arXiv:2602.08480v1 [math.CT] 9 Feb 2026

张量三角几何笔记

GREG STEVENSON

Contents

1. 概述 1 2. 斯通对偶与（对偶）谱 2 3. 谱的应用 17 4. 范畴化格与局部到整体原理 34 参考文献 57

1. Overview

这些是我在2025年10月举行的奥伯沃尔法赫研讨会“张量三角几何与相互作用”上所作讲座的笔记。

这些笔记旨在通过格论的视角，介绍小范畴和大范畴的张量三角几何。我们不求面面俱到，这一点也体现在内容和参考文献中。例如，我们对三角化预备知识着墨不多，尤其是对紧生成范畴而言。

对于本质小范畴，现今所采用的方法已相当标准。我们先简要介绍格、框架和斯通对偶理论。在进一步介绍张量三角范畴（tt-范畴）的一些预备知识后，我们运用斯通对偶来定义本质小 tt-范畴的谱。整个构建与交换代数中的常见论述平行进行。这样一来，谱便自然而然地具有一个泛性质。我们将进一步阐述这一泛性质，并讨论由它自然产生的支撑；这些支撑清楚地揭示了它与 Balmer 原始定义之间的联系。

接下来我们重点讨论例子。延续交换代数的类比，我们研究多项式环 $k[x]$ 上的完美复形。在这个例子中，几乎所有内容都可以手工算出。随后，我们讨论一些推动这套理论发展的主要例子类别。本章的例子部分最后将以一个或多或少完整的 tt-理论证明作结：该证明运用 Thomason 定理，计算拟紧拟分离概形上完美复形的谱。据我所知，我们给出的论证完全避开了张量幂零性的工具，在其他文献中也未曾出现（尽管它已在私下流传多年）。

在最后一章中，我们研究刚性紧生成张量三角范畴的支撑。这里的方法颇为新颖（或许称其为实验性方法更为准确），我们再次优先采用格论方法。其基本对象是一个“范畴化格”，这一概念受到 Clausen 和 Scholze 的范畴化局部概念启发。这种方法的优势在于，我们能够以统一的方式处理小支撑与大支撑——无论是 smashing 的，还是位于紧对象谱中的——同时也能涵盖

普适例子以及可能出现的其他例子。最后，我们证明了局部到整体原理：按照我们新的一般性表述，该原理适用于基于T_D 具有康托尔-本迪克松秩的空间框架的支撑。

从某种意义上说，这些笔记是对 [37] 中引言的补充。我们优先讨论了不同的主题，考察了不同的例子；此外，这些笔记篇幅更长，也包含更多新材料，反映了我们对这一主题日益深入的理解。

1.1. **致谢**。 我感谢共同组织者 Nat`alia Castellana Vila 和 Henning Krause。他们不仅创造了说服我撰写这些笔记的小奇迹，还在准备过程中发挥了不可或缺的作用。当然也要感谢奥伯沃尔法赫数学研究所对本次研讨会的支持。非常感谢 Scott Balchin、Martin Gallauer、Juan Omar Gom´ez 和 Sira Gratz 提供的宝贵意见。

这些笔记的撰写得到丹麦自由研究基金（资助编号：10.46540/4283-00116B）的部分支持。前几节是在阳光明媚的冲绳撰写的；我感谢冲绳科学技术大学院大学（OIST）通过理论科学访问计划（TSVP）为我提供了非常愉快的工作条件。

2. Stone duality and the (dual) spectrum

本章旨在介绍本质小 tt-范畴的谱，即 Balmer 谱。我们将首先介绍一些格论要素，用于构造谱，随后参照交换环的代数几何中通常的概念，平行地发展谱的理论。

2.1. **格论**。 我们的研究将以格论为基础。格与拓扑空间之间有着深刻的联系。每个拓扑空间都可以导出一个性质良好的格，即其开子集的集族。对于许多值得研究的空间，这个格能够完全决定该空间，从而在某些空间与其开子集格之间建立一种称为斯通对偶的等价关系。

有鉴于此，我们将介绍一些定义，用以捕捉空间开子集集族的本质：并集、交集、无限分配性，以及点的抽象版本。

定义 2.1.1. 格 是一个偏序集 $(L, \leq)$，其中任意一对元素 $m, n \in L$ 都存在最小上界 $m \vee n$，称为 m 和 n 的并；也存在最大下界 $m \wedge n$，称为 m 和 n的交 。

我们称 L是有界 的，如果它有最大元 1 和最小元 0。

我们称 L 是完备 的，如果 L 的任意元素集 S 在 L中都有上确界 $\vee S$ 和下确界 $\wedge S$，分别称为它们的并和交。

注记 2.1.2。 有几点需要说明：

(1) 我们简单地将 L 称为格，并省略默认存在的偏序。(2) 格是偏序集的一种性质，而不是一种结构。有界或完备也是如此。(3) 作为二元运算的交决定了 L 上的偏序，因为 $m \leq n$ 当且仅当 $m \wedge n = m$；并运算也同样如此。(4) 格 L是完备的，当且仅当任意集合的并都存在：我们可以定义子集 S 的交为

$$\bigwedge S = \bigvee \{m \in L \mid m \leq s \text{ for all } s \in S\}.$$

以类似的方式，所有交的存在蕴含并的存在。

我们将特别关注满足分配律之强形式的完备格。

定义 2.1.3. 格 L 是分配的，如果对任意三个元素 $l, m, n \in L$，我们有

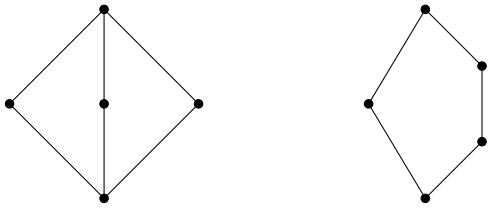
$$l \wedge (m \vee n) = (l \wedge m) \vee (l \wedge n).$$

