arXiv:2602.08435v1 [eess.SY] 9 Feb 2026

非线性系统稳定性分析中描述函数定性图形表示的一种方法

Davide Tebaldi，IEEE 会员 和 Roberto Zanasi

摘要——描述函数法是非线性系统稳定性分析中对极限环进行定性分析的有用工具。该方法本质上是一种近似方法，因此适用于对所研究的系统进行快速定性分析。然而，精确绘制描述函数需要大量数学计算，这降低了该方法的吸引力，尤其是从控制教育的角度来看。本文旨在改进描述函数法，提出一种新方法，用于对包含不连续点的分段非线性进行描述函数定性绘图。与标准方法不同，本文提出的方法只需分析非线性的形状，并依据本文介绍的规则，即可直接手绘描述函数图。本文提出的案例研究表明，采用描述函数标准精确绘图法进行的极限环估计，与采用本文提出的描述函数定性绘图法所获得的定性结果相同。

一、引言

持续的振荡行为通常称为极限环，是各种不同性质系统所固有的特性。极限环确实存在于属于不同能量领域的工程系统中，包括机械系统 [1] ，如机器人系统；电气系统 [2] ，如电振荡器；以及液压系统 [3] ，如液压执行器。

研究极限环存在性及其特征的最有效工具之一是描述函数法 [4]。以图1所示系统为例，在满足某些假设的条件下，如果所谓的自持方程 $F(X)\,G(j\omega) = -1$ 存在解，则可能出现极限环，其中 $G(j\omega)$是线性系统 $G(s)$的频率响应函数，而 $F(X)$是所考虑非线性的描述函数。尽管描述函数法并不严格，但它仍有多种应用，包括光伏系统 [5], 中的扰动抑制、非线性自抗扰控制[6], ，以及多自由度非线性系统 [7]中结构非线性的辨识。

该项工作部分由摩德纳与雷焦艾米利亚大学通过 FARD（Finanziamento Ateneo Ricerca Dipartimentale）2023/2024 行动提供支持，并获得国家复苏与韧性计划（NRRP）第四任务第2组成部分投资1.5——NextGenerationEU 项目资助，招标公告编号为3277（日期：2021年12月30日），授予编号为0001052（日期：2022年6月23日）。

作者来自摩德纳与雷焦艾米利亚大学“恩佐·法拉利”工程系，地址：意大利摩德纳皮耶特罗·维瓦雷利街10号，邮编41125。电子邮箱： {davide.tebaldi, roberto.zanasi}@unimore.it。

本文已提交 IEEE，供其考虑是否发表。版权可能在未另行通知的情况下转让，届时此版本可能不再 доступ。

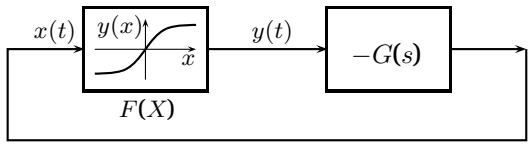

图1. 所考虑的非线性自治反馈系统 tem.

多年来，人们对描述函数法进行了许多不同的修改或补充。在 [8], 中提出了一种稳定性判据，为描述函数法所依据的准静态稳定性判据提供了有趣的论证。在 [9] 中，研究了描述函数法在开关电路极限环分析中的应用；在 [10] 中，提出了对该方法所得近似解的改进；在 [11] 中，则将该方法扩展到具有多个非线性的系统。得益于计算机辅助控制系统设计软件，人们开发了用于采用描述函数法进行极限环分析的交互式工具 [12]。

然而，对于控制工程师而言，使用图形工具，例如快速手绘描述函数，可能是一项重要能力。事实上，尽管描述函数是一种有效的方法，但其主要局限性在于，尤其从控制教育的角度来看，描述函数解析表达式的推导通常需要对所考虑的非线性进行详细分析，并通过繁重的数学计算得出 [13]。鉴于描述函数法基于近似分析 [14], ，因而并不严谨，计算的复杂性降低了该方法应用的便捷性和吸引力。

因此，本文旨在改进标准描述函数法，提出一种近似手绘描述函数本身的方法，无需进行复杂计算，从教育角度来看更具吸引力。所提出的方法适用于包含不连续点的分段非线性，其内容是一系列规则，只需观察非线性特性，即可快速手绘定性描述函数。此外，本文还将所提出的方法转化为一种算法，其计算比描述函数 $F(X)$ 的标准复杂解析表达式更为简单。所研究的案例表明，采用定性描述函数绘图进行分析和极限环估计，所得定性结果与采用标准描述函数绘图获得的结果相同

。

本文其余部分安排如下：第 II 节回顾两种标准非线性的描述函数，第 III 节给出一种用于绘制带有不连续点的分段非线性描述函数的算法。第 IV 节提出描述函数定性绘图的新方法，并在第 V 节将其应用于两个案例研究的极限环估计。结论见第 VI 节。

II. 描述函数

设 $x(t) = X\sin(\omega t)$ 为图1所示非线性函数 $y(x)$ 的正弦输入。相应的输出信号 $y(t)$ 是一个周期信号，可按如下形式展开为傅里叶级数：

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \varphi_n). \tag{1}$$

根据假设1，式 (1) 中省略了常数项 Y_0 。

假设1：考虑图1所示的非线性反馈结构，其中非线性函数 $y(x)$ 是纯代数的、关于原点对称，即 $y(-x) = -y(x)$，且与输入信号 $x(t)$ 的频率 ω 无关。

