,n_2+1}(x_2,0^{n_2})V_{g_3,n_3+1}(x_3,0^{n_3})x_1x_2x_3dx_1dx_2dx_3\\
\prec&\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n\\ g_1+g_2+g_3=n\\ 2g_i+n_i\ge 2}}\frac{\binom{n}{n_1,n_2,n_3}}{V_{g,n}}V_{g_1,n_1+1}V_{g_2,n_2+1}V_{g_3,n_3+1}\\
&\cdot\int_{\sum_{i=1}^3 x_i\le\ell}\sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}\sinh\frac{x_3}{2}dx_1dx_2dx_3\\
\prec&\ell^2\cdot e^{\frac{\ell}{2}}\cdot\frac{1+n^4}{g^3},
\end{aligned}$$

其中最后一个不等式由（9.61）给出。 □

10.8. **引理 10.3 和 10.4 的证明**。引理10.3由引理 10.19 和引理 10.21 组合而成。引理 10.4 由引理10.19、引理10.22、引理 10.23和引理 10.24 组合而成。这里我们用到了以下事实：$V_{1,1}(x)\prec 1+x^2$，由定理 4.1。

11. Proof of Theorem 1.2

现在我们来证明本文的主要定理。假设$n = O(g^{\alpha})$ 对于 $\alpha < \frac{1}{2}$。由引理 10.4，我们得到

$$\begin{aligned} &\mathrm{Prob}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left(X \in \mathcal{N}_{\ell}^{c}\right) \leq \mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\#N_{\ell}\right] \\ &\prec \frac{(1+n^2)\ell^2 e^{\frac{\ell}{2}}}{g} \prec \frac{g^{2\alpha+\frac{\kappa}{2}}\log^2 g}{g} = o(1) \end{aligned} \tag{11.1}$$

如 $g \to \infty$ 若 $\ell = \kappa$对数函数 g 对于 $\kappa < 2 - 4\alpha$。我们已经证明了不等式（7.1）。现在我们重复如下:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[C(\epsilon_1)Te^{T(1-\epsilon_1)\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda_1(X)}} \cdot \mathbf{1}_{X\in\mathcal{N}_{\ell}} \cdot \mathbf{1}_{\lambda_1(X)\leq\frac{1}{4}}\right] \\ &\leq \underbrace{\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[1_{\mathcal{N}_{\ell}} \cdot \sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X)} H_{X,1}(\gamma)\right]}_{\mathrm{Int}_{nsep}} - \underbrace{\mathrm{Prob}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left(\mathcal{N}_{\ell}\right)\hat{f}_T(\frac{i}{2})}_{\mathrm{Int}_{\lambda_0}} \\ &+ \underbrace{\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[1_{\mathcal{N}_{\ell}} \cdot \sum_{\gamma\in\mathcal{P}^{ns}(X)} H_{X,1}(\gamma)\right]}_{\mathrm{Int}_{ns}} \\ &+ O\left(\frac{g}{T} + g\log^2 g + \log^{3a+4} g\right) \end{aligned} \tag{11.2}$$

对于任意 $\epsilon_1 > 0$和 $T = a$对数函数 g满足 $a > 0$。由引理 7.1，项 $\mathrm{Int}_{nsep} - \mathrm{Int}_{\lambda_0}$ 可以写成

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[1_{\mathcal{N}_{\ell}} \cdot \sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X)} H_{X,1}(\gamma)\right] - \mathrm{Prob}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left(\mathcal{N}_{\ell}\right)\hat{f}_T(\frac{i}{2}) \\ =&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X)} H_{X,1}(\gamma)\right] - \hat{f}_T(\frac{i}{2}) + \sum_{k=1}^{j}(-1)^k \\ &\cdot\left(\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[(\#N_{\ell})_k \cdot \sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X)} H_{X,1}(\gamma)\right] - \hat{f}_T(\frac{i}{2}) \cdot \mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[(\#N_{\ell})_k\right]\right) \\ &+ O\left(\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[(\#N_{\ell})_{j+1} \cdot \sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X)} H_{X,1}(\gamma)\right] + \hat{f}_T(\frac{i}{2}) \cdot \mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[(\#N_{\ell})_{j+1}\right]\right) \end{aligned} \tag{11.3}$$

对于任意 $j \geq 0$。

定理的证明 *1.2*。 我们取 $T=6(1-\alpha)$ 对数函数 g 并固定 $j=j_0\geq \frac{2-3\alpha}{1-2\alpha}-1\geq 1$ 在 (11.3)。由引理 8.1，可得

$$\begin{aligned}(11.4)\quad &\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right]-\hat{f}_T(\frac{i}{2})\\ =&\frac{1}{\pi^2 g}\int_0^T f_T(x)\left(\left(1-\frac{n}{2}\right)x-\frac{x^2}{4}\right)e^{\frac{x}{2}}dx+O\left((\log g)^6\cdot g\right).\end{aligned}$$

由于$\binom{n}{2,\cdots,2,n-2k}\prec n^{2k}\prec g^{2\alpha k}$，由引理10.1，对于 $T=6(1-\alpha)$ 对数函数 g，我们有

$$\begin{aligned}(11.5)\quad &\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[(\#N_\ell)_{j_0+1}\cdot\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right]\\ \prec&\frac{g^{2\alpha(j_0+1)}}{g^{j_0+1}}g^{\frac{1}{2}(j_0+1)\kappa}e^{\frac{T}{2}}+(\log g)^{366j_0+748}\cdot\frac{g^{3\alpha+5(j_0+1)\kappa}}{g^2}e^{\frac{T}{2}}\\ &+\log^{6j_0+7}g^{5(j_0+1)\kappa}+(\log g)^{6j_0+499}\cdot\frac{g^{62\alpha+5(j_0+1)\kappa}}{g^{61}}e^{\frac{9}{2}T}\\ \prec&(\log g)^{366j_0+748}\cdot g^{1+5(j_0+1)\kappa}.\end{aligned}$$

并且由引理10.3 对于 $T=6(1-\alpha)$ 对数函数 g，我们有

$$\begin{aligned}(11.6)\quad &\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[(\#N_\ell)_{j_0+1}\right]\cdot\hat{f}_T(\frac{i}{2})\\ \prec&\frac{g^{2\alpha(j_0+1)}}{g^{j_0+1}}g^{\frac{1}{2}(j_0+1)\kappa}e^{\frac{T}{2}}+(\log g)^{6j_0+26}g^{3\alpha-2+5(j_0+1)\kappa}e^{\frac{T}{2}}\\ \prec&(\log g)^{6j_0+26}\cdot g^{1+5(j_0+1)\kappa}.\end{aligned}$$

对于 $2\leq k\leq j_0$，由引理10.1 和引理10.3 可得

$$\begin{aligned}(11.7)\quad &\left|\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[(\#N_\ell)_k\cdot\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right]-\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[(\#N_\ell)_k\right]\cdot\hat{f}_T(\frac{i}{2})\right|\\ =&\frac{1}{k!}\binom{n}{2,\cdots,2,n-2k}\left(\frac{\cosh\frac{\ell}{2}-1}{2\pi^2 g}\right)^k\left|\int_0^T 2\sinh\frac{y}{2}f_T(y)dy-\hat{f}_T(\frac{i}{2})\right|\\ &+O\left(\frac{1}{k!}\binom{n}{2,\cdots,2,n-2k}\left(\frac{\cosh\frac{\ell}{2}-1}{2\pi^2 g}\right)^k\cdot e^{\frac{T}{2}}\cdot\frac{n\log^2 g}{g}\right)\\ &+O\left((\log g)^{366k+382}\cdot g^{1+5k\kappa}\right)\\ \prec&\frac{n^{2k}}{g^k}\cdot g^{\frac{k}{2}\kappa}+\frac{n^{2k+1}}{g^{k+1}}\log^2 g\cdot g^{3-3\alpha+\frac{k}{2}\kappa}+(\log g)^{366k+382}\cdot g^{1+5k\kappa}\\ \prec&(\log g)^{366j_0+382}\cdot g^{1+5j_0\kappa}.\end{aligned}$$

而对于 $k=1$，由引理10.2 和引理10.4 可得

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[(\#N_\ell)\cdot\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right]-\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[\#N_\ell\right]\cdot\hat{f}_T(\frac{i}{2})\right| \\
=&\frac{1}{\pi^2 g}\left[\frac{n(n-1)}{4}\left(\cosh\frac{\ell}{2}-1\right)+\frac{n}{4}\int_{x_1+x_2\le\ell}\sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}dx_1dx_2\right. \\
&+\frac{1}{6}\int_{x_1+x_2+x_3\le\ell}\sinh\frac{x_1}{2}\sinh\frac{x_2}{2}\sinh\frac{x_3}{2}dx_1dx_2dx_3 \\
&\left.+\frac{1}{8}\int_0^\ell V_{1,1}(x)\sinh\frac{x}{2}dx\right]\cdot\left|\int_0^T 2\sinh\frac{y}{2}f_T(y)dy-\hat{f}_T(\frac{i}{2})\right| \\
&+O\left((\log g)^{748}g^{1+5\kappa}\right) \\
\prec&O\left((\log g)^{748}g^{1+5\kappa}\right).
\end{aligned}
\tag{11.8}
$$

结合（11.3）、（11.4）、（11.5）、（11.6）、（11.7）和（11.8），可得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Int}_{nsep}-\mathrm{Int}_{\lambda_0} \\
=&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[1_{\mathcal{N}_\ell}\cdot\sum_{\gamma\in\mathcal{P}_{nsep}^{s}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right]-\mathrm{Prob}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left(\mathcal{N}_\ell\right)\hat{f}_T(\frac{i}{2}) \\
=&\frac{1}{\pi^2 g}\int_0^T f_T(x)\left(\left(1-\frac{n}{2}\right)x-\frac{x^2}{4}\right)e^{\frac{x}{2}}dx \\
&+O\left((\log g)^{366j_0+748}\cdot g^{1+5(j_0+1)\kappa}\right).
\end{aligned}
\tag{11.9}
$$

由引理 9.1可得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Int}_{ns} \\
=&\mathbb{E}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left[1_{N_\ell}\cdot\sum_{\gamma\in\mathcal{P}^{ns}(X)}H_{X,1}(\gamma)\right] \\
\le&\frac{1}{\pi^2 g}\int_0^\infty f_T(x)e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x^2}{4}+\left(\frac{n}{2}-1\right)x\right)dx \\
&+O\left((\log g)^3\cdot g^{6\delta_0(1-\alpha)+\frac{7}{2}\alpha-\frac{5}{2}}+(\log g)^{230}\cdot g^{1+6\epsilon_0(1-\alpha)}\right)
\end{aligned}
\tag{11.10}
$$

对于任意 $\delta_0\geqslant\frac{1}{2}$ 和 $\epsilon_0>0$，它们将抵消（11.9）中的主项。现在将（11.9）和（11.10）代入（11.2），得到

$$
\begin{aligned}
&C(\epsilon_1)\log g\cdot g^{6(1-\alpha)(1-\epsilon_1)\sqrt{\left(\frac{1}{6(1-\alpha)}\right)^2+\epsilon}} \\
&\cdot\mathrm{Prob}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left(X\in\mathcal{M}_{g,n}:\lambda_1(X)\le\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{6(1-\alpha)}\right)^2-\epsilon,X\in\mathcal{N}_\ell\right) \\
\prec&(\log g)^{366j_0+748}\cdot g^{1+5(j_0+1)\kappa}+(\log g)^3\cdot g^{6\delta_0(1-\alpha)+\frac{7}{2}\alpha-\frac{5}{2}} \\
&+(\log g)^{230}\cdot g^{1+6\epsilon_0(1-\alpha)},
\end{aligned}
\tag{11.11}
$$

对于任意 $\ell = \kappa$对数函数 $g, j_0 \geq \frac{2-3\alpha}{1-2\alpha} - 1 \geq 1, \epsilon, \epsilon_1, \epsilon_0 > 0$, $0 < \kappa < 2 - 4\alpha$和$\delta_0 > \frac{1}{2}$。给定 $\epsilon > 0$和 $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$，我们可以固定 $j_0 \geq 1$。然后我们可以取ϵ_1, ϵ_0, κ, $(\delta_0 - \frac{1}{2})$充分小，使得 $\kappa < 2 - 4\alpha$和

$$6(1-\alpha)(1-\epsilon_1)\sqrt{\left(\frac{1}{6(1-\alpha)}\right)^2 + \epsilon}$$
$$> \max\{6\delta_0(1-\alpha) + \frac{7}{2}\alpha - \frac{5}{2}, 1 + 6\epsilon_0(1-\alpha), 1 + 5(j_0+1)\kappa\}.$$

在这种情况下，由（11.1）和（11.11）可得

$$\lim_{g\to\infty} \mathrm{Prob}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left(X \in \mathcal{M}_{g,n} : \lambda_1(X) \leq \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{6(1-\alpha)}\right)^2 - \epsilon, X \in \mathcal{N}_\ell\right) = 0,$$

and

$$\lim_{g\to\infty} \mathrm{Prob}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left(X \notin \mathcal{N}_\ell\right) = 0.$$

因此我们有

$$\lim_{g\to\infty} \mathrm{Prob}_{\mathrm{WP}}^{g,n}\left(X \in \mathcal{M}_{g,n} : \lambda_1(X) > \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{6(1-\alpha)}\right)^2 - \epsilon\right) = 1,$$

对任意 $\epsilon > 0$，若 $n = O(g^\alpha)$，则成立。 □

Appendix A. Count filling geodesics

在本附录中，我们将简要概述定理 3.4 和定理 3.5的证明。定理 3.4 的证明与定理3.2的证明基本相同。参见 [WX22a, WX25]了解更多详情。本文给出的定理3.5的证明是对 [Par05]的推广。

为简便起见，在本附录中，我们用相同的字母表示测地线及其长度。

A.1. **定理 3.5 的证明。** 在 [Par05], Parlier 证明了定理3.5仅对简单闭曲线成立。他的证明可以按以下方式推广到所有闭曲线。

定理 *3.5* 的证明。 选取 X 的一个裤子分解。通过使用相同的裤子分解和 Fenchel–Nielsen 坐标来定义 Y_i，使其与 X 相同，但将边界长度（$x_1, \cdots, x_n$）改为（$y_1, \cdots, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n$），并且 $Y = Y_n$。对于任意闭曲线 $\eta \subset S_{g,n}$，令 η_X（分别为 η_Y）表示 X（分别为 Y）中与 η 同伦的测地线。我们将在每个 Y_i 中构造与 η 同伦的分段测地线η'_{Y_i} 和光滑测地线 η_{Y_i}，并证明

$$\ell(\eta_X) \geq \ell(\eta'_{Y_1}) \geq \ell(\eta_{Y_1}) \geq \cdots \geq \ell(\eta'_{Y_n}) \geq \ell(\eta_{Y_n}) = \ell(\eta_Y).$$