也就是说，交对并分配。

注 2.1.4. 这等价于对偶公式 $l \vee (m \wedge n) = (l \vee m) \wedge (l \vee n)$，对所有$l, m, n \in L$成立。

练习 2.1.5. 证明：对格 L 中的所有三元组元素l, m, n，我们有 $l \wedge (m \vee n) = (l \wedge m) \vee (l \wedge n)$，当且仅当对所有三元组元素有 $l \vee (m \wedge n) = (l \vee m) \wedge (l \vee n)$。

例 2.1.6. 有两个极小非分配格，可以表示如下：



其中，我们将最底层的节点视为极小元，并且沿着页面上方的边移动时，序关系递增。任何非分配格都包含其中一个作为子格。

例 2.1.7. 任何子集格，也就是说，任何按包含关系排序的某个集合的幂集的子格，都是分配的，因为交集对（任意）并集满足分配律。例如，若 A 是一个集合，则幂集 $\mathcal{P}(A)$ 是一个完备分配格。若A 是无限的，则有限子集的集合 $\mathcal{P}^{\omega}(A)$ 是一个分配格，但既不完备也无界。

De定义 2.1.8. 完备格 F 是一个框架，如果它满足以下无限分配律：对于任意子集 $S \subseteq F$ 和任意元素 $f \in F$

$$f \wedge (\bigvee_{s \in S} s) = \bigvee_{s \in S} (f \wedge s).$$

注记 2.1.9。由于 F 是完备的，因此它是一个有界格。我们用 0 和 1 分别表示 F的底元和顶元（即最小元和最大元）。取 S 为一个含两个元素的集合，即可看出框架是一个分配格。

例 2.1.10。对我们而言，典型的例子如下。设 X 是一个拓扑空间。我们可以考虑开子集的集合 $\Omega(X)$，它在包含关系下构成偏序，其中的开子集属于 X。这是一个完备格，其并由并集给出。格 $\Omega(X)$ 是一个框架。

练习 2.1.11。描述 $\Omega(X)$ 中的交，并证明它是一个框架。

例 2.1.12。一个重要的特殊情形是框架

$$\mathbf{2} = \Omega(\{*\}) = \{0, 1\}$$

它是唯一一个恰好包含两个元素的框架。

例 2.1.13。 设 X 为一个拓扑空间。若开子集 $A \subseteq X$ 满足 正则 条件，即$A = \operatorname{int} A$ ，也就是说 A 是其闭包的内部，则称其为正则开子集。 X的正则开子集所构成的偏序集记为 $\Omega^{\mathrm{reg}}(X)$，它是一个框架。一组 $\{A_i \mid i \in I\}$ 正则开子集的并定义为

$$\bigvee_i A_i = \operatorname{int} \overline{\bigcup_i A_i}.$$

一般而言，框架 $\Omega(X)$ 和 $\Omega^{\mathrm{reg}}(X)$ 的表现截然不同。为了理解这一点，我们需要引入帧态射和点的概念。

定义 2.1.14。 设 E 和 F 是框架。框架态射 $f\colon E \longrightarrow F$ 是一个保持任意并和有限交的函数。特别地，框架映射保持序，并保持顶元和底元。我们用 Frm 表示相应的范畴。

类似地，若 L 和 M 是完备格，则完备格态射 $L \longrightarrow M$ 是一个保持任意并和有限交的函数。

定义 2.1.15。 设 F 是一个框架。 F 的一个点是一个态射 $p\colon F \longrightarrow \mathbf{2}$。我们用 $\mathrm{pt}(F)$ 表示 F 的点集。为其赋予如下拓扑：$\mathrm{pt}(F)$ 的开子集为

$$U_f = \{p \in \mathrm{pt}(F) \mid p(f) = 1\}$$

当 f 遍历 F 的各个元素时所得的集合。

这定义了一个函子 $\mathrm{pt}\colon \mathrm{Frm}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Top}$，从框架到拓扑空间。pt 对态射的作用由显而易见的复合给出，即对于一个框架映射$\phi\colon F \longrightarrow F'$，我们有

$$\mathrm{pt}(\phi)(F' \xrightarrow{p} \mathbf{2}) = (F \xrightarrow{\phi} F' \xrightarrow{p} \mathbf{2}).$$

注 2.1.16。 这个定义的直观理解是，拓扑空间之间的映射$f\colon X \longrightarrow Y$会诱导出相应的框架映射 $\Omega(Y) \longrightarrow \Omega(X)$，它将 Y 的一个开集U映到 $f^{-1}(U)$。因此， X 的一个点，也就是从单点空间 $*$出发的态射 $* \longrightarrow X$，会产生框架 $\Omega(X)$ 中的一个点 $\Omega(X) \longrightarrow \Omega(*) \cong \mathbf{2}$ 。