描述函数的使用基于以下近似：忽略傅里叶级数 (1) 中的所有高次谐波（即对于$n \geq 2$），而考虑基波 $y(t) \simeq Y_1(X)\sin(\omega t + \varphi_1(X))$。

非线性函数$y(x)$的描述函数 $F(X)$ 将正弦输入 $x(t) = X\sin(\omega t)$ 与输出信号$y(t)$ [4] 的基波 $Y_1(X)\sin(\omega t + \varphi_1(X))$ 联系起来，一般情况下，其定义如下：

$$F(X) = \frac{Y_1(X)}{X} e^{j\varphi_1(X)}, \tag{2}$$

where $Y_1(X) = \sqrt{a_1^2(X) + b_1^2(X)}$, $\varphi_1(X) = \arctan\frac{a_1(X)}{b_1(X)}$,

$$\begin{aligned} a_1(X) &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} y(X\sin\theta)\cos\theta\, d\theta, \\ b_1(X) &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} y(X\sin\theta)\sin\theta\, d\theta, \end{aligned} \tag{3}$$

以及 $\theta = \omega t$。由于假设 1 中的对称性假设，式 (3) 中的系数 $a_1(X)$ 为零，因此描述函数 $F(X)$ 可简化如下 [4]:

$$F(X) = \frac{b_1(X)}{X} = \frac{4}{\pi X}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(X\sin\theta)\sin\theta\, d\theta. \tag{4}$$

1) 死区：图 2(a) 所示死区 $y_d(x) = y_d(m, X_1, x)$ 的描述函数 $F_d(m, X_1, X)$ 如下 [13]:

$$F_d(X) = F_d(m, X_1, X) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad X < X_1, \\ m\,\Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) & \text{if} \quad X \geq X_1, \end{cases} \tag{5}$$

其中：

$$\Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) = 1 - \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\frac{X_1}{X} + \frac{X_1}{X}\sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X}\right)^2}\right). \tag{6}$$

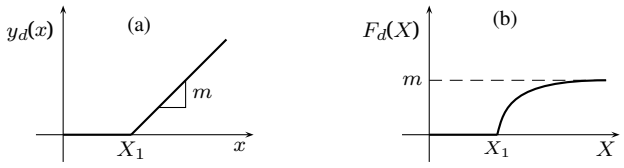

图 2. (a) 死区函数 $y_d(x)$; (b) 描述函数 $F_d(X)$.

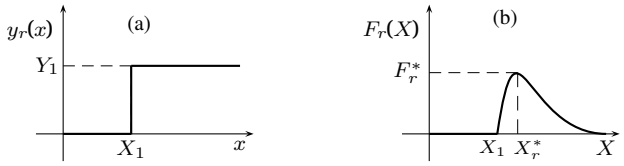

图 3. (a) 带阈值继电器 $y_r(x)$；(b) 描述函数 $F_r(X)$。

式（5）中函数 $F_d(X)$的形状如图 2(b)所示。函数 $F_d(X)$ 对 X 的导数如下：

$$\frac{F_d(X)}{dX} = \frac{4mX_1(X^2 - X_1^2)}{\pi X^3\sqrt{X^2 - X_1^2}},$$

由此可知，函数 $F_d(X)$ 的斜率在 $X = X_1$ 时为零，在 $X > X_1$时为正。这意味着函数 $F_d(X)$在 $X > X_1$ 时始终递增，并在 $X \to \infty$时达到最大值 m 。

2) 带阈值继电器：图 3(a)所示带阈值继电器 $y_r(x)$ 的描述函数 $F_r(Y_1, X_1, X)$ 为 [13]:

$$F_r(X) = F_r(Y_1, X_1, X) = \begin{cases} 0 & \text{if } X < X_1, \\ Y_1\Psi(X_1, X) & \text{if } X \geq X_1, \end{cases} \tag{7}$$

其中：

$$\Psi(X_1, X) = \tfrac{4}{\pi X}\sqrt{1 - \left(\tfrac{X_1}{X}\right)^2}. \tag{8}$$

函数 $F_r(X)$的形状如图 3(b)所示。函数 $F_r(X)$ 对 X 的导数为：

$$\frac{F_r(X)}{dX} = \frac{4Y_1(2X_1^2 - X^2)}{\pi X^3\sqrt{X^2 - X_1^2}},$$

由此可知，当 $X = X_1$ 时，函数 $F_r(X)$ 的斜率为无穷大。函数 $F_r(X)$ 的最大值出现在 $X = X_r^* = \sqrt{2}X_1$，其值为 $F_r^* = \frac{2Y_1}{\pi X_1}$。

III. D描述函数 $F(X)$ 分段非线性函数 $y(x)$

文献 [13] 已经确定了几类非线性关系的描述函数。本文重点研究一般分段非线性函数 $y(x)$ 的描述函数 $F(X)$。

性质 1：对于具有不连续点的分段非线性函数 $y(x)$，其描述函数 $F(X)$ 总可以表示为一定数量的描述函数 $F_d(X)$ 和 $F_r(X)$ 的线性组合；这两个描述函数分别对应图 2 和图 3 所示的两个非线性函数 $y_d(x)$ 和 $y_r(x)$。