对于边界为（a、b、x）的裤子曲面，将边界之间的三条公垂线段记为（α、β、γ）。沿着 α 和 β切开裤子曲面。这样就得到一个八边形，如图8所示。

双曲三角学表明

$$\cosh\alpha = \frac{\cosh\frac{a}{2} + \cosh\frac{b}{2}\cosh\frac{x}{2}}{\sinh\frac{b}{2}\sinh\frac{x}{2}}, \tag{A.1}$$

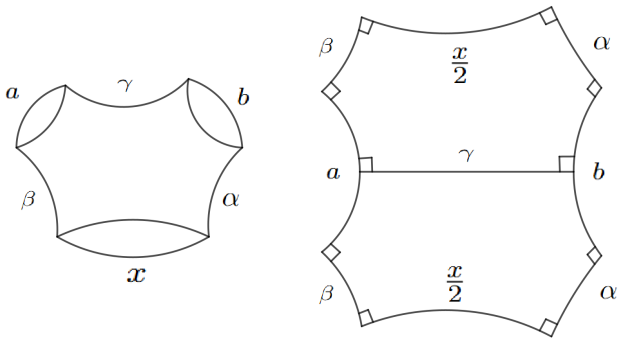


FIGURE 8. 裤子曲面与八边形

$$\cosh\beta = \frac{\cosh\frac{b}{2} + \cosh\frac{a}{2}\cosh\frac{x}{2}}{\sinh\frac{a}{2}\sinh\frac{x}{2}}, \tag{A.2}$$

$$\cosh\gamma = \frac{\cosh\frac{x}{2} + \cosh\frac{a}{2}\cosh\frac{b}{2}}{\sinh\frac{a}{2}\sinh\frac{b}{2}}. \tag{A.3}$$

因此，当固定 a，b并减小 x时，γ会减小，而 α，β会增大。

在裤子曲面中，对于闭测地线或端点位于 a 或 b上的测地线段，每当它与 α 或 β相交时，就将其切开。这样，它将被切分成以下 9 种情形中的线段片段（在图 d中记为9）。例如，图10 中的红色测地线将依次被切分为情形 (4)、(3) 和 (2) 中的线段（从位于 a上的端点开始）。

在每种情形中，记 u（分别记 v）为 β（分别为 α）中位于 d与 a（分别为 b）之间的部分，如图9中的蓝色线段所示。

现在我们在Y_1中构造分段测地线 η'_{Y_1} 和光滑测地线 η_{Y_1}。根据 Y_1的定义，Y_1 和 X 仅在包含边界 x_1的裤子曲面中存在差异。因此，我们可以将 η'_{Y_1} 定义为在该裤子曲面外与 η_X 相同的测地线段。在这个边界裤子曲面中，η_X 可以分割成图 9 所示的 9 种情形中的若干测地线段片段，切割点由它与 α 和 β 每次相交的位置给出（这里我们假设图 8 和图 9 中的 x 是边界 x_1）。当将 X 切换为 Y_1时，x 和 γ 减小，α 和 β 增大，而 a 和 b 保持不变。对于上述 X 中的每条测地线段 d，我们固定其端点（若端点位于 β、α上，则固定长度 u、v），并在 Y_1中得到相应的测地线段。将这些测地线段在 Y_1中连接起来，我们得到一条与 η同伦的分段测地线，记为 η'_{Y_1}。令 Y_1 中与 η同伦的相应光滑测地线为 η_{Y_1}。为了证明 $\ell(\eta_X) \geq \ell(\eta'_{Y_1}) \geq \ell(\eta_{Y_1})$，我们只需证明，在图 9 的每种情形中，当 x减小时，d也减小，而 a、b、u、v保持不变。

在情形 (6)、(7)、(8) 和 (9) 中，d 的长度显然是固定的，因为包含 d 的三角形或四边形中，其他边都是固定的。在前五种情形中，分别从 d 的两个端点向 γ 作公垂线段，记为 h_1 和 h_2。记 p和 q 为 γ 被 h_1 和 h_2的垂足截出的左、右两段。见图11。若 d 的某个端点位于 a 或b上，则 h_i 以及 p 或其所在边的 q 会消失，从而使计算

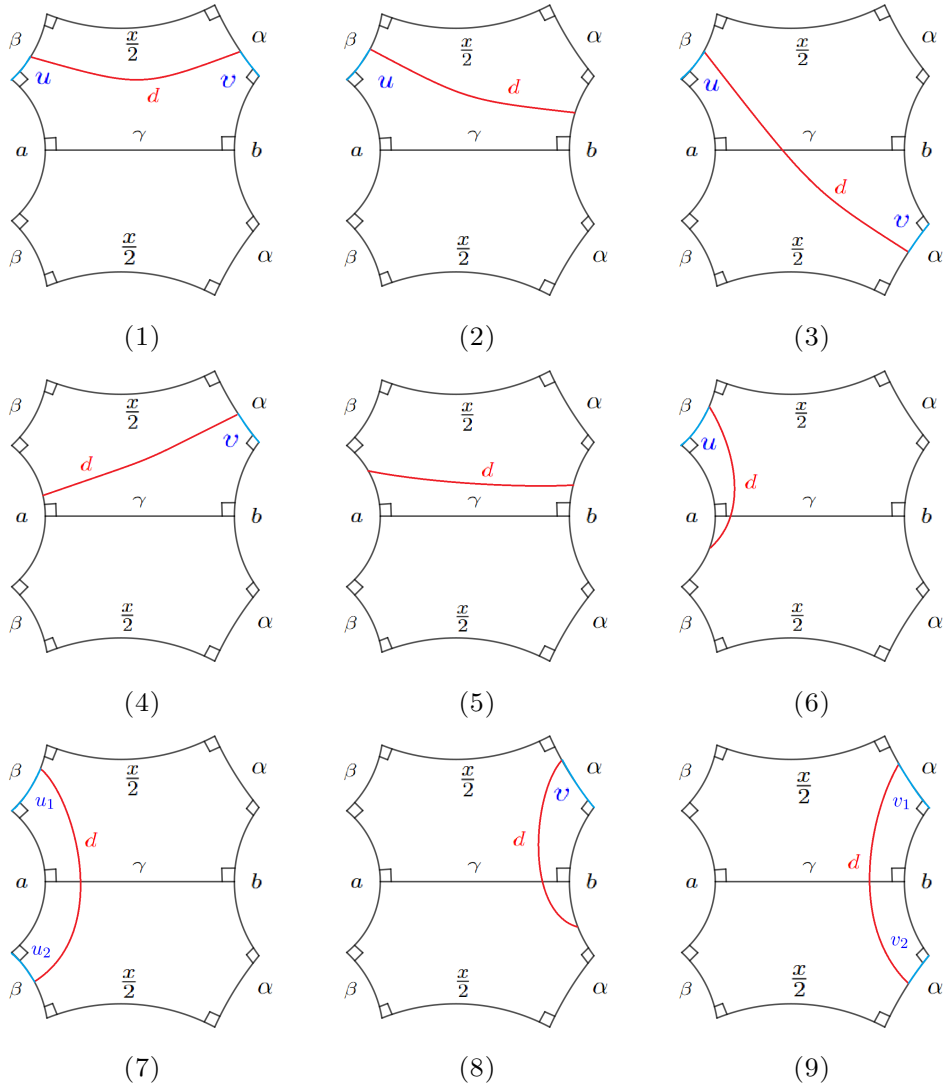


FIGURE 9. 被 α 和 β截断的测地线段情形。

更简单。由于 a、b、u、v都是固定的，根据标准双曲三角学可知 h_1、h_2、p、q都是固定的。而

$$\cosh d = \cosh h_1 \cosh h_2 \cosh(\gamma - p - q) - \sinh h_1 \sinh h_2. \tag{A.4}$$

在公式（A.4）中，h_1，h_2可以为负，其中 $h_1 \cdot h_2 < 0$ 表示它们位于 γ的不同侧，且 d 与 γ相交。由于 h_1、h_2、p、q是固定的，而 γ 在减小，因此我们知道 d在减小。

在每种情况下，d 都在减小或保持不变。因此，根据该构造，我们有

$$\ell(\eta_X) \geq \ell(\eta'_{Y_1}) \geq \ell(\eta_{Y_1}).$$

同样地，基于 η_{Y_1}，我们可以在 Y_2上构造分段测地线 η'_{Y_2}和光滑测地线 η_{Y_2}，以及 $\ell(\eta_{Y_1}) \geq \ell(\eta'_{Y_2}) \geq \ell(\eta_{Y_2})$。通过传导，

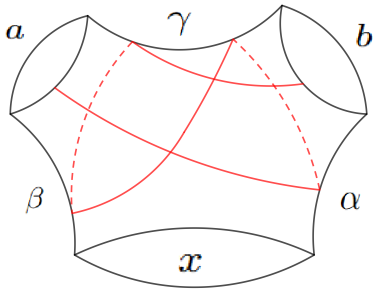


FIGURE 10. 示例：这条红色测地线将依次被切分为情形（4）、（3）和（2）中的线段。

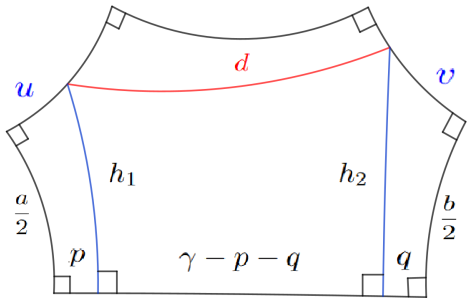


FIGURE 11

我们可以为 $i = 1$构造 η'_{Y_i}，η_{Y_i}，其中 Y_i 取2，$\cdots$，n，并具有 $\eta_Y = \eta_{Y_n}$ 和

$$\ell(\eta_X) \geq \ell(\eta'_{Y_1}) \geq \ell(\eta_{Y_1}) \geq \cdots \geq \ell(\eta'_{Y_n}) \geq \ell(\eta_{Y_n}) = \ell(\eta_Y).$$

因此，对于任意闭曲线 $\eta \subset S_{g,n}$，我们有 $\ell_\eta(X) \geq \ell_\eta(Y)$。 □

A.2. **定理3.4的证明。**

引理 A.1. 存在一个通用常数 $L_0 > 0$，使得对于任意$0 < \varepsilon < 1$、$m = 2g - 2 + n \geq 1$、$\Delta \geq 0$和$\sum_{i=1}^n x_i \geq \Delta + L_0 \frac{mn}{\varepsilon}$，以下结论成立：对于任意双曲曲面 $X \in \mathcal{T}_{g,n}(x_1, \cdots, x_n)$，总能找到一个新的双曲曲面 $Y \in \mathcal{T}_{g,n}(y_1, \cdots, y_n)$ 满足

(1) 对所有 $1 \leq i \leq n$，$y_i \leq x_i$；*(2)* $\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i = \Delta$；
(3) 对任意双重填充的 k-元组 $\Gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_k)$ 属于 $S_{g,n}$，我们有

$$\sum_{i=1}^k \ell_{\gamma_i}(X) - \sum_{i=1}^k \ell_{\gamma_i}(Y) \geq (1 - \varepsilon)\Delta.$$

证明。曲面 Y 及其证明与 [WX22a定理 38]相同，只需将填充曲线替换为双填充 k-元组。这里我们简要回顾 Y 的构造过程，以及证明中发生变化的部分。更多细节可参阅 [WX22a第 8] 节和 [WX25附录 A]。

取 X 的一个最长边界分支，并将其及其长度分别记为 $2b$。令 w 为 X 中 $2b$ 的最大嵌入半领圈的宽度，即

$$w = \sup \left\{ d > 0; \begin{array}{c} \{p \in X;\ \mathrm{dist}(p, 2b) < d\} \\ \text{is homeomorphic to a cylinder and} \\ \text{does not intersect with } (\partial X \setminus 2b) \end{array} \right\}.$$

于是，闭曲线 $\{p \in X;\ \mathrm{dist}(p, 2b) = w\}$ 要么与 ∂X 的另一个分支相交（ [WX22a] 中的类型 2），要么具有非空自交（ [WX22a] 中的类型 1）。对于这两种类型，它都会导出一个裤子曲面，记作 $\mathcal{P}$，其中 $2a$、$2b$ 和 $2c$ 都是边界曲线（详情参见 [WX22a，第 382 页，构造]）。

于是，对于任意小的 $\delta > 0$，将 $\mathcal{P}$ 的边界长度（$2a$，$2b$，$2c$）在类型 1 情形下缩短为（$2a$，$2b - \delta$，$2c$），在类型 2 情形下缩短为（$2a$，$2b - \frac{1}{2}\delta$，$2c - \frac{1}{2}\delta$）。将新的裤子曲面粘回 $X \setminus \mathcal{P}$（扭转参数保持不变），从而得到一个曲面 X_δ，其边界总长度相比X 减少了 δ（详情参见 [WX22a，第 383 页，构造] ）。 [WX22a，命题40] 证明了，当 $\ell(\partial X)$ 足够大时，这种针对 X_δ 的构造存在；并且对于 S_g 中的 η 任意填充闭曲线，n 具有

$$\ell_\eta(X) - \ell_\eta(X_\delta) \geq \frac{1}{2}\left(1 - O(\frac{mn}{\sum x_i})\right)\delta. \tag{A.5}$$

这里，对于任意双重填充 k元组 $\Gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_k)$ 属于S_g, n用同样的证明，我们可以在1 2 中删去（A.5）：

$$\sum_{i=1}^{k} \ell_{\gamma_i}(X) - \sum_{i=1}^{k} \ell_{\gamma_i}(X_\delta) \geq \left(1 - O(\frac{mn}{\sum x_i})\right)\delta. \tag{A.6}$$

然后重复上述降低边界总长度δ 的步骤（参见 [WX22a，第 384 页定理 38] 的证明，具体步骤见其中）。最后我们将得到曲面 Y，其边界总长度减少了 Δ，并且

$$\sum_{i=1}^{k} \ell_{\gamma_i}(X) - \sum_{i=1}^{k} \ell_{\gamma_i}(Y) \geq (1 - \varepsilon)\,\Delta. \tag{A.7}$$

为了证明（A.6），证明（A.5）中仅有的两处差异是需要如下修改[WX22a，引理 46、引理 56]:

