arXiv:2602.08423v1 [cs.LO] 9 Feb 2026

带宽着色的 SAT 编码：一项系统性设计研究

Duc Trung Kim Nguyen[1], Tuyen Van Kieu[2], and Khanh Van To[3*]

*通讯作者[1]越南国家大学工程与技术大学，越南河内 / 23021533@vnu.edu.vn / https://orcid.org/0009-0001-7828-4985[2]越南国家大学工程与技术大学，越南河内 / tuyenkv@vnu.edu.vn / https://orcid.org/0009-0007-7800-7172[3]越南国家大学工程与技术大学，越南河内 / khanhtv@vnu.edu.vn / https://orcid.org/0009-0008-1907-7848

摘要。 带宽着色问题（BCP）通过对相邻顶点施加最小间隔约束，推广了图着色，并应用于频率分配。尽管基于 SAT 的方法在精确求解 BCP 方面展现出良好前景，但编码设计空间仍未得到充分探索。本文系统研究了 BCP 的 SAT 编码，提出一个统一框架，涵盖三类共六种编码方法：单变量编码、双变量编码和块编码。我们评估了增量求解和对称性破缺等关键特征的影响。尽管对称性破缺已在图着色问题中得到研究，但尚未针对基于 SAT 的 BCP 求解器进行系统评估。分析揭示了编码选择与求解器配置之间显著的交互效应。所提出的框架在 GEOM 和 MS-CAP 基准测试中达到了最先进的性能。块编码能够在约 1000 秒内将最难的实例 GEOM120b 求解至已证明的最优解，而以往方法在一小时的时间限制内都无法求解该实例。

关键词：带宽着色问题；SAT 编码；频率分配。

1 引言

图着色问题（GCP）是一类经典的组合优化问题，要求为图的顶点赋予颜色，使任意两个相邻顶点的颜色都不同，同时尽可能减少所用颜色的数量（Malaguti和Toth，2010；Husfeldt，2015）。该问题广泛应用于寄存器分配（Chaitin 等人，1981）、调度（Leighton，1979）以及稀疏雅可比矩阵的计算（Gebremedhin 等人，2005）。尽管理论和实践意义重大，寻找最优着色仍是NP困难问题；与旅行商问题等其他著名的NP困难问题相比，目前只有相对较小的实例能够被证明达到最优（Faber 等人，2024）。

带宽着色问题（BCP）是图着色问题的一种自然推广，其中每条边 $\{u, v\}$ 都带有一个正整数权重 $d(u, v)$，表示其两个端点所赋颜色之间要求的最小间隔。形式上，着色由标记函数 $c : V \to \mathbb{N}$定义，其中 $c(u)$和 $c(v)$分别表示赋予顶点 u 和 v的颜色。若着色满足每条边 $\{u, v\} \in E$对应的距离约束$|c(u) - c(v)| \geq d(u, v)$，则称其为可行着色。目标是尽可能减小赋予任意顶点的最大颜色值，这通常称为着色的跨度 （Martí 等人，2010）。当所有边权重均为1时，带宽着色问题就化为经典图着色问题。带宽着色问题自然出现于无线网络和蜂窝网络的频率分配问题（FAP）中（Hale，1980；Aardal 等人，2007）。在这些应用中，无线电发射机被建模为顶点，而边权重表示为避免电磁干扰所需的最小频率间隔（Eisenblätter 等人，2002；Koster，1999）。着色的跨度对应网络所需的带宽，因此，最小化跨度对高效利用频谱至关重要（Dias 等人，2021；Lai 和 Lü，2013）。

解决 BCP 的主流方法大致可分为两类：元启发式方法和精确算法（Martí 等人，2010 年）。元启发式方法包括多起点迭代禁忌搜索（Lai 和 Lü，2013年）、基于学习的混合搜索（Jin 和 Hao，2015年）、路径重连（Lai 等人，2014年、2016年）以及变邻域搜索（Matić 等人，2017年）。这些方法展现出较快的计算速度，但无法保证最优性。相比之下，Dias 等人（2021年）研究了基于整数线性规划（ILP）和约束规划（CP）的精确方法，并观察到，由于具备高效的约束传播机制，CP 公式对于 BCP 尤其有效；而 ILP 公式往往会受到约束数量过多的影响，且约束数量会随着边权重的增加而增长。

近年来，基于 SAT 的方法已成为精确求解图着色变体的一种有前景的替代方案（Hébrard 和 Katsirelos，2020；Heule 等人，2022）。基于指派的 SAT 编码引入二元变量，直接表示颜色赋值（Heule 等人，2022；Dey 和 Bagchi，2013）；而基于排序的编码则使用变量表示颜色与顶点之间的相对顺序（Tamura 等人，2009；Ansótegui 和 Manyà，2004）。针对图着色问题，Heule 等人（2022）提出了 Cli-ColCom 算法，该算法使用 SAT 方法交替求解最大团和图着色问题。针对 BCP，Faber 等人（2024）提出了基于偏序的 SAT 编码（POP-S-B 和 POPH-S-B），通过排序变量而非直接的赋值变量来表示颜色分配。与基于指派的模型相比，这些建模方式的约束数量在渐近意义上更少，并且成功将六个此前尚未解决的 GEOM 基准实例求解至最优。然而，SAT 编码的设计空间仍未得到充分探索，许多重要问题尚无答案。首先，尽管 POP-S-B 和 POPH-S-B 编码已展现出良好前景，但尚未对其他变量表示方式进行全面评估，包括单变量与双变量编码，以及大于语义与小于语义。其次，尽管针对图着色问题的对称性破缺策略已得到广泛研究（Méndez-Díaz 和 Zabala，2008），但其对 BCP 的有效性仍未得到考察。第三，增量 SAT 求解与非增量方法对 BCP 性能的影响仍不清楚（Glorian 等人，2019）。第四，块编码（Truong 等人，2025）

通过将变量组织成结构化分组以提高约束传播效率，但尚未应用于 BCP。第五，这些可配置特征之间的交互效应仍未明了，具体而言，尚不清楚它们是彼此独立发挥作用，还是会产生协同或拮抗关系。

本文通过提出一项针对BCP的SAT编码系统性设计研究来填补这些空白。我们提出一个全面的框架，探索基于SAT的带宽着色问题求解器的设计选择，涵盖归为三类的六种编码方法：单变量编码（1G和1L）、双变量编码（2G和2L）以及块编码（X和Xa）。对于每种编码类型，我们评估关键可配置特征的影响：增量求解模式、对称性破缺和块宽度策略。

本文的主要贡献如下。首先，我们证明所提出的块编码能够在约1000秒内将GEOM120b这一最具挑战性的基准实例求解至已证明的最优，而先前方法无法在一小时的时间限制内求解该实例。其次，我们提出一个面向BCP的统一SAT编码框架，并开展全面的比较研究，以识别影响求解器性能的因素。第三，我们观察到重要的交互效应：增量求解对块编码有显著助益，但对单变量编码并无此效果，且对称性破缺的有效性在不同编码类型之间差异显著。

本文其余部分组织如下。第2节正式定义带宽着色问题，并确立全文所使用的记号。第3节回顾有关BCP的元启发式方法和精确方法的相关研究。第4节详细介绍编码框架，描述六种编码方法及其可配置特征。第5节报告在GEOM和MS-CAP基准实例上的计算实验。最后，第6节总结研究发现，并讨论未来研究方向。

2 问题定义

本节正式定义带宽着色问题及其相关变体，并确立全文所使用的记号。

2.1 图着色问题

设 $G = (V,\ E)$为一个无向图，其顶点集为 V，边集为 E，其中每条边都是 $e = \{u, v\}$ 的 V的二元素子集。边 $\{u, v\}$ 的顶点 u和 v称为相邻顶点或邻居。 k-着色是指将集合 $\{1, 2, \ldots, k\}$ 中的颜色赋予 G 中的顶点，使任意两个相邻顶点不会被赋予相同的颜色（Malaguti和Toth，2010年）。色数 $\chi(G)$是使有效的 k-着色存在的k 的最小值。

定义 2.1（图着色问题）。 给定一个无向图 $G = (V, E)$，

图着色问题（*GCP*）要求求出一个赋值 $c:\ V \to \mathbb{N}$ 使$\max_{v\in V} c\,(v)$ 最小，并满足约束 $c\,(u) \neq c\,(v)$ 对所有 $\{u,v\} \in E$均成立。

表 1 总结了本文中使用的符号。

表 1：本文中使用的符号。

符号	描述
$G=(V,\ E)$	顶点集为 V、边集为 E的无向图
$n=\lvert V\rvert$	顶点数量
$m=\lvert E\rvert$	边数量
$d\,(\{u,v\})$ 或 $d_{u,\ v}$	边 $\{u,v\}$ 的距离要求（权重）
$\bar{d}$	平均边距离：$d=\ \ \frac{1}{\lvert E\rvert}\sum_{e\in E} d(e)$
k	跨度（着色中使用的最大颜色值）
H	跨度上界
$c(v)$	分配给顶点 v 的颜色
$\chi(G)$	图 G 的色数
$w(v)$	顶点 v 的颜色需求（BMCP 中）

2.2 带宽着色问题

带宽着色问题通过引入边权重来推广 GCP，这些边权重规定了相邻顶点颜色之间的最小间隔要求（Martí 等人，2010年）。这种推广体现了频率分配中的实际约束：邻近发射机需要使用差异足够大的频率，以避免干扰（Dias 等人，2021年）。

定义 2.2（带宽着色问题）。给定一个带有正整数边权重 $d\colon E\to\mathbb{N}$ 的无向图 $G=(V,E)$，带宽着色问题（*BCP*）要求找到一个赋值 $c:V\to\mathbb{N}$，使 $\max_{v\in V} c(v)$ 最小，同时满足以下约束：

$$|c(u)-c(v)|\geq d(\{u,v\})\quad \forall\{u,v\}\in E \tag{1}$$

图 1 通过一个简单示例展示了 BCP。该图有四个顶点，由权重分别为 1、2 和 3 的边连接。有效着色会为各顶点分配颜色，使相邻顶点满足距离约束。例如，边 $\{A,B\}$ 的权重为 2，因此满足 $|c(A)-c(B)|=|1-3|=2\geq 2$。右侧面板展示了对全部五条边的约束验证，证实该着色有效，且跨度为 6。

