arXiv:2602.08441v1 [quant-ph] 9 Feb 2026

复合运算属于 #BQP

Matthias Christandl[1], Aram W. Harrow[2], Greta Panova[3], Pietro M. Posta[1], 和 Michael Walter[4,5,6]

[1]哥本哈根大学数学科学系，Universitetsparken 5，2100 哥本哈根，丹麦[2]麻省理工学院理论物理中心——莱因韦伯研究所，剑桥，马萨诸塞州 02139，美国[3]南加州大学数学系，洛杉矶，加利福尼亚州 90089，美国[4]慕尼黑路德维希-马克西米利安大学，Theresienstr. 37，80333 慕尼黑，德国[5]慕尼黑量子科学与技术中心（MCQST），Schellingstr. 4，80799 慕尼黑，德国[6]科特韦赫-德弗里斯数学研究所与 QuSoft，阿姆斯特丹大学，荷兰

摘要

一些表示论重数，例如 Kostka 系数和 Littlewood–Richardson 系数，具有组合解释，因此其计算属于复杂性类 #P。这个结论是否在更一般的情形下成立，被认为是数学和计算机科学中的一个重要开放问题，并与几何复杂性理论和量子信息有关。近期研究考察了特定重数的量子复杂性，例如克罗内克系数以及某些特殊情形下的复合系数。

本文证明，一大类表示论重数属于 #BQP。特别地，我们的结果意味着复合系数属于 #BQP，而此前这一结论只在特殊情形下已知。我们的结果还将所有关于先前研究的系数的量子复杂性已知结果纳为特例，从而统一、简化并拓展了先前工作。我们通过多次应用舒尔变换得到这一结果。近期工作改进了其对局部维数的依赖，这对我们的工作至关重要。我们还描述了一种证明表示论重数属于 #BQP 的通用方法，该方法既涵盖了我们的方法，也涵盖了先前工作的思路。除此之外，我们还证明，同样的重数自然也属于 GapP，并在某些参数固定时得到多项式时间经典算法。

1 引言

计算重数是表示论和代数组合学中的核心问题，与量子信息论和几何复杂性理论直接相关。在大多数情况下，目前还没有已知的闭式公式。一个自然且富有成效的问题是：这些重数是否对应于某些组合对象的计数？如果是，那么就能得到正的组合解释。Stanley 在其有影响力的论文 [54]中提出了为重要的表示论重数寻找此类解释的问题。值得关注的具体重数包括：*Littlewood-Richardson*（*LR*）系数，见 1934 [39], ，它表示一般线性群$\mathrm{GL}(n)$的一个不可约表示在另外两个表示的张量积中的重数；对称群的克罗内克系数，定义于 1938 [42], ，表示对称群的一个不可约表示 S_n 在另外两个表示的张量积中的重数；以及复合系数，由 Littlewood 首次在 1936 [37] 中提及，并在参考文献 [38], 中正式定义，它表示一个不可约$\mathrm{GL}(n)$表示在两个不可约GL表示复合中的重数（见第 1.3 节）。根据舒尔-外尔对偶，

克罗内克系数也可以用一般线性群来定义，而 LR 系数和复合系数也可以用对称群来定义。

重数自然地出现在数学、物理学和计算机科学的诸多领域与应用中，因此人们长期以来采用各种方法对其进行研究，涵盖表示论和不变量理论，以及几何学和代数组合学。特别是对于 plethsym 系数，早期的一些性质是通过几何方法得以理解的，尤其是其稳定性 [7]。组合研究最初怀着一种尚未实现的希望：找到一种解释，将其视为多胞体中整数点的计数（LR 系数已有这样的解释，见下文）；例如参见 Kahle 和 Michalek 的研究 [31]。许多群发展了基于杨表组合学的方法，例如参见文献 [22, 21, 43]。

总体目标是将其解释为某个易于描述但规模呈指数级增长的集合的元素计数。然而，组合公式目前只在非常特殊的情形下已知，已知情形见文献 [23, 44, 47]。

1.1 计算重数的复杂性

尽管“正的组合解释”这一概念并未预先得到形式化定义，但现代解释将其形式化为“证明该计算问题属于复杂性类 #P，且判定其正性属于 NP”，参见文献 [45, 49]。事实上，复杂性类 #P 刻画的是对某类对象（见证）进行计数的问题；这类对象可能很多，但能够在多项式时间内高效识别。这一视角揭示了数学与计算机科学之间出人意料的联系，并为这两个领域带来了新的见解。LR 系数属于 #P，因为它们可以解释为某些杨表和多胞体中的整数点；而根据 Knutson-Tao 对饱和猜想的证明，甚至可以在 P 中判定它们是否为正 [41, 13] [34]。相比之下，克罗内克系数和复合系数相关的问题仍悬而未决 [50]。我们知道，计算这两类系数是 #P 难的，而判定它们是否为正则是 NP-困难的，参见文献 [27, 24]。然而，目前尚不清楚它们是否属于 #P，也就是说，它们是否存在正的组合解释；同样也不清楚判定它们是否为正是否属于 NP。 [1]

由于表示论重数是定义在高维空间中的线性代数量，因此从量子计算的角度研究其复杂性是很自然的。特别是，它们被定义为某个不可约表示的重数空间的维数，这让人希望能够根据这样的直觉，将它们置于量子复杂性类 #BQP中；后者是 #P的量子对应物，因为这些重数可能计算了某个更大向量空间中易于识别的子空间的维数。事实上，文献 [6] 证明了，判定克罗内克系数的正性属于 QMA，即 NP的量子对应物；同时，计算这些系数的某个特定倍数属于 #BQP。不久之后，文献 [29] 证明了，计算克罗内克系数以及某些 特殊的复合系数（见下文）属于#BQP。另见文献 [17]。在某些参数范围内，文献 [36], 提出了用于计算这些重数的高效量子算法；然而，其中许多情形后来也被证明可以通过经典算法在多项式时间内计算 [51], 另见文献 [16]。因此，即使在特殊情形下，表示论重数的量子复杂性和经典复杂性也颇为微妙。本文从一般角度考察这一问题，其动机源于刻画复合系数复杂性的这一重要未决问题。

1.2 Re代数复杂性理论与量子信息理论中的相关性 y

在代数复杂性理论中，几何复杂性理论（GCT）是一项通过利用通用多项式（例如符号矩阵的永久式和行列式）的对称性来寻求建立下界的纲领，例如将 VNP 与 VP 区分开来。

[1] 然而，已知对于一大类重数，正性问题的一个自然的渐近版本属于 NP ∩coNP [10]。

通过代数几何和表示论的一种方法，是借助所谓的重数障碍。具体而言，将一般线性群对某个VNP完全多项式（通常是永久式）的轨道闭包的坐标环分解为不可约分量，并将这些分量的重数与对应于 VP 通用多项式（通常是行列式）的重数进行比较。复合系数（以及克罗内克系数）在此类计算中发挥着自然而重要的作用，例如可作为这些重数的上界，甚至构成其显式公式的一部分，参见文献 [9, 12, 14, 15, 23, 28]。GCT 纲领也可用于其他情形，例如为矩阵乘法问题的复杂性寻找下界 [12], ，而表示论重数再次被证明至关重要。

在量子物理学中，表示论重数无处不在，因为量子系统的状态由高维复向量空间中的（单位）向量描述，而对称群会（酉）作用于这些向量。在某些情形下（例如高能物理），所关注的群和表示是固定的；而在量子信息与计算中，人们自然会考虑一系列群和表示。一个重要的研究场景是单体量子边缘问题。事实上，单体边缘能否与一个整体纯态相容，取决于克罗内克系数 [18, 19, 32], ；而复合系数则出现在该问题的费米子版本中 [1], ，这一问题在量子化学中称为单体 N-可表性问题 [20], ，至少自20世纪70年代初以来便一直受到研究 [5]。

1.3 贡献概述

现在我们介绍主要结果，首先讨论复合系数的量子复杂性。我们先简要定义复合（详见第 2 节）。设 $V \cong \mathbb{C}^n$ 为一个有限维复向量空间。回顾一下，一般线性群 $\mathrm{GL}(V)$ 的不可约多项式复表示由至多有 n 个部分的整数分拆标记。给定这样一个分拆 ν，我们将相应的不可约表示记为 $\rho_{\mathrm{GL}(V),\,\nu}\colon \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(\{\nu\}_{\mathrm{GL}(V)})$，其中 $\{\nu\}_{\mathrm{GL}(V)}$ 表示该表示空间，称为韦伊模。若 ν 有多于 n 个部分，我们将 $\rho_{\mathrm{GL}(V),\,\nu}$ 定义为零维表示。我们简记 $H := \mathrm{GL}(V)$，并考虑群 $G := \mathrm{GL}(\{\nu\}_H)$ 及其一个多项式表示 $\rho_{G,\,\mu}$，其中 μ仍是一个整数分拆。于是复合

$$\rho_{G,\mu} \circ \rho_{H,\nu}\colon H \to \mathrm{GL}(\{\mu\}_G) \tag{1.1}$$

是 $H = \mathrm{GL}(V)$的一个表示。我们将相应的表示空间记为 $\{\mu\}{\downarrow}_H^{\mathrm{GL}(\{\nu\}_H)}$，以表明我们将其视为 H 的一个模，方式是沿着不可约表示 $\rho_{H,\,\nu}\colon\ H \to G = \mathrm{GL}(\{\nu\}_H)$。一般而言，表示（1.1）是可约的，因此它可分解为不可约的 H-表示。因此：

$$\{\mu\}{\downarrow}_H^{\mathrm{GL}(\{\nu\}_H)} \cong \bigoplus_\lambda \underbrace{\{\lambda\}_H \oplus \cdots \oplus \{\lambda\}_H}_{a^\lambda_{\mu,\nu}} \cong \bigoplus_\lambda \{\lambda\}_H \otimes \mathbb{C}^{a^\lambda_{\mu,\nu}}. \tag{1.2}$$

复合系数 $a^\lambda_{\mu,\,\nu}$ 定义为不可约模 $\{\lambda\}_H$ 在该分解中的重数。这里假设 λ 的部分数不超过 $n = \dim(V)$，在这种情况下，该系数不依赖于 n 的选取，而只取决于三个分拆 λ，μ，ν。

问题 1.1（复合系数）。

输入： 三个分拆 λ、μ、ν，以正整数列表的形式编码，采用一进制表示。

任务： 计算复合系数 $a^\lambda_{\mu,\,\nu}$。

在文献中，通常约定以一进制编码分拆。因此，输入规模为 $\Theta(|\lambda| + |\mu| + |\nu|)$。下面给出两个具体的复合系数示例：

• 如果 $\mu = (m)$ 和 $\nu = (d)$ 都是只有一个部分的分拆，那么 $\{\mu\}\downarrow^{\text{一般线性群}(\{\nu\}_H)}_H$ = 对称幂^m(对称幂$^d(V)$) 可以解释为由变量构成的齐次多项式空间，这些变量是次数为 m的齐次多项式空间上的系数。该空间是几何复杂性理论中的核心对象，也是福克斯猜想的主要研究对象 [25]。

• 若 $\mu = (m)$ 与 $\nu = (1^d) = (1, \ldots\ldots, 1)$，则 $\{\mu\}\downarrow^{\text{一般线性群}(\{\nu\}_H)}_H$ = Sym^m(Alt$^d(V)$) 对应于 d 费米子的波函数系数上的多项式空间，每个费米子具有希尔伯特空间 V。这与量子化学中的 N-可表示性问题直接相关 [1, 33]。

一般情形是代数组合学中的一个重大问题，如参考文献 [54, 问题 9] 所述。先前工作 [29] 表明，前一个例属于 #BQP，但后一个例已超出早期方法的能力范围。本文证明一般复合问题属于 #BQP：

定理1.2. 问题 *1.1* 属于 #BQP。因此，判定复合系数是否为正的问题，$a^{\lambda}_{\mu\nu} > 0$，属于 QMA。

相应的量子算法在图1 中作了概述，其主要思想将在第 1.4 节中介绍。上述结果还意味着，对于限制系数 r^{μ}_{λ}，也有类似的结果。限制系数定义为：在不可约 S_n-表示（斯佩希特模）限制到子群时，所含不可约GL(n)-表示（韦伊模）的重数，其中子群为 $S_n \subset$GL(n) 的置换矩阵群。事实上，限制系数可以表示为复合运算的正项之和：利用对称函数（定义见第 2.1 节），可得 $r^{\mu}_{\lambda} = \langle s_{\mu},\ s_{\lambda}[1+h_1+h_2+\cdots]\rangle$。因此，计算限制系数属于#BQP，其非负性属于QMA，这直接推论自定理1.2。

我们通过将一个适用于一大类称为分支重数（或系数）的重数的一般定理加以特化，得到定理1.2。它们定义如下：考虑群 G 和 H，以及群同态 φ: $H \to G$。任意表示 π: $G \to$ GL(W) of G then restricts to a representation of H by composition with φ, i.e., $\pi \circ \varphi$: $H \to$ GL(W)。相应的分支重数定义为不可约 H-表示在限制 $\pi \circ \varphi$中的重数。这里我们考虑如下情形的分支重数：G 和 H 是一般线性群的直积，且群同态 φ 和 G-表示 π 由表示论数据简洁地指定。形式化定义见问题 2.1。这涵盖了先前工作中研究的所有系数，包括 Kostka 数、LR 系数和克罗内克系数，见第 3 节（当然，前两者甚至属于 #P $\subset$#BQP，而后者是否如此仍是一个开放问题）。已知当 G 和 H 固定时，计算分支重数可以在经典多项式时间内完成。这不仅适用于一般线性群的直积，也更广泛地适用于复约化（或紧致连通）李群的情形 [16]。与此相反，我们允许群（以及表示）成为输入的一部分。这要困难得多，因为其中涉及的表示维数通常会随输入规模呈指数增长。

定理 1.3。 计算一般线性群的直积的分支重数（问题 *2.1*）属于 #BQP。因此，判定其是否为正属于 QMA。

我们通过将定理 1.3证明为定理 5.1来证明这一点：我们给出一种完美可靠且完备的量子算法（如果门集使得电路能够被完美实现），这与文献 [6, 29]中的算法类似。特别是，这表明，如果存在一种通用门集，使得对任意QMA$_1$，都能精确实现作用于$(\mathbb{C}^d)^{\otimes N}$ 的量子 Schur 变换高维版本（对任意 N 和 d），那么正性问题属于第 1.4 节。我们在A 节中讨论量子算法背后的主要技术思路。此外，我们还介绍了一种通用方法，用于证明表示论重数属于#BQP