引理 A.2。

(1) 若裤子曲面 $\mathcal{P}$ 属于类型 *1*，则 $\Gamma \cap \mathcal{P}$ 必须至少包含两个类型为 *1.1*、*1.2*、*1.5*、*1.6*、*1.7*、*1.8*、*1.13* 和 *1.14* 的线段，如 [WX22a第 393 页图 9]所示。*(2)* 若裤子曲面 $\mathcal{P}$ 属于类型 *2*，则 $\Gamma \cap \mathcal{P}$ 必须至少包含四个类型为 *2.2*、*2.3* 和 *2.4* 的线段，如 [WX22a第 403 页图 12]所示。

对于类型 1，仅利用 Γ的 [WX22a引理 46] 指出， $\Gamma \cap \mathcal{P}$ 必须至少包含一条类型为 1.1、1.2、1.5、1.6、1.7、1.8、1.13 或 1.14 的线段。然而，此处我们还假设 Γ 具有双重填充性质

此外还具有填充性质。因此，如果只有这样一条线段，那么包含 $2b$ 的 $X\setminus\Gamma$ 的圆柱分支内边界会在线段上发生自重叠，这与双填充性质相矛盾。

对于类型 2，由于 Γ 具有填充性质，它必定与 α相交。此外，如果 Γ只与 α 相交一次，那么包含 $2b$ 和 $2c$ 的 $X\setminus\Gamma$ 的圆柱分支的内边界会在经过该交点的一条线段上重叠，这与双填充性质矛盾。每当 Γ 与 α相交时，在交点两侧各有一条类型 2.2、2.3 或 2.4 的线段。因此，至少有四条这样的线段。

因此，引理A.2 成立。

然后，与 [WX22a], 中类型 1 的证明相同，将 $(2a, 2b, 2c)$ 缩减为 $(2a, 2b-\delta, 2c)$ 时，引理 A.2 (1) 中每条线段的长度至少减少 $\frac{1}{2}\left(1-O(\frac{m^2n^2}{(\sum x_i)^2})\right)\delta$；而对于类型 2，将 $(2a, 2b, 2c)$ 缩减为 $(2a, 2b-\frac{1}{2}\delta, 2c-\frac{1}{2}\delta)$ 时，引理 A.2 (2) 中每条线段的长度至少减少$\frac{1}{4}\left(1-O(\frac{mn}{\sum x_i})\right)\delta$。因此，由引理 A.2 可知，对于这两种类型， Γ 的长度至少减少 $\left(1-O(\frac{mn}{\sum x_i})\right)\delta$，这说明了 (A.6)，并完成了引理 A.1 的证明。□

定理 *3.4* 的证明。若边界总长度 $\sum x_i \le L_0\frac{mn}{\varepsilon}$其中 L_0是引理 A.1中的常数，则 [WX25 引理 64]直接表明

$$\begin{aligned} N_k^{2-fill}(X,T) &\prec_k m^k(1+T)^{k-1}e^T \\ &\prec_{k,\varepsilon,m} (1+T)^{k-1}e^{T-(1-\varepsilon)\sum x_i}. \end{aligned}$$

若边界总长度$\sum x_i > L_0\frac{mn}{\varepsilon}$，令 $\Delta = \sum x_i - L_0\frac{mn}{\varepsilon}$和$Y$为引理 A.1中构造的曲面。由于每个双重填充 k-元组$\Gamma=(\gamma_1, \cdots, \gamma_k)$ 有

$$\sum_{i=1}^k \ell_{\gamma_i}(X) - \sum_{i=1}^k \ell_{\gamma_i}(Y) \ge (1-\varepsilon)\Delta,$$

双重填充 k-元组的数量满足不等式

$$N_k^{2-fill}(X,T) \le N_k^{2-fill}(Y, T-(1-\varepsilon)\Delta).$$

再次应用 [WX25 引理 64] 于 Y，可得

$$\begin{aligned} N_k^{2-fill}(Y, T-(1-\varepsilon)\Delta) &\prec_k m^k(1+T-(1-\varepsilon)\Delta)^{k-1}e^{T-(1-\varepsilon)\Delta} \\ &\prec_{k,\varepsilon,m} (1+T)^{k-1}e^{T-(1-\varepsilon)\sum x_i}. \end{aligned}$$

因此，证明完成。 □

Appendix B. asymptotic of Weil-Petersson volumes and intersection numbers

首先，借助若干粗略求和估计，我们将证明以下三个关于 Weil-Petersson 体积的渐近估计，其中 $n = o(\sqrt{g})$。按照 [MZ15],中的算法，对于固定的 n，在 [MZ15、NWX23和AM22], 中也能找到非常相似的计算

对于 $n = o(\sqrt{g})$ 中的 [Hid23、SW25a], ，以及对于 $g \geq n^c$ 中带有 $c \succ 1$ 的 [HMT25]。在本附录末尾，我们证明若干粗略估计。

引理 B.1（引理 4.10）。对于 $n = n(g) = o(\sqrt{g})$，存在一个一致常数 $c > 0$ 使得

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2} \left(1 - cn\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{g}\right) \leq \frac{V_{g,n}(x_1, \cdots, x_n)}{V_{g,n}} \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2}.$$

定理 B.2（定理 4.11）。对于 $n = n(g) = o(\sqrt{g})$：

$$\frac{V_{g,n+1}}{8\pi^2 g V_{g,n}} = 1 + \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2}\right)n - \frac{5}{4} + \frac{2}{\pi^2}\right) \cdot \frac{1}{g} + O\left(\frac{1+n^2}{g^2}\right), \tag{B.1}$$

$$\frac{V_{g-1,n+2}}{V_{g,n}} = 1 + \frac{3-2n}{\pi^2} \cdot \frac{1}{g} + O\left(\frac{1+n^2}{g^2}\right). \tag{B.2}$$

这里的隐含常数与 n 和 g无关。

定理 B.3（定理 4.12）。对于任意固定的整数 $k \geq 1$，若 $n = n(g) = o(\sqrt{g})$ 且 $n \geq k$，则对于任意 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_k, \cdots, 0^{n-k}) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$，当 $g \to \infty$时，

$$\begin{aligned}\frac{V_{g,n}(\boldsymbol{x})}{V_{g,n}} &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2} + \frac{f_n^1(\boldsymbol{x})}{g} \\ &+ O_k\left(\frac{n^3(1 + x_1 + \cdots + x_k)^4}{g^2} \exp\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{2}\right)\right),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}f_n^1(\boldsymbol{x}) =& \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^{n} \left[\cosh(x_i/2) + 1 - (\frac{x_i^2}{16} + 2)\frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2}\right] \prod_{l \neq i} \frac{\sinh(x_l/2)}{x_l/2} \\ &- \frac{1}{2\pi^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[\cosh(x_i/2)\cosh(x_j/2) + 1 - 2\frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2}\frac{\sinh(x_j/2)}{x_j/2}\right] \\ &\cdot \prod_{l \neq i,j} \frac{\sinh(x_l/2)}{x_l/2},\end{aligned}$$

其中 $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$，且此处的隐含常数与$n$、$g$、$x_1$、$\cdots$、$x_k$无关，但与 k 有关。

B.1. $\mathcal{M}_{g,n}$ 上的重言类交数与递归公式。本小节回顾稳定 n 点标记曲线的模空间 $\mathcal{M}_{g,n}$ 上重言类的一些众所周知的事实及其交数。对于每个 $1 \leq i \leq n$，在 $\mathcal{M}_{g,n}$ 上都有一个重言线丛 $\mathcal{L}_i$，其在 $(C, x_1, \cdots, x_n)$ 处的纤维是 C 在 x_i 处的余切线。令 $\psi_i = c_1(\mathcal{L}_i) \in H_2(\mathcal{M}_{g,n}, \mathbb{Q})$。第一 Mumford 类通过遗忘映射 $p : \mathcal{M}_{g,n+1} \to \mathcal{M}_{g,n}$ 定义为 $\kappa_1 = p_*\psi_{n+1}^2 \in H_2(\mathcal{M}_{g,n}, \mathbb{Q})$。我们有 $\kappa_1 = \frac{\omega_{WP}}{2\pi^2}$。更多详情请参见例如 [AC96] 或 [HM06]。

对于 $\mathbf{d}=(d_1,\ \cdots,\ d_n)$，其中 $d_i\in\mathbb{N}_{\geq 0}$ 且 $|\mathbf{d}|=\sum_{i=1}^n d_i$，若 $|\mathbf{d}|\leq 3g-3+n$，则令 $d_0=3g-3+n-|\mathbf{d}|$，并且

$$[\tau_{d_1}\cdots\tau_{d_n}]_{g,n}=\left[\prod_{i=1}^n\tau_{d_i}\right]_{g,n}=\frac{(2\pi^2)^{d_0}}{d_0^2}\prod_{i=1}^n 2^{2d_i}(2d_i+1)!!\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}}\kappa_1^{d_0}\psi_1^{d_1}\cdots\psi_n^{d_n}.$$

对于 $|\mathbf{d}|>3g-3+n$，令 $[\tau_{d_1}\cdots\tau_{d_n}]_{g,\ n}=0$. 则由 [Mir07b，定理 1。1]，

$$\text{(B.3)}\quad V_{g,n}(2L_1,\cdots,2L_n)=\sum_{|\mathbf{d}|\leq 3g-3+n}\left[\prod_{i=1}^n\tau_{d_i}\right]_{g,n}\frac{L_1^{2d_1}}{(2d_1+1)!}\cdots\frac{L_n^{2d_n}}{(2d_n+1)!},$$

以及 $V_{g,\ n}=[\tau_0^n]_{g,\ n}$ 特别地。

对于 $|\mathbf{d}|\leq 3g-3+n$，以下递归公式成立：

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned}\left[\tau_0\tau_1\prod_{i=1}^n\tau_{d_i}\right]_{g,n+2}&=\left[\tau_0^4\prod_{i=1}^n\tau_{d_i}\right]_{g-1,n+4}\\&+6\sum_{\substack{g_1+g_2=g\\ I\sqcup J=\{1,\cdots,n\}}}\left[\tau_0^2\prod_{i\in I}\tau_{d_i}\right]_{g_1,|I|+2}\left[\tau_0^2\prod_{i\in J}\tau_{d_i}\right]_{g_2,|J|+2}.\end{aligned}$$

$$\text{(II)}\quad (2g-2+n)\left[\prod_{i=1}^n\tau_{d_i}\right]_{g,n}=\frac{1}{2}\sum_{L=1}^{3g-2+n}\frac{(-1)^{L-1}L\pi^{2L-2}}{(2L+1)!}\left[\tau_L\prod_{i=1}^n\tau_{d_i}\right]_{g,n+1}.$$

若 $a_0=-\frac{1}{2}$ 且 $a_i=\zeta(2i)(1-2^{1-2i})$ 对于 $i\geq 1$，则

$$\text{(III)}\quad \left[\prod_{g,n}\tau_{d_i}\right]_{g,n}=\sum_{j=2}^n A_{\mathbf{d}}^j+B_{\mathbf{d}}+C_{\mathbf{d}},$$

其中

$$\text{(B.4)}\quad A_{\mathbf{d}}^j=8\sum_{L=0}^{d_0}(2d_j+1)a_L\left[\tau_{L+d_1+d_j-1}\prod_{i\neq 1,j}\tau_{d_i}\right]_{g,n-1},$$

$$\text{(B.5)}\quad B_{\mathbf{d}}=16\sum_{L=0}^{d_0}\sum_{k_1+k_2=L+d_1-2}a_L\left[\tau_{k_1}\tau_{k_2}\prod_{i\neq 1}\tau_{d_i}\right]_{g-1,n+1},$$

$$\text{(B.6)}\quad \begin{aligned}C_{\mathbf{d}}=&16\sum_{\substack{g_1+g_2=g\\ I\sqcup J=\{2,\cdots,n\}}}\sum_{L=0}^{d_0}\\&\sum_{k_1+k_2=L+d_1-2}a_L\left[\tau_{k_1}\prod_{i\in I}\tau_{d_i}\right]_{g_1,|I|+1}\left[\tau_{k_2}\prod_{i\in J}\tau_{d_i}\right]_{g_1,|J|+1}.\end{aligned}$$

其中（**I**）是 [LX09命题 3 的特例。3]，（**II**）见于[DN09，LX09]，，而（**III**）已在 [Mir07a]中证明。

B.2. **基本估计**。

引理 B.4. [MZ15，引理 2。2] 序列 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ 满足

(1) $\lim_{n\to\infty} a_i = 1$*(2)* $\sum_{i=0}^{\infty} i(a_{i+1}-a_i) = \frac{1}{4}$.

(3) 存在 $C>0$ 使得对所有 $i \geq 0$,

$$\frac{1}{C\cdot 2^{2i}} \leq a_{i+1}-a_i \leq \frac{C}{2^{2i}}.$$

引理 B.5. [Mir13，引理 3。2] 对任意 $\boldsymbol{d}=(d_1,\ \cdots,\ d_n)$,

$$[\tau_{d_1+1}\tau_{d_2}\cdots\tau_{d_n}]_{g,n} \leq [\tau_{d_1}\tau_{d_2}\cdots\tau_{d_n}]_{g,n} \leq [\tau_0^n]_{g,n} = V_{g,n}.$$

引理 B.6. [MZ15，引理 5。1] 存在一个常数 $C>0$ 使得对任意 $g,\ n$ 且 $2g-2+n>0$,

$$\left|\frac{(2g-2+n)V_{g,n}}{V_{g,n+1}} - \frac{1}{4\pi^2}\right| \leq C\cdot\frac{n+1}{2g-2+n}.$$

下述引理可直接用与下列文献中相同的论证加以证明：[Mir13，第 286]，页，或 [NWX23，引理 22],和／或 [SW25a，引理 24]。

引理 B.7. 若 $n=o(\sqrt{g})$，对任意 $|\boldsymbol{d}| \leq 3g-3+n$，存在 $C>0$，使得当 $g\to\infty$ 时,

$$0 \leq 1-\frac{[\tau_{d_1}\cdots\tau_{d_n}]_{g,n}}{V_{g,n}} \leq C\frac{|\boldsymbol{d}|^2+n|\boldsymbol{d}|}{g}.$$

注. 引理 B.7 通过令 $|\mathbf{d}|>3g-3+n$，对 $[\tau_{d_1}\cdots\tau_{d_n}]=0$. 也成立

我们需要证明定理B.2的以下弱版本。

引理 B.8. 对于 $n=n(g)=o(\sqrt{g})$，当 $g\to\infty$时：

$$\frac{(2g-2+n)V_{g,n}}{V_{g,n+1}} = \frac{1}{4\pi^2} + O\left(\frac{1+n}{g}\right), \tag{B.7}$$

and

$$\frac{V_{g-1,n+2}}{V_{g,n}} = 1 + O\left(\frac{1+n}{g}\right), \tag{B.8}$$

其中隐含常数与 n、g 无关。

注. 引理 B.8 已包含在 [HMT25，定理 4 中。2], 其陈述和证明都非常复杂。为方便起见，我们仍提供证明概要。

引理*B.8*的证明。 估计式（B.7）就是引理B.6，它是将引理B.7代入递归公式（**II**），针对$\mathbf{d}=(0,\cdots,\ \mathbf{0})$。