作为一个例子，参考图 4(a) 的案例研究。在这种情况下，可以求得函数 $y(x)$

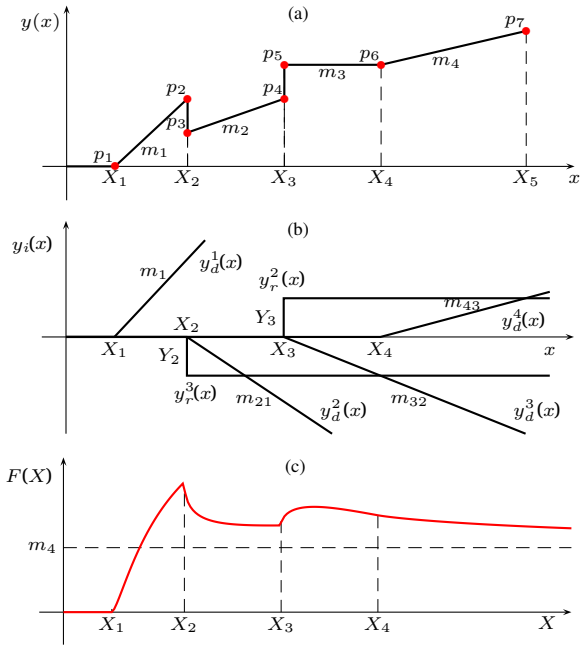

图4。（a）分段非线性函数 $y(x)$；（b）式（9）中 $y(x)$ 的分量；（c）使用算法1计算得到的式（10）中的描述函数 $F(X)$。

作为六个 $y_d(x)$型和 $y_r(x)$型函数之和，如图 4(b) 所示：

$$y(x)=y_d^1(m_1,X_1,x)+y_d^2(m_{21},X_2,x)+y_r^2(Y_2,X_2,x) \\ +y_d^3(m_{32},X_3,x)+y_r^3(Y_3,X_3,x)+y_d^4(m_{43},X_4,x)\,, \tag{9}$$

其中 $m_{21}=m_2-m_1$，$m_{32}=m_3-m_2=-m_2$ 和 $m_{43}=m_4-m_3=m_4$。由式（9）可知，相应的描述函数 $F(X)$（如图4(c)所示）是六个 $F_d(X)$ 和 $F_r(X)$ 类型描述函数之和：

$$F(X)=F_d(m_1,X_1,X)+F_d(m_{21},X_2,X)+F_r(Y_1,X_2,X) \\ +F_d(m_{32},X_3,X)+F_r(Y_3,X_3,X)+F_d(m_{43},X_4,X)\,. \tag{10}$$

对于任何具有不连续点的一般类型分段非线性函数 $y(x)$，都可以进行这种分解。

算法1给出了计算具有不连续点的分段非线性函数 $y(x)$的描述函数 $F(X)$ 的算法。设 $p_i=(x_i,y_i)$（$i\in\{1,2,\ldots,r\}$）表示函数 $y(x)$ 改变斜率或存在不连续点的位置。算法的输入为向量 $\mathbf{x}=[x_1,x_2,\ldots,x_r]$ 和 $\mathbf{y}=[y_1,y_2,\ldots,y_r]$，用于定义点 p_i 的位置；以及向量 $\mathbf{X}=(0:\delta_X:X_m)$，其中包含输入正弦信号所需的振幅值 X。算法输出一个向量 F(X)，其中包含对应输入向量 X 中各点的结果描述函数 $F(X)$ 的采样值。算法1的 Matlab 代码可在代码仓库 [15]中免费获取。

图4示例中对应于向量 $\mathbf{x}=[2,5,5,9,9,13,19]$ 和 $\mathbf{y}=[0,4,2,4,6,6,8]$ 的点 p_i 在图 4(a) 中以红色突出显示，而算法1给出的描述函数 $F(X)$ 则显示在图4(c)中。

算法1 描述函数 F(X)

输入：x、y、X

输出：F(X)

初始化 F(X) $=(0,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n$，其中 $n=\dim(\mathbf{X})$;
初始化 $i=2$;
当 $i<\dim(\mathbf{x})$ 时
  求集合 $\mathcal{S}=(k,k+1,\ldots,n)$，使得 $X_k>\mathbf{x}_i$;
  若 $x_i=x_{i+1}$，则
    按图 3(a) 计算不连续性 $Y_k=y_{i+1}-y_i$；
    按式 (8) 计算 $\Psi(x_i,\mathbf{X}(\mathcal{S}))$;
    按式 (7) 计算 F(X) $=$ F(X) $+Y_k\Psi(x_i,\mathbf{X}(\mathcal{S}))$;
    从 x 中移除 x_i；从 y 中移除 y_i；
  结束如果
  计算两条线段的两个斜率 m_i 和 m_{i+1}
  $[(x_{i-1},y_{i-1}),(x_i,y_i)]$ 和 $[(x_i,y_i),(x_{i+1},y_{i+1})]$;
  按(6)计算 $\Phi\left(\frac{\mathbf{X}(\mathcal{S})}{x_i}\right)$；
  按(5)计算F(X) $=$F(X)$+(m_{i+1}-m_i)\Phi\left(\frac{\mathbf{X}(\mathcal{S})}{x_i}\right)$；
  将索引 $i=i+1$加1;
当.....时结束循环
返回 $\mathbf{F}(\mathbf{X})$