目标值 $\max_{v\in V} c(v)$ 称为该着色的跨度。当所有边权重均为 1（即，对所有 $e\in E$，$d(e)=1$）时，BCP 就简化为经典图着色问题（Faber 等人，2024年）。

BCP 是 T-着色问题的一个特例（Cozzens 和 Roberts，1982；Roberts，1991），其中每条边都关联一个颜色差禁集。进一步的推广是带宽多重着色问题（BMCP），它允许每个顶点

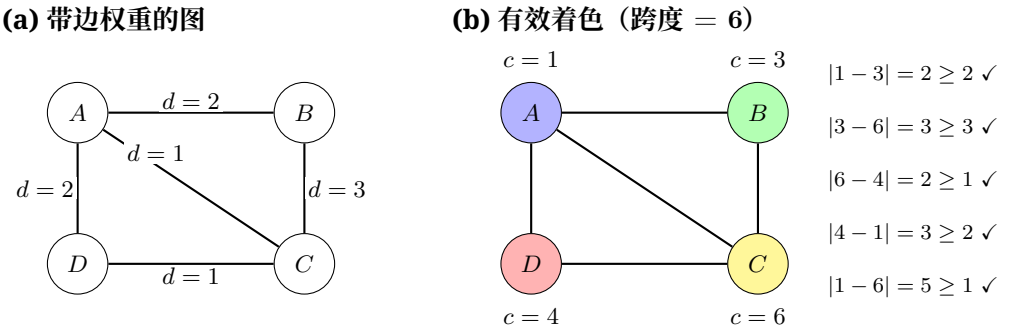


图 1：带宽着色问题示例。

接收多个颜色（Lai 和 Lü，2013年；Dias 等人，2021年）。通过将每个顶点替换为代表其颜色需求的团，可以将 BMCP 实例转换为等价的 BCP 实例；这一标准变换使 BCP 算法能够用于最初以 BMCP 表述的问题。图着色问题已知是 NP困难的（Malaguti和Toth，2010年），而由于 BCP 推广了图着色问题，BCP 也是 NP困难的。该问题的判定版本要求判断对于给定的 k，是否存在有效的 k 着色；此判定问题是 NP完全的。

3 文献综述

本节回顾求解带宽着色问题的现有方法，并将其分为三类：元启发式方法、整数规划与约束规划方法，以及基于 SAT 的方法。最后，我们分析研究空白，以说明本研究的动机。为提供背景，我们全面概述了各类方法；但第5节中的实验比较仅聚焦于基于 SAT 的方法，因为它们代表了当前精确 BCP 求解的最先进水平（Faber 等人，2024年）。

3.1 元启发式方法

由于能够在合理时间内找到高质量解，元启发式算法已在 BCP 中得到广泛研究。值得关注的方法包括多起点迭代禁忌搜索（MITS）（Lai 和 Lü，2013年），该方法采用快速增量评估技术，在邻域探索过程中高效更新目标函数；基于学习的混合搜索（LHS）（Jin 和 Hao，2015），该方法将前向检查构造与使用自适应引导函数的禁忌搜索修复相结合；路径重连策略（Lai 等人，2014年、2016年），通过随机轨迹生成，在强化与多样化之间取得平衡；以及变邻域搜索（VNS）（Matić 等人，2017年），该方法根据冲突计数和边权重特征，将局部搜索分解为多个离散过程。

尽管元启发式方法具有较高的计算效率，但它们存在一些根本性局限。它们无法保证解的最优性，而在频率分配等应用中，这一点至关重要，因为次优分配可能导致干扰或频谱浪费。这些方法也容易陷入局部最优，其性能往往高度依赖于针对具体问题实例进行的参数调优。这些局限促使人们开发能够证明最优性的精确方法。

3.2 整数规划与约束规划

研究人员已探索基于数学规划的精确方法，以证明 BCP 实例的最优性。Dias 等人（2021年）对整数规划（IP）和约束规划（CP）公式进行了比较研究。CP 公式直接使用距离约束 $|c(u) - c(v)| \geq d_{u,v}$，这类约束可由约束传播机制自然地处理。Faber 等人（2024年）提出的基于指派的整数线性规划模型（ASS-I-B）使用二元变量 $x_{v,i}$（其中 $x_{v,i} = 1$ 当且仅当顶点 v 被指定为颜色 i）以及变量 $z_{\max}$ 来表示跨度。该公式如下：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z_{\max} && && (2)\\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{H} x_{v,i} = 1 && \forall v \in V && (3)\\
& x_{u,i} + x_{v,j} \leq 1 && \forall \{u,v\} \in E,\ \forall i,\ j:\ |i-j| < d(u,v) && (4)\\
& z_{\max} \geq i \cdot x_{v,i} && \forall v \in V, \forall i \in \{1,\dots,H\} && (5)\\
& x_{v,i} \in \{0,1\},\ \ z_{\max} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} && \forall v \in V, \forall i \in \{1,\dots,H\} && (6)
\end{aligned}
$$

该模型确保每个顶点恰好获得一种颜色，避免相邻顶点的颜色赋值发生冲突，并正确地定义目标函数。然而，整数规划和约束规划表述在 BCP 中都存在明显局限。基于赋值的整数规划模型有两大缺点：（1）解空间中存在对称性，即颜色标签的任意排列都会产生等价解，从而显著扩大搜索空间；（2）约束数量随 $O(H \cdot |E| \cdot d)$ 增长，其中 d 为平均边权重，因此该表述不适用于边权重较大的实例（Faber 等人，2024年）。Dias 等人（2021年）指出，由于距离约束能够高效传播，约束规划对 BCP 实例是有效的；然而，这两种方法在较大实例上的可扩展性都较差。这些局限促使研究者探索基于 SAT 的方法，这类方法提供了其他约束表示，其扩展特性可能更为理想。

3.3 基于 SAT 的方法

基于 SAT 的方法已成为精确图着色的一种有竞争力的替代方案。基于赋值的SAT 编码使用二元变量$x_{v,i}$，其中 $x_{v,i} =$ 当且仅当

顶点 v 被指定颜色 i，以直接表示颜色分配（Heule 等人，2022年；Dey 和 Bagchi，2013年）。《约束》确保每个顶点恰好获得一种颜色，并确保相邻顶点获得不同的颜色。

Tamura 等人（2009年）和 Ansótegui 和 Manyà（2004年）提出了一种基于排序的编码，使用变量 $y_{v,i}$ 来表示颜色 i 是否小于分配给顶点 v的颜色。这种编码在约束数量方面具有理论优势，但直到最近，在后续文献中受到的关注都很有限。

对于图着色问题，Heule 等人（2022年）提出了 CliColCom 算法，该算法交替使用可满足性问题求解最大团问题和图着色问题，其中一个问题的解会引导另一个问题的搜索。Hébrard 和 Katsirelos（2020）开发了约束推理和可满足性推理技术，并纳入了专为图着色设计的子句学习。Glorian 等人（2019年）提出了一种增量 SAT 方法，在搜索过程中动态添加约束。

针对带宽着色问题，Faber 等人（2024年）提出了基于偏序的 SAT 编码（POP-S-B 和 POPH-S-B），将 Tamura 等人（2009年）的排序方法推广开来。他们的关键见解是，约束数量仅取决于 $H \cdot |E|$，而非赋值模型中的 $H \cdot |E| \cdot d$。这一渐近优势转化为实际性能提升：他们的编码首次将六个此前尚未解决的 GEOM 基准实例求至最优。该研究还将 Méndez-Díaz 和 Zabala（2008年）的对称性破除约束应用于 SAT。

3.4 研究空白

尽管基于 SAT 的方法在带宽着色问题方面取得了进展，仍有若干重要问题尚未得到探索。本小节指出了四个关键研究空白，它们构成了本研究的动机。

- 变量表示： *</style}*现有的带宽着色问题 *SAT* 编码仅采用大于语义（$,_i = 1$ 当且仅当 $c(v) > i$）（Faber 等人，2024年），而小于语义、单变量与双变量表示以及块编码的相对表现尚未得到研究。

- 增量求解： </style}尽管增量 SAT 已在图着色问题中得到探索（Glorian 等人，2019年），但其在带有距离约束的带宽着色问题中的有效性仍不明确；子句复用与学习子句质量之间的权衡值得系统研究。

- 对称性破缺： </style}目前的对称性破缺方法主要关注颜色对称性（Méndez-Díaz 和 Zabala，2008年），但针对基于 SAT 的带宽着色问题求解器，其他对称性破缺策略尚未得到系统评估。

- 分块编码策略：尚未对采用不同块宽度策略（固定与变化）的块编码进行系统比较。

本研究通过提出一个系统性框架来探索以下方面，以弥补这些不足：

编码设计选择，包括变量表示、对称性破缺策略、求解模式和块编码变体。

4 SAT 编码框架

本节介绍 SAT 编码框架，该框架系统地探索 BCP 求解器的设计空间。我们描述了框架中实现的六种编码方法：单变量编码（1G 和 1L）、双变量编码（2G 和 2L），以及块编码（不含辅助变量的 X 和含辅助变量的 Xa）。对于每种编码，我们都介绍变量定义、约束形式化和实现细节。

4.1 框架概述

所提出的框架包含六种具有可配置特征的编码方法，可形成 36 种不同配置。每种配置都将一种编码方法与可选特征相结合：增量求解模式、对最高度顶点进行对称性破缺，以及块宽度策略（适用于 X 和 Xa）。表 2 汇总了每种编码方法可用的特征。