对于（B.8），我们可以假设 $n\geq 2$。如果 $n=0,\ 1$，则根据引理 4.2可得。注意到

$$\frac{V_{g,n}}{V_{g-1,n+2}} = \frac{V_{g,n}}{\left[\tau_1\tau_0^{n-1}\right]_{g,n}}\cdot\frac{\left[\tau_1\tau_0^{n-1}\right]_{g,n}}{V_{g-1,n+2}}.$$

根据引理B.7，我们有

$$\frac{V_{g,n}}{\left[\tau_1\tau_0^{n-1}\right]_{g,n}} = 1 + O(\frac{n+1}{g}).$$

对于$\left[\tau_1\tau_0^{n-1}\right]_{g,}\ V_{g-1\ n+2}{}^{n}$，根据推论4.5和递归公式（I），我们有

$$\begin{aligned}\frac{\left[\tau_1\tau_0^{n-1}\right]_{g,n}}{V_{g-1,n+2}} =& 1 + 6 \sum_{\substack{g_1+g_2=g\\ I\sqcup J=\{1,\cdots,n-2\}}} \frac{V_{g_1,|I|+2}V_{g_2,|J|+2}}{V_{g-1,n+2}} \\ =& 1 + O\left(\sum_{\substack{g_1+g_2=g\\ i+j=n-2}} \frac{V_{g_1,i+2}V_{g_2,j+2}}{V_{g,n}}\binom{n-2}{i}\right).\end{aligned}$$

由引理B.16 对于 $k=1$，我们有

$$\sum_{\substack{g_1+g_2=g\\ i+j=n-2}} \frac{V_{g_1,i+2}V_{g_2,j+2}}{V_{g,n}}\binom{n-2}{i} = O\left(\frac{1+n}{g}\right).$$

So

$$\frac{\left[\tau_1\tau_0^{n-1}\right]_{g,n}}{V_{g-1,n+2}} = 1 + O\left(\frac{1+n}{g}\right),$$

于是（B.8）得证。 □

B.3. **引理B.1的证明**。 由引理$V_{g,\ n}\ (x_1,\ \cdots,\ x_n)\ V_{g,\ n}$ 可得上界，见引理4.7。对于下界，由（B.3）和引理B.7，我们有

$$\begin{aligned}\frac{V_{g,n}(2x_1,\cdots,2x_n)}{V_{g,n}} &= \sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^n_{\geq 0}} \left[\prod_{i=1}^n \tau_{d_i}\right]_{g,n} \frac{x_1^{2d_1}}{(2d_1+1)!}\cdots\frac{x_n^{2d_n}}{(2d_n+1)!} \\ &\geq \sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^n_{\geq 0}} \left(1 - C_0\frac{|\mathbf{d}|^2+n|\mathbf{d}|}{g}\right)\frac{x_1^{2d_1}}{(2d_1+1)!}\cdots\frac{x_n^{2d_n}}{(2d_n+1)!}\end{aligned} \tag{B.9}$$

对于某个统一的 $C_0>0$。注意

$$\prod_{i=1}^n \frac{\sinh x_i}{x_i} = \sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^n_{\geq 0}} \frac{x_1^{2d_1}}{(2d_1+1)!}\cdots\frac{x_n^{2d_n}}{(2d_n+1)!},$$

and

$$\begin{aligned}&\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)\prod_{i=1}^n \frac{\sinh x_i}{x_i} \\ =& \sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^n_{\geq 0}} \left(\sum_{i=1}^n 2d_i(2d_i+1)\right)\frac{x_1^{2d_1}}{(2d_1+1)!}\cdots\frac{x_n^{2d_n}}{(2d_n+1)!}.\end{aligned}$$

于是我们有

$$\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^n_{\geq 0}} |\mathbf{d}|\frac{x_1^{2d_1}}{(2d_1+1)!}\cdots\frac{x_n^{2d_n}}{(2d_n+1)!} \leq \frac{1}{2}\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)\prod_{i=1}^n \frac{\sinh x_i}{x_i}, \tag{B.10}$$

由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^n_{\geq 0}} |\mathbf{d}|^2 \frac{x_1^{2d_1}}{(2d_1+1)!}\cdots\frac{x_n^{2d_n}}{(2d_n+1)!} \leq \frac{n}{4}\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)\prod_{i=1}^n \frac{\sinh x_i}{x_i}. \tag{B.11}$$

代入（B.10）和（B.11）到（B.9）中，得到

$$\frac{V_{g,n}(2x_1,\cdots,2x_n)}{V_{g,n}} \geq \prod_{i=1}^n \frac{\sinh x_i}{x_i}\left(1-\frac{3C_0 n}{4}\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{g}\right).$$

因此，令 $C=\frac{3C_0}{16}$ 即可得出该引理。—

B.4. **交数估计**。本小节将展示交数在 $n=n(g)=o(\sqrt{g})$ 时的渐近性质。当 n 为任意固定数时，[MZ15]已经证明了这一点。由于证明将大量依赖于 [MZ15],中提出的算法，我们在此简要介绍证明，并仅着重讨论余项。

命题 B.9。若 $n\geq 1$ 且 $n=o(\sqrt{g})$，则当 $g\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}[\tau_{d_1},\cdots,\tau_{d_n}]_{g,n} = V_{g,n}&\\ -4V_{g,n-1}\cdot\mathbb{1}_{n\geq 2}&\sum_{1\leq i<j\leq n}\left((2d_i+1)(2d_j+1)+\mathbb{1}_{d_i=d_j=0}-2\right)\\ +8V_{g-1,n+1}\mathbb{1}_{g\geq 1}&\sum_{i=1}^n\left(2d_i-1+\mathbb{1}_{d_i=0}-\frac{(2d_i+1)d_i}{2}\right)\\ +O&\left(V_{g,n}\frac{n^2|\mathbf{d}|^3+|\mathbf{d}|^4}{g^2}\right).\end{aligned}$$

命题 B.10。对于 $n=n(g)=o(\sqrt{g})$，当 $g\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}&[\tau_{d_1}\tau_{d_2}\cdots\tau_{d_n}]_{g,n}-[\tau_{d_1+1}\tau_{d_2}\cdots\tau_{d_n}]_{g,n}\\ =&4(4d_1-1+2\mathbb{1}_{d_1=0})V_{g-1,n+1}\mathbb{1}_{g\geq 1}\\ +&4\sum_{j=2}^n(4d_j+2-\mathbb{1}_{d_1=d_j=0})V_{g,n-1}\mathbb{1}_{n\geq 2}\\ +&O\left(V_{g,n}\frac{(1+n^2)(1+|\mathbf{d}|^2)+|\mathbf{d}|^3}{g^2}\right).\end{aligned}$$

令 $\mathbf{d}'=(d_1+1,d_2,\cdots,d_n)$。由 **(III)** 我们可以写出

$$\begin{aligned}&[\tau_{d_1}\tau_{d_2}\cdots\tau_{d_n}]-[\tau_{d_1+1}\tau_{d_2}\cdots\tau_{d_n}]\\ =&\sum_{j=2}^n(A^j_{\mathbf{d}}-A^j_{\mathbf{d}'})+(B_{\mathbf{d}}-B_{\mathbf{d}'})+(C_{\mathbf{d}}-C_{\mathbf{d}'}).\end{aligned} \tag{B.12}$$

引理 B.11。对于 $2\leq j\leq n$ 和 $n=o(\sqrt{g})$，当 $g\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}A^j_{\boldsymbol{d}}-A^j_{\boldsymbol{d}'} =&4V_{g,n-1}\mathbb{1}_{n\geq 2}(4d_j+2-\mathbb{1}_{d_1=d_j=0})\\ &+O\left(V_{g,n}\frac{(d_j+1)(|\mathbf{d}|^2+n(|\mathbf{d}|+1))}{g^2}\right).\end{aligned}$$

证明。 对于 $n=1$，此结论成立。现在我们假设 $n\geq 2$。由 (B.4) 可得

$$\begin{aligned}A^j_{\mathbf{d}}-A^j_{\mathbf{d}'}=&8(2d_j+1)\sum_{L=0}^{\infty}a_L\left[\tau_{d_1+d_j+L-1}\prod_{i\neq 1,j}\tau_{d_i}\right]_{g,n-1}\\&-8(2d_j+1)\sum_{L=0}^{\infty}a_L\left[\tau_{d_1+d_j+L}\prod_{i\neq 1,j}\tau_{d_i}\right]_{g,n-1}\\=&8(2d_j+1)a_0\left[\tau_{d_1+d_j-1}\prod_{i\neq 1,j}\tau_{d_i}\right]_{g,n-1}\\&+8(2d_j+1)\sum_{L=1}^{\infty}(a_L-a_{L-1})\left[\tau_{d_1+d_j+L-1}\prod_{i\neq 1,j}\tau_{d_i}\right]_{g,n-1}.\end{aligned}\tag{B.13}$$

若 $d_1=d_j=0$，则 $\left[\tau_{d_1+d_j-1}\prod_{i\neq 1,j}\tau_{d_i}\right]_{g,\,n-1}=0$。若 $d_1+d_j>0$，由引理4.3和引理B.7，可得

$$\begin{aligned}&8(2d_j+1)a_0\left[\tau_{d_1+d_j-1}\prod_{i\neq 1,j}\tau_{d_i}\right]_{g,n-1}\\=&4(2d_j+1)V_{g,n-1}\left(1+O\left(\frac{|\mathbf{d}|^2+n|\mathbf{d}|}{g}\right)\right)\\=&4(2d_j+1)V_{g,n-1}+O\left(V_{g,n}\frac{(2d_j+1)(|\mathbf{d}|^2+n|\mathbf{d}|)}{g^2}\right).\end{aligned}\tag{B.14}$$

由引理4.3、引理B.4和引理B.7，可得

$$\begin{aligned}&8(2d_j+1)\sum_{L=1}^{\infty}(a_L-a_{L-1})\left[\tau_{d_1+d_j+L-1}\prod_{i\neq 1,j}\tau_{d_i}\right]_{g,n-1}\\=&8(2d_j+1)\sum_{L=1}^{\infty}(a_L-a_{L-1})V_{g,n-1}\left(1+O\left(\frac{(|\mathbf{d}|+L)^2+n(|\mathbf{d}|+L)}{g}\right)\right)\\=&4(2d_j+1)V_{g,n-1}\left(1+O\left(\frac{|\mathbf{d}|^2+n(|\mathbf{d}|+1)}{g}\right)\right)\\=&4(2d_j+1)V_{g,n-1}+O\left((2d_j+1)V_{g,n}\frac{|\mathbf{d}|^2+n(|\mathbf{d}|+1)}{g^2}\right).\end{aligned}\tag{B.15}$$

将（B.14）和（B.15）代入（B.13），即可得到该引理。 □

引理 B.12. 对于 $n=o(\sqrt{g})$，当 $g\to\infty$时，

$$\begin{aligned}B_{\boldsymbol{d}}-B_{\boldsymbol{d}'}=&4V_{g-1,n+1}\mathbb{1}_{g\geq 1}(4d_1-1+2\mathbb{1}_{d_1=0})\\&+O\left(V_{g,n}\frac{|\boldsymbol{d}|^3+n(|\boldsymbol{d}|^2+1)+1}{g^2}\right).\end{aligned}$$

证明。由（B.5）可得

(B.16)
$$\begin{aligned} B_{\mathbf{d}} - B_{\mathbf{d}'} =& 16 \sum_{k_1+k_2=d_1-2} a_0 \left[\tau_{k_1}\tau_{k_2}\prod_{i\neq 1}\tau_{d_i}\right]_{g-1,n+1} \\ &+16\sum_{L=1}^{\infty}\sum_{k_1+k_2=d_1+L-2}(a_L - a_{L-1})\left[\tau_{k_1}\tau_{k_2}\prod_{i\neq 1}\tau_{d_i}\right]_{g-1,n+1}. \end{aligned}$$

若 $d_1 \leq 1$ 则 $16\sum_{k_1+k_2=d_1-2} a_0 \left[\tau_{k_1}\tau_{k_2}\prod_{i\neq 1}\tau_{d_i}\right]_{g-1,n+1} = 0$。因此根据引理4.3和引理B.7，我们有

(B.17)
$$\begin{aligned} &16 \sum_{k_1+k_2=d_1-2} a_0 \left[\tau_{k_1}\tau_{k_2}\prod_{i\neq 1}\tau_{d_i}\right]_{g-1,n+1} \\ =&8\cdot \mathbb{1}_{d_1\geq 2}\sum_{k_1+k_2=d_1-2} V_{g-1,n+1}\left(1+O\left(\frac{|\mathbf{d}|^2+(n+1)|\mathbf{d}|}{g}\right)\right) \\ =&8\cdot \mathbb{1}_{d_1\neq 0}(d_1-1)V_{g-1,n+1}+O\left(V_{g,n}\frac{|\mathbf{d}|^3+(n+1)|\mathbf{d}|^2}{g^2}\right). \end{aligned}$$

根据引理4.3、引理 B.4和引理 B.7，我们有

(B.18)
$$\begin{aligned} &16\sum_{L=1}^{\infty}\sum_{k_1+k_2=d_1+L-2}(a_L-a_{L-1})\left[\tau_{k_1}\tau_{k_2}\prod_{i\neq 1}\tau_{d_i}\right]_{g-1,n+1} \\ =&16\sum_{L=1}^{\infty}(L+d_1-1)(a_L-a_{L-1})V_{g-1,n+1} \\ &\cdot\left(1+O\left(\frac{(|\mathbf{d}|+L)^2+(n+1)(|\mathbf{d}|+L)}{g}\right)\right) \\ =&(8d_1+4)V_{g-1,n+1}+O\left(V_{g-1,n+1}\cdot\frac{|\mathbf{d}|^3+(n+1)(|\mathbf{d}|^2+1)}{g}\right) \\ =&(8d_1+4)V_{g-1,n+1}+O\left(V_{g,n}\cdot\frac{|\mathbf{d}|^3+(n+1)(|\mathbf{d}|^2+1)}{g^2}\right). \end{aligned}$$

将（B.17）和（B.18）代入（B.16），即可得到该引理。 □

引理 B.13。对于 $n=o(\sqrt{g})$，当 $g\to\infty$时，

$$C_{\boldsymbol{d}} - C_{\boldsymbol{d}'} = O\left(V_{g,n}\frac{(1+|\boldsymbol{d}|)(1+n^2)}{g^2}\right).$$