注 2.1.17。 范畴 $\mathrm{Frm}^{\mathrm{op}}$ 称为*locale*范畴。因此，框架与 locale 是同类对象，但态射不同（方向相反）。使用 locale 可以减少 ops 的出现。不过，我们会遇到许多序反转，无法完全避免，因此最好从现在开始习惯这一点。

注记 2.1.18。 空间 $\mathrm{pt}(F)$有时也称为 F 的谱 ，记作 $\mathrm{Spec}(F)$。

练习 2.1.19。 设 F 是一个框架。验证以下子集

$$U_f = \{p \in \mathrm{pt}(F) \mid p(f) = 1\}$$

构成 $\mathrm{pt}(F)$上的一个拓扑的开子集。

定义 2.1.20。 设 L 是一个有界分配格。 L 的一个理想 I 是一个向下闭且向上有向的子集，即 I 与 L 的任意元素取交后仍属于 I ，并且对有限并封闭。对偶地， L的子集 F 称为滤子 ，如果 F 是上闭且向下有向的，也就是说，与 L 的任意元素取并后仍属于 F ，并且对有限交封闭。

P 的 L 理想是素 的，当且仅当 P 是一个真子集，并且每当 $m \wedge n \in P$ 时，m 或 n 中至少有一个属于 P。素滤子的概念是对偶的。

给出一个 $p\colon\ F \longrightarrow \mathbf{2}$ 的态射，等价于指定 $p^{-1}(0)$（它是 F的一个素理想），或者指定 $p^{-1}(1)$（它是 F的一个素滤子）。

定义 2.1.21。 框架 F 中的元素 $\mathfrak{p}$ 称为交不可约或素，如果只要$m \wedge n \leq \mathfrak{p}$，对于 $m, n \in F$，就有 $m \leq \mathfrak{p}$ 或 $n \leq \mathfrak{p}$。

习题 2.1.22。 设 L 是有界分配格。证明，按包含关系排序的理想格 Idl(L) 是一个框架。然后证明， L 的理想 P 是素理想，当且仅当它在 Idl(L) 中交不可约。

引理 2.1.23。 设 F 是一个框架。将 F 的点 p 映到 $\vee p^{-1}(0)$，并将素元 $\mathfrak{p}$ 映到如下定义的点：把素理想 $\{f \in F \mid f \leq \mathfrak{p}\}$ 中的元素映到0 。这两个映射互为逆双射，建立了 $\mathrm{pt}(F)$ 与 F 的素元集合之间的双射。

证明。 练习。 □

例 2.1.24。 考虑 $X = \mathbb{R}$ 是实直线的情形。如果我们考虑 Ω(ℝ)，那么对于每个元素 $a \in \mathbb{R}$，通过以下方式我们得到一个点 p_a

$$p_a(U) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \in U \\ 0 & \text{if } a \notin U \end{cases}$$

事实上，这些正是 Ω(ℝ) 的点。

函子 pt 和 Ω 紧密相连。

定理 2.1.25。 存在一个伴随

$$\mathsf{Frm}^{\mathrm{op}} \underset{\mathrm{pt}}{\overset{\Omega}{\leftrightarrows}} \mathsf{Top}$$

其中 pt 是Ω的右伴随。

证明。 我们不作完整证明，而只指出单位和余单位如下给出。对于一个框架 F，余单位是框架的映射 $F \longrightarrow \Omega\,\mathrm{pt}(F)$，它将$f \mapsto U_f$发送到；而对于一个空间 X，单位是映射 $X \longrightarrow \mathrm{pt}\,\Omega(X)$，它将 x 发送到由p_x 定义的点

$$p_x(U) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in U \\ 0 & \text{if } x \notin U \end{cases}$$

□

这一结果是斯通对偶 的前身；斯通对偶刻画了框架和空间的满子范畴，在这些子范畴上，上述伴随限制为一个等价。

定义 2.1.26。 若存在一个空间 X 使得 $F \cong \Omega(X)$，则框架 F 称为空间的 。我们将 SFrm 记作 Frm 的满子范畴，它由空间框架组成（这正是 Ω 的本质像）。

注 2.1.27。 还有一个更内在的定义：当且仅当给定元素 $m,\ n \in F$ 满足 $m \not\leq n$ 时， F 才是空间的；此时存在一个 F 中的点 p 见证这一点，即 $p(m) = 1$ 以及$p(n) = 0$。

例 2.1.28。 框架 Ω(ℝ) 是空间的，其点空间恰好是 ℝ。这是定理 2.1.31 的一个特例。另一方面，$\Omega^{\mathrm{reg}}(\mathbb{R})$（ ℝ 的正则开子集构成的框架）不是空间的。

现在让我们介绍相应的空间类。为了与我们的空间框架定义保持一致，我们先用伴随来定义，然后在注释 2.1.30 中给出通常的定义

定义 2.1.29. 若存在一个框架 F 使得 $X \cong \mathrm{pt}(F)$，则拓扑空间 X 称为不可约闭集有泛点的。我们用 Sob 表示 Top 的全子范畴，其对象为不可约闭集有泛点的空间（这恰好是 pt 的本质像）。