表 2：配置矩阵：各编码方法可用的特征。

方法	**宽度**	**增量式对称性**		**# 配置**
1G	–	y，无	真，假	4
1L	–	y，无	真，假	4
2G	–	x, y, 无	真，假	6
2L	–	x, y, 无	真，假	6
X	固定，可变	x，无	真，假	8
Xa	固定，变化	x，无	真，假	8
			总计：	36

1G：单变量大于；1L：单变量小于；2G：双变量大于；2L：双变量小于；X：不含辅助变量的块编码；Xa：含辅助变量的块编码。宽度：块宽度策略（固定或可变）。增量式：用于假设的变量类型（x、 y，或非增量式时不使用）。

每种配置由以下参数指定：

- 方法：编码方法（1G、1L、2G、2L、X、Xa）；
- 宽度：块宽度策略（X 和 Xa 使用固定宽度或可变宽度；其他方法留空）；
- 增量式：用于增量求解假设的变量类型（x、 y，或留空表示非增量式）；

- 对称性：是否启用对称性破缺（true 或 false）。

例如，配置 (Xa, 固定宽度，x, true) 表示采用固定块宽度的块编码，使用 x 变量进行假设的增量求解，并启用对称性破缺。

4.2 上界计算

基于 SAT 的方法需要一个关于跨度的上界 H，以定义变量域（Faber 等人，2024年）。对于 BCP，一个平凡的上界是 $H = |V| \cdot \max_{e \in E} d(e)$，对应于每个顶点都被赋予不同颜色且间隔最大化的情况。在实践中，可以使用贪心启发式获得更紧的界。一种常用的基于 DSatur（饱和度）的方法（Brélaz，1979年）按顺序处理顶点，为每个顶点分配满足其与已着色邻居之间所有约束的最小可行颜色。所得着色提供了一个上界 H，通常远小于平凡上界，并直接影响 SAT 编码的规模。算法 1 描述了这一过程。

算法 1 基于 DSatur 的上界计算

要求： 带边权重 d 的图 $G = (V, E)$
确保： 最优跨度的上界 H

```
c(v) ← 对所有 v ∈ V 均未赋值
H ← 0
当存在未着色顶点时
    v ← 饱和度最大的未着色顶点（若相同，则按度数打破平局）
    计算禁忌区间： I ← ⋃_{u∈N(v) c(u)≠未赋值} [c(u) − d_{v,u} + 1, c(u) + d_{v,u} − 1]
    c(v) ← 不在 I 中的最小正整数
    H ← max(H, c(v))
结束循环
返回 H
```

4.3 单变量编码

单变量编码仅使用排序变量来表示颜色赋值，对于具有 n 个顶点且跨度为 k 的图，需要 kn 个布尔变量。每个顶点的颜色由排序序列中的转变点隐式确定。根据排序变量的语义，我们定义了两种变体：大于（1G）和小于（1L）。

4.3.1 大于编码（1G）

1G 编码使用布尔变量 $y_{u,j}$，针对每个顶点 $u \in V$ 和颜色 $j \in [1, k]$，其语义为 $y_{u,j}$ = 为真 $\Leftrightarrow c(u) \geq j$。该表述常用于顺序

约束满足问题和可满足性问题的编码（Tamura 等人，2009年）。若 $y_{u,j}$为真且 $y_{u,j+1}$ 为假，则顶点 u 被指定颜色 j （边界条件为 $y_{u,k+1}$ =假）。
约束定义如下：

- 基准范围：$y_{u,\ 1}$ = 对所有 $u \in V$ 均为真。
- 排序：$y_{u,\ j} \rightarrow y_{u,\ j-1}$ 对所有 $j \in [2,k]$ 均成立。
- 距离：对于每条权重为 d_u 的边 $\{u,v\}$，$_v$ 以及颜色 j，如果 $c(u) = j$，那么 $c(v)$ 必须位于 $(j-d_{u,\ v},\ j+d_{u,\ v})$ 之外。这意味着 $\neg(y_{u,\ j} \wedge \neg y_{u,\ j+1}) \vee(\neg y_{v,\ j-d_{u,\ v}+1} \vee y_{v,\ j+d_{u,\ v}})$。重新整理后得到子句：

$$y_{u,j} \rightarrow (y_{u,j+1} \vee \neg y_{v,j-d_{u,v}+1} \vee y_{v,j+d_{u,v}}) \tag{7}$$

  适用边界条件（例如，如果 $j + d_{u,\ v} > k$，那么 $y_{v,\ j+d_{u,\ v}}$ 为假）。

4.3.2 小于编码 (1L)

1L 编码采用变量 $y_{u,\ j}$，其语义为 $y_{u,\ j}$ = 为真 $\Leftrightarrow c(u) \leq j$。注：这与 Faber 等人（2024）提出的编码不同，后者采用严格小于语义（即排序变量表示 $c(u) < j$，或等价地，$c(u)$ 小于 j）。我们的包含式定义（$c(u) \leq j$）与 1G 编码对称对齐。

1L 的约束如下：

- 基准范围：$y_{u,\ k}$ = 对所有 $u \in V$ 为真。
- 排序：$y_{u,\ j} \rightarrow y_{u,\ j+1}$ 对所有 $j \in [1,k-1]$。
- 距离：边 $\{u,v\}$ （权重为 $d_{u,\ v}$ ）的距离约束强制要求：若$c(u) = j$，则 $c(v)$ 不在 $(j-d_{u,\ v},\ j+d_{u,\ v})$ 中。就 $\leq$ 变量而言，$c(v) \leq j-d_{u,\ v}$ 对应于 $y_{v,\ j-d_{u,\ v}}$，且 $c(v) \geq j+d_{u,\ v}$ 对应于 $\neg y_{v,\ j+d_{u,\ v}-1}$。该子句为：

$$y_{u,j} \rightarrow (\neg y_{u,j-1} \vee y_{v,j-d_{u,v}} \vee \neg y_{v,j+d_{u,v}-1}) \tag{8}$$

4.4 提出的双变量编码（2G 和 2L）

单变量编码通过排序变量隐式推导颜色赋值，而我们提出扩展这一方法，显式维护赋值变量 $x_{u,\ j}$ 和排序变量 $y_{u,\ j}$。虽然这会增加变量数量，但显式建模 $x_{u,\ j}$ 能够使距离约束更直接、更紧凑，有望改善可满足性问题求解器中的单元传播。

4.4.1 双变量大于（2G）

2G 编码使用以下变量：

- $x_{u,j} = \text{true} \Leftrightarrow c(u) = j$
- $y_{u,j} = \text{true} \Leftrightarrow c(u) \geq j$

约束定义如下：

- 通道化：连接 x和 y 变量。

$$x_{u,j} \leftrightarrow (y_{u,j} \wedge \neg y_{u,j+1}) \tag{9}$$

- 排序：$y_{u,\ j} \rightarrow y_{u,\ j-1}$。
- 距离：使用 $x_{u,\ j}$，距离约束可简化为：

$$x_{u,j} \rightarrow (\neg y_{v,j-d_{u,v}+1} \vee y_{v,j+d_{u,v}}) \tag{10}$$

这直接表明：如果 u 被指定颜色 j，那么 $c(v) \leq j - d_{u,\ v}$ 或者 $c(v) \geq j + d_{u,\ v}$。

4.4.2 双变量小于（2L）

2L 编码使用以下变量：

- $x_{u,j} =$ 真 $\Leftrightarrow c(u) = j$
- $y_{u,j} =$ 真 $\Leftrightarrow c(u) \leq j$

约束定义如下：

- 通道化：

$$x_{u,j} \leftrightarrow (y_{u,j} \wedge \neg y_{u,j-1}) \tag{11}$$

- 排序：$y_{u,j} \rightarrow y_{u,j+1}$。
- 距离：

$$x_{u,j} \rightarrow (y_{v,j-d_{u,v}} \vee \neg y_{v,j+d_{u,v}-1}) \tag{12}$$

命题 4.1 (编码规模比较**)**。设 $n = |V|$、$m = |E|$、k 为跨度，$\bar{}$ 和 d 为平均边权重。表 *3* 比较了所提出的编码与 *Faber* 等人（*2024*年）提出的编码的渐近规模。

所提出的 1G 和 1L 编码与 POP-S-B 的渐近复杂度相同，而 2G 和 2L 与 POPH-S-B 相当（由于通道化约束，常数因子有所增加）。所有基于顺序的编码的子句数均与边权重无关d，因此对于权重较大的 BCP 实例，相较于 ASS-S-B 具有渐近优势。

表 3：编码规模比较。

来源	编码	变量	子句
Faber 等人（2024年）	POP-S-B	$(k-1)n$	$O(k(n+m))$
	POPH-S-B	$2kn$	$O(k(n+m))$
	ASS-S-B	kn	$O(km(2\ \bar{d}-1))$
提出	1G / 1L	$(k-1)n$	$O(k(n+m))$
	2G / 2L	$2kn$	$O(k(n+m))$

4.5 分块编码（X, Xa）

单变量和双变量编码会针对每个颜色值生成距离子句，而块编码采用不同的方法：它们将颜色范围划分为固定宽度的块，并使用辅助值域变量 紧凑地表示每个块内的颜色赋值。这减少了距离约束的子句数，尤其是在边权重较大时。

当边权重较大时，基于赋值的编码会产生大量子句（每个边-颜色对有 $O(d_{u,\ v})$ 个子句）。块编码通过将距离约束求和分解为多个块来解决这一问题，从而降低对 $d_{u,\ v}$ 的大小依赖。我们借鉴 Faber 等人（2024）的块编码，并根据辅助变量的处理方式提出了两种变体。

4.5.1 变量定义与阶梯式块结构

跨度 $[1,k]$ 被划分为 m 个块 B_1，B_2，……，B_m。该框架支持两种块宽度策略：

- 固定宽度：所有块的宽度都相同 w（默认值为 $w=8$），这样可以高效地在一个块或两个相邻块内表示大多数距离约束。
- 可变宽度：对于每个顶点 $u \in V$，块宽度由与其 u 相连的边权重最大值决定：$w_u = \max_{\{u,v\}\in E} d_{u,\ v}$。