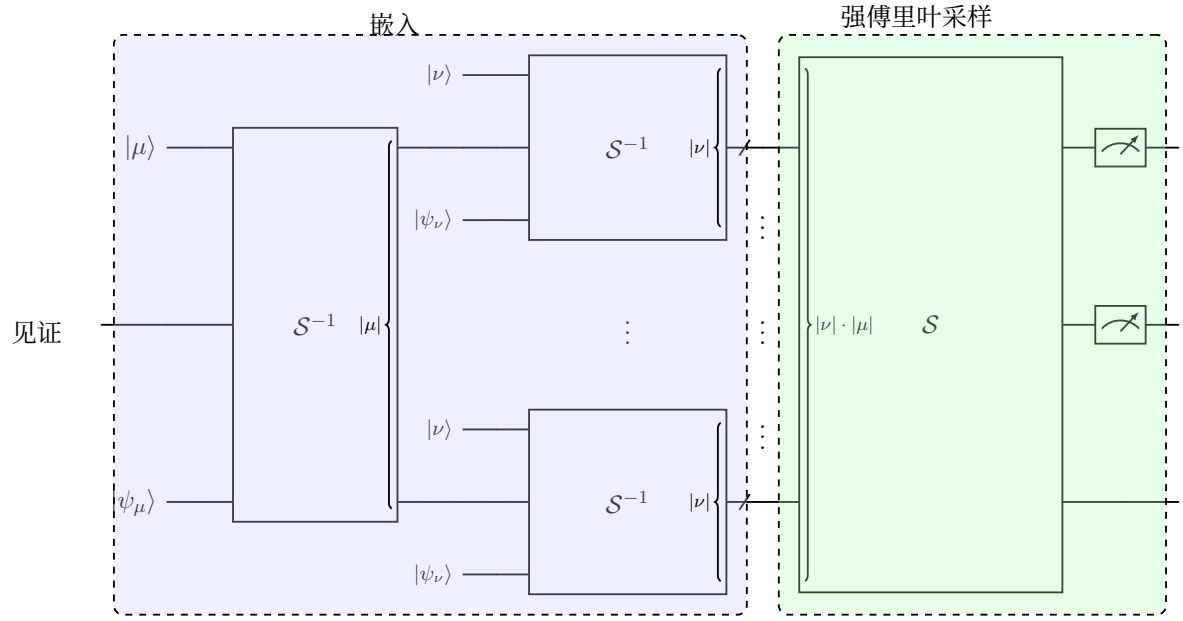

图1：复合系数的量子电路$a^{\lambda}_{\mu,\ \nu}$ (定理1.2)。见证以空间$\{\mu\}_{\mathrm{GL}(\{\nu\}_H)}$中的状态作为输入。第一个逆舒尔变换将其嵌入到 $|\mu|$ 个寄存器中，每个寄存器都与 $\{\nu\}_H$同构。第二层逆舒尔变换将每个寄存器嵌入到 $|\nu|$个维数为 n的寄存器中。经过最后的舒尔变换后，我们测量与分拆和韦伊模对应的寄存器。当且仅当前者测得结果 λ，且后者测得结果 p_0时，我们接受；其中 $|p_0\rangle \in \{\lambda\}_H$ 是韦伊模的任意固定基态。

该方法涵盖了本文以及先前工作 [6, 29]中的量子算法，并阐明了它们之间的关系。

如前所述，复合系数，事实上大多数表示论系数，都是#P-难的；而确定它们何时属于#P是一个重要的开放问题，参见文献 [45, 49]。根据定理1.2，若该问题的答案是否定的，则意味着复杂性类#P 与#BQP之间将出现突破性的分离。为了进一步了解它们的计算复杂性，我们在给出量子结果的同时，还证明分支重数也属于GapP，参见第 6 节，这扩展了文献中较早的结果。[11, 46, 48]。

定理1.4。 计算一般线性群的直积的分支重数（问题 *2.1*）属于GapP。

我们将 定理1.4 表述为 定理 6.1。我们还提出了一种用于计算复合系数的更专门的算法，见 定理 6.2。特别地，当 λ 的部分数以及 μ 的大小固定时，我们得到一个多项式时间算法，从而拓展了参考文献 [51]的结果。

1.4 方法

我们简要讨论本研究结果背后的主要思路，并以复合系数这一特殊情形为例加以说明（定理1.2）。

复合系数的量子算法 此情形下的算法概要见图1 ，其形式化描述见第5.1节。设 λ，μ，ν为分拆，且 $V = \mathbb{C}^n$。我们可以假设这些分拆的部分数以及 n 使得相应的韦伊模非零；否则，复合系数 $a^{\lambda}_{\mu,\ \nu} = 0$。我们的方法利用舒尔-外尔对偶，将 H-模 $\{\mu\}{\downarrow}^G_H$ 嵌入 $V^{\otimes|\nu|\cdot|\mu|}$ 中，其中 $G = \mathrm{GL}(\{\nu\}_H)$ 和 $H = \mathrm{GL}(V)$ 与前文相同。具体做法如下：首先将 G-模 $\{\mu\}_G$ 嵌入 $\{\nu\}_H$ 的一个张量幂中，

它是 $G = \mathrm{GL}(\{\nu\}_H)$ 的定义模。然后，我们将每个 $\{\nu\}_H$ 视为一个 H-模，并将其嵌入 V 的一个张量幂中； V 是 $H = \mathrm{GL}(V)$ 的定义模。由于$\{\mu\}\downarrow_H^G$ 不过是 G-模 $\{\mu\}_G$ 对 H 的限制，我们得到以下 H-等变嵌入链

$$\{\mu\}\downarrow_H^G \hookrightarrow (\{\nu\}_H)^{\otimes|\mu|} \hookrightarrow V^{\otimes|\nu|\cdot|\mu|}. \tag{1.3}$$

为了实现这些嵌入，我们采用逆量子 Schur 变换，因为这使我们能够把舒尔基从张量幂空间映射到标准基（蓝色框见图1）。在嵌入之后，我们对所有 $|\nu|\cdot|\mu|$ 寄存器实施最后一次（正向）量子 Schur 变换，并在舒尔基上进行测量——当且仅当得到分拆 λ（这意味着输入态处于 $\{\mu\}\downarrow_H^G$的 λ-等型分量中），且在韦伊模寄存器上得到一个任意但固定的基态 p_0 时才予以接受（绿色框见图1）。由于包含映射是 H-等变的，它们保持等型分量的维数，并在韦伊模上作用为单位元。因此，整个电路实现一次投影测量，而以概率一被接受的见证空间的维数（假设量子 Schur 变换被精确实现）恰好是 $\{\lambda\}_H$在$\{\mu\}\downarrow_H^G$中的重数。根据式(1.2)，该重数恰好等于复合系数$a_{\mu,\,\nu}^{\lambda}$。

推广到分支重数 我们关于一般线性群直积的分支问题（问题 2.1 和定理 1.3）的结果基于这一思想的一种自然推广。量子算法的描述见 第 5.2 节 ，分析见定理 5.1。一项概念上的贡献是确定计算问题的一种恰当定义。这一点颇为微妙，因为其中涉及的对象通常会呈指数级增长，因此必须以简洁的方式加以指定，才能得到一个非平凡的计算问题，并将复合系数及其他经典系数作为特例涵盖在内（见 问题 2.1 和 2.4）。在算法方面，我们采用了与前面类似的一系列嵌入，这次作用于定义模的张量幂的乘积，并通过一系列并行量子电路来实现。在我们的一般设定中，定义模 G 不再必然是 H-模的不可约模，因此我们需要实现中间测量，以完成后续嵌入。更多细节见 第 5.2 节。

与先前工作的比较 此前关于 Kronecker 系数和特殊复合系数的量子计算结果，采用了将这些系数表示为对称群 S_n 的表示论重数的形式，并依赖于 Beals 量子傅里叶变换来处理 S_n [4]。原则上，任何复合系数都可以计算为对称群圈积的表示的分支重数。然而，正如文献 [36], 所指出的，直接使用 Beals 量子傅里叶变换通常会导致指数级膨胀。因此，如何将对称群方法推广到一般复合问题（问题 1.1）并不显然。我们通过研究一般线性群的表示论克服了这一挑战。在这一意义上，我们可以将这种方法视为处理表示论重数的先前方法的“Schur-Weyl 对偶”。我们强调，在我们的设定中，局部维数（例如 $\{\nu\}_H$的维数）可能会 呈指数级增长。因此，我们需要一种只对局部维数呈多对数依赖的量子 Schur 变换版本。文献 [8], 最近实现了这一点；另请参阅文献 [26]。相比之下，对于 Kronecker 系数，相关的局部维数是多项式级的，因此原始的量子 Schur 变换已足够。我们将在 第 4.2 节中更详细地讨论 Schur 变换的量子算法。

统一处理重数的方法尽管这些方法有所不同，但存在一种统一的图景，既能涵盖这两种方法，也适用于更广泛的问题：对于某个群 H，不可约 H-模 V_λ 在 H-模 V 中的重数。考虑以下两步过程：

1. 将我们希望分解的 H-模 V 嵌入一个 H-模 V_{model} 中。2. 对 V_{model} 执行强傅里叶采样；如果测量结果包含不可约表示 V_λ 的标签以及一个固定的基态 $|p\rangle \in V_\lambda$，则接受。

显然，如果能够高效实现这两个步骤，那么重数问题属于 #BQP，相应的判定问题属于 QMA。值得注意的是，这涵盖了本文和先前工作的两种方法：

- 对于复合问题，$V = \{\mu\}\downarrow_H^G$ 和 $V_{\text{模型}} = (\mathbb{C}^n)^{\otimes|\nu|\cdot|\mu|}$。第一步（嵌入）通过两层逆舒尔变换实现（图1中的蓝色方框），而第二步（强傅里叶采样）通过（正向）舒尔变换及后续测量实现（图1中的绿色方框）。我们针对一般线性群直积的分支问题所提出的更一般算法，同样符合这一框架。

- 文献中的关键要素是 [6, 29] 广义相位估计电路 [26], ，它同样可以在这一框架下得到自然的解释。在这里，$V_{\text{模型}} = \mathbb{C}[H] \otimes V$，其中$\mathbb{C}[H]$ 是群环，而 H 作用于$\mathbb{C}[H]$ ，但不作用于 V；第一步（嵌入）通过 V的受控群作用（即酉算子 $|h\rangle|\psi\rangle \mapsto |h\rangle|h\cdot\psi\rangle$ 作用于$\mathbb{C}[H]\otimes V$）实现，第二步（强傅里叶采样）则通过该群的傅里叶变换实现。 [2] 只要能够高效实现受控群作用和该群的傅里叶变换，就可以采用这一过程，见推论 A.6。

我们还可以将这两个思路结合起来。例如，限制系数 r_λ^μ 可以通过一个嵌入步骤来捕获：首先使用逆舒尔变换（如第一条要点所述）来实现 $\{\lambda\}_{\mathrm{GL}(n)}$ 在 $V = (\mathbb{C}^n)^{\otimes|\lambda|}$中，随后使用 GPE（如第二条要点所述）；注意到，S_n 在 $\mathbb{C}^n$ 上的受控群作用可以高效实现。我们将在 A 节中进一步阐述这一一般性视角。

2 预备知识与问题描述

本节将介绍贯穿本手稿所使用的记号和定义，以及一般分支问题的两个定义。

2.1 一般记号

我们将使用组合表示论中的标准概念，并请读者参阅文献。 [52, 53, 30] 以了解相关背景。

分拆 正整数 n 的分拆 为 d 个部分，记作 $\lambda \vdash_d n$，是由 d个非负整数 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$组成的一个弱递减序列，满足 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_d = n$。我们将 $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_d$记作 λ的大小，并将 $\ell(\lambda)$ 记作非零部分的数量（注意，$\ell(\lambda) \le d$ ）。分拆通常用杨图直观地表示。需要注意的是，在我们对分拆和图的使用中，必须记录零部分（零行），以便与其作为最高权的作用保持一致。至多含有 d 个部分的 n 的分拆集合记作$\mathcal{P}_d(n) := \{\lambda \vdash_d n\}$。至多含有 d 个部分的所有分拆的集合为 $\mathcal{P}_d = \cup_{n>0}\mathcal{P}_d(n)$。令$\mathcal{P}(n)$表示所有 n 的分拆（忽略末尾的 0）组成的集合，并令 $\mathcal{P} = \cup_{n\ge 0}\mathcal{P}(n)$表示所有可能的分拆。

[2] 在文献 [6] 中，作者使用弱 傅里叶采样，因此证明了某个缩放 版本的克罗内克系数属于 #BQP（即将克罗内克系数乘以相应不可约表示的维数）。

不可约模 令 GL(d) 表示由 $d \times d$ 阶复矩阵组成的一般线性群。其不可约模是韦尔模，由支配权标记。在整篇手稿中，我们限于多项式表示；在这种情况下，支配权可以与分拆 $\lambda \in \mathcal{P}_d$对应。我们将由 λ 标记的不可约韦尔模记作$\{\lambda\}_d$。

对于一个元组 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^1, \ldots, \lambda^r) \in \mathcal{P}_{d_1} \times \cdots \times \mathcal{P}_{d_r}$，相应的不可约一般线性群 GL($d_1$) $\times \cdots \times$一般线性群 GL(d_r)-模记作 $\{\boldsymbol{\lambda}\}_{d_1,\ldots,d_r} = \{\lambda^1\}_{d_1} \otimes \cdots \otimes \{\lambda^r\}_{d_r}$，或在 G:=GL(d_1) $\times \cdots \times$ GL(d_r) 时简记为 $\{\boldsymbol{\lambda}\}_G$。

对称群 S_n 的不可约模是斯佩希特模，由$\lambda \in \mathcal{P}(n)$ 索引。我们将它们记作 $[\lambda]$。S_n 的特征标记作 χ^λ，并在分拆 $\alpha \in \mathcal{P}(n)$ 处取值；这些分拆对应于 S_n 的共轭类，记作 C_α，其中包含所有循环类型为 α 的排列。

对称函数与杨表 .....的特征标 $\{\lambda\}_d$ 是 舒尔多项式$s_\lambda(x_1, \ldots, x_d)$。作为 $d \to \infty$，它们成为舒尔函数，构成对称函数环 Λ的一组基。该环的其他重要基包括齐次 $\{h_\lambda\}$、初等$\{e_\lambda\}$、幂和 $\{p_\lambda\}$ 以及单项对称函数 $\{m_\lambda\}$，其中 $\lambda \in \mathcal{P}(n)$ 对应于次数 n分量。舒尔函数可以定义为以下对象的生成函数：半标准杨表（*SSYT*），即在 λ 的杨图中填入整数，使其沿行弱递增、沿列严格递增。关于对称函数的背景知识，参见文献 [53, 40] 。

