arXiv:2602.08366v1 [math.AT] 9 Feb 2026

D型李代数中等谱矩阵流形的 GKM 理论

Evgeny Zhukov

Abstract. 我们研究具有由图 Γ确定的给定稀疏模式的等谱实反对称矩阵流形 $Q_{\Gamma,\ \lambda}$。紧环面 T^n 通过共轭作用自然地作用于 $Q_{\Gamma,\ \lambda}$，而这一作用可以用 GKM 理论来研究。我们证明了关于该流形及其 GKM图的两个结果。第一个定理描述了如何从相应的等谱厄米矩阵流形 $M_{\Gamma,\ \lambda}$ 的 GKM图得到 $Q_{\Gamma,\ \lambda}$ 的 GKM图。第二个定理给出了 $Q_{\Gamma,\ \lambda}$具有等变形式性的判据。

1. 引言

设 Γ 是一个简单连通图，其顶点集为 $V_\Gamma = [n] = \{1, \ldots, n\}$，边集为 E_Γ。我们将两个流形与该图联系起来（见构造 3.1 和 3.5）：分别是具有固定一般谱 λ的 Γ 形厄米矩阵流形 $M_{\Gamma,\ \lambda}$ 和斜对称矩阵流形 $Q_{\Gamma,\ \lambda}$。这两个流形都带有紧 n维环面 T^n 通过共轭作用给出的自然作用。我们称这些空间为等谱矩阵流形。

在$M_{\Gamma,\lambda}$ 中研究了特定类别图的流形。 [2], 提出了一种基于计算拓扑的$M_{\Gamma,\lambda}$ 一般方法。研究表明，这些流形具有有用的组合描述；其关联的GKM图（等价地，环面作用的1-骨架）发挥着关键作用。

[5] 注意到，$M_{\Gamma,\lambda}$ 对应于半单A型李代数，并且这一一般框架可以推广到其他李代数类型。在本文中，我们研究对应于D型李代数的流形$Q_{\Gamma,\lambda}$。命题4.11给出了其GKM图的显式描述。利用这一结果以及 [5], 中的结果，我们证明了定理1.1。

Theorem 1.1. $Q_{\Gamma,\lambda}$ 的 *GKM*图可通过构造*4.1*得到。

2020 数学主题分类。主要分类：15B57、57R91、57S12、14M15、55N91；次要分类：57R19、15A18、57S25、05C25、05C76、15B30、17B99。关键词和短语。等谱斜对称矩阵；环面作用；不变子流形；GKM 理论；等谱空间；矩阵谱；等变上同调。

$M_{\Gamma,\lambda}$ 的 GKM图与 $Q_{\Gamma,\lambda}$ 的 GKM图有明确的联系。构造4.1中也提到了这一点。第4.1节描述了 $M_{\Gamma,\lambda}$ 的 GKM图，并以命题4.6作结。

另一个重要问题是， T-流形 X 是否为等变形式的。等变形式性保证了由 GKM图编码的组合数据足以确定 X的上同调和等变上同调（例如参见 [5]）。通过 Bia-l ynicki–Birula 分解 [8]，复射影几何中许多具有代数环面作用的簇都是等变形式的。另一方面，环面拓扑提供了并非等变形式的环面作用实例，以及计算其上同调的方法。 [4] 已证明，某些稀疏类型的等谱厄米矩阵流形并非等变形式的。因此，自然要问，诸如 $Q_{\Gamma,\lambda}$ 这样的矩阵流形在何时是等变形式的。关于厄米矩阵流形的最一般结果由 [2], 证明, 然而，对于其他自然的矩阵类型尚无相关结果。本文旨在部分填补这一空白。下面的定理给出了$Q_{\Gamma,\lambda}$等变形式性的一个判据。

THEOREM 1.2. $Q_{\Gamma,\ \lambda}$ 是等变形式的，当且仅当$M_{\Gamma,\ \lambda}$ 是等变形式的 *l.*

本文结构如下。第 2 节回顾环面作用、等变上同调和 GKM 理论的背景。第 3 节定义流形$M_{\Gamma,\ \lambda}$ 和$Q_{\Gamma,\ \lambda}$，并陈述定理1.1。第 4 节通过描述这两个流形的 GKM图（命题4.6和4.11）证明定理1.1。第 5 节利用 Masuda和Panov 的一个结果证明定理1.2 [11]。

2. 环面拓扑

本节回顾本文所用的环面拓扑和 GKM 理论中的定义与构造。我们遵循标准参考文献 [4], [5]。

2.1. 群作用基础。 我们首先回顾群作用的基本术语。设 ϕ： $G \times X \to X$ 是 X 上的一个 G-作用，且 $x \in X$。本文始终在光滑范畴下讨论群作用。因此，我们可以定义从 ϕ出发的以下表示:

$$\Phi \ : \ G \to \mathrm{Diff}(X)$$

by

$$\Phi(g) = \phi(g, \cdot),$$

其中，符号 Diff(X) 表示 X 上所有微分同胚构成的集合，并且赋予紧开拓扑。若 Φ 是单射，即 $ker\ \Phi = \{e\}$ ，则称此作用 ϕ 是一种有效作用。在我们的记号中，符号 $G(x)$ 表示 x 的 G-轨道 ，而 G_x 表示 G 在 x 上的稳定子群 ，即,

$$G(x) = \{\phi(g, x) \in X \mid g \in G\}$$

and

$$G_x = \{g \in G \mid \phi(g, x) = x\},$$

分别。符号 X/G 表示 G 在 X 上作用的轨道空间，即赋予通常商拓扑的所有轨道构成的集合。

2.2. 切表示。设紧环面 T（维数为 $T=k$）作用于一个实维数为 $2m$ 的光滑紧致无边定向连通流形 X。我们假设该作用的不动点集 X^T 非空且有限。在这种情况下，称该作用具有孤立不动点。阿贝尔群 $N=\mathrm{Hom}(T,S^1)\cong\mathbb{Z}^k$ 称为权格。

Construction 2.1. 若 $x\in X^T$ 是一个孤立不动点，则会在切空间 T_xX 上诱导出 T 的一个表示，称为切表示。设 $\alpha_{x,1},\ldots,\alpha_{x,m}\in\mathrm{Hom}(T,S^1)\cong\mathbb{Z}^k$ 为 x 处切表示的权，这意味着

$$T_xX\cong V(\alpha_{x,1})\oplus\cdots\oplus V(\alpha_{x,m}),$$

其中 $V(\alpha)$ 是由 $tz=\alpha(t)\cdot z,\ z\in\mathbb{C}$ 给出的标准一维复表示（或二维实表示）。

假设所有权向量 $\alpha_{x,\,i}$ 均非零，否则 x不是孤立的。由于 X上不存在 T-不变的复结构，向量 $\alpha_{x,\,i}$ 只能确定到符号。对于本文的论证而言，符号的选择并不重要。还应说明的是，必要时，权向量被视为有理数空间$N\otimes\mathbb{Q}\cong\mathbb{Q}^k$ 中的元素。