证明。由（B.6），引理 B.5和引理 B.4，我们得到

$$\begin{aligned} &C_{\mathbf{d}} - C_{\mathbf{d}'} \\ =&16\sum_{\substack{g_1+g_2=g\\ I\cup J=\{2,\cdots,n\}}}\left(\sum_{k_1+k_2=d_1-2} a_0\left[\tau_{k_1}\prod_{i\in I}\tau_{d_i}\right]_{g_1,|I|+1}\left[\tau_{k_2}\prod_{i\in J}\tau_{d_i}\right]_{g_2,|J|+1}\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{L=1}^{\infty}\sum_{k_1+k_2=d_1+L-2}(a_L-a_{L-1})\left[\tau_{k_1}\prod_{i\in I}\tau_{d_i}\right]_{g_1,|I|+1}\left[\tau_{k_2}\prod_{i\in J}\tau_{d_i}\right]_{g_2,|J|+1}\Bigg)\\
&\prec\left(\sum_{\substack{g_1+g_2=g\\ I\cup J=\{2,\cdots,n\}}}V_{g_1,|I|+1}V_{g_2,|J|+1}\right)\cdot\left(d_1+\sum_{L=1}^{\infty}(d_1+L-1)(a_L-a_{L-1})\right)\\
&\prec\left(\sum_{\substack{g_1+g_2=g\\ i+j=n-1}}V_{g_1,i+1}V_{g_2,j+1}\binom{n-1}{i}\right)\cdot(d_1+1).
\end{aligned}
$$

由引理B.8 和引理 B.14 （其证明独立于本引理，尽管我们稍后才给出证明，以使排版更简洁），证明至此完成。□

命题的证明 *B.10*。由（B.12）、引理 B.11、引理 B.12和引理 B.13可得。□

命题的证明 *B.9*。将命题 B.10 应用于恒等式

$$
\begin{aligned}
&\left[\tau_{d_1}\cdots\tau_{d_n}\right]_{g,n}\\
=&V_{g,n}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{d_i-1}\left(\left[\tau_k\tau_0^{i-1}\tau_{d_{i+1}}\cdots\tau_{d_n}\right]_{g,n}-\left[\tau_{k+1}\tau_0^{i-1}\tau_{d_{i+1}}\cdots\tau_{d_n}\right]_{g,n}\right),
\end{aligned}
$$

其中包含 $\sum_{i=1}^{n}d_i$ 项一阶差分的求和，我们有

$$
\begin{aligned}
\left[\tau_{d_1},\cdots,\tau_{d_n}\right]_{g,n}=&V_{g,n}\\
&-4V_{g,n-1}\cdot\mathbb{1}_{n\geq 2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\left((2d_i+1)(2d_j+1)+\mathbb{1}_{d_i=d_j=0}-2\right)\\
&+8V_{g-1,n+1}\mathbb{1}_{g\geq 1}\sum_{i=1}^{n}\left(2d_i-1+\mathbb{1}_{d_i=0}-\frac{(2d_i+1)d_i}{2}\right)\\
&+O\left(V_{g,n}\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)\frac{(1+n^2)(1+|\mathbf{d}|^2)+|\mathbf{d}|^3}{g^2}\right)\\
=&V_{g,n}\\
&-4V_{g,n-1}\cdot\mathbb{1}_{n\geq 2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\left((2d_i+1)(2d_j+1)+\mathbb{1}_{d_i=d_j=0}-2\right)\\
&+8V_{g-1,n+1}\mathbb{1}_{g\geq 1}\sum_{i=1}^{n}\left(2d_i-1+\mathbb{1}_{d_i=0}-\frac{(2d_i+1)d_i}{2}\right)\\
&+O\left(V_{g,n}\frac{n^2|\mathbf{d}|^3+|\mathbf{d}|^4}{g^2}\right).
\end{aligned}
$$

□

B.5. **证明定理 B.2**。 首先由（II）我们有

$$(2g-2+n)V_{g,n}=\frac{1}{2}\sum_{L=1}^{\infty}(-1)^{L-1}L\frac{\pi^{2L-2}}{(2L+1)!}\left[\tau_L\tau_0^n\right]_{g,n+1}. \tag{B.19}$$

根据命题 B.9，对于 $L\geq 1$ 我们有

$$\begin{aligned}\left[\tau_L\tau_0^n\right]_{g,n+1}=&V_{g,n+1}-4V_{g,n}\mathbb{1}_{n\geq 1}n(2L-1)\\&+8V_{g-1,n+2}\mathbb{1}_{g\geq 1}\left((2L-1)-\frac{(2L+1)L}{2}\right)\\&+O\left(V_{g,n+1}\frac{(n+1)^2L^3+L^4}{g^2}\right).\end{aligned}$$

由引理 B.8可得

$$\begin{aligned}\frac{\left[\tau_L\tau_0^n\right]_{g,n+1}}{V_{g,n+1}}=&1-4n(2L-1)\frac{V_{g,n}}{V_{g,n+1}}\\&+8\left((2L-1)-\frac{(2L+1)L}{2}\right)\frac{V_{g-1,n+2}}{V_{g,n+1}}\\&+O\left(\frac{(n+1)^2L^3+L^4}{g^2}\right)\\=&1-4n(2L-1)\left(\frac{1}{8\pi^2g}+O\left(\frac{1+n}{g^2}\right)\right)\\&+8\left((2L-1)-\frac{(2L+1)L}{2}\right)\left(\frac{1}{8\pi^2g}+O\left(\frac{1+n}{g^2}\right)\right)\\&+O\left(\frac{(n+1)^2L^3+L^4}{g^2}\right)\\=&1-\frac{1}{2\pi^2g}\left(n(2L-1)+2L^2-3L+2\right)\\&+O\left(\frac{(1+n^2)(1+L^4)}{g^2}\right).\end{aligned} \tag{B.20}$$

结合（B.19）和（B.20），我们有

$$\begin{aligned}&\frac{(2g-2+n)V_{g,n}}{V_{g,n+1}}\\=&\frac{1}{2}\sum_{L=1}^{\infty}(-1)^{L-1}L\cdot\frac{\pi^{2L-2}}{(2L+1)!}\left(1-\frac{1}{2\pi^2g}\left(n(2L-1)+2L^2-3L+2\right)\right)\\&+O\left(\sum_{L=1}^{\infty}\frac{L\pi^{2L-2}}{(2L+1)!}\frac{(1+n^2)(1+L^4)}{g^2}\right)\\=&\frac{1}{4\pi^2}+\frac{4n+\pi^2-8}{16\pi^4g}+\left(\frac{1+n^2}{g^2}\right),\end{aligned}$$

这等价于

$$\frac{8\pi^2gV_{g,n}}{V_{g,n+1}}=1+\left(\left(\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{2}\right)n+\frac{5}{4}-\frac{2}{\pi^2}\right)\frac{1}{g}+O\left(\frac{1+n^2}{g^2}\right), \tag{B.21}$$

并推出（B.1）。

其次，由（**I**）和（B.20）可得

$$\begin{aligned}\frac{V_{g-1,n+4}}{V_{g,n+2}} =&\frac{\left[\tau_1\tau_0^{n+1}\right]_{g,n+2}}{V_{g,n+2}} - 6\sum_{\substack{g_1+g_2=g\\ I\cup J=\{1,\cdots,n\}}}\frac{V_{g_1,|I|+2}V_{g_2,|J|+2}}{V_{g,n+2}}\\ =&1-\frac{n+2}{2\pi^2 g}+O\left(\frac{1+n^2}{g^2}\right)-12n\frac{V_{g,n+1}}{V_{g,n+2}}\\ &+O\left(\sum_{\substack{i+j=n\\ g_1+g_2=g\\ 2g_1+i\geq 2\\ 2g_2+j\geq 2}}\binom{n}{i}\frac{V_{g_1,i+2}V_{g_2,j+2}}{V_{g,n+2}}\right).\end{aligned}$$

那么，根据引理 B.8和引理 B.16，对于 $k=2$（其证明独立于本引理，不过为使布局更简洁，我们稍后给出证明），可得

$$\begin{aligned}\frac{V_{g-1,n+4}}{V_{g,n+2}} =&1-\frac{n+2}{2\pi^2 g}-\frac{12n}{8\pi^2 g}\left(1+O\left(\frac{1+n}{g}\right)\right)+O\left(\frac{1+n^2}{g^2}\right).\\ =&1-\frac{2n+1}{\pi^2 g}+O\left(\frac{1+n^2}{g^2}\right).\end{aligned}$$

这就证明了（B.2）对 $n\geq 2$ 和 $n=n(g)=o(\sqrt{g})$成立。关于 $n=0,1$ 的情形已在 [MZ15]中证明。

B.6. **定理 B.3 的证明。** 命题 B.9 对任意 $\mathbf{d}\in\mathbb{N}^n_{\geq 0}$ 通过扩展 $[\tau_{d_1}\cdots\tau_{d_n}]_{g,n}=0$对于 $|\mathbf{d}|>3g-3+n$。将其代入（B.3），得到

(B.22)

$$\begin{aligned}&\frac{V_{g,n}(\mathbf{x})}{V_{g,n}}\\ =&\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^n_{\geq 0}}\Bigg[\prod_{i=1}^n\frac{x_i^{2d_i}}{2^{2d_i}(2d_i+1)!}\\ &-8\frac{V_{g-1,n+1}}{V_{g,n}}\cdot\sum_{i=1}^n\left(\frac{(2d_i+1)d_i}{2}-2d_i+1-\mathbb{1}_{d_i=0}\right)\prod_{j=1}^n\frac{x_j^{2d_j}}{2^{2d_j}(2d_j+1)!}\\ &-4\frac{V_{g,n-1}}{V_{g,n}}\mathbb{1}_{n\geq 2}\sum_{i<j}\left((2d_i+1)(2d_j+1)-2+\mathbb{1}_{d_i=d_j=0}\right)\prod_{j=1}^n\frac{x_j^{2d_j}}{2^{2d_j}(2d_j+1)!}\Bigg]\\ &+O\left(\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^n_{\geq 0}}\frac{n^2|\mathbf{d}|^3+|\mathbf{d}|^4}{g^2}\prod_{i=1}^n\frac{x_i^{2d_i}}{2^{2d_i}(2d_i+1)!}\right).\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{d=0}^{\infty}\frac{x^{2d}}{2^{2d}(2d+1)!}=\frac{\sinh(x/2)}{x/2},$$

and

$$\sum_{d=0}^{\infty}\frac{x^{2d}}{2^{2d}(2d)!}=\cosh(x/2).$$

Then

$$\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}_{\geq 0}^{n}}\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i^{2d_i}}{2^{2d_i}(2d_i+1)!}=\prod_{i=1}^{n}\frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2}. \tag{B.23}$$

根据引理B.8，我们有

$$\begin{aligned}
&8\frac{V_{g-1,n+1}}{V_{g,n}}\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}_{\geq 0}^{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(2d_i+1)d_i}{2}-2d_i+1-\mathbb{1}_{d_i=0}\right)\prod_{j=1}^{n}\frac{x_j^{2d_j}}{2^{2d_j}(2d_j+1)!}\\
=&\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{x_i^2}{16}+2\right)\frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2}-\cosh(x_i/2)-1\right]\prod_{j\neq i}\frac{\sinh(x_j/2)}{x_j/2}\\
&\cdot\left(\frac{1}{\pi^2 g}+O\left(\frac{1+n}{g^2}\right)\right)\\
=&\frac{1}{\pi^2 g}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{x_i^2}{16}+2\right)\frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2}-\cosh(x_i/2)-1\right]\prod_{j\neq i}\frac{\sinh(x_j/2)}{x_j/2}\\
&+O\left(\frac{(1+n)\left(n+\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)}{g^2}\exp\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{2}\right)\right),
\end{aligned} \tag{B.24}$$

and

$$\begin{aligned}
&4\frac{V_{g,n-1}}{V_{g,n}}\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}_{\geq 0}^{n}}\sum_{i<j}\left((2d_i+1)(2d_j+1)-2+\mathbb{1}_{d_i=d_j=0}\right)\prod_{j=1}^{n}\frac{x_j^{2d_j}}{2^{2d_j}(2d_j+1)!}\\
=&\sum_{i<j}\left(\cosh(x_i/x)\cosh(x_j/2)-2\frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2}\frac{\sinh(x_j/2)}{x_j/2}+1\right)\\
&\cdot\prod_{l\neq i,j}\frac{\sinh(x_l/2)}{x_l/2}\cdot\left(\frac{1}{2\pi^2 g}+O\left(\frac{1+n}{g^2}\right)\right)\\
=&\frac{1}{2\pi^2 g}\sum_{i<j}\left(\cosh(x_i/x)\cosh(x_j/2)-2\frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2}\frac{\sinh(x_j/2)}{x_j/2}+1\right)\\
&\cdot\prod_{l\neq i,j}\frac{\sinh(x_l/2)}{x_l/2}\\
&+O\left(\mathbb{1}_{n\geq 2}\frac{n^3}{g^2}\exp\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{2}\right)\right).
\end{aligned} \tag{B.25}$$

注意，我们假设 $\mathbf{x}=(x_1,\ \cdots,\ x_k,\ 0^{n-k})$，因此

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}_{\geq 0}^n}\frac{n^2|\mathbf{d}|^3+|\mathbf{d}|^4}{g^2}\prod_{i=1}^n\frac{x_i^{2d_i}}{2^{2d_i}(2d_i+1)!}\\&=\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}_{\geq 0}^k}\frac{n^2|\mathbf{d}|^3+|\mathbf{d}|^4}{g^2}\prod_{i=1}^k\frac{x_i^{2d_i}}{2^{2d_i}(2d_i+1)!}.\end{aligned}\tag{B.26}$$

由于对于任意 $m\geq 0$

$$x_i^{2m}\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}_{\geq 0}^k}\prod_{j=1}^k\frac{x_j^{2d_j}}{2^{2d_j}(2d_j+1)!}=4^m\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}_{\geq 0}^k}\prod_{t=1}^{2m}(2d_i+2-t)\prod_{j=1}^k\frac{x_j^{2d_j}}{2^{2d_j}(2d_j+1)!},$$

由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}_{\geq 0}^k}|\mathbf{d}|^3\prod_{i=1}^k\frac{x_i^{2d_i}}{2^{2d_i}(2d_i+1)!}\\\leq&\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}_{\geq 0}^k}|\mathbf{d}|^4\prod_{i=1}^k\frac{x_i^{2d_i}}{2^{2d_i}(2d_i+1)!}\\\prec&\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}_{\geq 0}^k}\sum_{i=1}^k d_i^4\prod_{i=1}^k\frac{x_i^{2d_i}}{2^{2d_i}(2d_i+1)!}\\\prec&\sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}_{\geq 0}^k}\sum_{i=1}^k\left(1+x_i^2+x_i^4\right)\prod_{i=1}^k\frac{x_i^{2d_i}}{2^{2d_i}(2d_i+1)!}\\\prec&(1+x_1+\cdots+x_k)^4\exp\left(\frac{x_1+\cdots+x_k}{2}\right),\end{aligned}\tag{B.27}$$