韦伊模 $\{\lambda\}_d$ 的维数是形状为 λ 且条目取自 $\{1, \ldots, d\}$的半标准杨表的数量 d_λ，是关于 d 的次数为 $|\lambda|$的多项式，并且可以通过钩长内容公式高效地（在 log(d) 和 $|\lambda|$意义下）计算：

$$\dim(\{\lambda\}_d) = \prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{d + c_\lambda(i,j)}{h_\lambda(i,j)}, \tag{2.1}$$

其中，乘积遍历 λ的杨图中的所有方格（i, j），c(i, j) $= j - i$ 是该方格的内容，h(i, j) 是该方格的钩长。它的上界为 $d^{|\lambda|}$ 和 $|\lambda|^{d(d-1)/2}$。

斯佩希特模 $[\lambda]$ 的维数由标准杨表（*SYT*）的数量 f^λ 给出；这些标准杨表是形状为 λ 的半标准杨表，其中每个整数 1，.....，$|\lambda|$ 恰好出现一次，并且可以通过钩长公式高效计算：

$$f^\lambda = |\lambda|! \prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{1}{h_\lambda(i,j)}. \tag{2.2}$$

2.2 主要表示论重数

Wegive 表示论重数的等价定义，既可用不可约表示的重数来表述，也可用对称函数的分解来表述。

复合系数 这些复合系数 $a^\lambda_{\mu,\ \nu}$ 最初在参考文献 [38] 中被定义为不可约 一般线性群(n)-模 $\{\lambda\}_n$ 在以 一般线性群-模为指标的复合运算中出现的重数，这些模由 μ 和 ν索引，如 公式（1.2）所示，其中 $n \geq \max(\ell(\lambda)\ \ell(\nu))$ 且维数$\{\nu\}_n \geq \ell(\mu)$。

在实践中，理解表示的分解通常通过特征标来完成，因为对称函数环涵盖了所有相关信息，并能让我们从多项式展开的系数中提取重数。在对称函数的语言中，参见参考文献 [53, 40], 两个对称函数的复合运算 f 和 g，其中 g 具有非负

整数系数，因此可以写成单项式之和 $g = x^{\alpha^1} + x^{\alpha^2} + \cdots$，定义为 $f[g] = f(x^{\alpha^1},\ x^{\alpha^2},\ \cdots)$。舒尔函数的复合运算随后可分解为：

$$s_\mu[s_\nu] = \sum_\lambda a^\lambda_{\mu,\nu} s_\lambda.$$

就　　对称群特征而言，复合系数可以用以下公式计算：

$$a^\lambda_{\mu,\nu} = \sum_{\alpha\vdash m} \sum_{\gamma^1,\gamma^2,\ldots\vdash k} \frac{\chi^\mu(\alpha)}{z_\alpha} \frac{\chi^\nu(\gamma^1)}{z_{\gamma^1}} \frac{\chi^\nu(\gamma^2)}{z_{\gamma^2}} \cdots \chi^\lambda(\alpha_1\gamma^1, \alpha_2\gamma^2, \cdots),$$

其中求和遍及分拆 α，γ^1，γ^2，.....；最后一个特征标在这样得到的分拆处取值：将每个分拆 γ^i 的各部分乘以 α_i，再将这些整数拼接起来，构成 $n = mk$ 的一个分拆。这里 $z_\theta = \prod i^{m_i} m_i!$ 其中 $\theta = (1^{m_1},\ 2^{m_2},\ .....)$。

克罗内克系数克罗内克系数 $g_{\lambda,\ \mu,\ \nu}$（$|\lambda| = |\mu| = |\nu|$），定义为 GL($d_1$) ×GL($d_2$) 不可约模 $\{\nu\}_{d_1} \otimes \{\lambda\}_{d_2}$ 在 GL($d_1 \cdot d_2$) 模 $\{\mu\}_{d_1\cdot d_2}$ 中的重数。

$$\{\mu\}_{d_1\cdot d_2} \downarrow^{\mathrm{GL}(d_1\cdot d_2)}_{\mathrm{GL}(d_1)\times\mathrm{GL}(d_2)} = \bigoplus_{\nu,\lambda} \{\nu\}_{d_1} \otimes \{\lambda\}_{d_2} \otimes \mathbb{C}^{g_{\lambda,\mu,\nu}}.$$

其中，限制由包含关系 GL(d_1) × GL(d_2) → GL($d_1 \cdot d_2$) 给出：(g_1，g_2) ↦ $g_1 \otimes g_2$。它们也可以定义为对称群表示的张量积的分解系数：

$$[\mu] \otimes [\nu] = \bigoplus_\lambda [\lambda] \otimes \mathbb{C}^{g_{\lambda,\mu,\nu}}.$$

就　　对称函数而言，它们通过舒尔函数的内积定义：

$$s_\lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) = \sum_{\mu,\nu} g_{\lambda,\mu,\nu} s_\mu(\mathbf{x}) s_\nu(\mathbf{y}),$$

wh其中 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ 表示变量的两两乘积集合（x_1y_1，x_1y_2，.....，x_2y_1，.....　　）.

刘维尔-理查森系数 刘维尔-理查森系数 $c^\lambda_{\mu\nu}$ 是舒尔函数乘积的分解系数。它们定义为两个韦尔模的张量积分解中的重数：

$$\{\mu\}_d \otimes \{\nu\}_d \cong \bigoplus_\lambda \{\lambda\}_d \otimes \mathbb{C}^{c^\lambda_{\mu\nu}}.$$

等价地，就舒尔函数而言，它们由乘积法则定义：

$$s_\mu s_\nu = \sum_\lambda c^\lambda_{\mu\nu} s_\lambda.$$

Kostka 数*Kostka* 数 $K_{\lambda\mu}$ 定义为 GL(d) 模 $\{\lambda\}_d$ 中权为 μ 的权空间的维数。等价地，它们计数形状为 λ、内容为 μ 的半标准杨表的数量（即，等于 i 的条目数为 μ_i）。在对称函数环中，它们是 Schur 基、单项式基与齐次对称函数基之间的转移系数：

$$s_\lambda = \sum_\mu K_{\lambda\mu} m_\mu \qquad \text{and} \qquad h_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda\mu} s_\lambda.$$

2.3 分支问题描述

下面我们将介绍本手稿所研究的计算问题。这可以视为对上述主要表示论重数的推广。

设 $G = \mathrm{GL}(d_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(d_{r_G})$ 和 $H = \mathrm{GL}(n_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(n_{r_H})$ 是一般线性群的直积，其中 $r_G, r_H, d_1, \ldots, d_{r_G}, n_1, \ldots, n_{r_H}$ 为正整数。

给定群同态 $\varphi: H \to G$，任意 G 的表示都可以通过复合视为 H 的表示；此时，我们称相应的 G-模限制到 H。将不可约 G-模 $\{\boldsymbol{\mu}\}_G$ 限制到 H 时，记作 $\{\boldsymbol{\mu}\}{\downarrow}_H^G(\varphi)$，或记作 $\{\boldsymbol{\mu}\}{\downarrow}_H^G$；当依赖于 φ 的关系明确时，省略该记号。这样的模通常是可约的，可分解为不可约 H-模的直和：

$$\{\boldsymbol{\mu}\}{\downarrow}_H^G \cong \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda}} \{\boldsymbol{\lambda}\}_H \otimes \mathbb{C}^{m_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda}}}. \tag{2.3}$$

求和遍历所有与 H 的不可约表示相对应的分拆元组 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{n_1} \times \cdots \times \mathcal{P}_{n_{r_H}}$。非负整数 $m_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda}}(\varphi)$，或简记为 $m_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda}}$，称为 H 在 G 中的分支重数（相对于 φ）。

等价地，分支重数$m_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}}$ 可以定义为从不可约模 $\{\boldsymbol{\lambda}\}_H$ 到受限模 $\{\boldsymbol{\mu}\}{\downarrow}_H^G$的$H$-模同态空间（交织算子）的维数：

$$m_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda}}(\varphi) := \dim\left(\mathrm{Hom}_H(\{\boldsymbol{\lambda}\}_H, \{\boldsymbol{\mu}\}{\downarrow}_H^G)\right).$$

因此，我们可以定义 GL乘积的分支问题：

问题 2.1（GL乘积的分支问题）。

输入：

- 群 $H = \mathrm{GL}(n_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(n_{r_H})$ 和 $G = \mathrm{GL}(d_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(d_{r_G})$ [3] 的说明
- 群同态 φ: $H \to G$ 的说明
- H 和 G 的不可约表示 $\{\boldsymbol{\lambda}\}_H$ 和 $\{\boldsymbol{\mu}\}_G$ 的说明

任务：计算分支重数$m_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}}$，其定义为不可约模 $\{\boldsymbol{\lambda}\}_H$ 在沿群同态 $\{\boldsymbol{\mu}\}{\downarrow}_H^G$ 限制后所得的重数 φ: $H \to G$ (式（2.3）)。

为了严格定义这个计算问题，我们还需要说明问题 2.1输入的编码。我们将在下文详细讨论这一点。

2.4 输入的编码

如上所定义，分支重数取决于三种不同类型的输入：群 G 和 H的定义、相对不可约表示的标签，以及具体的映射 φ: $H \to G$。

群 G =一般线性群$(d_1) \times \cdots \times$一般线性群$(d_{r_G})$ 与 H =一般线性群$(n_1) \times \cdots \times$一般线性群$(n_{r_H})$ 的规定具有一种自然编码：我们只需提供表示这些秩的正整数列表：

$$r_G, r_H, d_1, \ldots, d_{r_G}, n_1, \ldots, n_{r_H},$$

[3]事实上，我们将看到，维数 d_1, ..., d_{r_G} 可以从群同态的说明中推知，因此这一步无需明确指定，我们可以假设这些信息并未提供给量子算法。

它们以二进制编码。

H 和 G 的不可约表示分别由 r_H元组和 r_G元组的分拆标记。因此，我们的输入包括表示 H 的元组 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^1, \ldots\ldots, \lambda^{r_H})$，以及表示 G的元组 $\boldsymbol{\mu} = (\mu^1, \ldots\ldots, \mu^{r_G})$，其中：

$$\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{n_1} \times \cdots \times \mathcal{P}_{n_{r_H}} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_{d_1} \times \cdots \times \mathcal{P}_{d_{r_G}}.$$

与涉及长度无界的分拆的计算问题的标准做法一样，这些标签采用一进制编码。也就是说，对于大小为 $|\alpha| = k$的分拆 α，输入规模取为 $\Theta(k)$。我们还需要保留分拆中的零部分，以与它们作为最高权时的作用保持一致。为此，可以在每个分拆后附加一个以二进制表示的自然数，用于标记行数。也就是说，对于标记 GL(6) 的一个不可约表示的分拆 $\alpha = (5, 4, 2)$，我们采用的编码为 $[(00000, 0000, 00), 6]$。

至于同态 $\varphi: H \to G$，问题就更加微妙了，主要是因为我们希望 问题 2.1 能够成为对标准表示论重数计算的恰当推广，尤其是对问题 1.1的恰当推广。

考虑复合运算的情形，其中 $H = \mathrm{GL}(n)$、$G = \mathrm{GL}(\{\nu\}_H)$ 是 H 的一个不可约表示，标记为 $\nu \in \mathcal{P}_n$；我们感兴趣的是标记为 $\lambda \in \mathcal{P}_n$ 和 $\mu \in \mathcal{P}_{d_\nu}$的表示，其中 d_ν = 维数$\{\nu\}_H$ 通常关于 $n + |\nu|$呈指数增长。在对应的 问题 2.1 实例中，输入由秩 n 和 d_ν、标签 λ 和μ 以及表示 $\varphi = \rho_\nu$ 的描述组成：$H \to G$。

无论我们为 φ 选择何种编码，为了恰当地推广复合问题，都必须能够从 φ中恢复标签 ν。此外，为了能够将我们的复杂性结果推广到复合运算系数问题（问题 1.1），我们需要φ 的编码长度至多为关于 $\log(n)$ $|\lambda|$、$|\mu|$ 和 $|\nu|$ 的多项式。事实上，由于 φ 不依赖于 λ和 μ，我们需要将 φ 描述为关于 $|\nu|$ 和 $\log(n)$ 的多项式大小。所有标准的同态 $H \to G$ 指定方式（例如，给出映射在单位元处的雅可比矩阵，$d\varphi: \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$）的规模都会随 H 和 G的维数增长。因此，如果采用这些编码方式之一，输入大小通常会随输入大小呈指数增长，从而无法推广诸如复合问题这样的情形。

相反，我们将利用这样一个事实：分支重数不依赖于同态 φ 的全部细节，而实际上完全由定义模 G 作为 H-模的分解决定：

$$\mathbb{C}^{d_i}\downarrow_H^G \cong \bigoplus_{j=1}^{t_i} \{\boldsymbol{\nu}(i,j)\}_H \otimes \mathbb{C}^{m_{ij}}.$$

这正是我们将复合运算情形推广所需要的；在该情形中，唯一需要的输入是单个分拆 ν，它确定了定义模 $\{\nu\}_H$ 作为 G 的模的完整分解：

$$\mathbb{C}^{d_\nu}\downarrow_H^G \cong \{\nu\}_H.$$

我们在下面的引理中将这一观察严格化：

引理 2.2. 设 H 是一个约化群，$G = \mathrm{GL}(d_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(d_{r_G})$，且 $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{r_G})$ $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_{r_G})$ 是从 H 到 G 的同态，其中 φ_i、$\psi_i: H \to \mathrm{GL}(d_i)$。假设对所有 $i = 1, \ldots\ldots, r_G$，φ_i 与 ψ_i 作为 H 的表示等价，则 H 在 G 中相对于 φ 的分支重数，与相对于 ψ 的分支重数相同。

证明。 设给定两个同态 φ，ψ 如引理陈述所述，我们需要证明，对于任意不可约 G-模 $\{\boldsymbol{\mu}\}_G$，限制后的 H-模是等价的：$\{\boldsymbol{\mu}\}\downarrow_H^G(\varphi) \cong_H \{\boldsymbol{\mu}\}\downarrow_H^G(\psi)$。对于模 $\{\boldsymbol{\mu}\}_G = \{\mu^1\}_{d_1} \otimes \cdots \otimes \{\mu^{r_G}\}_{d_{r_G}}$，令 $\rho_{\boldsymbol{\mu}}$为相应的表示。根据舒尔-外尔对偶（参见 第 4.2 节），分别应用于每个张量因子后，可将其嵌入为 G-模 $(\mathbb{C}^{d_1})^{\otimes|\mu^1|} \otimes \cdots \otimes (\mathbb{C}^{d_{r_G}})^{\otimes|\mu^{r_G}|}$上的一个子表示。由于