2.3. 博雷尔构造。通过对 G进行米尔诺构造，我们可以构造满足以下两个条件的空间 EG：

(1) EG 是可缩的；(2) G 在 EG 上自由作用，即对

所有 $x\in EG$都有 $G_x=e$。

由于 G 作用于 EG，我们得到其轨道空间 EG/G。符号 BG 表示 EG/G，我们称其为 G的分类空间。

现在设 X 是一个 G-空间，且 ϕ 是 X上的一个 G-作用。乘积空间 $EG\times X$ 通过以下方式具有对角 G-作用：

$$(a,x)\to(ag^{-1},\phi(g,x))$$

其中 $a\in EG$、 $x\in X$ 和 $g\in G$。因此，我们可以取其轨道空间 $(EG\times M)/G$ =$EG\times_G X$。我们称 $EG\times_G X$ 为博雷尔构造（或同伦商）。符号X_G 也表示 G-空间 X的博雷尔构造。

2.4. 等变形式性。现在我们可以定义等变形式作用。设R 表示一个系数环（ $\mathbb{Z}$ 或一个域）。

存在一个Serre纤维化 p： $X_G\xrightarrow{X}BG$。纤维化 p 诱导Serre谱序列：

$$E_2^{p,q}\cong H^p(BG^k;R)\otimes H^q(X;R)\Rightarrow H^{p+q}(X_T;R).$$

Definition 2.2. 对于一个拓扑群 G，拓扑空间 X 上的连续 G-作用称为上同调等变形式的，如果相伴Borel纤维化 $X\to EG\times_G X\to BG$ 的Serre谱序列在 E_2 阶段坍缩。

我们将这类作用和空间称为等变形式的。

DEFINITION 2.3. 系数取 R 的等变上同调环 是$H_T^*(X;\ R)$ =$H^*(X_T;\ R)$ 它是多项式环 $H^*(BT$上的模；$R)$。

2.5. GKM图。

CONSTRUCTION 2.4. 对拓扑空间 X 上的 T 作用，考虑如下过滤

$$X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_k \tag{2.1}$$

其中 X_i 是 该作用下所有维数为 $\leqslant i$ 的轨道的并。换句话说 ，

$$X_i = \{x \in X \mid \dim T_x \geqslant k - i\}$$

根据自然同胚 $Tx \cong T^k/T_x$。过滤 (2.1) 称为轨道类型过滤，而 X_i 是 X 的等变 i-骨架。每个 X_i 都是 T-稳定的。

DEFINITION 2.5. 配备有效 T 作用的流形 X，若 X_1 是若干 T-不变 2-球面的并，则称为 *GKM*型流形。

DEFINITION 2.6. GKM型流形若是等变形式的，则称为*GKM*流形。

本文研究等谱斜对称矩阵的流形。它们记作 $Q_{\Gamma,\ \lambda}$。稍后将对其进行定义，但有必要先作如下说明。

REMARK 2.7. 所有 $Q_{\Gamma,\ \lambda}$ 都是 GKM类型，但并非所有这些流形都是等变形式的。

有一个适用于所有 GKM流形的标准结论。

PROPOSITION 2.8. *GKM*流形的一维等变骨架 X_1 是若干 T-不变 *2*-球面的并。每个不变 *2*-球面连接两个不动点。

容易看出，要使该命题成立，流形只需属于 GKM类型。下一章中，我们将证明所研究的流形属于 GKM类型，且命题2.8对它们成立。

命题2.8与构造2.1共同给出一个特定的图。它由不变点和球面组成，并且每个顶点的度相同（即该顶点处切权的数量）。

现在我们可以给出一个定义，它对定理1.1至关重要。

DEFINITION 2.9. 流形 X 的*GKM*图 Γ是顶点集$V = X_0$ 和边集 $E = X_1/T$构成的有限图。GKM图还必须配备一个函数α: $E \to \mathrm{Hom}(T^k, T^1)$，该函数满足 $\alpha(pq) = \pm\alpha(qp)$ 对所有边 $e = (pq)$均成立。函数α 称为轴向函数。

此定义中的轴向函数是每个点处切权的“总和”。由此很容易得出，对于连接稳定点 p 和q的不变球面，有 $\alpha(pq) = \pm\alpha(qp)$ 。

3. 等谱矩阵

本节将定义本文的主要研究对象——等谱矩阵流形。我们还将在本节末尾陈述定理1.1。

3.1. 斜对称矩阵。

CONSTRUCTION 3.1. 令 Q_{2n} 表示所有大小为 $2n \times 2n$ 的实斜对称矩阵构成的向量空间。该向量空间的维数为 $n(2n-1)$。

现在，我们将 $2n \times 2n$ 矩阵视为由 2×2 个块组成的 $n \times n$ 矩阵。令 Γ 为顶点集 $V_\Gamma = [n] = \{1, \ldots, n\}$ 上的一个简单图，其边集为 E_Γ。假设 Γ 是连通的。若斜对称矩阵 $A = (a_{i,j}) \in Q_{2n}$ 在位置 (i,j) 上的块对于 $\{i,j\} \notin E_\Gamma$ $(i \neq j)$ 均为 0，即 $a_{2i-1,2j-1} = a_{2i-1,2j} = a_{2i,2j-1} = a_{2i,2j} = 0$，则称其为 Γ 形。所有 Γ 形矩阵构成的空间 Q_Γ 是一个维数为 $n + 4|E_\Gamma|$ 的向量空间。

斜对称矩阵的特征值集合具有如下形式 $\{\pm i\lambda_1, \ldots, \pm i\lambda_n\}$。因此，对于给定的一组实数 $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$，我们来考虑由所有特征值为 $\{\pm i\lambda_1, \ldots, \pm i\lambda_n\}$ 的斜对称矩阵构成的子集 $Q_{\Gamma,\lambda} \subset Q_\Gamma$。我们称 $Q_{\Gamma,\lambda}$ 为等谱矩阵集合。

PROPOSITION 3.2. $Q_{\Gamma,\lambda}$ 在一般选择 λ 下是一个光滑流形。

PROOF. 我们有一个李群在光滑流形上的光滑作用 $SO(2n) \curvearrowright \mathfrak{so}(2n) = Q_{2n}$。利用这一作用，对于每个矩阵 $A \in Q_{2n}$，我们都可以得到一个形如以下形式的矩阵 $f(A)$

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{bmatrix} & \cdots\cdots\cdots\cdots & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \vdots & \begin{bmatrix} 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 \end{bmatrix} & \vdots \\ \vdots & & \ddots \quad \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \cdots\cdots\cdots\cdots & \begin{bmatrix} 0 & \lambda_n \\ -\lambda_n & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

这定义了一个光滑映射 $f : Q_\Gamma \to C$ 到类型为 D_n 的韦尔室 C。对于此映射，我们有 $f^{-1}(\lambda) = Q_{\Gamma,\lambda}$。由萨德引理可知，在一般选择 λ 下，$Q_{\Gamma,\lambda}$ 是 Q_Γ 中的一个光滑闭子流形。在此情形下，一般选择 λ 意味着 $f(\lambda)$ 不是 f 的临界值，即所有 λ_i 均不为 0 且两两不同。