我们引入辅助变量 $R_{u,\ s,\ e}$，表示某个范围内赋值变量的总和：

$$R_{u,a,b} = \text{true} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=a}^{b} x_{u,j} = 1 \tag{13}$$

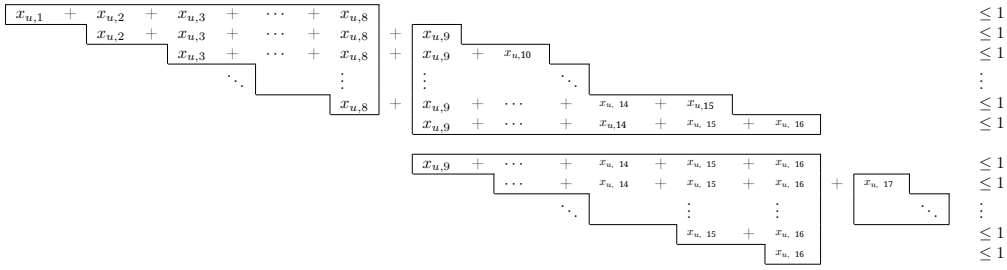
其中 a 和 b 分别是块或子块的起始索引和结束索引。

顶点 u 的恰有一种颜色约束施加于以下各块：

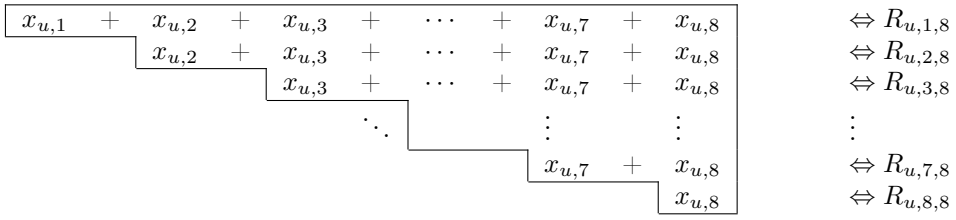
$$\sum_{r=1}^{m} R_{u,s(B_r),e(B_r)} = 1 \tag{14}$$

确保恰有一个块包含指定颜色。

图2展示了顶点 u 的阶梯式块结构，其块宽度为 $w = 8$、跨度为 $k = 8m$ （其中 m 为某个整数）。第一个块使用反向链，中间块使用双向链，最后一个块使用正向链。



范围变量示意图（反向链，包含 $w = 8$）：



范围变量示意图（最后一个块的正向链）：

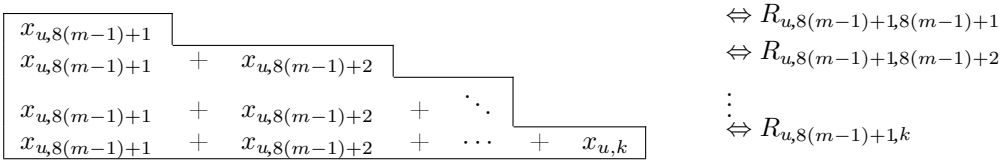


图2：顶点 u 的阶梯式块结构，块宽度为 $w = 8$。反向链（左上）构建从 $x_{u,1}$ 开始并朝块界延伸的范围。双向链（中间）支持块间范围的两个方向。正向链（右下）构建以块边界为终点的范围。

4.5.2 距离约束

距离约束 $|c(u) - c(v)| \geq d_{u,\,v}$ 等价于禁止任何一对满足 $|i - j| < d_{u,\,v}$ 的颜色 $(i,\ j)$。这可以表述为一个基数约束：

$$\sum_{i=c}^{c+d_{u,v}-1} x_{u,i} + \sum_{i=c}^{c+d_{u,v}-1} x_{v,i} \leq 1 \tag{15}$$

对于所有有效偏移量 $c \in [1, k - d_{u,v} + 1]$。术语 $\sum_{i=c}^{c+d_{u,\,v}-1} x_{u,i}$ 表示顶点 u 是否在冲突窗口 $[c, c + d_{u,v} - 1]$中被赋予一种颜色。

4.5.3 使用块变量表示范围和

块编码的关键洞见是，范围和 $\sum_{i=c}^{c+d_{u,v}-1} x_{u,i}$ 可以用辅助 R 变量表示，从而无需枚举所有单独的赋值变量。令 B 表示包含位置 c 的块，其起始位置和结束位置分别为 $s(B)$ 和 $e(B)$。

情形 *1*：范围与块边界对齐。如果 $c = s(B)$ 且 $c + d_{u,v} - 1 = e(B)$，则：

$$\sum_{i=c}^{c+d_{u,v}-1} x_{u,i} = R_{u,s(B),e(B)} \tag{16}$$

情形 *2*：范围跨越两个相邻块。如果范围 $[c, c + d_{u,v} - 1]$ 越过块边界进入相邻块 B'，则：

$$\sum_{i=c}^{c+d_{u,v}-1} x_{u,i} = R_{u,c,e(B)} + R_{u,s(B'),c+d_{u,v}-1} \tag{17}$$

情形 *3*：范围严格包含在一个块内。这是促使引入减法操作的关键情形。当范围 $[c, c + d_{u,v} - 1]$ 严格位于一个块内（即 $s(B) < c$ 且 $e(B) > c + d_{u,v} - 1$）时，需要进行减法：

- 对于后向链式块（第一个块）：

$$\sum_{i=c}^{c+d_{u,v}-1} x_{u,i} = R_{u,c,e(B)} - R_{u,c+d_{u,v},e(B)} \tag{18}$$

- 对于前向链式块（最后一个块）：

$$\sum_{i=c}^{c+d_{u,v}-1} x_{u,i} = R_{u,s(B),c+d_{u,v}-1} - R_{u,s(B),c-1} \tag{19}$$

- 对于双向块（中间块），可以使用任一方向。

采用减法操作的动机。减法公式至关重要，因为它允许对所有顶点使用统一的块宽度（例如，$w = \max_{\{u,v\}\in E} d_{u,v}$），而不受每个顶点所关联的具体边权重影响。如果不使用减法操作，就需要针对不同的边权重构造具有不同宽度的块，这会显著增加编码结构的复杂性和辅助变量的数量。采用减法操作后，单一的阶梯式块结构便足以处理不超过块宽度的所有边权重。

4.5.4 减法运算编码

我们提出了两种方法，用于对范围和表达式中出现的减法 $A - B$ 进行编码。

1. 不使用辅助变量的直接编码（*X*）。X 编码将减法操作直接代入成对约束中，而不引入辅助变量。对于约束 $(A - B) + C \leq 1$（其中 A、B、C是 R变量），其逻辑含义是："如果 A 为真且 B 为假，那么 C 必须为假。"这可转化为子句：

$$\neg A \vee B \vee \neg C \tag{20}$$

更一般地，对于公式（15）中的四种可能情况：

- 如果两项都很简单：$R_{u,a,b} + R_{v,c,d} \leq 1$ 变为 $\neg R_{u,a,b} \vee \neg R_{v,c,d}$。
- 如果其中一项涉及减法操作：$(R_{u,a,b} - R_{u,a',b'}) + R_{v,c,d} \leq 1$ 变为 $\neg R_{u,a,b} \vee R_{u,a',b'} \vee \neg R_{v,c,d}$。
- 如果两项都涉及减法操作：$(R_{u,a,b} - R_{u,a',b'}) + (R_{v,c,d} - R_{v,c',d'}) \leq 1$ 变为 $\neg R_{u,a,b} \vee R_{u,a',b'} \vee \neg R_{v,c,d} \vee R_{v,c',d'}$.

2. 使用辅助变量（*Xa*）进行编码。Xa 编码引入辅助变量 S 来表示减法项 $S \Leftrightarrow (R_1 \wedge \neg R_2)$，其编码如下：

$$R_1 \vee \neg R_2 \vee S \tag{21}$$
$$\neg R_1 \vee R_2 \vee S \tag{22}$$
$$\neg S \vee R_1 \tag{23}$$
$$\neg S \vee \neg R_2 \tag{24}$$

由于相同的减法项（例如 $R_{u,s,e} - R_{u,s',e'}$）经常出现在不同的距离约束中，Xa 编码会维护一个已生成减法变量的映射，并在遇到相同项时重复使用这些变量。这显著减少了辅助变量的数量。

4.6 对称性破缺

图着色问题具有颜色对称性：在有效解中置换颜色标签会产生另一个有效解（Gelder, 2008年；Méndez-Díaz 和 Zabala，2008年）。为打破这种对称性，我们采用一种基于反射的技术，将选定顶点限制在颜色范围的下半部分。关键观察是，对于任何跨度为 k 的有效着色 c，反射着色 $c'(v) = k + 1 - c(v)$ 具有相同的跨度且同样有效。这一反射性质源于距离约束 $|c(u) - c(v)| \geq d_{u,v}$在以下变换下保持不变：

$$|c'(u) - c'(v)| = |(k + 1 - c(u)) - (k + 1 - c(v))| = |c(u) - c(v)| \geq d_{u,v} \tag{25}$$

基于这一观察，我们将度最高的顶点（记为h）的颜色固定在可用颜色的下半部分。选择最高度顶点的理由是，它参与的约束最多，因此限制其颜色范围对缩减搜索空间的影响最大。该对称性破缺技术的有效性已在命题 B.1（附录 B）中得到证明。具体约束取决于编码类型：

- *1G:* $y_{h,\lfloor k/2 \rfloor+1}$ = false（强制 $c(h) \leq \lfloor k/2 \rfloor$）。
- *1L:* $y_{h,\lfloor k/2 \rfloor}$ = true（强制 $c(h) \leq \lfloor k/2 \rfloor$）。
- *2G / 2L / 块:* $\neg x_{h,j}$ 对于所有 $j > \lfloor k/2 \rfloor$。