其中，隐含常数仅取决于 k，且与 g、n 和x_1、$\cdots$、x_k 无关。现在根据（B.22）、（B.23）、（B.24）、（B.25）、（B.26）和（B.27），可得

$$\begin{aligned}\frac{V_{g,n}(\mathbf{x})}{V_{g,n}}=&\prod_{i=1}^n\frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2}+\frac{f_n^1(\mathbf{x})}{g}\\&+O_k\left(\frac{n^3(1+x_1+\cdots+x_k)^4}{g^2}\exp\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{2}\right)\right),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}f_n^1(\mathbf{x})=&\frac{1}{\pi^2}\sum_{i=1}^n\left[\cosh(x_i/2)+1-(\frac{x_i^2}{16}+2)\frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2}\right]\prod_{l\neq i}\frac{\sinh(x_l/2)}{x_l/2}\\&-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\left[\cosh(x_i/2)\cosh(x_j/2)+1-2\frac{\sinh(x_i/2)}{x_i/2}\frac{\sinh(x_j/2)}{x_j/2}\right]\end{aligned}$$

$$\cdot \prod_{l\neq i,j} \frac{\sinh(x_l/2)}{x_l/2},$$

且隐含常数与 k 有关。

B.7. **若干粗略估计**。

引理 B.14. 对于任意 $k \geq 2$，若 $n = o(\sqrt{g})$，则

$$\sum_{\substack{0\leq i\leq g, 0\leq j\leq n\\ k\leq 2i+j\leq 2g+n-k}} \binom{n}{j} \frac{V_{i,j+1}V_{g-i,n-j+1}}{V_{g,n}} \prec \frac{1+n^k}{g^{k-1}}.$$

注. 关于 $k = 2$ 的情形见 [Hid23，引理 A.4]。我们对其稍作推广。

引理 *B.14* 的证明。若 n 有界，则由引理4.2中的 (3) 可得本引理。现在假设 $n \geq 2k+2$。由引理 4.3、定理 4.4和推论4.6，对于 $j \geq 0$，有

$$V_{i,j+1} \prec V_{i+[\frac{j}{2}],j+1-2[\frac{j}{2}]} \prec \frac{1}{\sqrt{i+j}}(2i+j-2)!(4\pi^2)^{2i+j-2}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{0\leq i\leq g, 0\leq j\leq n\\ k\leq 2i+j\leq 2g+n-k}} \binom{n}{j} \frac{V_{i,j+1}V_{g-i,n-j+1}}{V_{g,n}}\\
\prec &\sum_{\substack{0\leq i\leq g, 0\leq j\leq n\\ k\leq 2i+j\leq 2g+n-k}} \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(2i+j-2)!(2g+n-2i-j-2)!}{(2g+n-3)!}\\
&\cdot \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{i+j}\sqrt{2g+n-2i-j}}\\
\prec &\sum_{\substack{0\leq i\leq g, 0\leq j\leq n\\ k\leq 2i+j\leq 2g+n-k}} \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(2i+j-2)!(2g+n-2i-j-2)!}{(2g+n-3)!}.
\end{aligned} \tag{B.28}$$

设 $L = 2i+j$。若 $2k+2 \leq L \leq n$，则

$$\begin{aligned}
&\frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(2i+j-2)!(2g+n-2i-j-2)!}{(2g+n-3)!} \prec \frac{n^j(L-2)!}{g^{L-1}}\\
\prec &\frac{n^2\sqrt{L}}{g}\left(\frac{nL}{eg}\right)^{L-2} \prec \sqrt{L}\left(\frac{nL}{eg}\right)^{L-2k-2} L^{2k}\left(\frac{n}{ge}\right)^{2k}\\
\prec &L^{2k+\frac{1}{2}}g^{-k}\left(\frac{nL}{eg}\right)^{L-2k-2} \prec L^{2k+\frac{1}{2}}g^{-k}e^{2k+2-L} \prec g^{-k}.
\end{aligned} \tag{B.29}$$

若 $n+1 \le L \le \frac{2g+n}{2}$，则

$$\begin{aligned}
&\frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(2i+j-2)!(2g+n-2i-j-2)!}{(2g+n-3)!} \\
\le& 2^n\frac{(L-2)!(2g+n-L-2)!}{(2g+n-3)!} \prec 2^n\frac{(n-1)!(2g-3)!}{(2g+n-3)!} \prec \left(\frac{2n}{g}\right)^n \\
\prec& g^{-k}.
\end{aligned} \tag{B.30}$$

由对称性可知，对于 $\frac{2g+n}{2} \le L \le 2g+n-2k-2$，我们也有

$$\frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(2i+j-2)!(2g+n-2i-j-2)!}{(2g+n-3)!} \prec g^{-k}. \tag{B.31}$$

因此，由（B.28）、（B.29）、（B.30）和（B.31）可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{0\le i\le g, 0\le j\le n\\ k\le 2i+j\le 2g+n-k}} \binom{n}{j}\frac{V_{i,j+1}V_{g-i,n-j+1}}{V_{g,n}} \\
\prec& \sum_{\substack{0\le i\le g, 0\le j\le n\\ 2k+2\le 2i+j\le 2g+n-2k-2}} \frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(2i+j-2)!(2g+n-2i-j-2)!}{(2g+n-3)!} \\
+& \sum_{\substack{0\le i\le g, 0\le j\le n\\ k\le 2i+j\le 2k+1 \text{ or}\\ 2g+n-2k-1\le 2i+j\le 2g+n-k}} \frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(2i+j-2)!(2g+n-2i-j-2)!}{(2g+n-3)!} \\
\prec& \sum_{\substack{0\le i\le g, 0\le j\le n\\ 2k+2\le 2i+j\le 2g+n-2k-2}} \frac{1}{g^k}+\frac{n^k}{g^{k-1}} \\
\prec& \frac{1+n^k}{g^{k-1}},
\end{aligned}$$

如所需。 □

对于 $k=2$，若不允许 $(i,\ j)=(0,2)$ 或 $(g,\ n-2)$，则以下估计可直接由引理 B.14 的证明得到。

引理 B.15. 若 $n=o(\sqrt{g})$，则

$$\sum_{\substack{0\le i\le g, 0\le j\le n\\ 2\le 2i+j\le 2g+n-2\\ (i,j)\ne(0,2) \text{ or } (g,n-2)}} \binom{n}{j}\frac{V_{i,j+1}V_{g-i,n-j+1}}{V_{g,n}} \prec \frac{1+n}{g}.$$

我们还需要下面这个类似的估计：

引理 B.16. 对于任意 $k\ge 1$，若 $n=o(\sqrt{g})$，则

$$\sum_{\substack{0\le i\le g, 0\le j\le n\\ k\le 2i+j\le 2g+n-k}} \binom{n}{j}\frac{V_{i,j+2}V_{g-i,n-j+2}}{V_{g,n+2}} \prec \frac{1+n^k}{g^k}.$$

证明. 若 n 有界，则由引理4.2中的 (3) 可得该引理。现在我们可以假设 $n \geq 2k+2$。由引理4.3 和定理4.4，对于 $j \geq 0$，有

$$V_{i,j+2} \leq V_{i+[\frac{j}{2}],j+2-2[\frac{j}{2}]} \prec \frac{1}{\sqrt{i+j}}(2i+j-1)!(4\pi^2)^{2i+j-1}.$$

根据与（B.28）类似的估计，我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{0\leq i\leq g, 0\leq j\leq n \\ k\leq 2i+j\leq 2g+n-k}} \binom{n}{j} \frac{V_{i,j+2}V_{g-i,n-j+2}}{V_{g,n+2}} \\ \prec &\sum_{\substack{0\leq i\leq g, 0\leq j\leq n \\ k\leq 2i+j\leq 2g+n-k}} \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(2i+j-1)!(2g+n-2i-j-1)!}{(2g+n-1)!}. \end{aligned} \tag{B.32}$$

设 $L = 2i+j$。如果 $2k+2 \leq L \leq n$，那么

$$\begin{aligned} &\frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(2i+j-1)!(2g+n-2i-j-1)!}{(2g+n-1)!} \prec \frac{n^j L!}{g^L} \\ \prec &\sqrt{L}\left(\frac{nL}{eg}\right)^L \prec \sqrt{L}\left(\frac{nL}{eg}\right)^{L-2k-2} L^{2k+2}\left(\frac{n}{ge}\right)^{2k+2} \\ \prec &L^{2k+\frac{5}{2}} g^{-k-1}\left(\frac{nL}{eg}\right)^{L-2k-2} \prec L^{2k+\frac{5}{2}} g^{-k-1} e^{2k+2-L} \prec g^{-k-1}. \end{aligned} \tag{B.33}$$

如果 $n+1 \leq L \leq \frac{2g+n}{2}$，那么

$$\begin{aligned} &\frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(2i+j-1)!(2g+n-2i-j-1)!}{(2g+n-1)!} \\ \leq &2^n \frac{(L-1)!(2g+n-L-1)!}{(2g+n-1)!} \prec 2^n \frac{n!(2g-2)!}{(2g+n-1)!} \\ \prec &\left(\frac{2n}{g}\right)^n \prec g^{-k-1}. \end{aligned} \tag{B.34}$$

根据对称性，对于 $\frac{2g+n}{2} \leq L \leq 2g+n-2k-2$，我们也有

$$\frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(2i+j-1)!(2g+n-2i-j-1)!}{(2g+n-1)!} \prec g^{-k-1}. \tag{B.35}$$

因此，由（B.32）、（B.33）、（B.34）和（B.35）可得

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{0\leq i\leq g, 0\leq j\leq n \\ k\leq 2i+j\leq 2g+n-k}} \binom{n}{j} \frac{V_{i,j+2}V_{g-i,n-j+2}}{V_{g,n+2}} \\ \prec &\sum_{\substack{0\leq i\leq g, 0\leq j\leq n \\ 2k+2\leq 2i+j\leq 2g+n-2k-2}} \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(2i+j-1)!(2g+n-2i-j-1)!}{(2g+n-1)!} \\ + &\sum_{\substack{0\leq i\leq g, 0\leq j\leq n \\ k\leq 2i+j\leq 2k+1 \ or \\ 2g+n-2k-1\leq 2i+j\leq 2g+n-k}} \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(2i+j-1)!(2g+n-2i-j-1)!}{(2g+n-1)!} \end{aligned}$$

$$\prec \sum_{\substack{0\le i\le g,0\le j\le n\\ 2k+2\le 2i+j\le 2g+n-2k-2}} \frac{1}{g^{k+1}}+\frac{n^k}{g^k}$$
$$\prec \frac{1+n^k}{g^k},$$

如所需。 □

引理 B.17。 [Hid23，引理 A.5] 设 $n=o(\sqrt{g})$ 并设 g_0，a_0，n_0 和 k满足 $m=2g_0+a_0+k-2=O$(对数函数 g)。对于 $1\le q\le k-2n_0$，

$$\sum_{\{(g_i,a_i,n_i)\}_{i=1}^q\in\mathcal{A}} \frac{n!}{a_0!\cdots a_q!}\cdot\frac{V_{g_0,k+a_0}V_{g_1,n_1+a_1}\cdots V_{g_q,n_q+a_q}}{V_{g,n}}\prec (m-1)!\frac{1+n^{a_0}}{g^m}$$

当 $g\to\infty$ 时，且隐含常数与 n、g、g_0、a_0、q、k 无关，只要 g 足够大。这里 $\mathcal{A}$ 是可容许三元组 $\{\{(g_i,\ a_i,\ n_i)\}_{i=1}^q\}$，其中 g_i、$a_i\ge 0$、$n_i\ge 1$ 和 $2g_i+a_i+n_i\ge 3$ 满足

(1) $\sum_{i=1}^q(2g_i+n_i+a_i-2)=2g+n-2-m$;
(2) $\sum_{i=1}^q n_i=k-2n_0$;
(3) $\sum_{i=1}^q a_i=n-a_0$.

注。 在 [Hid23] 引理 B.17 要求 $m\le 3$ 对数函数 $g-2$。事实上，很容易验证，[Hid23] 中的证明 $m=O$(对数函数 g) 在将 $A.12$Hid [中的不等式 (23] 替换为

$$\frac{C_1^g\sqrt{g}}{\prod_{i=1}^q\sqrt{g_i+\max\{[\frac{a_i+n_i-2}{2}],0\}}}\frac{n!}{\prod_{i=0}^n a_i!}\frac{\prod_{i=1}^q(2g_i+a_i+n_i-3)!}{(2g+n-3)!}$$
$$\prec\frac{1+n^{a_0}}{g^m}\cdot g^{-\frac{7}{2}q}.$$

我们需要引理 B.17 的一个推广。回顾第 10 节中的定义。

定义。 固定 $S=\{(g_i,n_i,a_i)\}_{i=1}^s$。对于 $2g_i+a_i+n_i-2\ge 1$和 $n_i\ge 1$，假设 $S_i\simeq S_{g_i,n_i+a_i}$ 是具有尖点和非空边界的拓扑曲面，其中 n_i 是边界圈的数量，a_i 是穿孔的数量。我们也用 $(g_i,n_i,a_i)=(0,2,0)$ 表示 S_i是一条简单曲线。于是 $\mathcal{B}^s{}_{,S}^{(g,n)}$ 由 $F=\left(\{f_i\}_{i=1}^s,\{V_j\}_{j=1}^r,\{h_j,m_j,b_j\}_{j=1}^r\right)$ 构成，其中

(1) 若 $2g_i+a_i+n_i-2\ge 1$，则局部同胚 $f_i\colon S_{g_i,n_i+a_i}\to X_{g,n}^{\circ}$ 在 S_{g_i,n_i+a_i} 上是单射，并且 $f_i(\partial S_{g_i,n_i+a_i})$ 由 $X_{g,n}$ 中的简单闭测地线组成。(2) 若 $(g_i,n_i,a_0)=(0,2,0)$，则嵌入 $f_i\colon S_{g_i,n_i+a_i}\to X_{g,n}$ 的像是一条简单闭测地线。(3) 对于不同的 i，f_i，(S_{g_i,n_i+a_i}) 具有不相交内部。(4) 补集 $X_{g,n}\setminus\cup_{i=1}^s f_i(S_{g_i,n_i+a_i})$ 有 r 个连通分支，对于 $j=1,\cdots,r$，分别记作 V_j；其中 V_j 的亏格为 h_j，有 b_j 个尖点和 m_j 个测地边界分支。(5) $2h_i+m_i+b_i\le 2h_j+m_j+b_j$ 若 $i<j$。

(6) $F=\left(\{f_i\}_{i=1}^s,\{V_j\}_{j=1}^r,\{h_j,m_j,b_j\}_{j=1}^r\right)$ is said to be equivalent to $E=\left(\{\tilde{f}_i\}_{i=1}^s,\{\tilde{V}_j\}_{j=1}^r,\{\tilde{h}_j,\tilde{m}_j,\tilde{b}_j\}_{j=1}^r\right)$ if there is a homeomorphism $H:X_{g,n}\to X_{g,n}$ which may not fix the label of cusps and permutation elements $\sigma_1\in S_s,\sigma_2\in S_r$ such that $H\circ f_i=\tilde{f}_{\sigma_1(i)}$ and $H(V_i)=V_{\sigma_2(i)}$.