注 2.1.30. 一种等价且或许更标准的定义是：若 X 的每个非空不可约闭子集都是某个唯一点的闭包（该点称为此不可约闭子集的泛点），则称其为不可约闭集有泛点的。由此可知， X 是一个 T_0 空间。可以练习验证，对于任意框架 F，$\mathrm{pt}(F)$ 都满足此条件。

现在我们可以陈述斯通对偶。

定理 2.1.31. 定理 *2.1.25* 的伴随限制后，在$\mathsf{SFrm}^{\mathrm{op}}$ 与Sob之间给出一个等价。

实际上，我们甚至可以将这种等价进一步限制到一些相当重要的特殊空间类和格类。

定义 2.1.32。 设 C 是一个完备格。若对于某个元素集合 $S \subseteq C$，每当 $c \leq \vee S$ 时，都存在一个有限子集 $S' \subseteq S$ 使得 $c \leq \vee S'$，则称元素 $c \in C$ 为有限呈示的（有时也称为紧的或拟紧的）。我们用 C^ω表示 C 中有限呈示元的集合。

若格 C 由 C^ω生成，即 C 中的每个元素都是有限呈示元的并，则称其为代数的。

定义 2.1.33。框架 F 是相干框架，若：
(1) F 是代数的；(2) 有限呈示元 F^ω 构成 F的一个有界子格。

注意，有限呈示元总是在有限并下封闭，因此第二个条件实际上要求 F^ω 在二元下确界下封闭，并且最大元1是有限呈示的。

相干框架的态射是将有限表示元映到有限表示元的框架映射。这给出了 Frm 的一个子范畴 CohFrm（不是满子范畴）。

注 2.1.34. 从范畴论的视角来看，所有这些格论定义都十分直观。偏序集不过是一个（骨架）范畴，其中任意两个对象之间至多有一个态射（这样的范畴称为薄范畴）。于是，Top 和底元分别是终对象和始对象，而有界格则是一个具有所有有限极限和余极限的此类范畴。框架则是一个具有极限和余极限的薄范畴，并且有限极限与余极限可交换。相干框架只需满足这样的条件：该范畴是局部有限表示的，且有限表示对象在有限极限下封闭。

事实证明，相干框架自动是空间的。

命题 2.1.35. 若 F 是相干框架，则 F 是空间的。

证明。 我们简要说明如何检验备注 2.1.27 中的条件。假设$x \not\leq y$ 是 F的元素。 x 和 y 都是有限表示元的并，因此存在有限表示元 $a \leq x$ 和 $b \leq y$，使得 $a \not\leq b$。只需找到一个能分离 a 和 b的点；例如，只需找到一个极大理想

属于 F 、包含 b但不包含 a。在这种情况下，相应的点由将极大理想中的元素认作 0 得到（参见引理 2.1.23）。

利用佐恩引理可以找到这样一个理想。我们可以由此入手，因为 b的向下闭包，即它所生成的主理想，由假设并不包含 a 。进一步细节见 [24,定理 II.3.4] □

因此，在斯通对偶下，子范畴CohFrm等价于空间的一个子范畴。这些空间称为相干空间 或谱空间 ，相应的态射是拟紧连续映射。这类空间可刻画如下。

L引理 2.1.36. 空间 X 是相干的，当且仅当满足下列条件 :

(1) X 是不可约闭集有泛点的，即 T_0 且每个非空不可约闭子集都有一个泛点；(2) X 是拟紧的；(3) X 具有由拟紧开子集构成的基；(4) X 的两个拟紧开子集的交集是拟紧的。

证明。 练习。 □

注 2.1.37。 根据 Hochster 的一项结果 [23] ，空间 X 相干当且仅当它是某个交换环的谱，因此也称为谱空间。

注 2.1.38。 给定一个有界分配格 L ，我们可以考虑它的理想格 Idl(L)，这是一个框架。事实上，可以验证 Idl(L) 是一个相干框架，其有限表示元为主理想，即 Idl(L)$^\omega \cong L$。这定义了有界分配格与相干框架之间的范畴等价。因此，相干空间与有界分配格范畴对偶。

2.2. **tt-范畴预备知识**。 现在我们介绍一些关于记号和术语的约定，并记录有关三角范畴和“张量三角”范畴的一些有用事实。

我们通常用 K 表示一个本质小三角范畴。我们用 Σ 表示 K 的悬移函子。

定义 2.2.1. 一个本质小张量三角范畴通常简称为*tt*-范畴，是一个三元组 (K $\otimes$, **1**)，其中 K 是一个本质小三角范畴，而 ($\otimes$, **1**) 是 K 上的对称幺半结构。我们还要求它们以如下意义相容： $\otimes$ 在每个变量上都是正合函子。

注 2.2.2。 我们在讨论中将一概省略结合子等内容。也可以要求由 Koszul 符号支配张量积与悬挂之间的相互作用（从自然性的角度看，这是合理的假设，因为任何作为对称幺半稳定 ∞-范畴的同伦范畴而产生的例子中都会出现这些符号）。对于我们的讨论，可以放心地忽略这一切。事实上，理论的初等方面真正关注的只是 $x\otimes y$何时对 x， $y \in$ K 消失。特别是，它们对张量积在映射上的行为并不太敏感，主要取决于 $x \otimes y$ 与 $y \otimes x$ 是否同时消失。