4.7 求解模式

算法 2 BCP 的最优求解

要求： 图 G，上界 H，编码类型，增量模式标志
确保： 最优跨度 k^*

```
k ← H
为跨度 k编码 BCP 实例
结果 ←可满足性问题_求解()
如果 结果 = 不可满足 则
    返回 不可行
结束 if
当 结果 = 可满足性问题且 k > 1 执行
    k ← k − 1
    如果 增量模式 则
        添加假设，将跨度限制为 k                ▷ ¬y_{u,k+1} 或y_{u,k}
        结果 ← 可满足性问题_求解_使用_假设()
    else
        重置求解器
        为跨度 k 编码 BCP 实例
        结果 ← 可满足性问题_求解()
    结束 if
结束 while
k* ← k + 1                                      ▷ 最后一个可满足跨度
返回 k*
```

该框架支持两种求解模式，如算法 2 所示。在非增量模式下，对于每个候选跨度值 k，求解器都会完全重置。从上界 H 开始，求解器会对跨度 k 的问题进行编码并求解。如果问题可满足，则将跨度减小 1，并使用全新编码重复这一过程。

在增量模式下，求解器通过使用 SAT 假设，在各次迭代之间复用学习子句。对于大于编码，假设 $\neg y_{u,\ k}$ 对所有 $u \in V$ 均成立，可有效地将跨度限制为至多 $k-1$，而无需对整个公式重新编码。对于

小于编码，假设 $y_{u,\ k-1}$ 对所有 $u \in V$ 均成立，可实现相同效果。由于复杂的阶梯式块结构取决于跨度值，块编码不支持增量模式。附录A对所提出编码的正确性进行了形式化证明：SAT 公式可满足，当且仅当存在有效的 BCP 着色。

5 计算实验

本节介绍对所提出框架的实验评估。我们将所提出方法的36种配置与最先进的基于 SAT 的方法 POP-S-B 和 POPH-S-B（Faber 等人，2024年）在标准基准实例上的表现进行比较。我们重点比较这些基于 SAT 的方法，因为 Faber 等人（2024年）证明，它们优于 Dias 等人（2021年）提出的早期整数线性规划（ILP）和约束规划（CP）方法，因此成为当前精确BCP求解领域最先进的方法。

5.1 基准实例

我们在 BCP文献中常用的两个基准数据集上进行评估。所有基准实例均可从图着色及其推广档案获取。[1]

*GEOM*数据集。 来自 Michael Trick 的图着色基准（Trick，2002年）的33个实例，范围从 GEOM20 到 GEOM120，包含变体（a、b）。这些实例有 $|V| \in [20, 120]$ 个顶点，代表密度各异的几何随机图。

*MS-CAP*数据集。 18个源自蜂窝网络频率分配问题的实例，包括 Dias 等人（2021）提出的 c21 和 c55 系列。这些实例通过第2节所述的顶点到团变换，由带宽多重着色问题实例转换而来。

所提出的框架的完整实现已公开发布于 https: //github.com/bcp-ese/bcp-ese。

5.2 实验设置

所有实验均在一台配备英特尔酷睿 i5-12500H 处理器（16 个线程）和 16 GB 内存的计算服务器上进行，使用 CaDiCaL 1.9.5 SAT求解器（Biere 等人，2020），每个实例的时间限制为 3600 秒。

为了与 Faber 等人（2024）提出的最先进的基于 SAT 的方法 POPH-S-B 和 POP-S-B 进行比较，我们在自己的框架中实现了它们的编码，并使用相同的 SAT 求解器（CaDiCaL 1.9.5），以确保在相同的实验条件下进行公平比较。

[1] https://mat.gsia.cmu.edu/COLOR03/

5.3 结果概述

本小节全面分析了所有36种配置和51个基准实例（33个 GEOM + 18 MS-CAP）的实验结果。表4总结了顶级配置的性能，并将其与最先进的基于 SAT 的方法进行了比较。

表4：组合基准上的性能概览。

Rank	方法	宽度递增		Sym.	已求解。	Time (s)	Vars ($\times 10^3$)	Cls ($\times 10^4$)
1	Xa	固定	x	true	**51**	**2721.3**	897.2	633.3
2	2L	–	–	true	**51**	2817.1	255.4	153.9
3	1G	–	–	true	**51**	2834.0	**127.7**	**115.9**
4	POPH-S-B†	–	–	否	**51**	2904.6	255.4	153.9
5	2L	–	–	否	**51**	3041.1	255.4	153.9
6	2G	–	–	true	**51**	3082.5	255.4	153.9
7	1L	–	–	否	**51**	3177.0	**127.7**	**115.9**
8	2G	–	–	否	**51**	3194.3	255.4	153.9
9	X	vary	x	true	**51**	3202.1	470.4	461.4
10	Xa	固定	–	否	**51**	3205.5	623.5	426.4
11	POP-S-B†	–	–	否	**51**	3307.5	**127.7**	**115.9**

包含：增量模式；对称性：对称性破缺；变量总数：变量总数；子句总数：子句总数。

† Faber 等人（2024）的最先进的基于 SAT 的方法。

表4中的结果表明，所提出的框架具有以下几项发现。首先，在经过测试的配置中，采用增量求解和对称性破缺的块编码 Xa 实现了最佳的总体性能：与 POPH-S-B 相比，总求解时间减少了 6.3%（2721.3 秒对 2904.6 秒）；与 POP-S-B 相比，减少了 17.7%（2721.3 秒对 3307.5 秒）。其次，排名前三的配置在该基准测试集上均优于两种最先进的方法，表明不同编码方法均取得了稳定的改进。

编码规模与求解效率之间的关系呈现出一个显著的模式。尽管 1G 和 POP-S-B 生成的变量（127.7K）和子句（115.9K）数量最少，但二者的求解时间相差 16.7%（2834.0 秒对 3307.5 秒）。这一差距表明，仅凭编码的紧凑性并不能决定性能；这一现象在 SAT 编码研究中已有充分记录（Gelder，2008年；Ansótegui 和 Manyà，2004年）。子句的语义结构及其与求解器传播机制的交互似乎同样发挥着重要作用。

相反，Xa 编码产生的变量数量是最紧凑编码的七倍，子句数量是其 5.5 倍，却在我们的实验中实现了最快的求解时间。这一观察与以下原理一致：辅助变量可以在冲突分析期间加强单元传播（Sinz，2005年）；额外的变量

可能创造出帮助求解器更高效地推导蕴含的“捷径”。

对称性破缺似乎是一个重要因素。比较启用和未启用对称性破缺的 2L（排名分别为第 2 和第 5），对称性破缺带来了 7.4% 的加速。不过，其效果因编码而异，这与相关研究的发现一致：对称性破缺与编码结构之间存在复杂的相互作用（Hébrard 和 Katsirelos，2020）。

值得注意的是，基于顺序的编码（2L、1G）尽管形式更简单，求解时间仍在最佳配置的 4% 以内，为实践者在实现复杂度和计算效率之间提供了有利的权衡（Faber 等人，2024年）。

5.4 累积成功分析

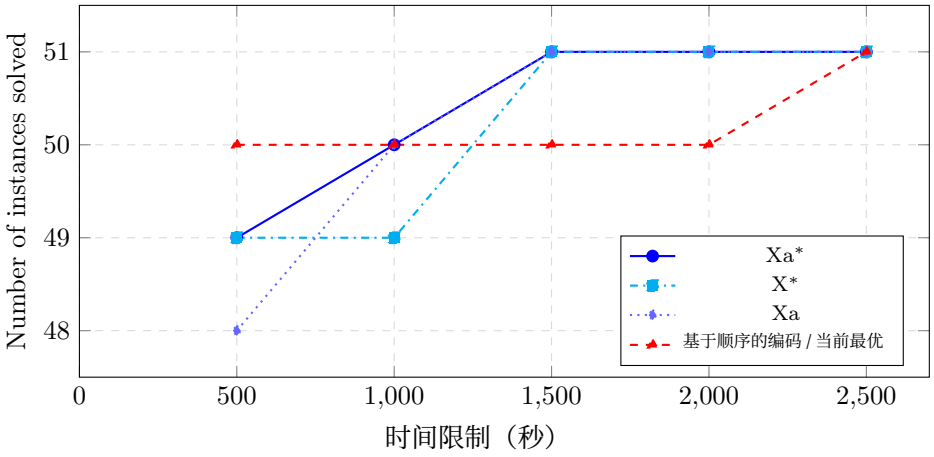


图 3：累积成功曲线，展示在不同时间限制下求解的实例数量。Xa* = Xa（固定， x，对称性）；X* = X（变化， x，对称性）；Xa = Xa（固定，不包含 Inc.，无对称性）。

图3和表5展示了累积成功分析，呈现了随时间限制变化而求解的实例数量。块编码与基于顺序的编码在求解轨迹上呈现出明显的两极分化。

块编码（Xa 和 X）在 1500 秒内求解了全部 51 个实例，而所有基于顺序的编码（1G、1L、2G、2L）和最先进的方法（POPH-S-B、POP-S-B）则需要 2500 秒。这 1000 秒的差距归因于一个具有挑战性的实例（GEOM120b）。这一结果表明，块编码在最难实例上可能有显著更好的表现。

在块编码中，采用增量求解和对称性破缺的 Xa（Xa，固定， x，对称性）表现最为均衡：在 500 秒时求解了 49 个实例，到 1500 秒时达到 51 个。未采用增量求解或对称性破缺的基础 Xa 配置（Xa，固定）起初进展较慢，在 500 秒时仅完成 48 个实例，但到 1000 秒时便迎头赶上，并在 1500 秒时完成所有实例。X

表5：在各时间阈值（秒）下求解的实例数量。

方法	宽度递增		Sym.	超时阈值（秒） 500	1000	1500	2000	2500–3600
Xa	固定	x	true	49	50	**51**	51	51
X	vary	x	true	49	49	**51**	51	51
Xa	固定	–	假	48	50	**51**	51	51
1G	–	–	true	50	50	50	50	51
1L	–	–	假	50	50	50	50	51
2G	–	–	假	50	50	50	50	51
2G	–	–	true	50	50	50	50	51
2L	–	–	假	50	50	50	50	51
2L	–	–	true	50	50	50	50	51
POPH-S-B†	–	–	false	50	50	50	50	51
POP-S-B†	–	–	false	50	50	50	50	51