如果 φ 的分量 φ_i 和 ψ 的分量 ψ_i 是等价表示，那么对于每个 $i=1,\ldots\ldots,r_G$，都存在一个交织算子 $f_i \in \mathrm{GL}(d_i)$，使得 $\forall x \in H,\quad f_i\varphi_i(x) = \psi_i(x)f_i$。于是

$$f_1^{\otimes|\mu^1|}\otimes\cdots\otimes f_{r_G}^{\otimes|\mu^{r_G}|}\Big|_{\{\boldsymbol{\mu}\}_G} \in \mathrm{GL}(\{\boldsymbol{\mu}\}_G)$$

是 H表示 $\rho_{\boldsymbol{\mu}}\circ\varphi$ 和 $\rho_{\boldsymbol{\mu}}\circ\psi$之间的一个可逆交织算子。因此，这两个表示是等价的，并且具有相同的不可约分量分解。 □

这使得我们能够精确地描述指定群同态的输入编码：

定义 2.3（群同态的指定）。给定 $H =$一般线性群$(n_1)\times\cdots\times$一般线性群(n_{r_H}) 和 $G =$一般线性群$(d_1)\times\cdots\times$一般线性群(d_{r_G})，我们将通过以下数据指定一个群同态：

- 个自然数 $t_i \in \mathbb{N}$ 对应于 $i \in \{1,\ldots,r_G\}$。
- 个自然数 $m_{ij} \in \mathbb{N}$ 对应于 $i \in \{1,\ldots,r_G\}$ 和 $j \in \{1,\ldots,t_i\}$，以及
- 分拆元组 $\boldsymbol{\nu}(i,j) \in \mathcal{P}_{n_1}\times\cdots\times\mathcal{P}_{n_{r_H}}$对于 $i \in \{1,\ldots,r_G\}$ 和 $j \in \{1,\ldots,t_i\}$

使得 $d_i = \sum_{j=1}^{t_i} m_{ij}$维数$\{\boldsymbol{\nu}(i,j)\}_H$。这些数据确定了一个群同态 $\varphi\colon H\to G$，如下所示：对于 $i=1,\ldots,r_G$，定义 H-模 $V_i := \bigoplus_{j=1}^{t_i}\{\boldsymbol{\nu}(i,j)\}_H\otimes\mathbb{C}^{m_{ij}}$。识别 $V_i\cong\mathbb{C}^{d_i}$，从而得到群同态 $\varphi_i\colon H\to$一般线性群(d_i)，并定义 $\varphi := (\varphi_1,\ldots,\varphi_{r_G})$。

当然，根据 引理 2.2，定义 2.3 中所用的群同态 φ 可以替换为任何其他满足以下条件的群同态：定义模 G按照给定数据限制到 H；但我们选择的同态有一个优点，即它将 G 的定义模的计算基与傅里叶基对应起来，该傅里叶基是 H 在这些相同模上的作用所对应的基。这意味着，对于完整的傅里叶采样（即测量分拆类型、Gelfand-Tsetlin基和重数寄存器），我们可以在任何以 H 的计算基表示的状态上自由执行$\mathbb{C}^{d_i}$。我们将在第 5.2 节的算法中运用这一点。

用 G 的定义模的分解来定义分支问题的另一个优点是，我们可以立即用对称函数的语言来表述该问题，从而定义一个与维数无关的版本：

问题 2.4（维数无关的分支问题）。

输入：

- 自然数 r_G 和 r_H。
- 对每个 $i\in\{1,\ldots,r_G\}$，一个对称函数 P_i，表示为相互独立的变量集中 r_H 个舒尔函数之乘积的线性组合。因此，这些数据由一组 r_H元分拆元组构成

$$\boldsymbol{\nu}(i,j) = (\nu^1(i,j),\ldots,\nu^{r_H}(i,j)),\ \text{for } i\in\{1,\ldots,r_G\},\ j\in\{1,\ldots,t_i\},$$

每一个都属于 $\mathcal{P}^{r_H}$，以及相应的重数$\{m_{i,j}\}_{i,\ j}\subset\mathbb{N}$。这些数据定义了对称函数：

$$P_i = \sum_{j=1}^{t_i} m_{i,j}\, s_{\boldsymbol{\nu}(i,j)}(\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^{r_H}),$$

其中 $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1,\ldots)\ldots,\mathbf{x}^{r_H} = (x_1^{r_H}, x_2^{r_H},\ldots)$ 是相互独立的变量集，$s_{\nu^k(i,j)}$ 是与分拆 $\nu^k(i,j)$ 相关联的 Schur 函数，并且

$$s_{\boldsymbol{\nu}(i,j)}(\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^{r_H}) := s_{\nu^1(i,j)}(\mathbf{x}^1)\cdots s_{\nu^{r_H}(i,j)}(\mathbf{x}^{r_H}).$$

- Tuples of partitions $\boldsymbol{\mu} = (\mu^1, \ldots, \mu^{r_G}) \in \mathcal{P}^{r_G}$ and $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^1, \ldots, \lambda^{r_H}) \in \mathcal{P}^{r_H}$.

分拆以一元编码给出。

任务： 计算乘积的舒尔展开中 $s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^{r_H}) = s_{\lambda^1}(\mathbf{x}^1) \cdots s_{\lambda^{r_H}}(\mathbf{x}^{r_H})$ 的系数

$$s_{\mu^1}[P_1](\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^{r_H}) \cdots s_{\mu^{r_G}}[P_{r_G}](\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^{r_H}).$$

这个系数用霍尔内积表示时，是整数

$$\langle s_{\mu^1}[P_1](\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^{r_H}) \cdots s_{\mu^{r_G}}[P_{r_G}](\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^{r_H}), s_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^{r_H}) \rangle.$$

问题 2.1 和 问题 2.4 本质上等价：在 问题 2.1中，一个表示分解为不可约分量，等价于将其特征分解为不可约特征标的线性组合；在此情形下，这些不可约特征标是相互独立的变量集上的舒尔多项式的乘积。将其转到具有无限多个变量的对称函数环 Λ后，便得到 问题 2.4。霍尔内积定义于 Λ，不过，由此得到的恒等式（将舒尔函数复合的乘积展开为普通舒尔函数）对任意变量取值都成立。实际操作中，我们可以将部分变量设为 0，化为多项式恒等式，再提取系数。形式上，这表明对于任意一组输入分拆 $\mathcal{I}$，都存在有限个变量 $N_{\mathcal{I}}$，使得 $s_{\mu^1}[P_1](\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^{r_H}) \cdots s_{\mu^{r_G}}[P_{r_G}](\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^{r_H})$ 的分解等价于相应构造在舒尔多项式上的分解，只要这些舒尔多项式具有$\geq N_{\mathcal{I}}$ 非零变量。在 第 6 节 中，我们将展示实际操作方法。

我们在第 5.2 节开发的量子算法将处理问题 2.1，而在第 6 节中，我们使用问题 2.4的表述。

3 将表示论重数视为分支重数

本节介绍，问题 2.1中所述的一般分支重数问题，是与表示论重数相关的主要问题的一种自然推广。我们使用第 2 节中建立的记号，并明确指出，定义群维数的数值何时足够大，从而使问题 2.1 等价于与维数无关的问题 2.4。我们将分拆表示为杨图。

复合系数 问题 2.1的输入集合，用于描述复合系数的计算问题，ν 如下：

- 群的说明：

$$r_H = 1,\ n_1 \in \mathbb{N} \quad \text{and} \quad r_G = 1,\ d_1 = \dim\{\nu\}_{n_1}.$$

- 群同态的说明 φ，如定义 2.3所示：

$$t_1 = 1, \quad m_{1,1} = 1, \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\nu}(1,1) = \nu,$$

其中， ν 是唯一一个表示 G的定义模的 H-模结构的分拆。

- 表示的具体说明：

$$\boldsymbol{\mu} = \mu \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\lambda} = \lambda,$$

w这里，分拆 μ 索引一个 G-模，而分拆 λ 索引一个 H-模 .

这里要使 问题 2.1 与维数无关，我们必须有 $n_1 \geq \max(\ell(\lambda)\ \ell(\nu))$，并且满足 $\dim\{\nu\}_{n_1} \geq \ell(\mu)$。由于复合系数 $a^{\lambda}_{\mu,\ \nu}$ 在 $|\mu|\cdot|\nu| \neq |\lambda|$ 时为零，我们将范围限定在 $|\mu|\cdot|\nu| = |\lambda|$ 的情形，此时可以取 $n_1 = |\lambda|$ 作为上界。

克罗内克系数 用于描述计算克罗内克系数 $g_{\lambda^1,\ \lambda^2,\ \mu}$ 问题 2.1 的输入集合为：

- 群的规定：

$$r_H = 2,\ n_1, n_2 \in \mathbb{N} \quad \text{and} \quad r_G = 1,\ d_1 = n_1 \cdot n_2.$$

- 群同态的规定 φ，如定义 2.3所示：

$$t_1 = 1, \quad m_{1,1} = 1, \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\nu}(1,1) = (\square, \square),$$

  其中，这对分拆表示定义模 H在定义模 G上的模结构。

- 表示的规定：

$$\boldsymbol{\mu} = \mu \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda^1, \lambda^2),$$

  whe其中，分拆 μ 标记一个 G-模，而这对分拆 $\boldsymbol{\lambda}$ 标记一个 H-模 le.

要使该问题与维数无关，我们必须有 $n_1 \geq \ell(\lambda^1)\ \ n_2 \geq \ell(\lambda^2)$ 和 $n_1 \cdot n_2 \geq \ell(\mu)$。一个充分条件是 $n_1,\ \ n_2 \geq |\lambda^1| = |\lambda^2| = |\mu|$。

Littlewood–Richardson 系数 问题 2.1中用于描述计算 Littlewood–Richardson 系数 $c^{\lambda}_{\mu,\ \nu}$ 的问题的输入集合为：

- 群的规定：

$$r_H = 1,\ n_1 \in \mathbb{N} \quad \text{and} \quad r_G = 2,\ d_1 = n_1,\ d_2 = n_1.$$

- 群同态的规定 φ，如定义 2.3所示：

$$\begin{aligned} t_1 = 1, \quad m_{1,1} = 1, \quad \boldsymbol{\nu}(1,1) = \square, \\ t_2 = 1, \quad m_{2,1} = 1, \quad \boldsymbol{\nu}(2,1) = \square. \end{aligned}$$

  这些对应于表示 H-模结构的分拆，其中该结构定义在 G 的定义模上。

- 表示的规定：

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu, \nu) \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\lambda} = \lambda,$$

  其中，分拆对 $\boldsymbol{\mu}$ 标记一个 G-模，而分拆 λ 标记一个 H-模。

由于 Littlewood–Richardson 系数 $c^{\lambda}_{\mu\nu}$ 仅在 $|\mu| + |\nu| = |\lambda|$ 时非零，因此我们将讨论范围限制在这种情况。要使该问题与维数无关，必须有 $n_1 \geq \max(\ell(\lambda)\ \ell(\mu)\ \ell(\nu))$。一个充分条件是 $n_1 \geq |\lambda|$。

Kostka 数 用于描述 问题 2.1 计算 Kostka 数的问题的输入集合 $K_{\lambda\mu}$ 为：

- 群的定义：

$$r_H = d,\ n_1 = \cdots = n_d = 1 \quad \text{and} \quad r_G = 1,\ d_1 = d.$$

- 群同态的定义 φ，如定义 2.3：

$$t_1 = d, \quad \text{and for } j \in \{1, \ldots, d\}: \quad m_{1,j} = 1, \quad \boldsymbol{\nu}(1, j) = e_j,$$

其中 e_j 对应于分拆元组 $(0, \ldots, , \ldots, 0)$，唯一的方框位于位置 j （且 0 是空分拆）。这些表示定义模对 G 的 H-模结构。

- 表示的定义：

$$\boldsymbol{\mu} = \lambda \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\lambda} = (\mu_1, \ldots, \mu_d),$$

其中，分拆 λ 标记一个 G-模，而权 μ 标记一个 H-模 .