□

下文始终假设 λ 是一般的，即 $Q_{\Gamma,\lambda}$ 是光滑的。

对参数的简单计数表明 $\dim Q_{\Gamma,\lambda} = 4|E_\Gamma|$。然而，这个流形并不连通。

PROPOSITION 3.3. $Q_{\Gamma,\lambda}$ 是两个流形 $Q^+_{\Gamma,\lambda}$ 和 $Q^-_{\Gamma,\lambda}$ 的不交并。这些流形彼此微分同胚。

PROOF. 众所周知，斜对称矩阵 Q 的行列式等于 Pfaffian 的平方：

$$\det(Q) = \mathrm{pf}(Q)^2$$

这个方程将 $Q_{\Gamma,\lambda}$ 分成两个独立的分量：$\sqrt{\det}(Q) = +\mathrm{pf}(Q)$ 和 $\overline{\sqrt{\det}}(Q) = -\mathrm{pf}(Q)$。我们分别将它们记为 $Q^+_{\Gamma,\lambda}$ 和 $Q^-_{\Gamma,\lambda}$。显然，这些分量彼此不相交，也彼此不连通，因为它们都不包含满足 $\det(A) = 0$ 的矩阵 A。

这两个分量彼此微分同胚。事实上，定义映射

$$f : Q^+_{\Gamma,\lambda} \to Q^-_{\Gamma,\lambda}$$

使得

$$f(A) = A'$$

$\sim$ $\sim$ $\sim$其中 $f(a_{1,1}) = a'_{1,1} = 0$; $\forall i \neq 1$: $f(a_{1,i}) = -a'_{1,i}$, $f(a_{i,1}) = -a'_{i,1}$; 并且 $\forall i \neq 1, j \neq 1$: $\sim f(a_{j,i}) = a'_{j,i}$。因此 $f(A) = B^T AB$ 对于

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

由于 $\mathrm{pf}(B^T AB) = \det(B) \cdot \mathrm{pf}(A) = -\mathrm{pf}(A)$, 我们得到 f 定义良好且为双射。根据构造，该映射显然是一个微分同胚。□

Construction 3.4. 我们可以通过共轭作用定义环面作用 $T^n \curvearrowright Q_{\Gamma,\lambda}$。显然，共轭作用保持对角块、谱和 Pfaffian。因此该作用定义良好。

3.2. 厄米矩阵。 我们还将描述厄米矩阵的类似构造。本节以及本文通篇关于厄米矩阵的所有内容均遵循 A.Ayzenberg 和 V. Buchstaber 的论文 [5]。

Construction 3.5. 令 M_n 表示所有大小为$n \times n$的厄米矩阵构成的向量空间。这是一个维数为 n^2 的实向量空间。令 $\Gamma = ([n], E_\Gamma)$ 为一个简单图。假设 Γ 是连通的。如果矩阵 $A = (a_{i,j})$ 满足对于$\{i, j\} \notin E_\Gamma$有 $a_{i,j} = 0$，则称其为 Γ-形矩阵。所有厄米 Γ-形矩阵构成的空间记为 M_Γ。

如前所述，我们固定一组 $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ 实数，并考虑所有具有特征值 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ 的 Γ-形矩阵的子集$M_{\Gamma,\lambda} \subset M_\Gamma$。

在 [5, 构造 2.24] 中证明了，对于 λ的一般选择，$M_{\Gamma,\lambda}$ 是一个光滑流形。此外，$M_{\Gamma,\lambda}$ 上还存在一个 T^n 作用。事实上，由于 $U(n)$ 通过共轭作用于 M_n，且 $T^n = \{\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n),\ t_i \in \mathbb{C},\ |t_i| = 1\}$，因此 M_n上存在一个 T^n 作用。此外， M_Γ 在此作用下保持不变，而且该作用也保持谱不变。因此，$M_{\Gamma,\lambda}$上存在一个 T^n 作用。

3.3. $\Gamma = K_2$ **情形。**为了表述第一个定理，我们需要考虑与可能最简单的图—— K_2——相对应的流形。

Example 3.6. 设 $\Gamma = K_2$ 是一个有两个顶点且只有一条边的图。那么 M_Γ 是由所有 2×2阶厄米矩阵构成的向量空间，而$M_{\Gamma,\lambda}$是 2×2 等谱厄米矩阵的集合。显然，$T^2 = \{\mathrm{diag}(t_1, t_2),\ t_i \in \mathbb{C},\ |t_i| = 1\}$通过共轭作用于$M_{\Gamma,\lambda}$。可以明确看出，此作用的不动点是两个谱为 λ的对角矩阵。此外$M_{\Gamma,\lambda} \cong S^2$，因此该流形本身就是一个不变 2-球面。这意味着$M_{\Gamma,\lambda}$ 的GKM图等于 Γ。

Example 3.7. 令 $\Gamma = K_2$。则 $Q_{\Gamma,\lambda}$是等谱斜对称矩阵流形。环面 $T^2 = U(1)\times U(1) \cong SO(2)\times SO(2)$通过共轭作用于其上。

一个众所周知的拓扑学结果指出，与有效的 T^2-作用相容的连通 4 维流形必定是 S^4或 $S^2\times S^2$，或者是 $\mathbb{C}P_2$和$\overline{\mathbb{C}P_2}$的所有连通和。因此$Q^+_{\Gamma,\lambda} \cong Q^-_{\Gamma,\lambda} \cong (SO(4)/T^2)/\{\pm 1\}$ 我们得到以下事实。

Statement 3。8. $Q^+_{\Gamma,\lambda} \cong Q^-_{\Gamma,\lambda} \cong S^2\times S^2$ 并且 T^2 逐分支地作用。

可以证明，在此作用下，$Q^+_{\Gamma,\lambda}$ 的不变点是以下四个矩阵：

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{bmatrix} \quad 0 \quad 0 \quad \begin{bmatrix} 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \quad 0 \quad 0 \quad \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{bmatrix}\right),$$

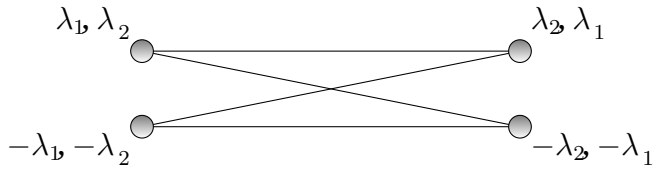
$$\left(\begin{bmatrix} 0 & -\lambda_1 \\ \lambda_1 & 0 \end{bmatrix} \quad 0 \quad 0 \quad \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} 0 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \quad 0 \quad 0 \quad \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_1 \\ \lambda_1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

此外，群 T^2 在流形 $Q^-_{\Gamma,\lambda}$上的作用也有四个不动点。将所示矩阵的左上块乘以 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，即可得到这四个不动点。

Remark 3.9. 这个特殊流形也可以看作类型为 D_2 的完全旗流形。事实上，$Q_{\Gamma,\lambda} = SO(4)/T$,其中 $SO(4)$ 是一个李群，T^2 是它的博雷尔子群。