† Faber 等人（2024）提出的最先进的基于 SAT 的方法。

采用可变宽度策略的编码在 1000 秒时进展较慢（49 个实例，而 Xa 配置为 50 个），但仍在 1500 秒时完成了所有实例。
相比之下，所有基于顺序的编码和最先进的方法都呈现出相同的累积行为：它们能快速求解 50 个实例（在 500 秒内），但之后一直停留在 50 个，直到 2500 秒。如此一致的表现表明，这些编码可能具有相似的搜索空间特征，使 GEOM120b 尤其具有挑战性。块编码能够提前 1000 秒求解该实例，这表明其约束结构可能更有效地剪枝边密度高且跨度要求大的实例。

5.5 困难实例上的性能

本小节分析了计算开销最大的十个实例上的性能。图4展示了每种配置在这十个困难实例上的求解时间，图5则汇总了 GEOM120b 的性能和累计求解时间。

图4表明，块编码的表现因实例而异：它们在 GEOM120b 和 GEOM110b 上占优，而基于顺序的编码（采用对称性破缺的 1G、2L）在 GEOM80a、GEOM90b 和 GEOM110a 等若干较小实例上求解更快。这表明，只有在需要大量计算时间的实例上，块编码的辅助变量带来的额外开销才能得到摊销。

图5中的结果揭示了最具挑战性的实例 GEOM120b 上的重要性能特征。所有块编码（Xa 和 X 变体）求解 GEOM120b 的速度都显著快于基于顺序的方法。值得注意的是，不使用增量求解或对称性破缺的基础 Xa 配置，在 GEOM120b 上取得了最快的求解时间

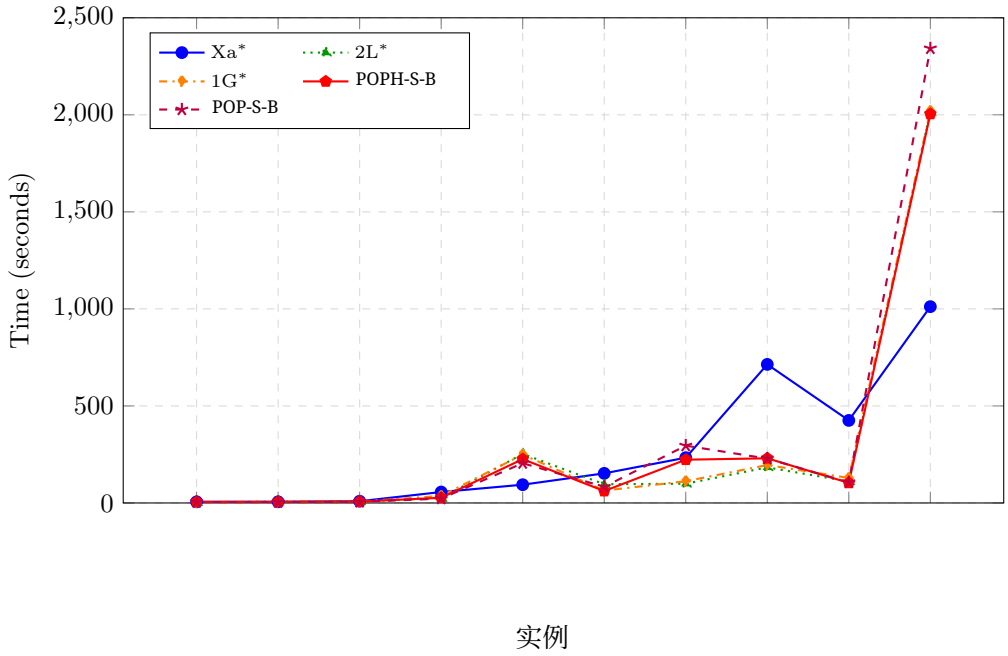


图4：十个最难实例上各配置的求解时间。Xa* = Xa（固定， x，对称性）；2L* = 2L（对称性）；1G* = 1G（对称性）。

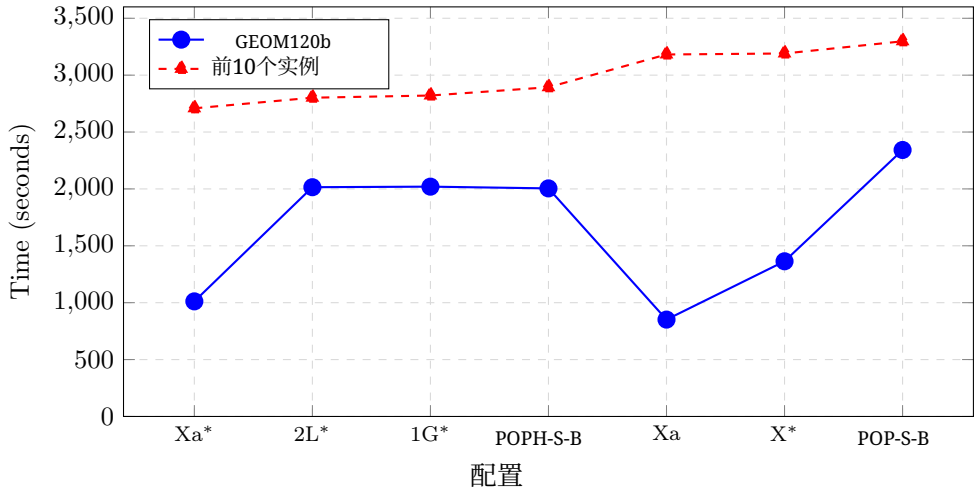


图5：GEOM120b 十个最难实例的求解时间和累计时间。Xa* =Xa（固定， x，对称性）；X* = X（变化， x，对称性）；Xa = Xa（固定，不包含，不含对称性）；2L* = 2L（对称性）；1G* = 1G（对称性）。

（851.4 秒），其次是完全优化的 Xa（1011.6 秒）和可变宽度的 X（1364.0 秒）。这三种块配置求解 GEOM120b 的速度约为当前最先进方法 POPH-S-B（2004.6 秒）和 POP-S-B（2342.3 秒）的两倍。
然而，十个最难实例的累计性能呈现出不同的情况。完全优化的 Xa（固定， x，对称性）取得了最佳累计时间（2708.5 秒），比 2L（对称性）快 3.3%，比 1G（对称性）快 4.0%，比 POPH-S-B 快 6.4%。尽管基础 Xa 配置在 GEOM120b 上表现更佳，但由于在其他实例上的表现较慢，其累计时间排名较低（3181.6 秒）。这表明，增量求解和对称性破缺或许能在整个实例集上带来稳定收益，即使它们会略微增加单个最难实例的求解时间。

带对称性破缺（2L、1G）的基于排序的编码，其累计时间与 POPH-S-B 不相上下，减少了 3.2%–3.8%。这些结果表明，所提出的编码策略可能在各种具有挑战性的实例上都有优势：块编码在最难实例上表现出色，而经过优化的配置则带来较好的整体性能。

5.6 特征有效性分析

本小节量化各项可配置特征的影响：增量求解、对称性破缺和块宽度策略。

5.6.1 增量求解的影响

图 6 比较了各编码类型在不同增量模式下的求解时间。为将增量求解的影响与最难实例（GEOM120b）带来的差异区分开来，本分析针对 50 个实例展开，所有配置均能在3600秒超时内求解这些实例。

增量求解的有效性因编码类型而异，这与先前的观察一致：增量 SAT 求解的收益取决于迭代之间保留了多少约束结构（Glorian 等人，2019）。对于块编码 Xa 和 X，在 x变量上采用增量模式可显著加速：Xa（固定， x）相比 Xa（固定）减少了 24.4% 的求解时间，而 X（可变， x）相比 X（可变）减少了 17.3%。当跨度从 k 减小到 $k-1$时，阶梯式块结构基本保持不变，因此学习子句能够在迭代之间有效传递。

对于双变量顺序编码 2L 和 2G，增量求解带来了适度的性能提升。 x-变量模式表现最佳：2L（x）比 2L 加速 5.2%，2G（x）比 2G 加速 4.1%。这表明，涉及赋值变量的学习子句比涉及排序变量的学习子句更容易迁移。

相比之下，单变量顺序编码 1L 和 1G 并未从增量 l
求解。当跨度减小时，所有排序约束都会相对于 th 重新定义 e

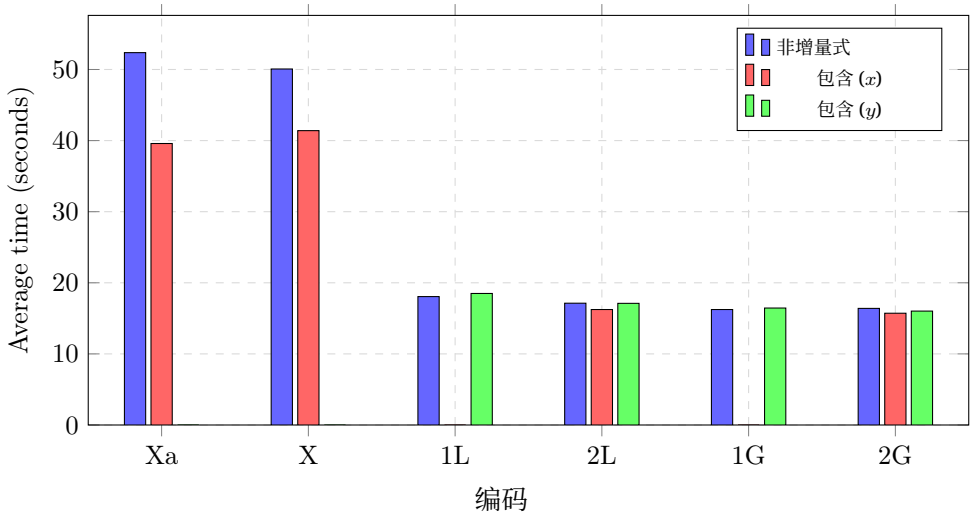


图 6：不同编码类型下增量求解模式的比较（50 个实例）。

新的上界，从而使大多数先前的学习子句失效。这是当问题结构发生显著变化时增量方法的一个已知局限（Glorian 等人，2019）。

5.6.2 对称性破缺的影响

图 7 比较了各编码类型在启用和未启用对称性破缺时的求解时间，其中包括最先进的方法 POPH-S-B 和 POP-S-B。该评估也针对所有配置均在超时前求解完成的 50 个实例进行。