由于当 $|\lambda| \neq |\mu|$ 时，Kostka 数 $K_{\lambda\mu}$ 为零，因此我们只考虑这种情况。要使问题与维数无关，必须有 $d \geq \max(\ell(\lambda)\ \ell(\mu))$。一个充分条件是 $d \geq |\lambda|$。

因此，我们可以立即将表示论重数的标准计算归约到问题 2.1：

引理 3.1。*问题 2.1在针对这四类输入进行特化时，恰好就是计算相同输入对应的复合系数、克罗内克系数、Littlewood–Richardson 系数和 Kostka 数的问题。*

证明。对于每个系数，请对照第 2.2 节中给出的第一个定义。 □

4 量子复杂性类与舒尔变换

在下一节中，我们将定义复杂性类 QMA 和 #BQP，并讨论我们将在量子算法中用于实现舒尔变换的量子电路。

4.1 量子复杂性类

定义 4.1 （QMA——量子梅林-亚瑟）。 如果存在一个多项式时间量子电路的一致族$\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和一个多项式 $p(n)$，使得对于任何长度为 n 且满足承诺的输入字符串 x ，带承诺的语言 $L \subseteq \{0,1\}^*$ 属于复杂性类 QMA：

$$\forall x \in L, \quad \exists\, |\psi\rangle \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes p(n)} : \mathbf{Pr}[V_n(|x\rangle, |\psi\rangle) \text{ accepts}] \geq \frac{2}{3},$$
$$\forall x \notin L, \quad \forall\, |\psi\rangle \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes p(n)} : \mathbf{Pr}[V_n(|x\rangle, |\psi\rangle) \text{ accepts}] \leq \frac{1}{3}.$$

定义 4.2 （#BQP – 计数BQP）。 若存在一个一致的多项式规模量子电路族 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和一个多项式$p(n)$，使得对于任意长度为 n 的输入字符串 x ，见证空间 V_n 为 $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes p(n)}$ 时分解为，则（部分）函数 $f : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ 属于 #BQP：

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{acc}}(x) \oplus \mathcal{H}_{\text{rej}}(x),$$

其中 $\dim \mathcal{H}_{\mathrm{acc}}(x) = f(x)$，并且

$$\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathrm{acc}}(x) \quad \mathbf{Pr}[V_n(|x\rangle, |\psi\rangle) \text{ accepts}] \geq \frac{2}{3},$$
$$\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathrm{rej}}(x) \quad \mathbf{Pr}[V_n(|x\rangle, |\psi\rangle) \text{ accepts}] \leq \frac{1}{3}.$$

对于 定义 4.1 和 定义 4.2，常数 2/3和 1/3可以分别放大到指数级接近 1 和 0。

4.2 舒尔变换

考虑张量积空间 $(\mathbb{C}^d)^{\otimes n}$。在该空间上，我们可以定义一般线性群 GL($d$) 和对称群 S_n 的可交换作用，如下所示：

$g \in$GL(d) 的作用定义为对每个张量因子同时施加该作用：

$$g \cdot (v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = (gv_1) \otimes (gv_2) \otimes \cdots \otimes (gv_n),$$

对于 $v_i \in \mathbb{C}^d$。

$\sigma \in S_n$ 的作用定义为置换张量因子：

$$\sigma \cdot (v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes v_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}.$$

根据舒尔-外尔对偶，这两个作用彼此最大可交换，且该空间可分解为一般线性群 GL(d) $\times S_n$ 的不可约表示的无重数直和：

$$(\mathbb{C}^d)^{\otimes n} \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_d(n)} \{\lambda\}_d \otimes [\lambda].$$

重要的是，这意味着 GL(d) 的每个不可约多项式表示都可以嵌入张量积空间 $(\mathbb{C}^d)^{\otimes n}$ 中，作为一个子表示。这个分解促使我们从 $(\mathbb{C}^d)^{\otimes n}$ 的计算基酉变换到舒尔基，记作$\{|\lambda, p, q\rangle\}$。一个基向量 $|\lambda, p, q\rangle$ 由一个分拆 $\lambda \in \mathcal{P}_d(n)$、来自模 $\{\lambda\}_d$ 的标准正交基的一个基态 p，以及来自模 $[\lambda]$ 的标准正交基的一个基态 q 共同标记。我们将这种变换记作 $\mathcal{S}$，并称其为舒尔变换。

原则上，我们可以为 $\{\lambda\}_d$ 和 $[\lambda]$选择不同的标准正交基，因此存在许多可能的舒尔变换。在这份手稿中，我们采用参考文献 [8], 中的舒尔变换量子电路实现，其中韦伊模和斯佩希特模的基分别为*Gelfand-Tsetlin* 基和*Young-Yamanouchi* 基（通常统称为盖尔范德-采特林基）。尤其对于韦伊模，讨论如何将盖尔范德-采特林基向量编码为量子态很有用。盖尔范德-采特林基的元素由*GT* 图样（或等价地，由半标准杨表）标记。由于这些图样的条目包含一个 $\{1, \ldots, n\}$中的数，因此可以用 n维量子位元表示。随后可以将其表示为$\log_2 n$]量子位元空间的一个子空间。有关编码的详细信息，请参阅参考文献 [8] 。

首个在量子系统上实现舒尔变换的量子电路，所需的门复杂度为 $\mathcal{O}(nd^4 \,\mathrm{polylog}(n, d))$ [2]（另见参考文献 [8]）。这对我们的协议来说是个问题，因为我们需要对局部维数呈指数级大的空间应用舒尔变换d。近期研究表明，基于参考文献 [26] 和 [35]中的思路，可以在时间 $\mathcal{O}(n^4 \,\mathrm{polylog}(n, d))$ [8] 内完成。

定理 4.3 ([8]). 存在一个量子电路，它以错误概率 ε，相对于 一般线性群(d) 模与 S_n 模的盖尔范德-采特林基实现舒尔变换 $\mathcal{S}$，其门复杂度为 $\mathcal{O}(n^4$ 多对数$(n, d, \varepsilon^{-1}))$。

5 算法描述与分析

在本节中，我们证明手稿的主要结果。我们首先描述算法在复合系数这一较简单情形下的做法；该情形既是主要的动机例，也在某种意义上是我们方法最简单的应用。随后我们给出针对 问题 2.1 的一般算法，并证明其正确性。复合问题算法的正确性可作为这一更一般证明的推论而得出。

5.1 问题问题 1.1

设 $n \in \mathbb{N}$，以及 λ， μ， ν 分拆。设 $H = \mathrm{GL}(n)$ $G = \mathrm{GL}(d_\nu)$，其中 $d_\nu := \dim(\{\nu\}_n)$，我们描述一种量子算法，它从空间 $\{\mu\}_G$中获取量子见证，对来自一个 $a^\lambda_{\mu,\ \nu}$ 维子空间的元素以高概率接受，并对其正交补中的任何元素以高概率拒绝。

算法描述 该算法分三步进行：

1. 我们通过舒尔–韦尔对偶，将表示 $\{\mu\}_{d_\nu}$ 中元素的见证嵌入 $\{\nu\}_n^{\otimes|\mu|}$，并应用逆舒尔变换 $\mathcal{S}^{-1}$。 2. 我们通过舒尔–韦尔对偶，将表示 $\{\nu\}_n$ 中元素的每个寄存器嵌入 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes|\nu|}$ ，得到全局空间 $((\mathbb{C}^n)^{\otimes|\nu|})^{\otimes|\mu|}$ ，并在每个寄存器 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes|\nu|}$ 上应用 $|\nu|$ 局部逆舒尔变换 $\mathcal{S}^{-1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{S}^{-1}$。 3. 我们对全局空间 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes|\nu||\mu|}$ 应用舒尔变换，并测量分拆寄存器和一般线性群(n)-模寄存器；若结果为 $(\lambda,\ p_0)$，则接受，其中$|p_0\rangle \in \{\lambda\}_n$为某个固定值。

让我们详细看看每个步骤：

1. 我们添加两个辅助寄存器：分拆寄存器 和对称模寄存器。分拆寄存器将初始化为状态 $|\mu\rangle$，而对称模寄存器将初始化为一个固定状态 $|\psi_\mu\rangle \in [\mu]$。然后，我们对这三个寄存器的状态施加逆舒尔变换，得到一个以计算基 $\{|i_1 \ldots i_{|\mu|}\rangle\},\ i_j \in \{1, \ldots, d_\nu\}$表示的 $|\mu|$寄存器状态。根据引理 2.2，我们可以假设一般线性群 $\mathrm{GL}(n)$ 通过某种固定且易于计算的作用作用于每个 i_j ，也就是说，我们将$\mathbb{C}^{d_\nu}$ 的计算基与 $\{\nu\}_n$的 Gelfand-Tsetlin基对应起来。

2. 我们为每个 $|\lambda|$ 寄存器添加一个处于状态 $|\nu\rangle$ 的分拆寄存器，以及一个处于状态 $|\psi_\nu\rangle$的对称模寄存器，其中 $|\psi_\nu\rangle \in [\nu]$是某个固定值。现在，全局状态以基 $\{|\nu\ i_1\ \psi_\nu\rangle \otimes \ldots \otimes |\nu\ i_{|\lambda|}\ \psi_\nu\rangle\}$表示。然后，我们对每组三个寄存器分别施加局部逆舒尔变换，得到一个以计算基 $\{|i_{1,1} \ldots i_{1,|\nu|}\rangle \otimes \ldots \otimes |i_{|\mu|,1} \ldots i_{|\mu|,|\nu|}\rangle\}$表示的元素，其中 $i_{j,k} \in \{1, \ldots, n\}$。

3. 我们将计算基的指标重新标记为 $\{|i_1 \ldots i_{|\nu||\mu|}\rangle\}$，并在空间 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes|\nu||\mu|}$ 上应用舒尔变换。此时，态将以舒尔基 $\{|\gamma\ p\ q\rangle\}$ 表示。随后，我们测量分拆寄存器和 H-模寄存器。最后，当且仅当测量结果为 $(\lambda,\ p_0)$ 时，我们才接受，其中 $|p_0\rangle \in \{\lambda\}_n$ 固定。

完整算法的电路表示见图1

5.2 问题 2.1 的算法问题 2.1

该算法可以看作是前一个算法的推广。主要思路相同，但我们需要更加谨慎，因为 G 的定义模不一定是不可约的 H-表示，因此我们采用中间测量，并用它来实现后续嵌入。

对于问题 2.1 的输入，我们描述一个量子验证器，其见证取自空间$\{\boldsymbol{\mu}\}_G$，对于一个$m_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda}}$维子空间以高概率接受，而对于其正交补则以高概率拒绝。

算法描述 算法按以下步骤进行：

1. 我们将见证态 $|\psi\rangle \in \{\boldsymbol{\mu}\}_G$ 嵌入张量积空间 $\bigotimes_{i=1}^{r_G}(\mathbb{C}^{d_i})^{\otimes|\mu^i|}$中。具体而言，对于每个 r_G 寄存器，我们考虑由 Schur-Weyl 对偶给出的嵌入：

$$\{\mu^i\}_{d_i} \hookrightarrow (\mathbb{C}^{d_i})^{\otimes|\mu^i|}. \tag{5.1}$$

   实现这一操作需要添加一个分拆寄存器（初始化为分拆态 $|\mu^i\rangle$）和一个表示任意状态 $|q_0\rangle \in [\mu^i]$ 的置换寄存器。

2. 我们总共执行 r_G 次逆舒尔变换，每次作用于空间$(\mathbb{C}^{d_i})^{\otimes|\mu^i|}$，其中 $i = 1, \ldots, r_G$。这会将局部状态表示在相应$\mathbb{C}^{d_i}$ 空间的计算基中。

3. 根据引理 2.2，并如定义 2.3中所述，我们可以假定 H 在$\mathbb{C}^{d_i}$ 的计算基上的作用是已知的。这使得我们可以使用如下分解：

$$\mathbb{C}^{d_i}\downarrow_H^G \cong \bigoplus_{j=1}^{t_i} \{\boldsymbol{\nu}(i,j)\}_H \otimes \mathbb{C}^{m_{i,j}}. \tag{5.2}$$

   我们对每一个 $\sum_{i=1}^{r_G}|\mu^i|$ 子寄存器执行测量，以确定相应的 H-等型分量。测量之后，该态现在处于如下空间

$$\bigotimes_{i=1}^{r_G}\bigotimes_{s=1}^{|\mu^i|}\{\boldsymbol{\nu}(i,j_{i,s})\}_H \otimes \mathbb{C}^{m_{i,j_{i,s}}}, \tag{5.3}$$

   其中每个指标$j_{i,s} \in \{1,2,\ldots,t_i\}$ 都是一次测量的结果。

4. 根据测量结果，我们利用舒尔-外尔对偶，将每一个 H-不可约表示寄存器嵌入其相应的张量积空间。这包括依据结果 $\nu^k(i,j_{i,s})$添加分拆寄存器与置换寄存器，从而使该态处于如下空间：

$$\bigotimes_{i=1}^{r_G}\bigotimes_{s=1}^{|\mu^i|}\left(\bigotimes_{k=1}^{r_H}(\mathbb{C}^{n_k})^{\otimes|\nu^k(i,j_{i,s})|}\right) \otimes \mathbb{C}^{m_{i,j_{i,s}}}. \tag{5.4}$$

5. 我们在空间$(\mathbb{C}^{n_k})^{\otimes|\nu^k(i,j_{i,s})|}$上总共执行 $r_H\sum_{i=1}^{r_G}|\mu^i|$ 次逆舒尔变换。这将态表示在相应的$\mathbb{C}^{n_k}$ 空间的计算基中。

6. 我们重新排列张量积，使各项按索引 k 分组。该空间可写为：

$$\bigotimes_{k=1}^{r_H}\left(\bigotimes_{i=1}^{r_G}\bigotimes_{s=1}^{|\mu^i|}(\mathbb{C}^{n_k})^{\otimes|\nu^k(i,j_{i,s})|} \otimes \mathbb{C}^{m_{i,j_{i,s}}}\right) \tag{5.5}$$

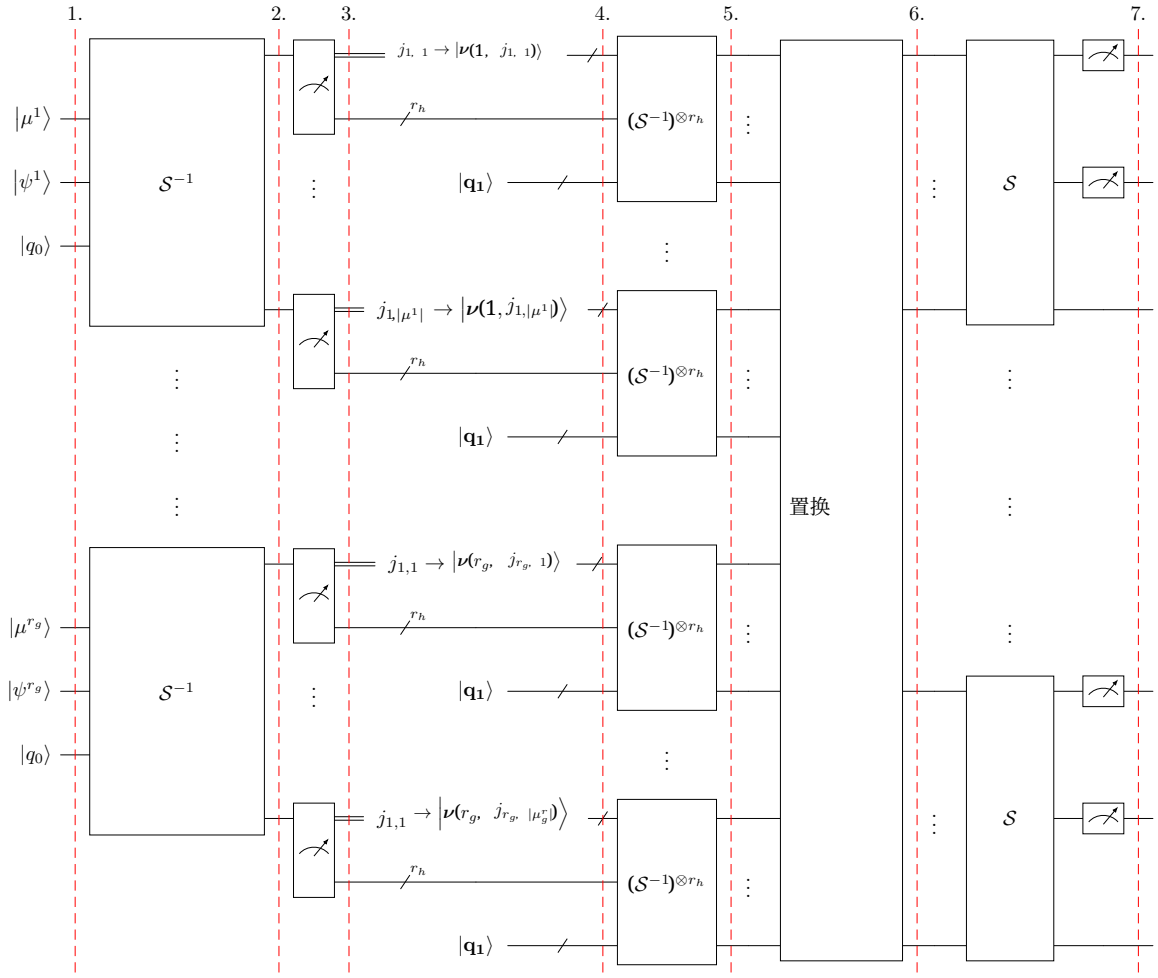

图2：问题 2.1 的算法的电路表示。状态 $|q_0\rangle$ 和 $|\mathbf{q_1}\rangle$ 是用于嵌入的任意状态，其具体初始化不会影响算法的正确性。置换门执行第 6 步中描述的重排。为清晰起见，我们没有画出寄存器，其中包含从第 H步定义模的分解所得的 G -表示的不变空间，相关步骤从 3 开始，之后亦然。

$$\cong \bigotimes_{k=1}^{r_H} \left((\mathbb{C}^{n_k})^{\otimes \sum_{i=1}^{r_G} \sum_{s=1}^{|\mu^i|} |\nu^k(i,j_{i,s})|} \otimes \mathbb{C}^{\prod_{i=1}^{r_G} \prod_{s=1}^{|\mu^i|} m_{i,j_{i,s}}} \right) \tag{5.6}$$

$$\cong \left(\bigotimes_{k=1}^{r_H} (\mathbb{C}^{n_k})^{\otimes N_k} \right) \otimes \mathbb{C}^m, \tag{5.7}$$