注记 2.2.3。 我们将假设 $\mathbf{1} \neq 0$ ，以免反复强调这一点，从而避免陈述中出现边界情形。

例 2.2.4。 这类例子有很多，形式各异。下面列举几个典型例子。

（1）设 R 为一个交换环。我们可以考虑

$$\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R) \cong \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}R)$$

R 上完美复形的范畴，即有限生成投射 R-模的有界复形，在同伦意义下。它经由 R 上的张量积成为对称幺半范畴，单位对象为集中在次数 0 的 R。

(2) 第一个例子有一个更一般的版本：对拟紧拟分离概形 X，我们可以考虑 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)$，即 X 上的完美复形，带有左导出张量积，单位为次数 0 的 $\mathcal{O}_X$。

(3) 若 A 是域 k 上的有限维霍普夫代数，则考虑 $\mathrm{mod}\, A$，即有限维右 A-模的范畴。代数 A 自动是自内射的，因此 $\mathrm{mod}\, A$ 是一个 Frobenius 范畴。A 上的 Hopf 代数结构使 $\mathrm{mod}\, A$ 成为带有正合张量积的闭幺半范畴。若 A 是余交换的，则 $\mathrm{mod}\, A$ 是对称幺半的，且其稳定范畴 $\mathrm{mod}A$ 经由 k 上的张量积成为一个 tt-范畴，单位为平凡表示。

（4）有限谱的同伦范畴 $\mathsf{ho}(\mathsf{Sp}^{\omega})$ 通过楔积成为一个 tt-范畴，其单位对象为球谱 S。

（5）可以沿着不同方向推广（1）。设 M 是一个本质小的对称幺半加性范畴。那么 K^{b}(M)，即 M 的有界同伦范畴，是一个 tt-范畴。许多有趣的例子都属于这一形式，例如 Balmer 和 Gallauer 最近关于置换模 [10]的工作就研究了这类范畴。

注 2.2.5。例 2.2.4（3）给出了闭幺半三角范畴的一个自然来源，而这些范畴并不具有对称性。如果 Hopf 代数是拟三角的，那么它们就是编织的，我们将在下文描述的大量内容都可以在其中实现。在真正的非交换情形下，则需要采用不同的方法，并抱有不同的预期。Nakano、Yakimov 和 Vashaw 对非交换情形进行了广泛研究，始于 [28]。在完全没有幺半结构的情形下，也已经有一些研究成果。参见 [22] 及其中的参考文献。

定义 2.2.6。K 的全子范畴 J 称为**厚的**，如果它对平移、锥和直和项封闭。换言之，若 J 是三角子范畴，且 $k \oplus k' \in \mathsf{J}$，则 k 和 k' 都属于 J，那么 J 就是厚的。给定 K 的一组对象 $\mathcal{A} \subseteq$，我们用 thick($\mathcal{A}$) 表示包含 $\mathcal{A}$ 的最小厚子范畴（也称为由 $\mathcal{A}$ 生成的厚子范畴）。

K 的厚子范畴 J 称为**厚张量理想**（或 $\otimes$-理想），如果对于任意 $k \in$K 和 $l \in$ J，张量积 $k \otimes l$ 都属于 J，即

$$\mathsf{K} \times \mathsf{J} \xrightarrow{\otimes} \mathsf{K}$$

经由 J 分解。通常我们会省略“厚”一词，直接称为张量理想，因为我们只考虑对直和项封闭的理想。给定 K 的一组对象$\mathcal{A} \subseteq$，我们用 $\mathrm{thick}^{\otimes}$($\mathcal{A}$) 表示包含 $\mathcal{A}$ 的最小厚张量理想（也称为由 $\mathcal{A}$ 生成的厚张量理想）。

最后，K 的一个真厚张量理想 P 被称为**素理想**：如果对于任意 $k \otimes l \in$ P 和 $k,\ l \in$ K，都有 k 或 l 属于 P。当不会引起混淆时，我们通常简称 K 的素理想或素理想。

练习 2.2.7。证明

$$\mathrm{thick}^{\otimes}(\mathcal{A}) = \mathrm{thick}(a \otimes k \mid a \in \mathcal{A}, k \in \mathsf{K}).$$

由于我们已假定 K 是本质小的，厚子范畴、厚张量理想与素张量理想的各个类各自构成一个集合。这些集合中的每一个都自然地按包含关系排序，从而给出偏序集 Thick(K)、Thick$^{\otimes}$(K) 与 Spc K。

引理 2.2.8. 假设 K 由张量单位生成，即 厚子范畴(**1**) =K。那么每个厚子范畴都是张量理想：

$$\mathrm{Thick}(\mathsf{K}) = \mathrm{Thick}^{\otimes}(\mathsf{K}).$$

证明。 练习。 □

引理 2.2.9. 偏序集 厚子范畴(K) 和厚子范畴$^{\otimes}$(K) 是完备代数格。有限呈示的厚子范畴（分别地，张量理想）恰好是由单个对象生成的厚子范畴（分别地，张量理想）。