Remark 3.10. 由于韦伊群 $D_n = \Sigma_n \ltimes \mathbb{Z}_2^{n-1}$，我们有 $D_2 = \Sigma_2 \ltimes \mathbb{Z}_2$。因此，$D_2$ 由 4 个元素组成，它们对应于 $Q^+_{\Gamma,\lambda} \cong Q^-_{\Gamma,\lambda}$ 的 4 个不动点。

现在我们要找出这个流形的一个 1-骨架。本文第 4 节将明确给出构造方法。这里我们只说明，1-骨架由一些 2-球面组成，它们连接特征值 λ_1, λ_2 顺序不同的不变矩阵，并保持对角线上方负号的奇偶性。因此，对于 $Q_{\Gamma,\lambda,+}$，每个不动点都包含在两个球面中，总共有 4 个球面。对应的 GKM图如下：



例 3.6 和例 3.7 展示了$M_{K_2,\ \lambda}$与$Q_{K_2,\ \lambda}$的 GKM图之间的联系。定理1.1将这一观察推广到了每个简单图。

Definition 3.11. 我们将厄米矩阵的不动点记为 A_σ，其中 $\sigma \in \Sigma_n$。我们还将斜对称矩阵的不动点记为 $A_{s,\ \sigma}$，其中 $s \in (\mathbb{Z}_2^n,\ +)$。

现在我们可以证明定理1.1。

4. 定理1.1的证明

首先，我们表述定理1.1所必需的构造。

Construction 4.1. 设 $\Gamma = ([n], E_\Gamma)$ 是一个简单图，且 μ 是$M_{\Gamma,\lambda}$的一个GKM图。我们按如下方式构造一个新图 η。

对于 μ 的每个顶点 A_σ，我们在 η 中构造 2^n 个顶点，记作$A_{s,\sigma}$。

对于 μ 中连接顶点 A_σ 和$A_{\sigma\cdot(i,j)}$ 的每条边，我们在 η中构造 2^n 条边。每条边连接以下顶点：$A_{s,\sigma}$ 和$A_{s',\sigma\cdot(i,j)}$，其中 $s_k = s'_k$ 对所有 $k \notin \{i, j\}$ 以及$s_i + s_j = s'_i + s'_j$均成立。

边集 的边配备了一个轴向函数。其定义如下 :

$\alpha(A_{s,\ \sigma}A_{s',\ \sigma\cdot(i,\ j)}) = \epsilon_i + \epsilon_j$ 当 $s_i = s'_i$（等价地，当 $s_j = s'_j$）

$\alpha(A_{s,\ \sigma}A_{s',\ \sigma\cdot(i,\ j)}) = \epsilon_i - \epsilon_j$ 当 $s_i \neq s'_i$（等价地，当 $s_j \neq s'_j$），

其中 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$是 $\mathrm{Hom}(T^n,\ S^1) \cong \mathbb{Z}^n$的标准基，也就是 $\epsilon_i((t_1, \ldots, t_n)) = t_i$，其中 $i = 1, \ldots, n$。

现在我们陈述一些关于等谱厄米矩阵的已知事实。证明可见于 [5]。

4.1. 厄米矩阵。正如我们之前所说，$M_{\Gamma,\ \lambda}$上有一个 T^n作用。以下陈述有助于我们描述$M_{\Gamma,\ \lambda}$的GKM图。

Proposition 4。2. [5,注 2。33] 不论 Γ如何，环面在$M_{\Gamma,\ \lambda}$ 上的作用恰有 $n!$ 个孤立不动点。不动点由对角厄米矩阵$A_\sigma = diag(\lambda_{\sigma(1)}、\ldots\ldots、\ \lambda_{\sigma(n)})$给出。

因此，GKM图的顶点已确定。

Proposition 4。3. [**5**, 引理 2。36] 若 $\sigma = \tau \cdot (i, j)$ 满足 $(i, j) \in E_\Gamma$，则矩阵 A_σ 和 A_τ 可由如下形式的等谱矩阵构成的 2-球面连接：

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\sigma(1)} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & * & * & \vdots \\ \vdots & & * & * & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & \lambda_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{\tau(1)} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ & & * & * & \vdots \\ \vdots & & * & * & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & \lambda_{\tau(n)} \end{pmatrix}$$

其中块位于位置 $(i、\ j)$。

由于这些2-球面也具有 T-不变性，因此它们对应于$M_{\Gamma,\lambda}$GKM图中的某些边。还需确定它们是否就是该图的全部边。

以下陈述保证$M_{\Gamma,\lambda}$的GKM图中没有更多的边。

Proposition 4.4. [**5**, 备注 2。33] 对于 $i < j$，我们引入向量子空间$V_{ij} \subset M_n$:

$$V_{ij} = \{A = (a_{i',j'}) \,|\, a_{i',j'} = 0 \ unless \ (i', j') = (i, j) \ or \ (j, i)\}$$

于是空间 V_{ij} 是 T-不变的，而 V_{ij} 是点 A_σ 处权为 $\epsilon_i - \epsilon_j$的不可约实二维表示，其中 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是 $Hom(T^n, S^1) \cong \mathbb{Z}^n$的标准基，也就是 $i = 1, \ldots, n$对应的 $\epsilon_i((t_1, \ldots, t_n)) = t_i$。

Corollary 4.5. 在任意不动点 A_σ处，切表示 $T_{A_\sigma} M_{\Gamma,\lambda}$ 的权具有 $\{\epsilon_i - \epsilon_j \,|\, \{i, j\} \in \Gamma\}$的形式。此外，$T_{A_\sigma} M_{\Gamma,\lambda} = \bigoplus_{\{i,j\} \in E_\Gamma} V_{ij}$。

由于我们知道每个不动点处的切表示，且维数相等，因此可以得出结论：我们已经观察到了 GKM图的所有边。现在我们可以描述这个图。

Proposition 4.6. $M_{\Gamma,\lambda}$ 的 *GKM*图由 $n!$ 个点组成，这些点由置换 σ标记。当且仅当 $\sigma = \tau \cdot (i, j)$和 $\{i, j\} \in E_\Gamma$时，点 A_σ与 A_τ之间存在一条边。

4.2. 斜对称矩阵。本小节中，我们最终将得到一个 $Q_{\Gamma,\ \lambda}$ 流形的 GKM图。由此，定理 1.1将得到证明。

Proposition 4.7. $Q_{\Gamma,\ \lambda}$ 的不动点是“几乎对角”的矩阵 $A_{\sigma,\ s}$ 其中 $\sigma \in S_n$、$s \in (\mathbb{Z}_2^n、\ +)$

$$A_{\sigma,s} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{s_1} \cdot \lambda_{\sigma(1)} \\ -(-1)^{s_1} \cdot \lambda_{\sigma(1)} & 0 \end{bmatrix} & \cdots\cdots & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \cdots\cdots & \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{s_n} \cdot \lambda_{\sigma(n)} \\ -(-1)^{s_n} \cdot \lambda_{\sigma(n)} & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

Proof. 我们在$Q_{\Gamma,\ \lambda}$上有一个由以下形式的矩阵构成的作用

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} & \cdots\cdots\cdots\cdots & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \vdots & \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \cdots\cdots\cdots\cdots & \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