IV. 描述函数 $F(X)$：定性图形表示

尽管描述函数法并不严格，但精确计算描述函数$F(X)$通常需要复杂的解析运算。这种数值复杂性极大地限制了该方法的应用，尤其是从控制教育的角度来看，因为复杂性与结果精度之间的折衷并不理想。相反，如果能够轻松地用手绘制描述函数图的近似图形，就能提高人们对该方法的兴趣，使其适用于极限环的初步快速定性分析。

因此，本节提出一种直观、快速的方法，用于手绘函数$F(X)$的定性图形表示。

性质2：函数 $F(X)$ 的定性图形行为 $\tilde{F}(X)$。设 $y(x)$ 为具有不连续点的非线性函数；设 X_j（$j\in\{1,2,\ldots,r\}$）为函数 $y(x)$存在不连续点或斜率从 m_{j-1} 变为 m_j时的 x 取值；向量 $\overline{\mathbf{X}}$和 $\overline{\mathbf{m}}$ 定义如下：$\overline{\mathbf{X}}=[0,X_1,\ldots,X_r]$，且 $\overline{\mathbf{m}}=[m_0,m_1,\ldots,m_r]$；设 $\mathbf{X}_d\in\mathbf{X}$ 是向量 X 的子集，其中包含函数 $y(x)$ 存在不连续点时的所有取值X_j；设 $\mathbf{Y}_d$ 为向量，包含在 $X=X_j\in\mathbf{X}_d$ 处出现的所有不连续幅值 Y_j。函数 $F(X)$ 的定性手绘图形行为 $\tilde{F}(X)$可根据以下规则确定：

1) 函数 $\tilde{F}(X)$ 对于 $X>0$ 始终连续。
2) 如果函数 $y(x)$ 对于 $x=0$ 不连续，那么函数 $F(X)$ 的初始值为无穷大：$\tilde{F}(X)|_{X=0}=\infty$。
3) 对于 $X=X_1$，函数 $\tilde{F}(X)$ 等于函数 $y(x)$ 在第一段线性段的斜率 m_0。
4) 对于 $X=X_r$，函数 $\tilde{F}(X)$ 等于函数 $y(x)$ 在最后一段线性段的斜率 m_r。
5) 设 $\tilde{F}(X)$表示函数 $F(X)$在范围 $X\in[X_j,X_{j+1}]$ 内的定性图形行为，其中

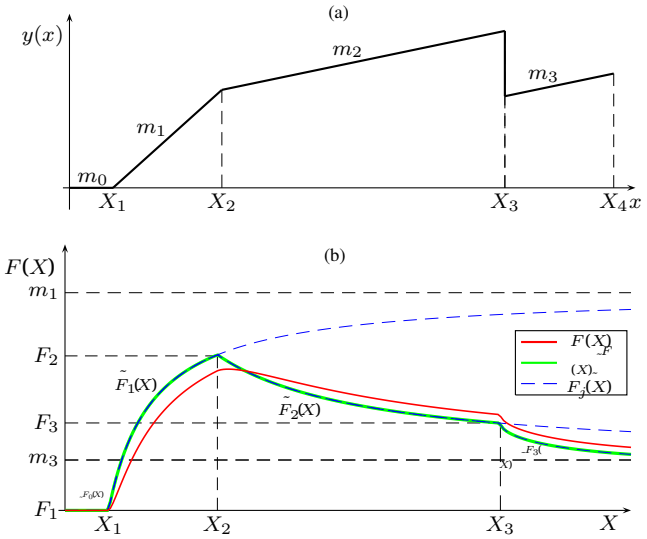

图 5. (a) 分段非线性函数 $y(x)$。(b) 函数 $y(x)$ 的描述函数$F(X)$、相应的定性图形表示 $\tilde{F}(X)$，以及针对 $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ 的类指数函数 $\tilde{F}_j(X)$。

函数 $y(x)$的斜率为 m_j。对于 $j \in \{0, 1, \ldots, r\}$，定性函数 $\tilde{F}_j(X)$的序列可使用算法 2 绘制。采用手绘方法时，请注意以下规则：a) $\tilde{\Phi}\left(\frac{X}{X_j}\right)$ 是一个类指数函数，其形状类似于图 2(b) 所示的函数 $F_d(X)$：在 $X = X_j$之前其值为零，在此处斜率为零，随后当 $X \to \infty$时趋近于 1；b) $\Psi(X, X_j)$是一个冲激函数，其形状类似于图 3(b) 所示的函数 $F_r(X)$：在 $X = X_j$之前其值为零，在此处斜率为无穷大；当$X = \sqrt{2}X_j$时达到最大值 $\frac{2}{\pi X_j}$，随后当 $X \to \infty$ 时趋近于零。对于$X \in [0, X_1]$，第一个函数 $F_0(X)$的值等于函数 $y(x)$的第一个斜率 m_0。对于 $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$，定性函数 $F_j(X)$从值 $F_{j-1}(X_j)$开始，随后当 $X \to \infty$时趋近于值 m_j。如果在 $X = X_j$处出现不连续性，则必须向函数 $F_j(X)$添加一个额外项 $Y_j\Psi(X, X_j)$。所得函数 $F_j(X)$仅应在范围 $X \in [X_j, X_{j+1}]$内考虑。随后将值 $F_j(X_{j+1})$用作下一个范围 $X \in [X_{j+1}, X_{j+2}]$内绘制定性函数 $F_{j+1}(X)$的起点。□