证明。 我们只给出 Thick$^{\otimes}$(K) 的证明，因为论证基本相同。要证明其完备性，只需说明任意交存在。任意一族厚张量理想的交集仍是厚张量理想，因此这给出了交（空交即为 K 的全体）。由此可知，或者也可以直接验证，一族张量理想 $\{\mathsf{J}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 的并是由它们的并集生成的张量理想 thick$^{\otimes}$($\cup_\lambda \mathsf{J}_\lambda$)。特别地，对于有限个对象 $k_1, \ldots, k_n$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{thick}^{\otimes}(k_1) \vee \cdots \vee \mathrm{thick}^{\otimes}(k_n) &= \mathrm{thick}^{\otimes}(\mathrm{thick}^{\otimes}(k_1) \cup \cdots \cup \mathrm{thick}^{\otimes}(k_n)) \\ &= \mathrm{thick}^{\otimes}(k_1, \ldots, k_n) \\ &= \mathrm{thick}^{\otimes}(k_1 \oplus \cdots \oplus k_n).\end{aligned}$$

任意张量理想 I 都是其主理想的并：

$$\mathsf{I} = \bigvee_{k \in \mathsf{I}} \mathrm{thick}^{\otimes}(k).$$

定义厚张量理想的运算都是有限的，因此，如果某个对象属于由一组对象 $\mathcal{A}$ 生成的厚张量理想，那么它已经属于由 $\mathcal{A}$的某个有限子集生成的理想。因此，厚张量理想 I 是有限呈示的，当且仅当它是主理想，即由单个对象生成。我们已经指出，每个理想都是主理想的并，因此证明完毕。□

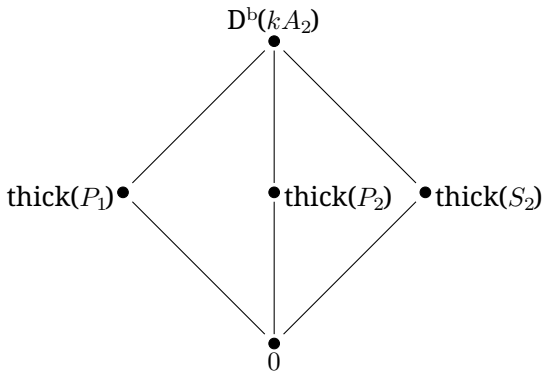
注 2.2.10。 如证明中所述，我们称由单个对象生成的厚张量理想为主理想。它们有时也称为有限生成理想。事实上，一个理想有限生成，当且仅当它是主理想。

练习 2.2.11。 证明 Thick$^{\otimes}$(K) 是 Thick(K) 的一个有界子格。

例 2.2.12。 完备格 Thick(K) 不一定是分配的，我们应当将分配性视为相当特殊的性质。举例来说，若取 K =D^{b}(coh $\mathbb{P}^1$)，即 $\mathbb{P}^1$ 上的凝聚层的有界导出范畴；或者取 K = D^{b}(mod kA_2)，即域 k 上的箭图 A_2 =(1 $\longrightarrow$ 2) 的表示的有界导出范畴（又称向量空间映射的阿贝尔范畴），那么该格就不是分配的。

事实上，模 kA_2 相当简单。存在两个与顶点对应的不可分解投射模P_1 和 P_2，其中 P_1 是简单模，另有一个简单模S_2。每个表示都是这三个模的若干副本的直和，而每个复形都是

这三个对象的悬挂之和的拟同构。厚子范畴的格为



类似地，格 Thick$^{\otimes}$(K) 一般不必是分配的。这应与以下事实相比较：对于交换环 R，R 的理想（按通常意义）构成一个完备代数格，但不一定是分配的！下一节我们将讨论如何处理这一问题，并将其与代数几何进行比较。

2.3. **一个扩展示例：谱与谱**。我们声称，Thick$^{\otimes}$(K) 不一定是分配的，因此在斯通对偶下，它未必对应于一个 sober 空间。在交换代数的背景下，可以通过转向根理想来解决这个问题，从而利用交集与乘法相一致这一事实。在 tt 的背景下，我们也可以完全照此办理。本节将并行讨论交换代数情形与 tt 情形，并为构造谱作铺垫。

本节固定一个 tt-范畴 K 和一个交换环 R。我们用 Idl(R) 表示 R 的理想按包含关系排序后构成的完备格。这个格通常不是分配的：由交集给出的交，不一定对理想之和满足分配律。不过，对于 R 的理想 I 和 J，可以构造积理想 $IJ \subseteq I \cap J$。由于乘法对加法满足分配律，理想乘法这一运算是分配的。

定义 2.3.1. J 的理想称为根理想，如果 $r^n \in J$ 蕴含 $r \in J$。对于理想 J，我们用 $\sqrt{J}$ 表示其根，并令 Rad(R) 为根理想构成的完备格。

关键点如下。

引理 2.3.2. 设 I 和 J 是 R 的根理想。那么 $I \cap J = \sqrt{IJ}$，因此交由“根理想的乘法”给出。

证明. 由于 I 和 J 是根理想，因此 $I \cap J$ 也是根理想。我们总有 $IJ \subseteq I \cap J$，从而 $\sqrt{IJ} \subseteq I \cap J$。另一方面，若 $r \in I \cap J$，则 $r^2 \in IJ$，因此 r 属于 $\sqrt{IJ}$。这说明 $I \cap J \subseteq \sqrt{IJ}$，故如所需得到等式。□