其中 $N_k := \sum_{i=1}^{r_G} \sum_{s=1}^{|\mu^i|} |\nu^k(i,\ j_{i,\ s})|$ 且 $m = \prod_{i=1}^{r_G} \prod_{s=1}^{|\mu^i|} m_{i,\ j_{i,\ s}}$。

7. 我们在空间 $(\mathbb{C}^{n_k})^{\otimes N_k}$ 上对 $k = 1$、.....、r_H 应用 r_H 个舒尔变换，得到 r_H 个以舒尔基表示的寄存器，最后一个寄存器为 H-不变。对于前 r_H 个寄存器，我们测量相应的分拆和一般线性群(n_k)-模子寄存器。当且仅当每个寄存器的测量结果 k 均为某个预先固定状态 $|p_k\rangle \in \{\lambda^k\}_{n_k}$ 对应的 $(\lambda^k,\ p_k)$ 时，我们才接受（例如，我们可以选择 $|p_k\rangle$ 为一个 Gelfand-Tsetlin基基元素）。

我们给出了该算法的电路表示，见 图 2。

使用该算法，我们可以证明：

定理 5.1 (定理1.3)。 问题 *2.1* 属于 #BQP ， 因此， 相关的判定问题属于 QMA。

证明。 我们需要证明该算法的完备性和可靠性， 以及该电路的规模关于输入规模是多项式的。

至于完备性和可靠性，我们声称，对于空间中的任意见证，该算法都会接受，其失败概率等于用于实现这些变换的电路的失败概率；

$$W := |\mathbf{p}\rangle \otimes \mathbb{C}^{m_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}} \subseteq \{\boldsymbol{\lambda}\}_H \otimes \mathbb{C}^{m_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}} \subseteq \{\boldsymbol{\mu}\}{\downarrow}_H^G \quad \text{(see Eq. (2.3))},$$

其中 $|\mathbf{p}\rangle := |p_1\rangle \otimes |p_2\rangle \otimes \cdots \otimes |p_{r_H}\rangle$，而对于其正交补 $W^\perp \subseteq \{\boldsymbol{\mu}\}{\downarrow}_H^G$ 中的每个态，该算法都会以相同的概率拒绝。

假设我们得到一个见证态 $|\psi\rangle \in W$。由于步骤 1 中的包含映射是 H-等变运算，并且步骤2 中的舒尔变换保持 G-模结构（因此也保持 H-模结构），我们的态现在将处于乘积空间的 $\{\boldsymbol{\lambda}\}_H$-等型分量中

$$\bigotimes_{i=1}^{r_G} (\mathbb{C}^{d_i})^{\otimes |\mu^i|},$$

a实际上仍将具有 $|\mathbf{p}\rangle \otimes |x\rangle$ 的形式，其中某个 $|x\rangle$ 属于一个重数空间 e.

测量 H-模的标签3不会改变这一点，因为这只会告诉我们，究竟是哪些 H-模的特定乘积使得 $\{\boldsymbol{\lambda}\}_H$ 该态投影到其中。通过步骤 4-7 ，我们执行强傅里叶采样，也就是说，我们测量不可约表示标签以及不可约模的基元素，代价是再次将该态嵌入张量积空间。由于我们在电路中执行的所有操作都是 H-等变的，根据舒尔引理，最后一次测量的结果在每个寄存器上都恰好是 $(\lambda_k,\ p_k)$，因此我们将接受。

反过来，假设见证属于 $W^\perp$，根据相同的推理，到算法的步骤 7 时，该态仍将与子空间 $|\mathbf{p}\rangle \otimes M$正交，其中 M 表示该模的 $\{\boldsymbol{\lambda}\}_H$-等型分量的重数空间。因此，测量结果必定会被拒绝（精度受舒尔变换电路的精度限制）。

至于该算法的复杂度，在步骤 1 中，辅助分拆和置换寄存器态的制备可以高效完成，因为我们可以使用钩长公式计算斯佩希特模的维数 $[\mu^i]$ ，并制备一个具有该维数的态。步骤 r_G 2 中的逆舒尔变换 在 $\bigotimes_{i=1}^{r_G}(\mathbb{C}^{d_i})^{\otimes|\mu_i|}$上的总门复杂度为

$$\mathcal{O}(\sum_{i=1}^{r_G} |\mu_i|^4 \operatorname{polylog}(|\mu^i|, d_i)).$$

为了证明 d_i 至多随输入规模呈指数增长（注意，如果我们假设 d_i 是输入的一部分，则无需证明这一点），我们写作

$$d_i = \sum_{j=1}^{t_i} m_{i,j} \dim(\{\boldsymbol{\nu}(i,j)\}_H),$$

并且，由展开 $\{\boldsymbol{\nu}(i,\ j)\}_H$ 的定义可得 $\dim\{\nu^k(i,\ j)\}_n \le n^{|\nu^k\ (i,\ j)\ |}$，

$$d_i = \sum_{j=1}^{t_i} m_{i,j} \prod_{k=1}^{r_H} \dim(\{\nu^k(i,j)\}_{n_k})$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \max_{j,k}\ t_i\ m_{i,j}(\dim(\{\nu^k(i,j)\}_{n_k}))^{r_H}\\
&\leq \max_{j,k}\ t_i\ m_{i,j}\ n_k^{|\nu^k(i,j)|r_H}\\
&\in \mathcal{O}(\max_{j,k}\ t_i\ m_{i,j}\exp(|\nu^k(i,j)|r_H\log n_k)))
\end{aligned}
$$

因此，该量的对数是关于输入规模的多项式。在步骤 3 中，我们进行多项式数量的测量；接着，在步骤 4中，我们针对每种测量结果准备相应的分拆和对称模寄存器。同样，这可以高效完成。步骤5 和 7 中的舒尔变换作用于 H，因此它们关于 n_k 是多对数级的，关于分拆的大小是多项式级的；由于其数量是多项式级的，因此可以高效实现。最后，仍在步骤 7中，我们进行多项式数量的测量。这表明每一步都能在多项式时间内完成。

□

6 通过特征标实现的经典算法

计算 Kostka、Littlewood–Richardson、克罗内克和复合系数的问题是代数组合学的核心问题。尽管大多数研究都集中于寻找正公式，但高效的带符号表示也受到了关注。根据一般原理，很明显，所有这些系数都属于GapP。Kostka 系数和 Littlewood–Richardson 系数还分别等于某些维数为 $\mathcal{O}(\ell(\lambda)^2)$ 的多胞体中的整数点数量，因此可以应用巴尔维诺克算法 [3], ，有关明确的分析请参见文献 [51] 。克罗内克系数也已得到广泛研究，参见文献 [16, 46, 11]。文献 [24], 在一些更特殊的情形下考察了复合系数的计算，并证明这些系数属于 GapP。现在我们将研究一般问题。

定理 6.1。 计算与维数无关的分支重数，问题 *2.4* 属于 GapP，并且可以在时间 $\mathcal{O}(N^{r_H dn})$ 内完成，其中 N 是输入规模，且 $d=\sum d_i$， $n=\sum n_i$。

证明。输入给定的数据为

$$
P_i=\sum_{j=1}^{t_i} m_{i,j}s_{\nu(i,j)}(\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^{r_H}),
$$

它是舒尔函数乘积之和 $s_{\nu^k(i,j)}(\mathbf{x}^k)$。 P_i 是关于 r_H 组变量的多元多项式，我们将其展开为单项式之和，并将这些单项式作为变量代入 $s_{\mu^i}[P_i]$。一般算法将依次执行以下步骤。

1. 按如下方式确定 P_i 展开成单项式的结果。我们有

$$
s_{\nu^k(i,j)}(\mathbf{x}^k)=\sum_{\alpha^k(i,j)\vdash n_k} K_{\nu^k(i,j),\alpha^k(i,j)}m_{\alpha^k(i,j)}(\mathbf{x}^k),
$$

其中 m_α 是单项对称函数，因此

$$
P_i=\sum_{j=1}^{t_i}\sum_{\alpha^k(i,j)\vdash n_k:k=1..h} m_{i,j}\prod K_{\nu^k(i,j),\alpha^k(i,j)}m_{\alpha(i,j)}(\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^{r_H}),
$$

其中 $m_\alpha(\mathbf{x}^1,\ldots\ldots,\mathbf{x}^{r_H})=m_{\alpha^1}(\mathbf{x}^1)m_{\alpha^2}(\mathbf{x}^2)\cdots m_{\alpha^k}(\mathbf{x}^{r_H})$。科斯特卡系数可在 $\mathcal{O}(n_k^{n_k})$ 时间内计算（根据所涉及的分拆 ν，这个上界可以大幅降低）。指数时间算法可以通过更高效地实现

巴尔维诺克的格点计数。由此，我们可以在$\mathcal{O}(n^{r_H n})$时间内计算系数 $M_{\alpha(i,j)}$，其中 $n = n_1 + \cdots$ 是总大小：

$$P_i = \sum_{j=1}^{t_i} \sum_{\alpha(i,j)} M_{\alpha(i,j)} m_{\alpha(i,j)}(\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^{r_H}).$$

The 要执行此操作的分拆 $\alpha(i,\ j)$ 总数至多为 $(2^n)^{n^2} = \mathcal{O}(2^{n^3})$

2. 将 $s_{\mu^i}[P_i]$ 展开为每组变量 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$、.....中的单项式。这可以通过展开 $s_{\mu^i} = \sum_{\beta^i \vdash d_i} K_{\mu^i, \beta^i} m_{\beta^i}$ 来完成，所需时间保守地限定为 $\mathcal{O}(2^{d_i} d_i^{d_i})$。注意，如果 $f = \sum_{\alpha^i \in R} x^{\alpha^i}$，其中 R 是一个由合成构成的多重集，那么

$$m_\beta[f] = \sum_{\sigma} \sum_{i_1 < \cdots < i_r} x^{\sum_j \sigma_j(\beta) \alpha^{i_j}},$$

其中 $r = \ell(\beta)$，而 $\sigma \in S_r$ 遍历 β 各部分的所有不同排列。R 的大小由前面给出的界限定为 $n^{r_H n}$。然后我们可以展开

$$s_{\mu^i}[P_i] = \sum_{\mathbf{a}} C^i_{\mathbf{a}} (\mathbf{x}^1)^{\mathbf{a}^1} \cdots (\mathbf{x}^{r_H})^{\mathbf{a}^{r_H}},$$

其中 $\mathbf{a}$ 遍历 $|\mu^i| = d_i$ 的 r_H 元合成组，而 C 是系数（均为非负整数）。由于该函数对于每组变量都是对称的，因此 $C_{\mathbf{a}}$ 在每个 $\mathbf{a}^i$ 中置换各部分时保持不变。于是，上述展开的计算时间可限定为 $\mathcal{O}(\prod 2^{d_i} d_i^{d_i} (n^{r_H n})^{d_i}) = \mathcal{O}(n^{r_H d})$，其中 $d = d_1 + d_2 + \cdots$。

3. 与 $s_\lambda(\mathbf{x}^1,\ .....,\ \mathbf{x}^{r_H})$ 取内积。为此，我们利用以下事实：$\langle m_\alpha,\ h_\beta \rangle = \delta_{\alpha,\ \beta}$，其中 h_β 表示齐次对称函数。由 Jacobi–Trudy 恒等式可得

$$s_\lambda = \det[h_{\lambda_i - i + j}]_{i,j=1}^{\ell(\lambda)} = \sum_{\pi \in S_{\ell(\lambda)}} \operatorname{sgn}(\pi) h_{\lambda - \mathrm{id} + \pi},$$

其中 id $= (1,\ 2,\ .....,\ \ell(\lambda))$，并且 π 同样视为一个向量。于是我们可以计算

$$\begin{aligned}
&\langle s_{\mu^1}[P_1] \cdots s_{\mu^{r_G}}[P_{r_G}], s_{\lambda^1}(\mathbf{x}^1) \cdots s_{\lambda^{r_H}}(\mathbf{x}^{r_H}) \rangle \\
&\quad = \langle \prod_j \sum_{\mathbf{a}(j)} C^j_{\mathbf{a}(j)} (\mathbf{x}^1)^{\mathbf{a}(j)^1} \cdots (\mathbf{x}^{r_H})^{\mathbf{a}(j)^{r_H}}, \prod_i \sum_{\pi^i} \operatorname{sgn}(\pi^i) h_{\lambda^i - \mathrm{id} + \pi^i}(\mathbf{x}^i) \rangle \\
&\quad = \sum_{\pi^1, \cdots, \pi^{r_H} \in S_{\ell(\lambda)}} \operatorname{sgn}(\pi^1 \cdots \pi^{r_H}) \sum_{\substack{\sum_j \mathbf{a}(j)^i = \lambda^i - \mathrm{id} + \pi^i \\ \text{for } i = 1, \ldots, r_H}} \prod_j C^j_{\mathbf{a}(j)},
\end{aligned}$$