上述规则的定性证明：

1) 函数 $F(X)$ 始终连续，因为构成函数$F(X)$的描述函数 $F_d(X)$ 和 $F_r(X)$ 均连续，见命题 1、图 2 和图 3。

2) 若 $y(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续，则 $F(X)|_{X=0} = \infty$，因为当 $X \to 0$ 时，信号 $y(t)$ 的基波在式 (2) 中的振幅 $Y_1(X)$ 有限：$Y_1(X) = \frac{4Y_1}{\pi}$。

3) 对于 $X \le X_1$，函数 $y(x)$ 是线性的，输出信号 $y(t) = m_0 x(t)$ 与 $x(t)$ 成正比，而 $F(X) = m_0$，因为式 (2) 中的比值 $Y_1(X)/X$ 等于斜率 m_0。

4) 当 $X \to \infty$ 时，函数 $y(x)$ 最后一段的斜率 m_r 对输出信号 $y(t)$ 的形状变得越来越重要：当 $X \to \infty$ 时，$y(t) \simeq m_r x(t)$，因此，$F(X)|_{X\to\infty} = m_r$。

算法 2 定性函数 $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{X})$

输入：$\mathbf{X}, \overline{\mathbf{X}}, \mathbf{m}, \mathbf{X}_d, \overline{\mathbf{Y}}_d$

输出：$\tilde{\mathbf{F}}(X)$

找到集合 $\mathcal{S}_0 = (0, 1, \ldots, n)$，使得 $\mathbf{X}(\mathcal{S}_0) \le X_1$;

计算 $F_0(\mathbf{X}(\mathcal{S}_0)) = m_0$;

计算 $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{X}(\mathcal{S}_0)) = F_0(\mathbf{X}(\mathcal{S}_0))$;

对于 $j \leftarrow 1$ 到 $\dim(\overline{\mathbf{X}})$ 执行

求集合 $\mathcal{S} = (k, k+1, \ldots, k+n)$，使得 $X_j < \mathbf{X}(\mathcal{S}) \le X_{j+1}$;

计算 $\tilde{F}_{j0} = \tilde{F}_{j-1}(X_j)$;

计算 $\tilde{F}_j(\mathbf{X}(\mathcal{S})) = \tilde{F}_{j0} + (m_j - \tilde{F}_{j0})\tilde{\Phi}\left(\frac{\mathbf{X}(\mathcal{S})}{X_j}\right)$;

如果 $X_j \in \overline{\mathbf{X}}_d$，则

计算 $\tilde{F}_j(\mathbf{X}(\mathcal{S})) = F_j(\mathbf{X}(\mathcal{S})) + Y_j\Psi(\mathbf{X}(\mathcal{S}) X_j)$;

结束条件判断

计算 $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{X}(\mathcal{S})) = \tilde{F}_j(\mathbf{X}(\mathcal{S}))$;

结束循环

返回 $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{X})$

5) 图5(a)显示了由向量 $\mathbf{x} = [2, 7, 20, 20, 25]$ 和 $\mathbf{y} = [0, 4.5, 7.21, 4.21, 5.25]$定义的非线性函数 $y(x)$。相应的描述函数 $F(X)$（红色实线）和定性图形表示 $\tilde{F}(X)$（绿色实线）如图5(b)所示。绘制定性函数 $F(X)$ 的步骤如下：a) 对于 $X \le X_1$，定性函数为 $F_0(X) = 0$，因为函数 $y(x)$ 第一段的斜率为零。b) 在范围 $X \in [X_1, X_2]$内，函数 $F(X)$ 的正确定性描述由类指数函数 $F_1(X)$ 给出，该函数从点 $(X_1, 0)$ 开始，并在 $X \to \infty$ 时达到值 m_1，参见图5(b)中的蓝色虚线。c) 在范围 $X \in [X_2, X_3]$内，函数 $F(X)$ 可由函数 $F_2(X)$ 定性描述，从点 $(X_2, F_1(X_2))$ 开始，并在 $X \to \infty$ 时达到值 $m_2 = m_3$。d) 对于 $X > X_3$，函数 $F(X)$ 可由函数 $F_3(X)$ 定性描述，从点 $(X_3, F_2(X_3))$ 开始，并在 $X \to \infty$ 时达到值 $m_2 = m_3$。

注释1：应用描述函数法时，一个有趣且实用的特点是，可以在深入计算以确定持续振荡（即极限环）的振幅和频率之前，快速判断系统中是否存在稳定／不稳定的持续振荡。标准描述函数法无法进行这种初始快速分析，而本文提出的绘制定性描述函数的方法则可以实现这一点。事实上，尽管图 5 (b) 中的定性函数 $F(X)$ 是使用算法和 (2) 绘制的，但也可以通过直接执行第IV节中的步骤1）至5），有效地手工绘制定性相似的图形。此外，定性描述函数 $F(X)$ 无需执行式（5）、（8）和（10）中的复杂计算，就能反映实际描述函数 $F(X)$ 的行为。因此，如下一节所述，只需简单手绘定性描述函数 $F(X)$，便足以以足够的细节识别系统中的稳定／不稳定极限环。