通过共轭作用。显然，只有该矩阵的块 (i,i) 和 (j,j) 会作用于来自 $Q_{\Gamma,\lambda}$的矩阵块 (i,j) 。因此，我们可以考虑由 4 个块组成的矩阵情形：

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [*] & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ [*] & [*] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

将所得的右上块记为 $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$。于是得到以下方程组。稍后我们会多次用到这个方程组：

$$\begin{cases} (a-d)\cdot\cos(\phi+\theta)+(a+d)\cdot\cos(\phi-\theta)- \\ -(b+c)\cdot\sin(\phi+\theta)+(b-c)\cdot\sin(\phi-\theta)=2e \\ (a-d)\cdot\sin(\phi+\theta)-(a+d)\cdot\sin(\phi-\theta)+ \\ +(b+c)\cdot\cos(\phi+\theta)+(b-c)\cdot\cos(\phi-\theta)=2f \\ (a-d)\cdot\sin(\phi+\theta)+(a+d)\cdot\sin(\phi-\theta)+ \\ +(b+c)\cdot\cos(\phi+\theta)-(b-c)\cdot\cos(\phi-\theta)=2g \\ -(a-d)\cdot\cos(\phi+\theta)+(a+d)\cdot\cos(\phi-\theta)+ \\ +(b+c)\cdot\sin(\phi+\theta)+(b-c)\cdot\sin(\phi-\theta)=2h \end{cases} \tag{4.1}$$

假设该矩阵是不动点，那么我们会得到一个等式组，其中a,b,c,d对于任意 ϕ,θ都是固定数。但这仅当 $a,b,c,d=0$时才成立。

事实上，我们可以取第一个等式，并考虑 $\cos(\phi+\theta)=\sin(\phi-\theta)=1$的情形。于是 $b=a+c+d$。之后，我们考虑 $\sin(\phi+\theta)=\cos(\phi-\theta)=1$的情形，得到 $d=a+b+c$。接着， $b=a+c+(a+b+c)$ 且 $a+c=0$。如果再取 $\cos(\phi+\theta)=-\sin(\phi-\theta)=1$，则得到 $c=a+b+d=a+(a+c+d)+d$ 和$a+c=2a+2d=0=a+d$。接着， $c=d$。类似地可得其他系数彼此相等；由于它们的和为 0，因此它们全都为 0。

因此，对于不动点，非对角块只能为 0。而 $A_{\sigma,\ s}$ 是不动点这一事实很容易验证。

□

现在，为了构造 $Q_{\Gamma,\ \lambda}$ 的 GKM图，我们必须找出不变 2-球面。对于$i<j\leqslant n$，我们引入一个向量子空间 $U_{ij}\subset Q_{2n}$:

$$U_{ij}=\{A=(a_{k,l})\,|\,a_{k,l}=0 \text{ unless } (k,l) \text{ is in the block } (i,j) \text{ or } (j,i)\},$$

即只有 $a_{2i-1,\ 2j-1}$，$a_{2i-1,\ 2j}$，$a_{2i,\ 2j-1}$，$a_{2i,\ 2j}\neq 0$。该向量空间可分解为两个子空间 $U_{ij}=U_{ij}^{+}\oplus U_{ij}^{-}$ 的和，使得对于非零块 A 和 B，分别来自 U_{ij}^{+} 和 U_{ij}^{-} ：

$$A\cong\begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ \gamma & -\alpha\end{bmatrix},B\cong\begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ -\gamma & \alpha\end{bmatrix}$$

U_{ij} 确实是这些子空间的直和，因为它们都是 2 维的，且交集为 0。

Proposition 4。8. U_{ij}^{+}和 U_{ij}^{-} 是 T-不变的不可约实 *2* 维表示，权分别为 $\epsilon_i+\epsilon_j$ 和 $\epsilon_i-\epsilon_j$，其中 ϵ_1，……，ϵ_n 是 $\mathit{Hom}(T^n,S^1)\cong\mathbb{Z}^n$ 的标准基，也就是当 $i=1$，……，n 时的 $\epsilon_i((t_1$，……，$t_n))=t_i$。

Proof.为验证这一事实，我们应检验 U_{ij}^{-}（以及 U_{ij}^{+}）是 T-不变的。我们可以利用命题4.7证明中的等式系统4.1，考虑 $a=d$ 和$b=-c$。我们得到:

$$\begin{cases}a\cdot\cos(\phi-\theta)+b\cdot\sin(\phi-\theta)=\alpha\\ -a\cdot\sin(\phi-\theta)+b\cdot\cos(\phi-\theta)=\gamma\\ a\cdot\sin(\phi-\theta)-b\cdot\cos(\phi-\theta)=\delta\\ a\cdot\cos(\phi-\theta)+b\cdot\sin(\phi-\theta)=\beta\end{cases}$$

由于 $\alpha=\beta$和 $\gamma=-\delta$，U_{ij}^{-}是一个二维 T-不变表示。该表示的权为 $\epsilon_i-\epsilon_j$，因为

$$\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}a\cdot\cos(\phi-\theta)+b\cdot\sin(\phi-\theta) & -a\cdot\sin(\phi-\theta)+b\cdot\cos(\phi-\theta)\\ a\cdot\sin(\phi-\theta)-b\cdot\cos(\phi-\theta) & a\cdot\cos(\phi-\theta)+b\cdot\sin(\phi-\theta)\end{bmatrix}$$

该表示也是不可约的。事实上，假设它不是，则由分块生成的子空间

$$\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}$$

是一个一维表示，并且是一个 T-不变集。但如果我们取$\sin(\phi-\theta)=1$，就会得到一个不属于该集合的元素 $\begin{bmatrix}0 & -a\\ a & 0\end{bmatrix}$，这是一个矛盾。

U_{ij}^{+} 的情形可以类似地处理。 □

对于每个不动点，我们发现每个非零矩阵块（即图 Γ 的每条边）都对应两个不可约二维切表示。因此，我们在每个点都找到了 $2\cdot|E_\Gamma|$ 个表示，并且由于 $\dim Q_{\Gamma,\lambda}=4|E_\Gamma|$ 我们得到以下命题：

PROPOSITION 4.9. 在任意不动点处$A_{\sigma,s}$ 切表示为

$$T_{A_{\sigma,s}}M_{\Gamma,\lambda}=\bigoplus_{\{i,j\}\in E_\Gamma}U_{ij}^{+}\oplus U_{ij}^{-},$$

其切权的形式为 $\{\epsilon_i+\epsilon_j,\epsilon_i-\epsilon_j\,|\,\{i,j\}\in\Gamma\}$。

现在，我们预期对每个点都能找到 $2|E_\Gamma|$不变 2-球面。由此即可描述 $Q_{\Gamma,\lambda}$ GKM图。

THEOREM 4.10. 若 $\sigma=\tau\cdot(i,j)$ 满足 $(i,j)\in E_\Gamma$，其中 $s_k=s'_k$对所有 $k\notin\{i,j\}$ 及 $s_i+s_j=s'_i+s'_j$均成立，则矩阵 $A_{\sigma,s}$ 与 $A_{\tau,s'}$ 由一个形如以下形式的等谱矩阵 2-球面连接

$$\begin{pmatrix}
\begin{bmatrix}0&(-1)^{s_1}\cdot\lambda_{\sigma(1)}\\-(-1)^{s_1}\cdot\lambda_{\sigma(1)}&0\end{bmatrix} & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\\
\vdots & \ddots & & \vdots\\
\vdots & & \begin{bmatrix}*&*\end{bmatrix} & \vdots\\
\vdots & & \begin{bmatrix}*&*\end{bmatrix} & \vdots\\
\vdots & & & \vdots\\
\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \begin{bmatrix}0&(-1)^{s_n}\cdot\lambda_{\sigma(n)}\\-(-1)^{s_n}\cdot\lambda_{\sigma(n)}&0\end{bmatrix}
\end{pmatrix}$$