其中在最后一部分，我们对每组变量匹配了总次数，而 $\ell(\lambda)$ 是 λ 中出现的分拆的最大长度。

将此公式中的正项和负项分别收集起来，并注意到这些求和规模呈指数增长（但不超过指数级），便可知最后一个表达式属于 GapP $=$ #P $-$ #P。运行时间的上界取决于瓶颈步骤：第二步中计算系数 C，以及对所有排列求和。

□

6.1 复合运算 $a^\lambda_{\mu,\ \nu}$ 的经典计算

上述算法具有通用性，但在特定情形下效率不高。文献 [24, 第 9], 节给出了一种用于复合运算的经典算法，这清楚地表明该问题属于 GapP。不过，在某些特定实例中，可以找到多项式时间算法，例如参见文献 [51, 47]。这里我们将扩展这些结果。

定理 6.2。设 $\mu \vdash m$、$\nu \vdash d$ 和 $\lambda \vdash n := md$，其中 $\ell(\lambda) = k$。假设 k 和 m 是固定常数。那么 $a^{\lambda}_{\mu,\,\nu}$ 可以在时间 $O(d^m\binom{k}{2})$ 内计算，因此，对于此类输入，计算复合运算的问题属于FP。

证明。我们将定理 6.1证明中的分析特化为更直接的情形

$$a^{\lambda}_{\mu\nu} = \langle s_\lambda, s_\mu[s_\nu]\rangle.$$

我们有

$$s_\mu[s_\nu(x_1, x_2, \ldots)] = \sum_\lambda a^{\lambda}_{\mu,\nu} s_\lambda(x_1, x_2, \ldots), \tag{6.1}$$

这对变量的所有特化都成立。由于 s_λ 关于 $\ell(\lambda) \le k$的舒尔函数构成了 k 变量对称多项式环的一组基，因此只需令 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k, 0, \ldots\ldots)$。我们记

$$s_\nu(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\alpha^i \in A_\nu} \mathbf{x}^{\alpha^i},$$

其中 A_ν 是权向量的多重集，也就是说，对于每个 α，都有 $K_{\nu\alpha}$个相等的向量（组合）等于 α。该展开中出现的项数为 $D := s_\nu(1^k) = O(d\binom{k}{2})$. 这个上界来自将形状为 ν 且项为 $\le k$ 的半标准杨表与构成边长为 k、底边为 ν的三角形的 Gelfand–Tsetlin 模式对应起来；而这些模式少于选取$\binom{k}{2}$个数的方式。

接下来，我们展开 $s_\mu[s_\nu(x_1, \ldots\ldots, x_k)] = s_\mu(\mathbf{x}^{\alpha^1}, \ldots\ldots, \mathbf{x}^{\alpha^D})$。这一展开将含有 M 个带有 $M \le D^m$ 的单项式，设它们的次数为 $\beta^1, \ldots\ldots, \beta^M$，从而

$$s_\mu[s_\nu(x_1, \ldots, x_k)] = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{x}^{\sum_{r=1}^{D} \beta^i_r \alpha^r}.$$

现在写出 $s_\lambda(x_1, \ldots\ldots, x_k) = \det[x_i^{\lambda_j+k-j}]^k_{i,\,j=1} \det[x_i^{k-j}]^k_{i,\,j=1}$利用 Weyl 行列式公式，代入 方程 (6.1) 并将两边同乘以范德蒙德分母：

$$\sum_\lambda a^{\lambda}_{\mu,\nu} \det[x_i^{\lambda_j+k-j}] = \det[x_i^{k-j}] s_\mu[s_\nu(x_1, \ldots, x_k)] = \det[x_i^{k-j}] \sum_{i=1}^{M} \mathbf{x}^{\sum_{r=1}^{D} \beta^i_r \alpha^r}$$

最后，我们可以展开该行列式，并将系数 $a^{\lambda}_{\mu,\,\nu}$ 作为该单位元两边在$x_1^{\lambda_1+k-1} \cdots x_k^{\lambda_k}$处的系数提取出来，并写出

$$a^{\lambda}_{\mu,\nu} = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{i=1}^{M} \mathbf{1}[\lambda + \sigma - \mathrm{id} = \sum_{r=1}^{D} \beta^i_r \alpha^r] \tag{6.2}$$

于是，计算总数以 $k!MD = O(D^m) = O(d^m\binom{k}{2})$ 为上界，并且当 m，k 固定时为多项式。

□

注 6.3. 如参考文献 [24] 所示，我们已经知道，对于 $\nu = (3)$，$\mu = (m)$，计算复合运算的问题是 #P-难的（对于一般的 λ）。因此，即使在这种特殊情况下，我们也不能指望有高效的算法。当 $\ell(\lambda)$ 固定时，目前尚无已知的困难性结果，我们将其作为一个开放问题提出。

问题 6.4。设 $\mu \vdash m$、$\nu \vdash d$ 和 $\lambda \vdash md$ 满足 $\ell(\lambda) = k$，其中 $= k$ 是一个固定整数。是否存在一个在 md 时间内运行的多项式时间经典算法来计算 $a^{\lambda}_{\mu\nu}$?

致谢

我们感谢 Christian Ikenmeyer、Vojtech Havlicek 和 Martin Larocca 的富有成效的讨论。MC 和 PP 感谢欧洲研究委员会（ERC 资助协议编号 818761）、VILLUM基金会通过 QMATH卓越中心（资助编号 10059）以及诺和诺德基金会（资助编号 NNF20OC0059939“量子生命”）提供的经费支持。PP 感谢丹麦电子基础设施联盟（DeiC）提供的量子算法博士奖学金以及 INdAM-GNFM 的支持。GP 获得了美国国家科学基金会资助 CCF:2302174 和 AMS Birman奖学金的部分支持，并于 2025年 秋季驻留 ICERM 期间获得支持（美国国家科学基金会资助 DMS-1929284）。MW 感谢欧盟（ERC SYMOPTIC 项目，101040907）、德国研究基金会（DFG，德国研究基金会，556164098）、德国研究基金会（DFG，德国研究基金会）通过德国卓越战略（EXC-2111，390814868）以及德国联邦研究、技术与航天部（QuSol，13N17173）提供的支持。本研究部分工作是在 MW 访问斯坦福大学的 Q-FARM 和莱因韦伯理论物理研究所，以及加州大学伯克利分校的 Simons计算理论研究所期间完成的。AWH 获得了 Simons 基金会（ MP-SIP-00001553，AWH ）和富布赖特学者资助的支持。

A How 证明#BQP 中表示论重数 s

在本附录中，我们概述一种证明表示论重数相关 #BQP 结果的一般方法，该方法涵盖了本文及先前工作的结果。在本附录中，我们将“模”和“表示”这两个术语互换使用。

设 G 为一个群，且 V 为一个有限维 G-表示，并可分解为不可约表示之直和。[4] 也就是说：

$$V \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \underbrace{V_\lambda \oplus \cdots \oplus V_\lambda}_{m_\lambda(V)} \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \otimes \mathbb{C}^{m_\lambda(V)}, \tag{A.1}$$

其中 Λ 标记了 G 的不可约有限维酉表示的同构类。我们关注的问题是：给定群 G、表示 V 以及标签 $\lambda \in \Lambda$ （以某种编码给出）作为输入时，计算重数 $m_\lambda(V)$。

命题 A.1。 若给定一个约化群 G 和一个表示 V 如 式 (A.1)所示，且存在一个模型表示 V_{model} 使得 G 满足：

- 存在一种可高效实现的 G-等变等距嵌入 $V \hookrightarrow V_{\text{模型}}$，
- 存在一种高效的量子算法，可对 $V_{\text{模型}}$执行强傅里叶采样，

那么，计算重数 $m_\lambda(V)$ 的问题属于 $\#\mathsf{BQP}$，而判定 $m_\lambda(V) > 0$ 是否属于 QMA （或者，在上述过程可精确实现时，是否属于 QMA_1 ）的问题也可以解决。

证明。 该算法通过应用嵌入 $V \hookrightarrow V_{\text{model}}$ ，随后对 V_{model}执行强傅里叶采样来实现。若标记不可约表示的测量结果为 λ，且相对于不可约表示基态的测量结果 V_λ 给出任意选定基态 p 的标签 $|p\rangle \in V_\lambda$，则接受。电路示意图见 图3。注意，该电路实现的是投影测量。以概率 1 被接受的见证空间是子空间

$$|p\rangle \otimes \mathbb{C}^{m_\lambda(V)} \subseteq V_\lambda \otimes \mathbb{C}^{m_\lambda(V)} \subseteq V,$$

其维数为 $m_\lambda(V)$。 □

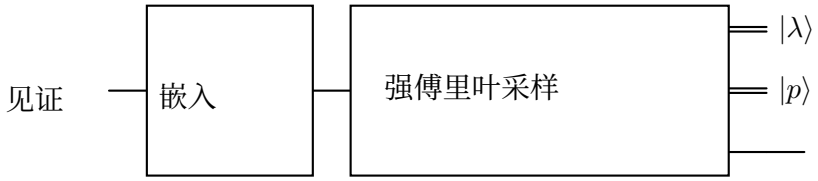

图3：用于证明表示论重数属于 #BQP 的量子电路：给定表示 V 中的一个见证态，首先将其嵌入到模型表示 V_{model} 中。随后进行强傅里叶采样；如果测量结果为 λ，且标签为任意一个固定基向量 $|p\rangle \in V_\lambda$ 的标签 p，则接受。如果这两个步骤都能高效完成，则该重数属于 #BQP。

注A.2. 我们指出，在上述记号中

$$m_\lambda(V) = \dim \hom_G(V_\lambda, V) = \dim (V \otimes V_\lambda^*)^G ,$$

其中 V_λ^* 是 V_λ 的对偶表示，且 $(\cdot)^G$ 是不变子空间。由于平凡表示的维数为一，如果能够高效地执行 G-等变嵌入$V \otimes V_\lambda^* \hookrightarrow V_{\text{model}}$，那么只需对 V_{model}进行弱傅里叶采样；如果测量结果是 G的平凡表示对应的标签，则接受。这实际上是文献 [17, 6, 29] 在处理克罗内克系数时采用的方法的一部分，其中 $[\lambda]$在 $[\mu] \otimes [\nu]$ 中的重数被解释为 S_n中的 $[\lambda] \otimes [\mu] \otimes [\nu]$ (S_n 的表示是自对偶的。

我们给出一些应用这一一般构造的示例：

例 A.3 (复合运算)。 对于 问题 1.1中的复合系数，嵌入步骤 is

$$V \coloneqq \{\mu\}\downarrow_H^G \hookrightarrow V_{\text{model}} \coloneqq (\mathbb{C}^n)^{\otimes |\mu| \cdot |\nu|},$$

通过两轮逆舒尔变换实现（见 公式(1.3)及其下文的讨论）。在此情形下，对模型表示进行强傅里叶采样就变成了强 舒尔采样，可通过先进行舒尔变换再测量来高效实现。

例 A.4 (分支重数)。 对于 问题 2.1中的分支重数，可以采用一种与 问题 1.1几乎完全相同的构造，只不过是同时处理多个表示。给出的量子算法见 第 5.2 节，由于存在中间测量，略有不同。这样做只是为了简化算法和分析；完全可以在不损失任何效果的情况下将其改为相干操作，从而得到一种形式如 图3所示的算法。

例 A.5 (克罗内克)。 尽管克罗内克系数$g_{\lambda,\ \mu,\ \nu}$属于分支重数的一般框架，但也可以通过上述方法直接处理。设 λ，μ，ν是 n 的分拆，且每个分拆的部分数不超过 d。那么，首先应用嵌入即可处理这些克罗内克系数

$$V \coloneqq [\lambda] \otimes [\mu] \otimes [\nu] \hookrightarrow V_{\text{model}} \coloneqq (\mathbb{C}^d)^{\otimes n} \otimes (\mathbb{C}^d)^{\otimes n} \otimes (\mathbb{C}^d)^{\otimes n} \cong (\mathbb{C}^{d^3})^{\otimes n},$$

使用三次逆舒尔变换，随后进行弱傅里叶采样；若测量结果对应于平凡 S_n表示（如注A.2 所述，也可以类似地使用两次逆舒尔变换和强施尔采样）。文献 [17] 采用了这种方法的一个近似变体，将嵌入替换为对子空间 $V \subseteq V_{\text{model}}$的投影测量。

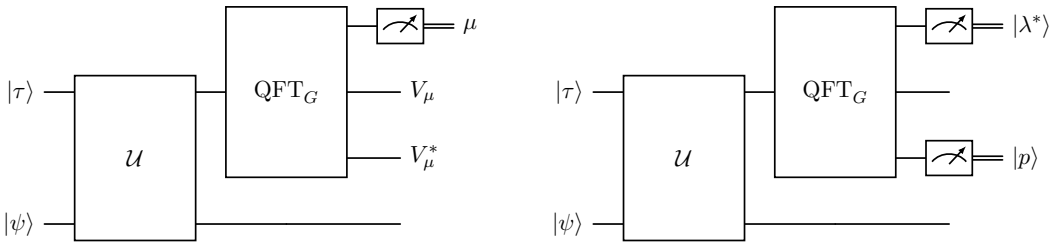

图4：左：广义相位估计（GPE）电路（省略可选的反计算）。右：支撑推论 A.6的电路。它是图3的一个特例。

A.1 广义相位估计

文献 [6, 29] 中的方法稍复杂一些，依赖于广义相位估计（*GPE*）算法 [26]。我们回顾这一基本方法，并说明它如何自然地契合命题 A.1。设 G 为一个有限群，并用 量子傅里叶变换$_G$ 表示傅里叶变换，它将

$$\mathrm{QFT}_G\colon \mathbb{C}[G] \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\mu\in\Lambda} V_\mu \otimes V_\mu^*, \tag{A.2}$$

其中，$\mathbb{C}[G]$ 是群环，其标准基为 $|g\rangle$，由群元素 $g \in G$标记。它在 G 的左正则作用和右正则作用下均保持等变；我们用 R表示后者：$\mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$，即 $R(g)\,|h\rangle = |hg^{-1}\rangle$。现在，考虑一个酉表示 ρ：$G \to \mathrm{U}(V)$，并将受控群作用记为 $\mathcal{U}$，即如下酉算子

$$\mathcal{U}\colon \mathbb{C}[G]\otimes V \to \mathbb{C}[G]\otimes V, \quad |g\rangle \otimes |\psi\rangle \mapsto |g\rangle \otimes \rho(g)\,|\psi\rangle$$