值得注意的是，表4中表现最好的三种配置——Xa（固定， x，对称性）、2L（对称性）和 1G（对称性）——均启用了对称性破缺。这表明，当与恰当的编码选择相结合时，对称性破缺可能有助于提升整体性能。

然而，对称性破缺的有效性高度依赖于编码；在基于 SAT 的图着色中也观察到了这一现象（Hébrard 和 Katsirelos，2020；Méndez-Díaz 和 Zabala，2008）。一个显著的收益体现在 POP-S-B（对称性）上：与 POP-S-B 相比，对称性破缺带来了 24.5% 的加速。配置 1L（对称性）相比 1L 加速了 13.2%，而 X（变化，对称性）相比 X（变化）提升了 11.8%。

相比之下，对称性破缺会降低其他编码的性能。配置 2G（对称性）相比 2G 减速 11.9 %，而 POPH-S-B（对称性）相比 POPH-S-B 减速 11.4%。这一结果与 Hébrard 和 Katsirelos（2020）的发现一致：对称性破缺约束可能与 CDCL 求解器启发式产生难以预测的交互，有时会导致回溯增加。

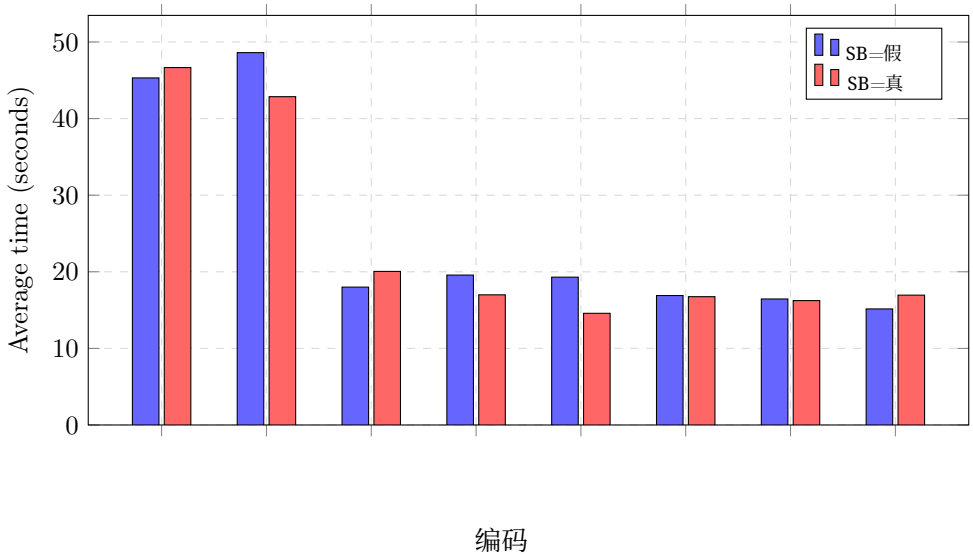


图 7：有无对称性破缺的配置比较（50个实例）。

结构相似的编码（POP-S-B 与 POPH-S-B，以及 Xa 与 X）表现迥异，这表明应根据编码类型选择性地应用对称性破缺（Méndez-Díaz 和 Zabala，2008年）。尽管如此，与 Xa 、 2L 和 1G 等适配良好的编码结合时，对称性破缺似乎是性能最佳配置中的一个重要组成部分。

5.6.3 块宽度策略的影响

对于块编码（X和Xa），我们分析块宽度策略的影响。图8比较了固定宽度策略与变化宽度策略下的配置。为了将块宽度的影响与最难实例（GEOM120b）所引入的变异性分离开来，本分析针对所有配置均能在3600秒超时内求解的50个实例进行。

结果表明，在 50 个标准实例中，块宽度策略对求解性能的影响微乎其微。对于 Xa 编码，与 Xa（固定）相比，Xa（变化）仅带来 0.3% 的加速（从 46.05 秒降至 45.91 秒）。对于 X 编码，与 X（变化）相比，X（固定）带来略微的 1.0% 加速（从 45.98 秒降至 45.50 秒）。

这些细微差异表明，与增量求解和对称性破缺等其他编码特性相比，块宽度的选择是次要因素。不同宽度策略的性能相近，这表明对于中等难度的实例，SAT求解器的子句学习机制能够有效适应固定和变化的块结构。

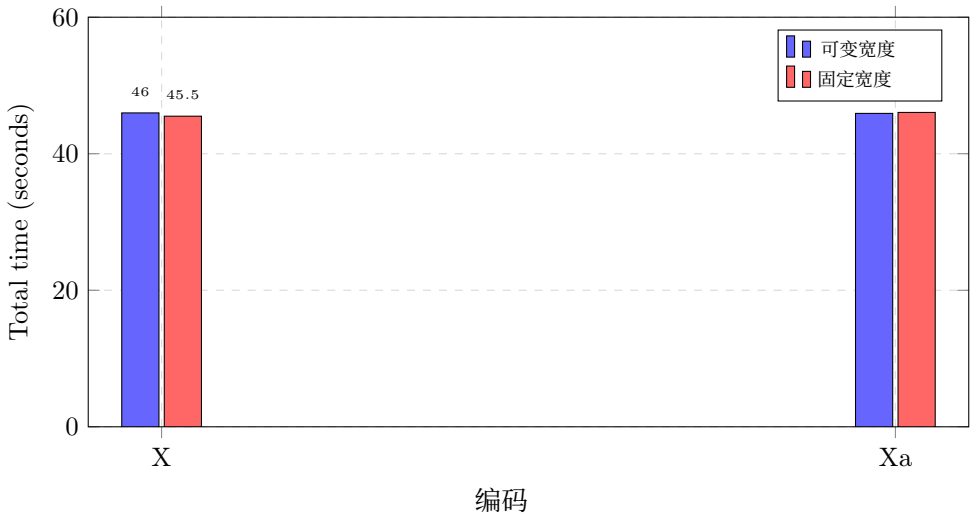


图8：块编码的块宽度策略比较（50 个实例）。

本分析中总体表现最佳的配置是 X（固定），耗时 45.50 秒；紧随其后的是 Xa（变化），耗时 45.91 秒；X（变化），耗时 45.98 秒；以及 Xa（固定），耗时 46.05 秒。不过，考虑到性能差异很小（最佳与最差之间不到 1.2%），在典型实例上，实际应用者可根据实现的便利性选择任一种宽度策略，而不会付出显著的性能代价。

5.7 讨论

实验结果揭示了关于 BCP 的 SAT 编码设计的若干观察。

编码特征之间的交互效应。 编码特征表现出显著的相互作用，而非彼此独立地发挥作用。增量求解能显著提升块编码的效果，但对单变量编码的影响甚微，甚至可能产生负面影响。这与 Glorian 等人（2019年）的研究结果一致；他们观察到，增量 SAT 求解的有效性在很大程度上取决于迭代之间保留了多少约束结构。同样，对称性破缺也表现出很强的编码依赖性：它能使某些编码受益，却会削弱另一些编码。这一现象似乎与 Hébrard 和 Katsirelos（2020）的观察一致，即对称性破缺约束可能与求解器启发式产生不可预测的交互作用。

编码规模与传播能力。在我们的实验中，Xa 编码生成的变量和子句显著多于基于顺序的编码，但求解时间却最快。这一观察符合可满足性问题编码设计中广为认可的原则：辅助变量可以增强单元传播（Sinz，2005年；Ansótegui 和 Manyà，2004年）。正如 Gelder（2008年）所指出的，紧凑编码未必能带来更快的求解；约束的语义结构及其

与 CDCL 传播机制的交互，可能比编码规模的影响更为重要。

依赖实例的性能。 块编码在困难实例上表现良好，但在较容易的实例上会产生更高的开销；对于后者，基于排序的编码以更简单的实现提供了具有竞争力的性能。这种编码复杂度与实例难度之间的权衡也曾在相关的图着色研究中被观察到（Hébrard 和 Katsirelos，2019年；Heule 等人，2022年），这表明，根据实例特征自适应地进行编码选择，可能是未来研究中值得探索的方向。

6 结论

本文对带宽着色问题的 SAT 编码进行了系统的设计研究。所提出的框架将编码方法划分为三类（单变量、双变量和块编码），并研究了包括增量求解、对称性破缺和块宽度策略在内的可配置特征的影响。

在 51 个基准实例上的实验评估表明，所提出的框架取得了具有竞争力的性能，并且在若干情况下达到了最先进的水平。在我们的实验中表现最佳的配置——采用增量求解和对称性破缺的块编码——在总求解时间方面以显著优势超越了此前发表的基于 SAT 的方法。在 GEOM120b（我们基准数据集中的最具挑战性实例）上，块编码相较于最先进的方法实现了约两倍的加速。值得注意的是，若干基于排序的编码也超越了最先进的方法，同时保持了更简单的实现。

实验中的一项重要观察是，编码特征之间存在显著的交互效应，而非彼此独立地发挥作用。增量求解能显著提升块编码的效果，但对单变量编码的影响则微乎其微，甚至可能产生负面影响。对称性破缺的效果因编码类型而异：它能改善某些编码，却会削弱另一些编码。相比之下，块宽度策略对性能的影响很小。这些发现凸显了系统性探索配置的价值，并表明实践者应仔细评估特征组合，而不应假定单项优化总能带来普遍收益。