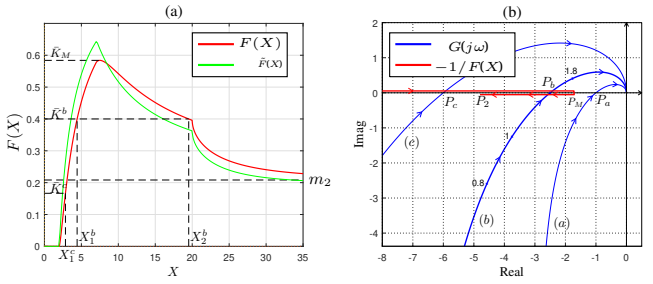

图6. 第V-A节的案例研究。(a) 图5(a)中非线性函数 $y(x)$ 的定性和实际描述函数 $F(X)$ 和 $\tilde{F}(X)$。(b) 奈奎斯特平面上方程 $F(X)\,G(j\omega) = -1$ 的图解解。

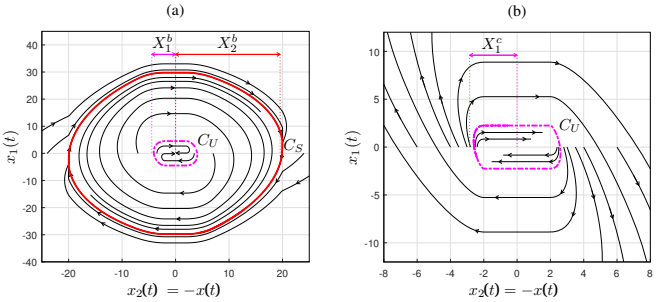

图7. 第V-A节的案例研究。(a) 图6(b)中情形（b）的轨迹；稳定极限环 C_S（红色闭合曲线）由点 $P_{b2} = (\bar{\omega}, X_2^b)$ 定义，不稳定极限环 C_U（洋红色虚线闭合曲线）由点 $P_{b1} = (\bar{\omega}, X_1^b)$ 定义。(b) 图6(b)中情形（c）的轨迹；不稳定极限环 C_U（洋红色虚线闭合曲线）由点 $P_c = (\bar{\omega}, X_1^c)$ 定义。

V. 描述函数：极限环估计

众所周知，可以使用以下复数自持振荡方程来估计图1所示非线性反馈系统中存在的极限环：$F(X)\,G(j\omega) = -1$。该方程通常通过在复平面 [4] 上绘制函数 $G(j\omega)$ 和 $-1/F(X)$ 进行图解求解。$G(j\omega)$ 与 $-1/F(X)$ 之间的交点 $P_i(\omega_i, X_i)$ 可以较好地估计极限环的频率 ω_i 和振幅 X_i。

根据假设1，本文考虑的所有非线性函数 $y(x)$ 均具有正实部描述函数 $F(X)$，因此所有交点 $P_i(\omega_i, X_i)$ 都位于负实半轴上。此外，众所周知，[4]：1) 如果随着 X 增大，点 $-1/F(X)$ 离开函数 $G(j\omega)$ 的奈奎斯特图，则交点 $P_i(\omega_i, X_i)$ 对应一个稳定极限环；反之则对应一个不稳定极限环；2) 极限环的频率和振幅 ω_i 和 X_i 分别对应于函数 $G(j\omega_i)$ 与负实轴相交时的频率，以及满足 $F(X_i) = K$ 的值 X_i，其中 K 是传递函数 $G(s)$ 的增益裕度。

由信号 $y(t)$ 在系统 $G(s)$ 的状态空间中产生的极限环，可按如下方式近似确定。设 $\mathcal{S} = (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D})$ 是传递函数 $G(s)$ 的状态空间实现。系统 $\mathcal{S}$ 的状态空间向量 $\mathbf{x}(t)$ 的拉普拉斯变换 $\mathbf{X}(s)$ 可表示如下：

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{H}(s)\,Y(s), \qquad \mathbf{H}(s) = (s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, \tag{11}$$

其中，$Y(s)$ 是输入 $y(t)$ 的拉普拉斯变换。若仅考虑基波 $y(t) = y_1(t) = Y_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$，则稳态时的稳态向量 $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ 为：

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\omega)\sin(\omega t + \boldsymbol{\varphi}(\omega)). \tag{12}$$

其中，$\mathrm{A}(\omega) = Y_1\,|\mathrm{H}(j\omega)|$，且 $\boldsymbol{\varphi}(\omega) = \arg(\mathrm{H}(j\omega)) + \varphi_1$。

性质3：式（12）中的稳态向量 $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ 属于二维子空间 $\mathcal{X}_\omega = \mathrm{span}\,(\tilde{\mathbf{x}}(0)\ \ \tilde{\mathbf{x}}(\frac{\pi}{2\omega}))$，其中 $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}(t)|_{t=0}$，且 $\tilde{\mathbf{x}}(\frac{\pi}{2\omega}) = \tilde{\mathbf{x}}(t)|_{t=\frac{\pi}{2\omega}}$。

证明。根据式（12），向量 $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ 可表示如下：

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \sin(\omega t)\underbrace{\mathbf{A}(\omega)\sin\boldsymbol{\varphi}(\omega)}_{\tilde{\mathbf{x}}(0)} + \cos(\omega t)\underbrace{\mathbf{A}(\omega)\cos\boldsymbol{\varphi}(\omega)}_{\tilde{\mathbf{x}}(\frac{\pi}{2\omega})}$$

也就是说，对于 $t > 0$，向量 $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ 可以表示为一个线性两个向量 $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ 和 $\tilde{\mathbf{x}}(\frac{\pi}{2\omega})$ 的组合。 □