我们称 $f_i(S_{g_i,\ n_i+a_i})$ 对于 $i=1,\ \cdots,\ s$，以及 V_j 对于 $j=1,\ \cdots,\ r$，均为从属于 F 的所有连通分支。

引理 B.18。如果 $n=o\left(g^{\frac{1}{2}-\epsilon}\right)$ 对某个 $\epsilon>0$ 成立且 $s\geq 1$ 固定，那么对于任意 $S=\{(g_i,n_i,a_i)\}_{i=1}^s$，其中 $\sum_{i=1}^s(2g_i+a_i+n_i-2)\leq A$ 对数函数 g，存在某个依赖于 A 的 $C>1$，使得

$$\frac{1}{V_{g,n}}\sum_{F\in\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}}\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots,b_r}\prod_{(g_i,n_i,a_i)\neq(0,2,0)}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^r V_{h_j,m_j+b_j}$$

$$\prec\prod_{i=1}^s\min\left\{((2g_i+n_i+a_i)!)^2\,(C\log g)^{2n_i}\,\frac{(Cn+C\log g)^{a_i}}{g^{2g_i+n_i+a_i-2}},1\right\},$$

其中隐含常数也与 A有关。

证明。由于 $n_i\geq 1$, $g_i,\ n_i,\ a_i=O$(对数函数 g)以及 $n=o(g^{\frac{1}{2}-\epsilon})$，当 $2g_i+n_i+a_i-2\geq 1$时，我们有

$$((2g_i+n_i+a_i)!)^2\,(C\log g)^{2n_i}\,\frac{(Cn+C\log g)^{a_i}}{g^{2g_i+n_i+a_i-2}}\prec 1.$$

而对于 $(g_i,\ n_i,\ a_i)=(0,\ 2,\ 0)$,

$$((2g_i+n_i+a_i)!)^2\,(C\log g)^{2n_i}\,\frac{(Cn+C\log g)^{a_i}}{g^{2g_i+n_i+a_i-2}}\asymp\log^4 g.$$

我们对 s 进行归纳，以证明该引理。对于 $s=1$，如果 $2g_1+n_1+a_1-2\geq 1$，则通过对 B.17 应用于 $n_0\leq\frac{k-1}{2}$ 和 $q\leq k-2n_0$ 且 $k=n_1$，即可得到该估计。如果 $(g_1,\ n_1,\ a_1)=(0,\ 2,\ 0)$，则对于分离轨道，该估计由引理 B.14给出；对于非分离轨道，则由定理4.4 给出。

现在我们假设 $s\geq 2$。对任意 $F\in\mathcal{B}_{,S}^{s\ (g,n)}$，注意到 $\binom{n}{a_1\ \cdots\ a_s\ ,,,b_1\cdots,b_r}$ 是从属于F的每个连通分支的可能尖点标记数目。由于 $\sum_{i=1}^s($ $2g_i+a_i+n_i-2)=O$(对数函数 g)，我们有

$$r\leq\sum_{i=1}^s n_i\prec\log g. \tag{B.36}$$

由于 $2h_i+m_i+b_i\leq 2h_j+m_j+b_j$ 若 $i<j$，我们有

$$(2h_r+m_r+b_r-2)\geq\frac{1}{r}\left(2g-2+n-\sum_{i=1}^s(2g_i+a_i+n_i-2)\right)\succ\frac{g}{\log g}.$$

由于 $m_r\leq\sum_{i=1}^s n_i=O$（对数函数 g）和 $b_r\leq n$，我们有

$$h_r\succ\frac{g}{\log g}. \tag{B.37}$$

现在我们假设 V_r 与 f_s（S_{g_s,n_s+a_s}）有公共边界测地线。令 $S'=\{(g_i,n_i,a_i)\}_{i=1}^{s-1}$，并令 $F'=\left(\{f_i\}_{i=1}^{s-1},\{V_j'\}_{j=1}^{r'},\{h_j',m_j',b_j'\}_{j=1}^{r'}\right)\in\mathcal{B}_{S'}^{s-1}$ (g,n)。也就是说，我们将 f_s（S_{g_s,n_s+a_s}）与所有和 f_s（S_{g_s,n_s+a_s}）有公共边界测地线的 V_j 粘合起来，得到 $V_{r'}'\simeq S_{h_{r'}',m_{r'}'+b_{r'}'}$，并保持其余的 f_i（S_{g_i,n_i+a_i}）在 $i=1,\cdots,s-1$ 下不变。由从属于 F 的各连通分支上的尖点标记，诱导出从属於 F' 的各连通分支上的尖点标记。由 F' 和诱导的标记，我们可以通过在 $V_{r'}'\simeq S_{h_{r'}',m_{r'}'+b_{r'}'}$ 中寻找 $S_s\simeq S_{g_s,n_s+a_s}$ 的带标记轨道，得到 $F\in\mathcal{B}^{s,(g,n)}_{S}$ 以及原始标记；该轨道由 $f_s:S_{g_s,n_s+a_s}\to V_{r'}'$ 确定。补集 $V_{r'}'\setminus f_s(S_{g_s,n_s+a_s})$ 的所有连通分支连同 $V_1',\cdots,V_{r'-1}'$ 构成 $\{V_j\}_{j=1}^{r}$。如果我们将 $V_{r'}'$ 的所有边界测地线变形为尖点，那么 $f_S:S_{g_s,n_s+a_s}\to V_{r'}'$ 对应于 $\mathcal{B}^{1}_{(h_{r'}',m_{r'}'+b_{r'}')}$ (g_s,n_s-k,a_s+k) 中的一个元素 $G=\left(\tilde{f}_s,\{V_j^G\}_{j=1}^{r_G},\{h_j^G,m_j^G,b_j^G\}_{j=1}^{r_G}\right)$，其中某个 $k\le$ 满足 $\min\{n_s,m_{r'}'\}$。在 $(g_s,n_s,a_s)=\tilde{}$ $\tilde{}(0,2,0)$ 的情形下，我们必须有 $k=0$。这里我们要求表示 f_s 满足：f_s（S_{g_s,n_s+a_s}）恰好包含 k 个尖点，这些尖点属于变形前 $V_{r'}'$ 的 $m_{r'}'$ 条边界测地线。由此可得 (B.38)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{V_{g,n}}\sum_{\substack{F\in\mathcal{B}_S^{s,(g,n)}\\ V_r\cap f_s(S_{g_s,n_S+a_s})\neq\emptyset}}\binom{n}{a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots,b_r}\\
&\cdot\prod_{(g_i,n_i,a_i)\neq(0,2,0)}V_{g_i,n_i+a_i}\prod_{j=1}^{r}V_{h_j,m_j+b_j}\\
\le&\frac{1}{V_{g,n}}\sum_{E\in B_{S'}^{s-1,(g,n)}}\binom{n}{a_1,\cdots,a_{s-1},b_1',\cdots,b_{r'}'}\prod_{\substack{(g_i,n_i,a_i)\neq(0,2,0)\\ i=1,\cdots,s-1}}V_{g_i,n_i+a_i}\\
&\cdot\prod_{j=1}^{r'}V_{h_j',m_j'+b_j'}\sum_{\substack{k=0,\cdots,\min\{n_s,m_{r'}'\}\\ \text{if }(2g_s+n_s+a_s-2)\ge1;\\ k=0\text{ if }(g_s,n_s,a_s)=(0,2,0)}}\frac{1}{V_{h_{r'}',m_{r'}'+b_{r'}'}}\cdot\sum_{G\in\mathcal{B}^{1,(h_{r'}',m_{r'}'+b_{r'}')}_{(g_s,n_s-k,a_s+k)}}\\
&\cdot\binom{m_{r'}'}{k}\binom{b_{r'}'+m_{r'}'-k}{a_s,b_1^G,\cdots,b_{r_G}^G}\cdot\prod_{(g_s,n_s,a_s)\neq(0,2,0)}V_{g_s,n_s+a_s}\cdot\prod_{l=1}^{r_G}V_{h_l^G,m_l^G+b_l^G}\cdot
\end{aligned}
$$

根据 $s-1$ 情形的归纳假设，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{V_{g,n}} \sum_{E\in B_{S'}^{s-1,(g,n)}} \binom{n}{a_1,\cdots,a_{s-1},b'_1,\cdots,b'_{r'}} \\
&\cdot \prod_{\substack{(g_i,n_i,a_i)\neq(0,2,0)\\ i=1,\cdots,s-1}} V_{g_i,n_i+a_i} \cdot \prod_{j=1}^{r'} V_{h'_j,m'_j+b'_j} \\
&\prec \prod_{i=1}^{s-1} \min\left\{ ((2g_i+n_i+a_i)!)^2 \, (C_1\log g)^{2n_i} \, \frac{(C_1 n + C_1\log g)^{a_i}}{g^{2g_i+n_i+a_i-2}}, 1 \right\}
\end{aligned} \tag{B.39}$$

对于某个 $C_1>1$。现在我们来估计 $V'_{r'}$ 的大小。首先，由式（B.37）可得

$$h'_{r'} \geq h_r \succ \frac{g}{\log g}. \tag{B.40}$$

其次，由式（B.36）可得

$$m'_{r'} \leq \sum_{i=1}^{s} n_i \prec \log g, \tag{B.41}$$

根据定义，我们有

$$b'_{r'} \leq n = O\left(g^{\frac{1}{2}-\epsilon}\right). \tag{B.42}$$

因此我们有

$$m'_{r'} + b'_{r'} = o\left(\left(h'_{r'}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}}\right). \tag{B.43}$$

如果 $(g_s,\ n_s,\ a_s)=(0,\ 2,\ 0)$，则有

$$\frac{1}{V_{h'_{r'},m'_{r'}+b'_{r'}}} \sum_{G\in\mathcal{B}_{(g_s,n_s,a_s)}^{1,(h'_{r'},m'_{r'}+b'_{r'})}} \binom{b'_{r'}+m'_{r'}}{a_s,b_1^G,\cdots,b_{r_G}^G} \cdot \prod_{l=1}^{r_G} V_{h_l^G,m_l^G+b_l^G} \prec 1 \tag{B.44}$$

根据引理B.14 关于分离轨道的结论以及定理 4.4 关于非分离轨道的结论。如果 $2g_s+n_s+a_s-2\geq 1$，对于 $k\leq$ 最小值$\{n_s, m'_{r'}\}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{\binom{m'_{r'}}{k}\binom{b'_{r'}+m'_{r'}-k}{a_s,b_1^G,\cdots,b_{r_G}^G}}{\binom{b'_{r'}+m'_{r'}}{k+a_s,b_1^G,\cdots,b_{r_G}^G}} = \frac{m'_{r'}!}{k!(m'_{r'}-k)!}\frac{(b'_{r'}+m'_{r'}-k)!(k+a_s)!}{(b'_r+m'_{r'})!a_s!} \\
\leq &\frac{\left(m'_{r'}\right)^k}{\max\left\{\left(b'_r\right)^k,1\right\}}\binom{k+a_s}{k} \leq \frac{\left(m'_{r'}\right)^k}{\max\left\{\left(b'_r\right)^k,1\right\}}(2g_s+n_s+a_s)!.
\end{aligned} \tag{B.45}$$

由（B.41）和（B.43），我们可以应用引理 B.17 和（B.45）得到（B.46）

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\min\{n_s,m'_{r'}\}} \frac{1}{V_{h'_{r'},m'_{r'}+b'_{r'}}} \cdot \sum_{G\in\mathcal{B}_{(g_s,n_s-k,a_s+k)}^{1,(h'_{r'},m'_{r'}+b'_{r'})}} \\
&\cdot\binom{m'_{r'}}{k}\binom{b'_{r'}+m'_{r'}-k}{a_s,b_1^G,\cdots,b_{r_G}^G}\cdot\prod_{(g_s,n_s,a_s)\neq(0,2,0)} V_{g_s,n_s+a_s}\cdot\prod_{l=1}^{r_G} V_{h_l^G,m_l^G+b_l^G} \\
&\prec \sum_{k=0}^{\min\{n_s,m'_{r'}\}} \frac{\left(m'_{r'}\right)^k}{\max\left\{\left(b'_r\right)^k,1\right\}}\left((2g_s+n_s+a_s)!\right)^2\frac{1+\left(m'_{r'}+b'_{r'}\right)^{a_s+k}}{{h'_{r'}}^{2g_s+a_s+n_s-2}} \\
&\prec \left((2g_s+n_s+a_s)!\right)^2\left(m'_{r'}+2\right)^{2n_s}\frac{1+\left(m'_{r'}+b'_{r'}\right)^{a_s}}{{h'_{r'}}^{2g_s+a_s+n_s-2}}.
\end{aligned}$$

由（B.40）、（B.41）和（B.42），存在某个 $C_2>1$ 使得

$$m_{r'}+2\le C_2\log g,\quad b_{r'}\le C_2 n,\quad h'_{r'}\ge\frac{g}{C_2\log g}.$$

因此，由（B.44）和（B.46），我们有

(B.47)

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{k=0,\cdots,\min\{n_s,m'_{r'}\}\\ \text{if } (2g_s+n_s+a_s-2)\ge 1;\\ k=0 \text{ if } (g_s,n_2,a_s)=(0,2,0)}} \frac{1}{V_{h'_{r'},m'_{r'}+b'_{r'}}} \cdot \sum_{G\in\mathcal{B}_{(g_s,n_s-k,a_s+k)}^{1,(h'_{r'},m'_{r'}+b'_{r'})}} \\
&\cdot\binom{m'_{r'}}{k}\binom{b'_{r'}+m'_{r'}-k}{a_s,b_1^G,\cdots,b_{r_G}^G}\cdot\prod_{(g_s,n_s,a_s)\neq(0,2,0)} V_{g_s,n_s+a_s}\cdot\prod_{l=1}^{r_G} V_{h_l^G,m_l^G+b_l^G} \\
&\prec \min\left\{\left((2g_s+n_s+a_s)!\right)^2\left(C_2\log g\right)^{2n_s}\frac{\left(C_2 n+C_2\log g\right)^{a_s}}{g^{2g_s+n_s+a_s-2}},1\right\}.
\end{aligned}$$