这项工作启发了若干未来研究方向。首先，将所提出的框架扩展到带宽多重着色问题，可直接处理顶点需要多种颜色的实例。其次，根据实例特征开发自适应配置选择机制，有助于自动确定合适的编码。第三，探索并行 SAT 求解技术，或可处理规模更大的实例。最后，研究将 SAT 编码与约束规划求解器中的约束传播技术相结合的混合方法，或可进一步提升效果。

数据可用性。源代码和实验数据可在 https: //github.com/bcp-ese/bcp-ese 获取。

资助。 作者未获得用于本研究及本文发表的任何经费支持。

作者贡献。**Duc Trung Kim Nguyen**：概念构思、方法设计、软件、验证、调查、数据整理。**Tuyen Van Kieu**：验证、撰写——初稿、可视化、撰写——审阅与编辑、监督。**Khanh Van To**：概念构思、方法设计、撰写——审阅与编辑、监督、项目管理。所有作者均已阅读并批准最终稿。

利益冲突。作者声明，他们不存在可能影响本文所报告工作的已知竞争性经济利益或个人关系。

编码正确性的证明

本附录证明所提出的基于顺序的编码是正确的。

定理 A.1（基于顺序的编码的正确性）。 对于任意具有边权重 $d\colon E \to \mathbb{N}$ 且跨度上界为 k 的图 $G = (V, E)$，由 *1G*、*1L*、*2G* 或 *2L* 编码生成的可满足性问题公式 Φ_k 可满足，当且仅当存在一个跨度至多为 k 的有效 *BCP* 着色。

证明。 我们证明 1G 编码的定理；1L、2G 和 2L 的证明可通过对称论证得出。

(可靠性) 设 σ 是 Φ_k的一个满足赋值。定义着色 $c(u) = \min\{j \in [1,k] : y_{u,\,j} = \text{false}\}$，其中 $c(u) = k$ 当且仅当 $y_{u,\,k} = \text{true}$。

- 基约束 $y_{u,\,1}$ 确保 $c(u) \geq 1$。
- 排序约束 $y_{u,\,j} \to y_{u,\,j-1}$ 确保集合 $\{j : y_{u,\,j} = \text{true}\}$ 构成一个前缀 $[1, c(u) - 1]$。
- 距离约束确保，若 $c(u) = j$，则 $c(v) \notin [j - d_{u,v} + 1, j + d_{u,v} - 1]$，即 $|c(u) - c(v)| \geq d_{u,\,v}$。

因此， c 是一个有效的 BCP 着色，其跨度至多为 k。

（完备性）设 $c : V \to [1,k]$ 是一个有效的 BCP 着色。定义 $y_{u,\,j} =$ 当且仅当$c(u) \geq j$时为真。根据构造，所有约束均得到满足：基约束成立，因为$c(u) \geq 1$；排序约束由前缀结构保证；距离约束成立，因为 $|c(u) - c(v)| \geq d_{u,\,v}$ 意味着 $c(v)$ 位于禁区之外。□

B 对称性破缺有效性的证明

本附录证明第4节所述对称性破缺技术的有效性。

命题 B.1 (对称性破缺有效性)。 对于跨度为 k^* 的任意最优 *BCP* 解，都存在一个等价解，使得最高度顶点 h满足$c(h) \leq \lfloor k^*/2 \rfloor$。

证明。 给定任意跨度为 k^* 的有效着色 c，其中 $c(h) > \lfloor k^*/2 \rfloor$，对所有 $v \in V$，定义反射着色 $c'(v) = k^* + 1 - c(v)$。此变换保持：

- 可行性：对于任意边 $\{u, v\}$, $|c'(u) - c'(v)| = |c(u) - c(v)| \geq d_{u,\ v}$。
- 跨度：$\max_v c'(v) = k^* + 1 - \min_v c(v) = k^* + 1 - 1 = k^*$。
- 界：$c'(h) = k^* + 1 - c(h) < k^* + 1 - \lfloor k^*/2 \rfloor \leq \lfloor k^*/2 \rfloor + 1$。

因此，应用反射可确保 $c'(h) \leq \lfloor k^*/2 \rfloor$，且不影响跨度或可行性。

□

参考文献

Aardal, K., van Hoesel, S. P. M., Koster, A. M. C. A., Mannino, C., and Sassano, A. (2007). 频率分配问题的模型与求解技术。《运筹学年刊》, 153(1):79–129.

Ansótegui, C. and Manyà, F.(2004). 将含有限域变量的问题映射为含布尔变量的问题。载于*SAT 2004* - 第七届可满足性测试理论与应用国际会议，收录于计算机科学讲义第 3542 卷，第 1–15 页。

Biere, A., Fazekas, K., Fleury, M., and Heisinger, M. (2020). CaDiCaL、Kissat、Paracooba、Plingeling 和 Treengeling 参加 SAT 竞赛 2020。载于*SAT* 竞赛 *2020* 论文集——求解器与基准描述，第 51–53 页。

Brélaz, D. (1979年). 为图的顶点着色的新方法. *ACM* 通讯, 22(4):251–256. Chaitin, G. J., Auslander, M. A., Chandra, A. K., Cocke, J., Hopkins, M. E., and Mark- stein, P. W. (1981). 通过着色进行寄存器分配. 计算机语言, 6(1):47–57. Cozzens, M. B. and Roberts, F. S. (1982). 图的T着色与信道分配问题. *Congressus Numerantium*, 35(b):191–208. Dey, M. and Bagchi, A. (2013). 图着色的可满足性方法. *ACER 2013*, 3:135–147。

Dias, B., de Freitas, R., Maculan, N., and Michelon, P. (2021年). 带宽多重着色问题最优解的整数规划与约束规划方法. *RAIRO-Operations Research*, 55:S1949–S1967. Eisenblätter, A., Grötschel, M., and Koster, A. M. C. A. (2002年). 频率规划与着色的影响. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 22(1):51–88. Faber, D., Jabrayilov, A., and Mutzel, P. (2024年). 图着色问题偏序模型的 SAT 编码. 载于第*27*届可满足性测试理论与应用国际会议（*SAT 2024*），第305卷*LIPIcs*，第12:1–12:23页。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik。Gebremedhin, A. H., Manne, F., and Pothen, A. (2005年). 你的雅可比矩阵是什么颜色？用于计算导数的图着色. *SIAM Review*, 47(4):629–705. Gelder, A. V. (2008年). 从命题可满足性的角度重新审视图着色.*Discrete Applied Mathematics*, 156(2):230–243. Glorian, G., Lagniez, J.-M., Montmirail, V., and Szczepanski, N. (2019年). 一种基于 SAT 的增量方法，用于解决图着色问题. 载于约束规划原理与实践——第*25*届国际会议（*CP 2019*），第11802卷计算机科学讲义，第213–231页。施普林格。Hale, W. K. (1980). 频率分配：理论与应用. *IEEE* 会议录, 68(12):1497–1514. Hébrard, E. and Katsirelos, G. (2019年). 图着色的子句学习与新界. 载于第二十八届人工智能国际联合会议论文集（*IJCAI-19*），第6166–6170页。Hébrard, E. and Katsirelos, G. (2020). 图着色的约束与可满足性推理. 人工智能研究杂志, 69:33–65. Heule, M. J. H., Karahalios, A., and van Hoeve, W.-J. (2022年). 从团到着色，再从着色回到团 . 载于第 *28* 届约束规划原理与实践国际会议（ *CP 2022* ），第235卷*LIPIcs*，第26:1–26:10页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik。Husfeldt, T. (2015). 图着色算法. *arXiv* 预印本 *arXiv:1505.05825*. Jin, Y. and Hao, J.-K. (2015). 面向带宽着色的有效基于学习的混合搜索. *IEEE* 系统、人类与控制论汇刊：系统, 45(4):624–635. Koster, A. M. C. A. (1999). 频率分配：模型与算法. 博士论文，马斯特里赫特大学。Lai, X., Hao, J.-K., Lü, Z., and Glover, F. (2016). 一种用于带宽着色问题的基于学习的路径重连算法. 人工智能工程应用, 52:81–91。

Lai, X. 和 Lü, Z.（2013）。用于带宽着色问题的多起点迭代禁忌搜索。《计算机与运筹研究》，40(5):1401–1409。Lai, X., Lu, Z., Hao, J.-K., Glover, F. 和 Xu, L.（2014）。带宽着色问题的路径重连。*arXiv* 预印本 *arXiv:1409.0973*。Leighton, F. T.（1979年）。一种用于大型调度问题的图着色算法。《美国国家标准局研究杂志》，84(6):489–506。Malaguti, E. 和 Toth, P.（2010年）。顶点着色问题综述。《国际运筹研究汇刊》，17(1):1–34。Martí, R., Gortázar, F. 和 Duarte, A.（2010年）。带宽着色问题的启发式方法。《国际元启发式杂志》，1(1):11–29。Matić, D., Kratica, J. 和 Filipovic, V.（2017年）。用于求解带宽着色问题的变邻域搜索。《计算机科学与信息系统》，14(2):309– 327。Méndez-Díaz, I. 和 Zabala, P.（2008年）。一种用于图着色的割平面算法。*Discrete Applied Mathematics*，156(2):159–179。Roberts, F. S.（1991）。图的T着色：近期成果与未决问题。《离散数学》，93(2-3):229–245。Sinz, C.（2005年）。迈向布尔基数约束的最优合取范式编码。载于国际约束编程原理与实践会议，第827–831页。施普林格。Tamura, N., Taga, A., Kitagawa, S. 和 Banbara, M.（2009年）。将有限线性约束满足问题编译为可满足性问题。《约束》，14(2):254–272。Trick, M.（2002年）。DIMACS图着色实例。https://mat.tepper.cmu.edu/ COLOR04/。Truong, H. X., Kieu, T. V. 和 To, K. V.（2025年）。阶梯式至多一个约束的顺序计数器编码。载于第*17*届智能体与人工智能国际会议论文集（*ICAART 2025*），第2卷，第164–175页。SCITEPRESS。