A. 第一个案例研究

参见图1所示的反馈系统，其中 $G(s) = \frac{k(2-s)}{s(s+1)}$，而 $y(x)$ 是图5(a)所定义的非线性函数。函数 $G(s)$ 在 $k = 1$、$k = 2.5$和 $k = 6$ 时的奈奎斯特图如图6(b)所示，分别见标记（a）、（b）和（c）。函数 $G(s)$ 与负实半轴的交点记为 $P_a = -\frac{1}{K^a}$、$P_b = -\frac{1}{K^b}$和 $P_c = -\frac{1}{K^c}$，其特征为频率相同，均为 $\bar{\omega} = \sqrt{2}$，增益裕度分别为 $\bar{K}^a = 1$、$\bar{K}^b = 0.4$ 和 $\bar{K}^c = 0.166$。实际描述函数 $F(X)$ 和定性描述函数 $\tilde{F}(X)$ 如图6(a)所示。图6(b)中的点 P_2 和 P_M 定义如下：$P_2 = -\frac{1}{m_2}$和 $P_M = -\frac{1}{K_M}$。点 P_a、P_c和 P_c对应以下三种工作条件：a) $\bar{K}^a > \bar{K}_M$：函数 $-F^{-1}(X)$ 位于函数 $G(j\omega)$ 的奈奎斯特图之外，因此反馈系统的原点是全局渐近稳定的。b) $\bar{K}_M > \bar{K}^b > m_2$：函数 $-F^{-1}(X)$ 与 $G(j\omega)$ 相交于两点：$P_{b1} = (\bar{\omega}, X_1^b)$ 和 $P_{b2} = (\bar{\omega}, X_2^b)$。原点附近的状态空间轨迹如图7(a)所示，其中 $x(t) = -x_2(t)$ 是系统$G(s)$ 的输出。图7(a)中的仿真振幅 X_1^b 和 X_2^b 与图6(a)分析中的振幅 X_1^b 和 X_2^b 非常相似，此时 $F(X) = \bar{K}^b$。c) $\bar{K}^c < m_2$：函数 $-F^{-1}(X)$ 与 $G(j\omega)$ 相交于点 $P_c = (\bar{\omega}, X_1^c)$，该点对应图7(b)中的不稳定极限环 C_U：根据初始条件（$y_0, \dot{x}_0$），系统轨迹要么趋于原点，要么趋于无穷远。

请注意，图6(a)中的实际描述函数和定性描述函数 $\tilde{F}(X)$与 $F(X)$在定性上相似，因此，使用所提出的定性描述 $\tilde{F}(X)$，也可以得出与上述分析相同的结论，即反馈系统中稳定／不稳定极限环的存在性，参见注释1。此外，按照第IV节中提出的步骤1)至5)，可以绘制出与图6(a)中的定性描述函数 $F(X)$非常相似的手绘草图，这对控制教育很有用。

B. 第二个案例研究

考虑图1中的反馈系统，其中$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+3)}$，而 $y(x)$是图8(a)中定义的非线性函数

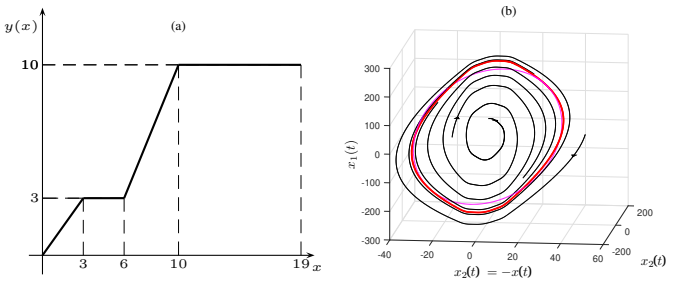

图8. V-B节的案例研究。(a) 非线性函数 $y(x)$。b) 图9(b)中情形（c）的状态空间轨迹。

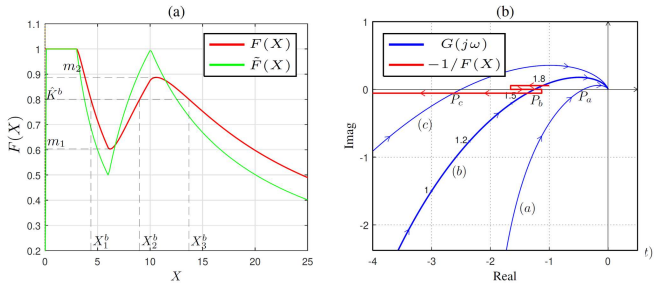

图9. V-B节的案例研究。(a) 图8(a)中非线性函数 $y(x)$ 的定性描述函数 $F(X)$ 和实际描述函数 $\bar{F}(X)$。(b) 奈奎斯特平面上方程 $F(X)\ G(j\omega) = -1$ 的图解。