接下来，GPE 按如下步骤进行 [26, p. 158]：给定输入态 $|\psi\rangle \in V$，

1. 准备一个希尔伯特空间为$\mathbb{C}[G]$ 的寄存器，并将其制备为均匀叠加态 $|\tau\rangle := \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{g\in G} |g\rangle$，[5]2. 应用 $\mathcal{U}$，3. 对步骤 1 中添加的寄存器进行傅里叶变换量子傅里叶变换$_G$，并测量 μ，该标签对应于式 (A.2)中的直和分量

可选地随后进行一次反计算（见图 4左侧）。前两步实现一个等距映射

$$J\colon V \hookrightarrow V_{\mathrm{model}} := \mathbb{C}[G]\otimes V, \quad |\psi\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{g\in G} |g\rangle \otimes \rho(g)\,|\psi\rangle\,.$$

重要的是，该等距映射是 G-等变的，其中 G 通过$\mathbb{C}[G]$上的右正则表示作用于 V_{model}，即 $g \mapsto R(g) \otimes \mathbb{1}$。事实上，对每个 $g \in G$，我们有

$$J\rho(g)\,|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{h\in G} |h\rangle \otimes \rho(hg)\,|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{h\in G} |hg^{-1}\rangle \otimes \rho(h)\,|\psi\rangle = (R(g)\otimes \mathbb{1})J\,|\psi\rangle\,.$$

因此，作为命题 A.1的直接推论，我们得到如下结果。

推论 A.6. 若给定有限群 G 和酉表示 V，并且存在可高效实现傅里叶变换 量子傅里叶变换$_G$ 及受控群作用 $\mathcal{U}$的量子电路，那么计算重数 $m_\lambda(V)$ 的问题属于 #BQP；而判定$m_\lambda(V) > 0$ 是否成立的问题属于 QMA （如果上述操作可以精确实现，则属于 QMA_1）。

[4]例如，若 G是约化的，或 V 是酉表示，则属于这种情况。[5]这可以通过制备对应于平凡不可约表示的基态并施加逆傅里叶变换来高效完成。

证明。 这可通过归约到 命题 A.1得到，其中 $V_{\text{model}} \coloneqq \mathbb{C}[G] \otimes V$。根据假设，我们可以按照上文所述，通过执行 GPE 的前两个步骤，高效实现嵌入 $J\colon V \hookrightarrow V_{\text{model}}$。对 V_{model} 上的右正则作用进行强傅里叶采样，可以通过应用 量子傅里叶变换$_G$，测量 μ 在 式 (A.2)中对应直和项的标签（如同 GPE 的最后两个步骤），但输出 μ^*，随后测量寄存器 V_μ^*。因此，由 命题 A.1 即可得到结论（见 图 4右侧的最终电路）。 □

我们现在讨论文献 [6, 29] 中的方法及其与推论 A.6 的关系。为了提取克罗内克系数 $g_{\lambda,\mu,\nu}$，文献 [6] 在三个 $\mathbf{C}[S_n]$寄存器上进行弱傅里叶采样，当且仅当测量结果分别为 λ, μ, ν时才接受；这会选出 $V = \mathbf{C}[S_n] \otimes \mathbb{C}[S_n] \otimes \mathbb{C}[S_n]$ 的子空间$[\lambda] \otimes [\lambda^*] \otimes [\mu] \otimes [\mu^*] \otimes [\nu] \otimes [\nu^*]$，这一点从式 (A.2) 可明显看出。随后，对 V 上 S_n 的对角左正则作用进行常规 GPE。相应的重数不是克罗内克系数本身，而是它们分别乘以 $\dim[\lambda] \dim[\mu] \dim[\nu]\, g_\lambda$、$\mu$、$\nu$ 后的结果。文献 [29]指出，一种更精细的过程可以在 V 中选出 $[\lambda] \otimes [\mu] \otimes [\nu]$ 的单个副本，从而得到一种能够精确计算克罗内克系数的 #BQP 算法。为此，他们对杨子群 $S_\lambda, S_\mu, S_\nu \subseteq S_n$ 使用 GPE。在他们的设定中，这与我们在推论 A.6 的证明中对 V_λ^* 寄存器进行测量具有相同效果（见图3右侧）。

例 A.7 （限制系数）。回顾一下，限制系数 r_λ^μ 定义为通过将 $S_n \subset$一般线性群(n) 嵌入为置换矩阵，得到的斯佩希特模在韦伊模中的重数。也就是说，它们定义为不可约 S_n-表示 $[\lambda]$在 $\{\mu\}\downarrow_{S_n}^{\mathrm{GL}(n)}$ 中的重数。我们可以首先嵌入

$$\{\mu\}_{\mathrm{GL}(n)} \hookrightarrow (\mathbb{C}^n)^{\otimes|\mu|},$$

通过应用逆舒尔变换（与复合运算的情形相同）。由于 S_n 在 $\mathbb{C}^n$ 上的受控群作用可以高效实现，并且存在对称群 S_n的高效量子傅里叶变换，因此我们可以应用推论 A.6 ，得出限制系数属于#BQP。

参考文献

[1] M. Altunbulak 和 A. Klyachko。重新审视泡利原理。《数学物理通讯》，282(1):287–322，2008年。3, 4 [2] D. Bacon、I. Chuang 和 A. Harrow。用于舒尔变换和克莱布施-戈登变换的高效量子电路。《物理评论快报》，97(17):170502，2006年10月。16[3] A. I. Barvinok。固定维数多面体中整数点计数的多项式时间算法。《运筹学数学》，19(4):769–779，1994年。21[4] R. Beals。对称群上的傅里叶变换的量子计算。载于：第29届 ACM计算理论研讨会年会论文集——STOC '97，第48–53页，得克萨斯州埃尔帕索，美国，1997年。ACM出版社。6[5] R. E. Borland 和 K. Dennis。秩为六的三体费米子波函数的单粒子矩阵条件。《物理学杂志B：原子与分子物理学》，5(1):7–15，1972年1月。3[6] S. Bravyi、A. Chowdhury、D. Gosset、V. Havlíček 和 G. Zhu。Kronecker 系数的量子复杂性。PRX Quantum，5(1):010329，2024年。2, 4, 5, 7, 25, 26, 27[7] M. Brion。复合运算的稳定性质：关于 Foulkes 的两个猜想。《数学手稿》，80 371，1993 347 2 : – 。[8] A. Burchardt、J. Fei、D. Grinko、M. Larocca、M. Ozols、S. Timmerman 和 V. Visnevskyi。高维量子舒尔变换，2025年。arXiv:2509.22640 [quant-ph]。6, 16[9] P. Bürgisser、M. Christandl 和 C. Ikenmeyer。复合运算中的偶分拆。《代数学杂志》，328(1):322–329，2011年2月。3[10] P. Bürgisser、M. Christandl、K. Mulmuley 和 M. Walter。矩多面体中的成员资格问题属于 NP 和 coNP。《SIAM计算杂志》，46(3):972–991，2017年。2[11] P. Bürgisser 和 C. Ikenmeyer。计算克罗内克系数的复杂性。FPSAC'08——第20届形式幂级数与代数组合学国际会议，DMTCS论文集，第 AJ 卷，2008年1月。5, 21

[12] P. Bürgisser 和 C. Ikenmeyer。几何复杂性理论与张量秩。载于：第四十三届 ACM计算理论研讨会（STOC ’11）论文集，第509–518页，美国纽约州纽约市，2011年。计算机协会。3[13] P. Bürgisser 和 C. Ikenmeyer。判定 Littlewood–Richardson 系数的正性。SIAM 离散数学杂志，27(4):1639–1681，2013年。2[14] P. Bürgisser、C. Ikenmeyer 和 J. Hüttenhain。永久式与行列式：无法通过饱和得到。《美国数学会会刊》，145(3):1247–1258，2017年。3[15] P. Bürgisser、C. Ikenmeyer 和 G. Panova。几何复杂性理论中不存在出现障碍。美国数学会杂志，32(1):163–193，2019年。3[16] M. Christandl、B. Doran 和 M. Walter。计算李群表示的重数。载于：2012年 IEEE 第五十三届计算机科学基础年会，第639–648页。IEEE，2012年。2, 4, 21[17] M. Christandl、A. Harrow 和 M. Walter。在代数几何中的算法与复杂性重聚研讨会上的报告。M. Walter 于2015年12月在伯克利的 Simons计算理论研究所作报告。2, 25[18] M. Christandl、A. W. Harrow 和 G. Mitchison。关于非零克罗内克系数及其揭示的谱信息。《数学物理通讯》，270(3):575–585，2007年。3[19] M. Christandl 和 G. Mitchison。量子态的谱与对称群的克罗内克系数。《数学物理通讯》，261(3):789–797，2006年。3[20] A. J. Coleman 和 V. I. Yukalov。约化密度矩阵：Coulson 的挑战。化学讲义，第72卷。施普林格·柏林·海德堡，2000年。3[21] L. Colmenarejo、R. Orellana、F. Saliola、A. Schilling 和 M. Zabrocki。复合系数之谜。代数组合学中的开放问题，110:275–292，2024年。2[22] M. de Boeck、R. Paget 和 M. Wildon。对称函数的复合与最高权表示。《美国数学会汇刊》，374(11):8013–8043，2021年。2[23] J. Dörfler、C. Ikenmeyer 和 G. Panova。关于几何复杂性理论：重数障碍强于出现障碍。SIAM 应用代数与几何杂志，4(2):354–376，2020年。2, 3[24] N. Fischer 和 C. Ikenmeyer。复合系数的计算复杂性。《计算复杂性》，29:1–43，2020年。2, 21, 22, 23[25] H. Foulkes。基型系数中至多四次的五次型和六次型伴随式。《伦敦数学会杂志》，1(3):205–209，1950年。4[26] A. W. Harrow。相干经典通信和舒尔变换在量子信息论中的应用，2005年。博士论文。6, 7, 16, 26[27] C. Ikenmeyer、K. Mulmuley 和 M. Walter。关于克罗内克系数的消失。《计算复杂性》，26:949–992，2017年。2[28] C. Ikenmeyer 和 G. Panova。几何复杂性理论中的矩形克罗内克系数与复合运算。《数学进展》，319:40–66，2017年。3[29] C. Ikenmeyer 和 S. Subramanian。关于克罗内克系数量子复杂性的一点说明。arXiv:2307.02389，2023年。2, 4, 5, 7, 25, 26, 27[30] G. James 和 A. Kerber。《对称群表示论》。数学及其应用百科全书。剑桥大学出版社，1984年。7[31] T. Kahle 和 M. Michałek。复合运算与格点计数。《计算数学基础》，16(5):1241–1261，2016 年。2[32] A. A. Klyachko。量子边缘问题与对称群的表示。arXiv 电子预印本 quant-ph/0409113，2004年。3[33] A. A. Klyachko。量子边缘问题与 N-可表示性。arXiv 电子预印本 quant-ph/0511102，2005年。4[34] A. Knutson 和 T. Tao。一般线性群$_n(\mathbb{C})$ 张量积的蜂巢模型 I：饱和猜想的证明。《美国数学会杂志》，12(4):1055–1090，1999年。2[35] H. Krovi。一种高效的高维量子舒尔变换。Quantum，3:122，2019年2月。16[36] M. Larocca 和 V. Havlicek。用于计算表示论重数的量子算法。arXiv:2407 17649，2024年 2, 6 。. [37] D. E. Littlewood。多项式伴随式与不变矩阵。《伦敦数学会杂志》，s1-11(1):49–55，1936年。1[38] D. E. Littlewood。正交群、辛群和对称群的特征乘积与复合。《加拿大数学杂志》，10:17–32，1958年。1, 8

[39] D. E. Littlewood 和 A. R. Richardson。《群特征标与代数》。伦敦皇家学会哲学汇刊。A辑，《数学或物理学论文》，233 141, 1934年 721 730 99 1 (-): – . [40] I. G. Macdonald。《对称函数与 Hall多项式》。牛津大学出版社，第 2 版，1998年。8[41] K. Mulmuley、H. Narayanan 和 M. Sohoni。几何复杂性理论 III：关于判定 Littlewood–Richardson系数是否非零。《代数组合学杂志》，36(1):103–110，2012年。2[42] F. D. Murnaghan。对称群不可约表示 Kronecker积的分析。《美国数学杂志》，60(3):761–784，1938年。1[43] R. Orellana、F. Saliola、A. Schilling 和 M. Zabrocki。复合运算与均匀块置换代数。《代数组合学》，5(5):1165–1203，2022年。2[44] R. Orellana、F. Saliola、A. Schilling 和 M. Zabrocki。从拟对称到 Schur展开：及其在对称链分解和复合运算中的应用。《电子组合学杂志》，31(4)，2024年。2[45] I. Pak。什么是组合解释？载于《代数组合学中的开放问题》，第 110 卷《纯数学专题讨论会论文集》，第 191–260 页。美国数学会，普罗维登斯，RI，2024年。2, 5[46] I. Pak 和 G. Panova。关于计算克罗内克系数的复杂性。《计算复杂性》，26 36，2017年 1 5, 21 : – . [47] I. Pak、G. Panova 和 J. P. Swanson。某些复合运算系数和克罗内克系数的组合解释，2025年。2, 22 [48] I. Pak 和 C. Robichaux。代数组合学中的带符号组合解释。arXiv:2406 13902，2024年 5 . . [49] G. Panova。代数组合学中的计算复杂性。载于《数学当前进展》。哈佛大学，波士顿国际出版社，2023年。2, 5[50] G. Panova。结构常数的复杂性与渐近性质。载于《代数组合学中的开放问题》，第 110 卷《纯数学专题讨论会论文集》，第 61–86 页。美国数学会，普罗维登斯，RI，2024年。2[51] G. Panova。表示论重数的多项式时间经典算法与量子算法。arXiv预印本 arXiv:2502.20253，2025年。2, 5, 21, 22[52] B. E. Sagan。《对称群：表示、组合算法与对称函数》，第 203 卷。施普林格，2013年。7[53] R. Stanley。《枚举组合学》，第 2 卷。剑桥大学出版社，第 1 版，1999年。7, 8[54] R. P. Stanley。代数组合学中的正性问题与猜想。《数学：前沿与展望》，第 295–319 页，2000年。1, 4