在位置 (i,j) 上具有以下分块：

$$\begin{pmatrix}
\begin{bmatrix}0&x\\-x&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}a&b\\-b&a\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}-a&b\\-b&-a\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&\lambda_{\sigma(1)}+\lambda_{\sigma(2)}-x\\-\lambda_{\sigma(1)}-\lambda_{\sigma(2)}+x&0\end{bmatrix}
\end{pmatrix}\tag{4.2}$$

对于 $s_i=s'_i$ 和

$$\begin{pmatrix}
\begin{bmatrix}0&x\\-x&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}a&b\\b&-a\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}-a&-b\\-b&a\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&\lambda_{\sigma(1)}-\lambda_{\sigma(2)}+x\\-\lambda_{\sigma(1)}+\lambda_{\sigma(2)}-x&0\end{bmatrix}
\end{pmatrix}\tag{4.3}$$

对于 $s_i\neq s'_i$,

具有由谱定义的任意 a、b、x。

PROOF. (1) 首先，我们证明这些矩阵集合是 T-不变的。对于情形 4.2，我们可以使用系统 4.1。考虑 $a = d$、 $b = -c$，我们得到

$$\begin{cases} a \cdot \cos(\phi - \theta) + b \cdot \sin(\phi - \theta) = e \\ -a \cdot \sin(\phi - \theta) + b \cdot \cos(\phi - \theta) = f \\ a \cdot \sin(\phi - \theta) - b \cdot \cos(\phi - \theta) = g \\ a \cdot \cos(\phi - \theta) + b \cdot \sin(\phi - \theta) = h \end{cases}$$

因此 $e = h$ 和 $f = -g$，这表明该集合在 T作用下不变。对于情形 4.3，我们以类似方式进行检验。

(2) 现在证明这些集合确实是 2-球面。同样，我们先考虑情形 4.2。

必须保持谱不变，即特征多项式 $\chi(t)$必须保持不变。显然， $\chi(t)$ 等于以下乘积

$$(t^2 + \lambda_{\sigma(1)}^2) \cdot (t^2 + \lambda_{\sigma(2)}^2) \cdot \ldots \cdot p(t) \cdot \ldots \cdot (t^2 + \lambda_{\sigma(n)}^2)$$

其中 $p(t)$ 是位置 $(i,\ j)$处块的特征多项式。因此，保持 $p(t)$不变即可确定关于 $a,\ b,\ x$ 的所有条件。通过简单计算可得:

$$p(t) = t^4 + (x^2 + 2a^2 + 2b^2 + (-\lambda_{\sigma(1)} - \lambda_{\sigma(2)} + x)^2) \cdot t^2 + \det$$

其中

$$\det = a^4 + b^4 + x^2(-\lambda_{\sigma(1)} - \lambda_{\sigma(2)} + x)^2 + 2a^2b^2 -$$
$$-2a^2x(-\lambda_{\sigma(1)} - \lambda_{\sigma(2)} + x) - 2b^2x(-\lambda_{\sigma(1)} - \lambda_{\sigma(2)} + x) = ((a^2 + b^2 + x(-\lambda_{\sigma(1)} - \lambda_{\sigma(2)} + x))^2 = \mathrm{pf}^2$$

因此我们有

$$a^2 + b^2 + x \cdot (x - (\lambda_{\sigma(1)} + \lambda_{\sigma(2)})) = const =$$
$$= a^2 + b^2 + \left(\left(x - \frac{\lambda_{\sigma(1)} + \lambda_{\sigma(2)}}{2}\right) + \frac{\lambda_{\sigma(1)} + \lambda_{\sigma(2)}}{2}\right) \cdot \left(\left(x - \frac{\lambda_{\sigma(1)} + \lambda_{\sigma(2)}}{2}\right) - \frac{\lambda_{\sigma(1)} + \lambda_{\sigma(2)}}{2}\right) =$$
$$= a^2 + b^2 + \left(x - \frac{\lambda_{\sigma(1)} + \lambda_{\sigma(2)}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\lambda_{\sigma(1)} + \lambda_{\sigma(2)}}{2}\right)^2$$

因此我们得到一个 2-球面的方程:

$$a^2 + b^2 + \left(x - \frac{\lambda_{\sigma(1)} + \lambda_{\sigma(2)}}{2}\right)^2 = const + \left(\frac{\lambda_{\sigma(1)} + \lambda_{\sigma(2)}}{2}\right)^2 = const. \tag{4.4}$$

需要注意的是，观测集要么位于连通分支$Q_\Gamma^+,_\lambda$ 中，要么位于连通分支 $Q_\Gamma^-,_\lambda$中。设它位于 $Q_\Gamma^+,_\lambda$中。那么 $a^2 + b^2 + x \cdot (x - (\lambda_{\sigma(1)} + \lambda_{\sigma(2)}))$ 不可能带负号，因为$Q_\Gamma^+,_\lambda$ 由方程$\sqrt{\det} = +\mathrm{pf}$ 定义。情形 $Q_\Gamma^-,_\lambda$ 可用类似方法证明。

还需证明，在条件 4.4 下，多项式 $p(t)$的单项式
$(x^2+2a^2+2b^2+(-\lambda_{\sigma(1)}-\lambda_{\sigma(2)}+x)^2)$也保持不变。这确实成立，因为

$$(x^2+2a^2+2b^2+(-\lambda_{\sigma(1)}-\lambda_{\sigma(2)}+x)^2) = 2(a^2+b^2+x^2-x\cdot(\lambda_{\sigma(1)}+\lambda_{\sigma(2)}))+((\lambda_{\sigma(1)}+\lambda_{\sigma(2)}))^2 =$$

$$= 2\left(a^2+b^2+\left(x-\frac{\lambda_{\sigma(1)}+\lambda_{\sigma(2)}}{2}\right)^2\right)+const = const$$

在情形 4.3 中，可以类似地进行计算。

□

因此，对于每个不动点，我们都找到了 $2\cdot|E_\Gamma|$ 个包含它的不变 2-球面。由于每个点处的切表示维数为 $4\cdot|E_\Gamma|$，这些就是 $Q_{\Gamma,\ \lambda}$GKM图的全部边。现在我们可以描述这个图。

Proposition 4.11. $Q_{\Gamma,\ \lambda}$ 的 ***GKM***图有 $2^n\cdot n!$ 个顶点，这些顶点由数对$(\sigma、\ s)$标记，其中 $\sigma\in S_n$、 $s\in(\mathbb{Z}_2^n、\ +)$。两点 $A_{\sigma,\ s}$和 $A_{\tau,\ s'}$之间有一条边，当且仅当以下三个关系成立