。函数 $G(s)$在 $k = 5$、 $k = 15$ 和 $k = 30$ 时的奈奎斯特图如图9(b)所示，分别见标记(a)、(b)和(c)。图9(b)中的交点 $P_a = -\frac{1}{\bar{K}^a}$、 $P_b = -\frac{1}{\bar{K}^b}$ 和 $P_c = -\frac{1}{\bar{K}^c}$ 具有相同的频率$\bar{\omega} = \sqrt{3}$ 以及增益裕度 $\bar{K}^a = 2.4$、$\bar{K}^b = 0.8$ 和 $\bar{K}^c = 0.4$。实际描述函数和˜定性描述函数 $F(X)$与 $F(X)$如图9(a)所示。考虑以下三种情况：1）点 P_a与函数 $-1/F(X)$没有交点，对应于原点的全局渐近稳定性。2）交点 P_c 对应于存在一个稳定极限环，见图8(b)：三维空间中的所有轨迹（黑线）都趋向稳定极限环（红线），洋红色线表示极限环估计 $\tilde{\mathbf{x}}(t) \in \mathcal{X}_\omega$，其定义见命题3。3）点 P_b与函数 $-1/F(X)$相交三次，对应于存在三个极限环，见图10：两条红色实线表示两个稳定极限环。黑色和蓝色状态空间轨迹分别趋向外侧和内侧的稳定极限环。图10中的三条洋红色线表示命题3中所述的三个极限环估计 $\tilde{\mathbf{x}}_i(t) \in \mathcal{X}_\omega$ 。

即使在这种情况下，通过观察图9(a)中的实际描述函数和定性描述函数 $\tilde{F}(X)$ 和 $F(X)$，也可以得出结论：注释1仍然成立，因为V-A节末尾给出的相同结论在此处也适用。

VI. 结论

本文介绍了一种新方法，用于对涉及不连续点的分段非线性系统的描述函数进行定性绘图。与标准方法不同，该方法遵循所提出的规则，从所研究的非线性特性出发，能够快速手绘出定性描述函数

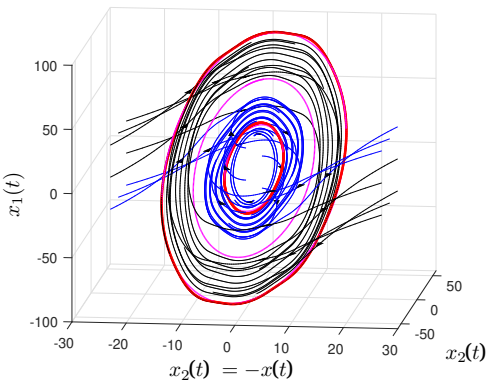

图10. V-B节的案例研究：图9(b)中情形(b)的轨迹。

。随后，对两个数值案例研究中的极限环进行了分析，结果表明，采用标准的精确绘图方法和所提出的描述函数定性手绘绘图方法，可以得到相同的定性结果。

参考文献

[1] A. Reza Hakimi和T. Binazadeh，“非线性系统中极限环的鲁棒生成：在两个机械系统上的应用”，《计算非线性动力学杂志》，第12卷，第4期，第041013页，2017年。[2] V. Kyurkchiev和N. Kyurkchiev，“关于扩展弛豫振荡器模型：极限环数量与仿真。i”，《应用分析通信》，第26卷，第19–42页，2022年。[3] M. Ruderman、S. Kaltenbacher和M. Horn，“液压缸回路中具有半稳定极限环的压力-流量动力学”，载于2021年IEEE国际机电一体化会议（ICM），2021年，第1–6页。[4] L. C. Goldfarb，“调节系统中的若干非线性现象”，《频率响应》，R. Oldenburger编，麦克米伦公司，纽约，N. Y，第239–259页，1956年，本文为原文的英译，原文刊于俄文期刊《自动化与遥测》，第8卷，第349-383页；1947年9–10月。[5] Q. Zhang、L. Zhou、M. Mao、B. Xie和C. Zheng，“考虑非线性效应的大规模并网光伏系统电能质量与稳定性分析”，《IET电力电子》，第11卷，第11期，第1739–1747页，2018年。[6] D. Wu和K. Chen，“基于描述函数法的非线性自抗扰控制频域分析”，《IEEE工业电子学汇刊》，第60卷，第9期，第3906–3914页，2013年。[7] Z. Zhao、C. Li、K. Ahlin和H. Du，“利用描述函数进行非线性系统辨识——案例研究”，《振动工程会议论文集》，第8卷，第33–38页，2016年。[8] R. Miller、A. Michel和G. Krenz，“非线性反馈系统中极限环的稳定性：利用描述函数的分析”，《IEEE电路与系统汇刊》，第30卷，第9期，第684–696页，1983年。[9] S. Sanders，“周期切换电路中的极限环与描述函数法”，《IEEE电路与系统汇刊第一辑：基础理论与应用》，第40卷，第9期，第564–572页，1993年。[10] I. Boiko，“对通过描述函数法得到的周期解的改进”，载于2006年美国控制会议，2006年。[11] J. Taylor，“强非线性系统极限环分析的描述函数法”，1981年8月。[12] S. Dormido、C. Lamp´on、J. D´ıaz和R. Costa-Castell´o，“一类分段反馈控制系统的描述函数与基于事件的分析”，《IFAC在线论文》，第58卷，第7期，第364–369页，2024年，第四届IFAC比例-积分-微分控制进展会议PID 2024。[13] R. Sridhar，“推导某类非线性描述函数的一般方法”，《IRE自动控制汇刊》，第5卷，第2期，第135–141页，1960年。[14] S. Engelberg，“描述函数用于极限环预测的局限性”，《IEEE自动控制汇刊》，第47卷，第11期，第1887–1890页，2002年。[15] D. Tebaldi和R. Zanasi，“描述函数绘图”，2025年，获取地址：https://it.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/180308-describing-function-plotting。访问日期：2025年3月。