现在，取 C 为 $\max\{C_1,C_2\}$，则由（B.38）、（B.39）、（B.47）可得该引理。□

References

[AC96] 恩里科·阿尔巴雷洛和毛里齐奥·科尔纳尔巴 *Combinatorial and algebro-geometric cohomology classes on the moduli spaces of curves* ，《代数几何杂志》**5**（1996），第4期，705–749。[AM22] 纳莉妮·阿南塔拉曼和劳拉·蒙克，*A high-genus asymptotic expansionof weil–petersson volume polynomials*，《数学物理学杂志》**63**（2022），第4期，[AM23]， *Friedman-ramanujan functions in random hyperbolic geometry and application to spectral gaps* 2304 02678 2023 ，arXiv预印本 arXiv: . *Friedman-ramanujan functions in random hyperbolic geometry and application to spectral gaps ii* 2502 12268 2025 ，arXiv预印本 arXiv: . ( )。[AM25] ( )。[Bar99] Claire M Baribaud， *Closed geodesics on pairs of pants*，《以色列数学杂志》**109**（1999），第1期，339–347。[Bea68] Alan F Beardon，*The exponent of convergence of poincaré series*，《伦敦数学会会刊》**3**（1968），第3期，461–483。

[Bea71] AF Beardon, *Inequalities for certain fuchsian groups*, 《数学学报》127（1971），221–258。[Bel79] G. V. Belyĭ, *Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, 苏联科学院数学系列通报43（1979），第2期，267–276，479。[BM01] Robert Brooks和Eran Makover, *Riemann surfaces with large first eigenvalue* **83** 2001 243 258 , 《数学分析杂志》（），–。[BM04] , *Random construction of Riemann surfaces*, 《微分几何杂志》68（2004），第1期，121–157。[Bus84] Peter Buser, *On the bipartition of graphs*, 《离散应用数学》9（1984），第1期，105–109。[Bus10] , *Geometry and spectra of compact riemann surfaces*, 施普林格科学与商业媒体，2010。[CGVTvH24] Chi-Fang Chen、Jorge Garza-Vargas、Joel A. Tropp和Ramon van Handel, *A new approach to strong convergence*, 《数学年刊》，即将发表（2024）。[CGVvH24] Chi-Fang Chen、Jorge Garza-Vargas和Ramon van Handel, *A new approach to strong convergence ii. the classical ensembles* , arXiv预印本 arxiv:2412.00593（2024）。[Che70] Jeff Cheeger, *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian*, 《分析学问题》（纪念Salomon Bochner研讨会，普林斯顿大学，新泽西州普林斯顿，1969），普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1970，第195–199页。[Che75] Shiu-Yuen Cheng, *Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications* **143** 1975 289 297 , 《数学杂志》（），–。[DGK16] Jeffrey Danciger、Fran´cois Gueritaud和Fanny Kassel, *Margulis spacetimes via the arc complex* **204** 2016 1, 133 193 , 《数学创刊》（），第–期。[DN09] Norman Do和Paul Norbury, *Weil-petersson volumes and cone surfaces*, 《几何专献》141（2009），93–107（英文）。[Gam02] Alex Gamburd, *On the spectral gap for infinite index "congruence" subgroups of* $SL_2(\mathbb{Z})$ **127** 2002 157 200 , 《以色列数学杂志》（），–。[Gam06] , *Poisson-Dirichlet distribution for random Belyi surfaces*, 《概率年刊》34（2006），第5期，1827–1848。[GJ78] Stephen Gelbart和Herv´e Jacquet, *A relation between automorphic representations of GL(2) and GL(3)*, 《科学年刊》´高等师范学校（4）11（1978），第4期，471–542。[Gol84] William M Goldman, *The symplectic nature of fundamental groups of surfaces* **54** 1984 2, 200 225 , 《数学进展》（），第–期。[Gui86] Laurent Guillope, *Sur la distribution des longueurs des geodesiques fermees d'une surface compacte a bord totalement geodesique* **53** , 《杜克数学杂志》（1986），第1期，827–848。[Gui92] Laurent Guillop´e, *Fonctions zêta de selberg et surfaces de géométrie finie*, 《几何中的ζ函数》，第21卷，日本数学会，1992，第33–71页。[Hej76] Dennis A. Hejhal, *The selberg trace formula for psl* $(2,\mathbb{R})$ *vol.i*, , 第卷施普林格柏林，。[Hid23] Will Hide, *Spectral gap for weil–petersson random surfaces with cusps*, 《国际数学研究通讯》2023（2023），第20期，17411–17460。[HM06] Joe Harris和Ian Morrison, *Moduli of curves*, 第187卷，施普林格科学与商业媒体，2006。[HM23] Will Hide和 Michael Magee, *Near optimal spectral gaps for hyperbolic surfaces* **198** 2023 2, 791 824 , 《数学年刊》（）（），第–期。[HMT25] Will Hide、Davide Macera和Joe Thomas, *Spectral gap with polynomial rate for weil-petersson random surfaces* 2508 14874 , arXiv预印本 arXiv: .（2025）。

[HSWX23] 何雨欣、Yang Shen、吴云辉和薛宇豪, *Non-simple systoles on random hyperbolic surfaces for large genus* 2308 16447 , arXiv 预印本 arXiv: 。(2023)。[Hub61] Heinz Huber, *Zur analytischen theorie hyperbolischer raumformen und bewegungsgruppen. ii* **142** 1961 4, 385 398 , 《数学年刊》 (), 第 – 期。[Hub74] , *Uber den ersten eigenwert des laplace-operators auf kompakten riemannschen flächen* **49** 1974 , Commentarii mathematici Helvetici () , 第 1 期, 251 259 。[HW25] 何宇欣和吴云辉, *Averages of determinants of Laplacians over moduli spaces for large genus* 2 **112** 2025 6, , 《伦敦数学学会杂志》 () (), 第 号论文 e70395。[Iwa89] H. Iwaniec, *Selberg's lower bound of the first eigenvalue for congruencegroups*, 《数论、迹公式与离散群》（奥斯陆，1987），学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，1989 年，第 371–375 页。[Iwa96] Henryk Iwaniec, *The lowest eigenvalue for congruence groups*, 《几何学专题》，非线性微分方程及其应用进展，第 20 卷，Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1996 年，第 203–212 页。[Iwa02] , *Spectral methods of automorphic forms*，数学研究生丛书（2002）。[Kee74] Linda Keen, *Collars on riemann surfaces*, 《不连续群与黎曼曲面》（会议论文集，马里兰大学，大学公园市，马里兰州，1973），1974 年，第 263–268 页。[Kim03] Henry H. Kim, *Functoriality for the exterior square of* $_4$ *and the symmetric fourth of* $_2$, **16** 2003 1, 139 183, 《美国数学会杂志》() , 第 – 期。附录 1 由 Dinakar Ramakrishnan 撰写，附录 2 由 Kim 和 Peter Sarnak 撰写。[KS02] Henry H. Kim 和 Freydoon Shahidi, *Functorial products for* GL$_2$ ×GL$_3$ *and the symmetric cube for* $_2$, 2 **155** 2002 GL《数学年刊》 () (), 第 3 期，837 893，–。附录由 Colin J. Bushnell 和 Guy Henniart 撰写。[Lal89] Steven P Lal Lalley, *Renewal theorems in symbolic dynamics, with applicationsto geodesic flows, noneuclidean tessellations and their fractal limits*, 《数学学报》163（1989），第 1–2 期，1–55。[LRS95] W. Luo、Z. Rudnick 和 P. Sarnak, *On Selberg's eigenvalue conjecture*, 《几何与泛函分析》5（1995），第 2 期，387–401。[LW24] Michael Lipnowski 和 Alex Wright, *Towards optimal spectral gaps in large genus* **52** 2024 2, 545 575 , 《概率年刊》 () , 第 – 期。[LX09] 刘克峰和徐浩, *Recursion formulae of higher Weil-Petersson volumes* **2009** 2009 5, 835 859 , 《国际数学研究通知》 () , 第 – 期（英文）。[MdlS24] Michael Magee 和 Mikael de la Salle, *Strong asymptotic freeness of haar unitaries in quasi-exponential dimensional representations* , 《几何与泛函分析》, 即将出版。（2024）。[Mir07a] Maryam Mirzakhani, *Simple geodesics and weil-petersson volumes of modulispaces of bordered riemann surfaces*, 《数学发明》167（2007），第 1 期，179–222。[Mir07b] , *Weil-petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves* 2007 1 23 , 《美国数学会杂志》() , –。[Mir13] , *Growth of weil-petersson volumes and random hyperbolic surface of large genus* **94** 2013 2, 267 300 , 《微分几何杂志》 () , 第 – 期。[MNP22] Michael Magee、Fr´ ´ ederic Naud 和 Doron Puder, *A random cover of a compact hyperbolic surface has relative spectral gap* $\frac{3}{16} - \varepsilon$, 《几何与泛函分析》32（2022），第 3 期，595–661。[Mon15] Sugata Mondal, *On topological upper-bounds on the number of small cuspidal eigenvalues of hyperbolic surfaces of finite area*, 《国际数学研究通知》2015（2015），第 24 期，13208–13237。

[MP19] Maryam Mirzakhani 和 Bram Petri, *Lengths of closed geodesics on random surfaces of large genus*, Commentarii Mathematici Helvetici 94（2019）, 第 4 期, 869–889。[MPvH25] Michael Magee、Doron Puder 和 Ramon van Handel, *Strong convergenceof uniformly random permutation representations of surface groups*, arXiv 电子预印本（2025）, arXiv:2504.08988。[MZ15] Maryam Mirzakhani 和 Peter Zograf, *Towards large genus asymptotics ofintersection numbers on moduli spaces of curves*, 《几何与泛函分析》25（2015）, 第 4 期, 1258–1289。[Nau05] Fr´ed´eric Naud, *Precise asymptotics of the length spectrum for finite-geometry riemann surfaces*, 《国际数学研究通知》2005（2005）, 第 5 期, 299–310。[NWX23] Xin Nie、吴云辉和薛宇豪, *Large genus asymptotics for lengthsof separating closed geodesics on random surfaces*, 《拓扑学杂志》16（2023）, 第 1 期, 106–175。[Par05] Hugo Parlier, *Lengths of geodesics on riemann surfaces with boundary*, Annales Fennici Mathematici 30（2005）, 第 2 期, 227–236。[Pat76] SJ Patterson, *The limit set of a fuchsian group*, 《数学学报》136（1976）, 241–273。[Pig84] Thea Pignataro, *Hausdorff dimension, spectral theory and applications to the quantization of geodesic flows on surfaces of constant negative curvature*, 普林斯顿大学, 1984 年。[PS85a] RS Phillips 和 P Sarnak, *The laplacian for domains in hyperbolic space and limit sets of kleinian groups* **155** 1985 , 《数学学报》（）, 第 1 期, 173 241–。[PS85b] , *On the spectrum of the hecke groups*, 《杜克数学杂志》52（1985）, 第 1 期, 211–221。[PT10] Athanase Papadopoulos 和 Guillaume Th´eret, *Shortening all the simple closed geodesics on surfaces with boundary* **138** , 《美国数学会会刊》（2010）, 第 5 期, 1775–1784。[Ran77] Burton Randol, *On the asymptotic distribution of closed geodesics on com-pact riemann surfaces*, 《美国数学会汇刊》233（1977）, 241–247。[Rob03] Thomas Roblin, *Ergodicité et équidistribution en courbure négative*, 法国数学学会回忆录（新系列）（2003）, 第 95 号, vi+96。[Rud23] Ze´ev Rudnick, *GOE statistics on the moduli space of surfaces of large genus*, 《几何与泛函分析》33（2023）, 第 6 期, 1581–1607。[Sar80] Peter Clive Sarnak, *PRIME GEODESIC THEOREMS*, ProQuest LLC, 密歇根州安娜堡, 1980 年, 博士学位论文——斯坦福大学。[Sar95] Peter Sarnak, *Selberg's eigenvalue conjecture*, 《美国数学会通讯》42（1995）, 第 11 期, 1272–1277。[Sar03] , *Spectra of hyperbolic surfaces*, 《美国数学会通报》（新系列）40（2003）, 第 4 期, 441–478。[Sel56] A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series* , 《印度数学学会杂志》（新系列）20（1956）, 47–87。[Sel65] Atle Selberg, *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms*, 《纯数学研讨会论文集》第 VIII 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1965 年, 第 1–15 页。[SW25a] Yang Shen 和 吴云辉, *Arbitrarily small spectral gaps for random hyperbolic surfaces with many cusps* **406** 2025 8, , 《数学物理通讯》（）, 第 190 号论文, 44。[SW25b] , *Nearly optimal spectral gaps for random Belyi surfaces*, arXiv 电子预印本（2025）, arXiv:2511.02517。[Thu86] William P. Thurston, *Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces*, arXiv:math/9801039, （1986 年预印本, 1998 年电子版）。

[Wol82] Scott Wolpert, *The fenchel-nielsen deformation*, 《数学年刊》**115**（1982），第 3 期，501–528 页。[Wri20] Alex Wright, *A tour through mirzakhani's work on moduli spaces of riemann surfaces* **57** 2020 , Bulletin of the American Mathematical Society（），第 3 期，359 408– 页。[WX22a] 吴云辉和薛宇豪, *Random hyperbolic surfaces of large genus havefirst eigenvalues greater than* $\frac{3}{16} - \epsilon$, 《几何与泛函分析》**32**（2022），第 2 期，340–410 页。[WX22b] , *Small eigenvalues of closed riemann surfaces for large genus*, Transactions of the American Mathematical ~~Society~~ **375**（2022），第 5 期，3641–3663 页。[WX25] , *Prime geodesic theorem and closed geodesics for large genus*, 《欧洲数学会杂志》（2025），已在线优先发表。[Zog08] Peter Zograf, *On the large genus asymptotics of weil-petersson volumes*, arXiv 预印本 arXiv:0812.0544（2008）。

Tsinghua University Beijing China , , , (Y. H.): hyx *Email address* @mails.tsinghua.edu.cn *Email address*, (Y. W.): 吴云辉 wu@tsinghua.edu.cn

Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES), Bures-sur-Yvette France , , (Y. X.): xueyh@ihes.fr *Email address*