利用这一点，我们可以构造与 R 对应的仿射概形的底层空间，并证明它是相干的。

定理2.3.3。格 根理想格(R) 是一个相干框架。斯通对偶下对应的空间是 谱 R，即 R 的素理想谱，赋予扎里斯基拓扑。

证明。我们只对论证作简要说明。利用我们只能使用有限和这一点，可以直接验证，主根理想（即主

理想的根）是 Rad(R) 中的有限表示元。每个根理想都是其所包含的主根理想的并。因此，Rad(R) 是一个代数格。环 R 是 Rad(R) 的最大元，并且是主理想，由 1 生成，因此 Rad(R) 的最大元是有限表示的。有限生成根理想是有限个主根理想的并，因此在 Rad(R) 中是有限表示的。利用每个根理想都是主根理想的并这一事实，可以轻易推出，Rad(R) 中的任何有限表示元都必定是某个有限生成理想的根。

接下来，我们来证明根理想格 Rad(R) 是分配的。由于它是代数格，这已经意味着它是一个框架。若 I， J 和 K 是根理想，那么利用引理 2.3.2，我们得到

$$\begin{aligned} I \cap (J \vee K) &= I \cap \sqrt{J+K} \\ &= \sqrt{I\sqrt{J+K}} \\ &= \sqrt{I(J+K)} \\ &= \sqrt{(IJ+IK)} \\ &= \sqrt{\sqrt{IJ}+\sqrt{IK}} \\ &= \sqrt{(I\cap J)+(I\cap K)} \\ &= (I\cap J)\vee(I\cap K). \end{aligned}$$

由引理 2.3.2 还可知，有限呈示元在交运算下封闭：对于 R 中的元 r_i 和 s_j，若 $1 \le i \le m$ 且 $1 \le j \le n$，则有

$$\sqrt{(r_1,\dots,r_m)} \cap \sqrt{(s_1,\dots,s_n)} = \sqrt{(r_1,\dots,r_m)(s_1,\dots,s_n)} = \sqrt{(r_i s_j \mid i,j)}.$$

由引理 2.1.23，我们可以将 pt(Rad(R)) 的点描述为框架 Rad(R) 的素元。这些恰好就是素理想，而拓扑正确与否可作为练习来验证。□

令人惊喜的是，在 tt 情形下，我们可以完全照搬同样的步骤——证明大致完全相同。

定义 2.3.4。 K 的厚张量理想 J 是根的，如果对于某个 $x \in$ K，只要 $x^{\otimes n} \in$J，我们就已经有 $x \in$ J。对于张量理想 J，我们用 $\sqrt{\mathsf{J}}$ 表示它的根，也就是包含它的最小根理想。

我们用 Thick$^{\sqrt{\otimes}}$(K) 表示 K 的根张量理想所构成的完备格。

事实证明，尽管张量理想比环的理想更为复杂，但仍然可以用朴素公式取根。

引理 2.3.5. 设J 是K的一个张量理想。那么

$$\sqrt{\mathsf{J}} = \{x \in \mathsf{K} \mid x^{\otimes n} \in \mathsf{J} \ \textit{for some}\ n \ge 1\}.$$

证明。 参见 [6,引理 4.2] 或 [26, 引理 3.1.5]。 □

练习 2.3.6. 证明：理想 P 按定义 2.2.6 的意义是素的，当且仅当它在定义 2.1.21 所述的 K 的根张量理想格中是素的。

于是便得到上述关键引理的一个类似版本。对于一对张量理想 I 和 J，我们用 I $\otimes$ J 表示由所有形如 $x \otimes y$且满足 $x \in$ I 和 $y \in$J 的对象生成的厚张量理想。

引理 2.3.7. 设 I 和 J 是K的根张量理想。那么I ∩ J = √I ⊗J，因此交由“根理想的张量积”给出。

证明。 交集 I ∩ J 是根理想，且包含 I ⊗ J，因此也包含 √I ⊗J。另一方面，若 $x \in$ I ∩J，则 $x \otimes x \in$ I ⊗J，因此 $x \in$ √I ⊗J，正如所需。□

定理 2.3.8。 格 厚子范畴$^{\sqrt{\otimes}}$(K) 是一个相干框架。

证明。 可以沿用交换环根理想证明中的相同思路。关键在于前一个引理，以及证明单个对象属于根厚张量理想时只涉及有限多个其他对象这一点（参见引理 2.2.9）。这一事实作为定理 3.1.9 出现在 [26] 中，那里给出了完整细节。□

注记 2.3.9。 还应参见 [16] ，那里已经指出 Spc K 是一个相干空间。

因此我们知道，Thick$^{\sqrt{\otimes}}$(K) 与某个相干空间构成斯通对偶，该空间的点是 Thick$^{\sqrt{\otimes}}$(K) 的素元，也就是说，这些点恰好是素厚张量理想（见定义 2.2.6）。因此，我们在集合 Spc K 上有一个拓扑，其开子集恢复了 K 的根张量理想格。我们将这个空间记为 (Spc K)$^{\vee}$。

之所以加上这个标记，是因为从环转到其导出范畴时会发生序反转，因此将 (Spc K)$^{\vee}$ 应用于 K = D^{perf}(R) 时，它无法恢复 Spec R。第 3.1 节中的具体例子将详细说明这一点。我们得到的空间实际上是原始谱定义的对偶。