(1) $\sigma=\tau\cdot(i、\ j)$和 $\{i、\ j\}\in E_\Gamma$;
(2) 对所有 $k\notin\{i、\ j\}$， $s_k=s'_k$；
(3) $s_i+s_j=s'_i+s'_j$。

边$(A_{s、\ \sigma}A_{s'、\ \sigma\cdot(i、\ j)})$的权（或等价地说，轴向函数）为：$\epsilon_i+\epsilon_j$若 $s_i=s'_i$，则为；若 $s_i\neq s'_i$，则为 $\epsilon_i-\epsilon_j$。

利用关于厄米矩阵的命题4.11和命题4.6，我们得到了定理1.1的证明。

Corollary 4.12. 由 Q^+_Γ、λ 的 ***GKM***图 η_+ 可从$Q_{\Gamma、\ \lambda}$的 ***GKM***图 η 中仅保留满足 $s_1+\ldots+s_n=0$ 的顶点$A_{s、\ \sigma}$得到。由 Q^-_Γ、λ构成的 ***GKM***图 η_- 则包含所有其他满足 $s_1+\ldots+s_n=1$的顶点$A_{s、\ \sigma}$。

η_+ 和 η_- 恰好构成了 η的所有边。它们是 η 的两个连通分支，且彼此同构。

5. 等变形式性

本节我们将考察，对于哪些图 Γ，流形 $Q_{\Gamma,\ \lambda}$ 对一般的 λ是等变形式的。现在我们证明定理1.2。首先，我们将证明以下命题 5.1。

Proposition 5.1. 如果 $M_{\Gamma,\ \lambda}$ 不是等变形式的，那么$Q_{\Gamma,\ \lambda}$ 也不是等变形式的。

我们将使用 M. Masuda 和 T. Panov 的以下结果[11, 引理 2.2]。

Lemma 5.2. 设 T 作用于 X，并且 Y 是某个闭子群 $H\subset T$的不动点集X^H 的一个连通分支。那么条件 $H^{odd}(X)=0$ 蕴含 $H^{odd}(Y)=0$和 $Y^T\neq\varnothing$。 X 的等变形式性蕴含 Y的等变形式性。

Construction 5.3. 考虑流形$M_{\Gamma,\ \lambda}$。再将 $M_{\Gamma,\ \lambda}$ 中的每个矩阵乘以 i，得到流形 $M'_{\Gamma,\ \lambda}$。众所周知，厄米矩阵乘以 i 后会得到反厄米矩阵。由于矩阵的所有系数都乘以 i，零块得以保留， T-作用也得以保留。矩阵的每个特征值也都乘以 i，因此 $M'_{\Gamma,\ \lambda}$ 也是一个等谱矩阵集。

现在，将 $M'_{\Gamma,\lambda}$视为实基下的矩阵流形，即得到 $M'_{\Gamma,\lambda,\mathbb{R}}$。这是一个大小为 $2n \times 2n$ 的矩阵流形。$M \in M'_{\Gamma,\lambda}$中的每个复数项 $a + bi$ 都对应于 $Q \in M'_{\Gamma,\lambda,\mathbb{R}}$中的实矩阵块 $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$。

Example 5.4.

$$\begin{pmatrix} k & l_1 + i \cdot l_2 & m_1 + i \cdot m_2 \\ l_1 - i \cdot l_2 & n & o_1 + i \cdot o_2 \\ m_1 - i \cdot m_2 & o_1 - i \cdot o_2 & p \end{pmatrix} \xrightarrow{M_{\Gamma,\lambda} \mapsto M'_{\Gamma,\lambda}}$$

$$\to \begin{pmatrix} i \cdot k & i \cdot l_1 - l_2 & i \cdot m_1 - m_2 \\ i \cdot l_1 + l_2 & i \cdot n & i \cdot o_1 - o_2 \\ i \cdot m_1 + m_2 & i \cdot o_1 + o_2 & i \cdot p \end{pmatrix} \xrightarrow{M'_{\Gamma,\lambda} \mapsto M'_{\Gamma,\lambda,\mathbb{R}}}$$

$$\to \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -l_2 & -l_1 \\ l_1 & -l_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -m_2 & -m_1 \\ m_1 & -m_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} l_2 & -l_1 \\ l_1 & l_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -o_2 & -o_1 \\ o_1 & -o_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_2 & -m_1 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} o_2 & -o_1 \\ o_1 & o_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -p \\ p & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

Proposition 5.5. $M'_{\Gamma,\lambda,\mathbb{R}} \subset Q^+_{\Gamma,\lambda}$（或 $M'_{\Gamma,\lambda,\mathbb{R}} \subset Q^-_{\Gamma,\lambda}$）。

Proof. $M'_{\Gamma,\lambda,\mathbb{R}}$ 由零分块与图 Γ 相对应的等谱斜对称矩阵组成。因此 $M'_{\Gamma,\lambda,\mathbb{R}} \subset Q_{\Gamma,\lambda}$。

此外，Pfaffian 在正交基变换下保持不变。 $T^n = SO(2) \times \ldots \times SO(2)$ 作用于 $M'_{\Gamma,\lambda,\mathbb{R}}$，相当于一次正交基变换。因此，所有矩阵 $M \in M'_{\Gamma,\lambda,\mathbb{R}}$ 都属于 $Q_{\Gamma,\lambda}$ 的同一个连通分支。不失一般性，我们可以假设 $M'_{\Gamma,\ \lambda,\ \mathbb{R}} \subset Q^+_{\Gamma\ ,\ \lambda}$。 □

Proposition 5.6. $M'_{\Gamma,\lambda,\mathbb{R}} = (Q^+_{\Gamma,\lambda})^{T^1}$.

Proof. 确定子集 $M'_{\Gamma、\ \lambda、\ \mathbb{R}}$ 的条件是：在 $Q^+_{\Gamma\ 、\lambda}$ 中，每个块都具有 $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ 的形式。为了找到一个群 H，使得 $M'_{\Gamma、\ \lambda、\ \mathbb{R}} = (Q^+_{\Gamma\ 、\lambda})^H$ 我们必须考虑能够保持这些块不变的元素 $t \in T$。

再次使用系统 4.1 并考虑 $a = d$、 $b = -c$，我们得到

$$\begin{cases} 2a \cdot \cos(\phi - \theta) + 2b \cdot \sin(\phi - \theta) = 2e \\ -2a \cdot \sin(\phi - \theta) + 2b \cdot \cos(\phi - \theta) = 2f \\ 2a \cdot \sin(\phi - \theta) - 2b \cdot \cos(\phi - \theta) = 2g \\ 2a \cdot \cos(\phi - \theta) + 2b \cdot \sin(\phi - \theta) = 2h \end{cases} \tag{5.1}$$

此外，我们知道 $e = h = a$ 和 $f = -g = b$，因此得到

$$\begin{cases} a \cdot \cos(\phi - \theta) + b \cdot \sin(\phi - \theta) = a \\ -a \cdot \sin(\phi - \theta) + b \cdot \cos(\phi - \theta) = b \end{cases} \tag{5.2}$$

Thus

$$\begin{cases} a \cdot (\cos(\phi - \theta) - 1) = -b \cdot \sin(\phi - \theta) \\ a \cdot \sin(\phi - \theta) = b \cdot (\cos(\phi - \theta) - 1) \end{cases} \tag{5.3}$$

若 $\sin(\phi - \theta) \neq 0$，则得到

$$a = b \cdot \frac{(\cos(\phi - \theta) - 1)}{\sin(\phi - \theta)}$$

and

$$b \cdot \frac{(\cos(\phi - \theta) - 1)}{\sin(\phi - \theta)} \cdot (\cos(\phi - \theta) - 1) = -b \cdot \sin(\phi - \theta)$$

我们可以说 $b \neq 0$。否则，我们有 $b = 0 \implies a \cdot \sin(\phi - \theta) = 0$。于是 $\sin(\phi - \theta) = 0$ 或 $a = 0$。前者矛盾，后者是零分块的一个无关情形。因此

$$\cos^2(\phi - \theta) - 2 \cdot \cos(\phi - \theta) + 1 = -\sin^2(\phi - \theta)$$

所以最终得到

$$2 = 2 \cdot \cos(\phi - \theta)$$

并且 $\cos(\phi - \theta) = 1 \implies \sin(\phi - \theta) = 0$。这与假设矛盾。

另一方面，如果 $\sin(\phi - \theta) = 0$，那么 $\cos(\phi - \theta) = 1$，且系统 5.3 的两个等式都成立。这意味着，保持形如 $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ 的分块不变的条件是 $\phi = \theta$。这些方程必须对矩阵 $M \in M'_{\Gamma,\lambda,\mathbb{R}}$ 的每个块都成立。由于边 $\{i, j\} \in E_\Gamma$ 对应着一个块 B 和两个分量 T^1_i、 T^1_j，且 T^n 通过 $T^1_i B T^1_j$ 作用于 B，因此我们得出，对于 E_Γ 的每条对应边， $\phi = \theta$。根据定义， Γ 是连通的，因此对于任意两个分量 T^1_i、 T^1_j，都有 $\phi = \theta$。因此$M'_{\Gamma,\lambda,\mathbb{R}} \subset Q^{T^1}_{\Gamma,\lambda}$，且 $M'_{\Gamma,\lambda,\mathbb{R}} \subset (Q^+_{\Gamma,\lambda})^{T^1}$。

反方向的包含关系可通过将 $\phi = \theta$ 应用于系统 4.1 来证明。由于 $(Q^+_{\Gamma,\lambda})^{T^1}$ 由不变点组成，因此我们也有 $a = e, b = f, c = g, d = h$:

$$\begin{cases} (a-d)\cdot\cos(2\phi) + (a+d) - (b+c)\cdot\sin(2\phi) = 2a \\ (a-d)\cdot\sin(2\phi) + (b+c)\cdot\cos(2\phi) + (b-c) = 2b \\ (a-d)\cdot\sin(2\phi) + (b+c)\cdot\cos(2\phi) - (b-c) = 2c \\ -(a-d)\cdot\cos(2\phi) + (a+d) + (b+c)\cdot\sin(2\phi) = 2d \end{cases} \tag{5.4}$$

若 $\cos(2\phi) = -1$，则 $\sin(2\phi) = 0$，并且我们有

$$\begin{cases} 2d = 2a \\ -2c = 2b \\ -2b = 2c \\ 2a = 2d \end{cases} \tag{5.5}$$

因此，对于每个块，$a = d$和 $b = -c$。于是$M'_{\Gamma,\lambda,\mathbb{R}} \supset (Q^+_{\Gamma,\lambda})^{T^1}$。命题得证。□

现在，根据命题 5.6，我们知道$M'_{\Gamma,\lambda,\mathbb{R}} = (Q^+_{\Gamma,\lambda})^{T^1}$，因此可以应用引理 5.2。命题 5.1 由此直接得出。

现在只需证明下一个命题 5.7。

PROPOSITION 5.7. 若$M_{\Gamma,\lambda}$ 是等变形式的，那么$Q_{\Gamma,\lambda}$ 也是等变形式的。

PROOF. 证明可以类似于 [9]中介绍的技术进行。我们可以在 D 型李代数的复化上定义一个广义 Toda 流。通过相同的推理可以证明，该 Toda 流是一个梯度流。该流的所有临界点的指标都是偶数。莫尔斯复形集中在偶数次上；因此，其微分为零。因此，$M_{\Gamma,\lambda}$ 的奇次上同调消失，且$M_{\Gamma,\lambda}$ 是等变形式的。关于 A 型李代数的详细证明可见 [7]。□

定理1.2由命题5.1和5.7推出。

REMARK 5.8. 等变形式的流形和非等变形式的流形的分类$M_{\Gamma,\lambda}$ 可见于 [2]。

参考文献

[1] A. Ayzenberg, 等谱周期三对角矩阵空间, Algebr. Geom. Topol. 20 (2020), 2957- 2994.[2] A. Ayzenberg, K. Sorokin, 对角化算法的拓扑方法, 预印本 arXiv: 2204.06111[3] A. Ayzenberg, M. Masuda, 复杂度一的等变形式环面作用的轨道空间, Trans- form. Groups, doi: 10.1007/s00031-023-09822-3 (2023).[4] A. Ayzenberg, M. Masuda, G. Solomadin, 图与流形有何不同？, 《数学文集》 , 2023, 第 214 卷，第 6 期，793–815 页。

[5] A. Ayzenberg, V. Buchstaber, 簇-排列多面体及带有环面作用的旗簇子流形, 《国际数学研究通知》, 2024:3 (2024), 1931–1967.[6] A. Ayzenberg, V. Buchstaber, 等谱箭矩阵流形, 《数学文集》212:5 (2021), 3-36.[7] A. Ayzenberg, V. Buchstaber, 等谱矩阵流形与*Hessenberg*簇, 《国际数学研究通知》2021:21 (2021), 16671-16692.[8] A. Bia-lynicki-Birula. 关于代数群作用的一些定理, 《数学年刊》(2), 98:480–497, 1973.[9] F. De Mari, M. Pedroni, *Toda*流与实*Hessenberg*流形, 《几何分析杂志》9, 607–625 (1999).[10] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson, 等变上同调、*Koszul*对偶与局部化定理, 《数学发明》131 (1998), 25–83.[11] M. Masuda, T. Panov, 关于环面流形的上同调, 《大阪数学杂志》43 (2006), 711–746 (预印本 arXiv:math/0306100).[12] V. Guilleminn, C. Zara 一维骨架、贝蒂数与等变上同调, 《杜克数学杂志》107 (2001), 283–349.[13] V. Guilleminn, T. Holm, C. Zara 齐性空间等变上同调环的*GKM*描述, 《代数与组合杂志》23 (2006), 21–41.[14] S. Kuroki, *GKM*理论导论, 《数学前沿》- 新系列 11:2 (2009), 111–126.[15] Wu Yi Hsiang, 拓扑变换群的上同调理论, 施普林格出版社, 1975。