定义 2.3.10。 设 X 是一个相干空间。 X的*Hochster* 对偶记为 $X^{\vee}$，它是底集为 X 的空间，其拓扑以补集为拟紧集的闭子集作为开集基。因此， $X^{\vee}$ 的任意开子集 V 都具有如下形式

$$V = \cup_{\lambda} V_{\lambda}$$

其中每个 V_{λ} 都是闭集，而 X 的开子集 $X \setminus V_{\lambda}$ 是拟紧的。我们称这种形式的子集 V 为 *Thomason* 子集。我们用 Thom(X) 表示 X 的 Thomason 子集所构成的相干框架（这不过就是 Ω($X^{\vee}$)）。

习题 2.3.11. 验证 $X^{\vee}$ 仍是一个相干空间，并且 $X^{\vee\vee} = X$。

备注 2.3.12. 在备注 2.1.38 的等价下，Hochster 对偶只对应于取有界分配格的对偶。当然，相干框架上也有相应的对偶。这一对偶通过将相干框架 F 映到 Ind((F^{ω})^{op}) 给出，即有限表示元的对偶格的 Ind-完备化。这里的 Ind-完备化可以用 (F^{ω})^{op} 的理想格来构造（参见习题 2.1.22）。

定义 2.3.13. 设 K 是一个 tt-范畴。K 的谱定义为

$$\operatorname{Spc} \mathsf{K} = \operatorname{pt}(\operatorname{Thick}^{\sqrt{\otimes}}(\mathsf{K}))^{\vee}$$

根张量理想的相干框架的斯通对偶的 Hochster 对偶。

因此，按照构造，我们得到了 Spc K 的 Thomason 子集与 Thick$^{\sqrt{\otimes}}$(K) 之间的格同构。这个空间以一种“自由”的方式构造而成，同时没有丢失关于 Thick$^{\sqrt{\otimes}}$(K) 的任何信息。它具有相应的泛性质，下面我们将对此进行描述。

给定 tt-范畴之间的幺半精确函子 $F\colon \mathsf{K} \longrightarrow \mathsf{L}$，以及 K 的一个根张量理想 J，我们可以考虑由下式定义的 L 的根张量理想

$$F_*(\mathsf{J}) = \sqrt{\operatorname{thick}^{\otimes}(F(a) \mid a \in \mathsf{J})}$$

i.e. 由 J 的像生成的根理想。这定义了相干框架之间的映射

$$\operatorname{Thick}^{\sqrt{\otimes}}(\mathsf{K}) \longrightarrow \operatorname{Thick}^{\sqrt{\otimes}}(\mathsf{L})$$

从而得到相应的映射 $f\colon$ Spc L $\longrightarrow$ Spc K。这使 Spc 成为一个从带有精确幺半函子的 tt-范畴范畴出发的函子。具体而言，f 将 L 的一个素理想 Q 映到它的原像 F^{-1}Q。

2.4. **支撑与展开的泛性质**。本节将明确说明 Spc K 的泛性质（其定义基于斯通对偶）与 Balmer 在引入谱 [6] 时给出的泛性质之间的联系。我们还将运用格论描述作一些观察，从而或多或少免费地重新得到关于谱的一些基本结果。

我们知道存在一个格同构

$$\operatorname{Thick}^{\sqrt{\otimes}}(\mathsf{K}) \cong \operatorname{Thom}(\operatorname{Spc}\mathsf{K}),$$

Spc K 是一个相干空间，相应地，Thick$^{\sqrt{\otimes}}$(K) 是一个相干框架。给定一个空间映射 $f\colon X \longrightarrow$ Spc K，可诱导出一个映射，将谱的闭 Thomason 子集映到闭子集的完备格 $\Phi(X)$

$$f^{-1}\colon \operatorname{Thom}(\operatorname{Spc}\mathsf{K})^{\omega} \longrightarrow \Phi(X)$$

将具有拟紧开补集的闭子集映射到其在 X 中的原像，即一个闭子集。（我们注意到 $\Phi(X) \cong \Omega(X)^{\mathrm{op}}$，但由于此等价涉及取补集，因此可能会使下文令人困惑。）正如我们刚才所指出的，Thom(SpcK)$^{\omega}$ 与 Thick$^{\sqrt{\otimes}}$(K)$^{\omega}$ 格同构；后者是 K 的主根理想所成的格。因此，这样的映射确定了一种将 X 的闭子集赋给主理想（即 K 的对象）的方式，并且与格结构相容。将这种相容性明确写出，便得到以下性质。

定义 2.4.1。K 上取值于 X 的支撑数据 σ，将一个闭子集 $\sigma(a)$ 赋给每个 $a \in$K，其中该闭子集属于 X，并满足：
(SD1) $\sigma(0) = \varnothing$ 且 $\sigma(1) = X$(SD2) $\sigma(a \oplus b) = \sigma(a) \cup \sigma(b)$ (SD3) $\sigma(\Sigma a) = \sigma(a)$ (SD4) 给定一个三角 $a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow \Sigma a$，有 $\sigma(b) \subseteq \sigma(a) \cup \sigma(c)$ (SD5) $\sigma(a \otimes b) = \sigma(a) \cap \sigma(b)$。

练习 2.4.2. 验证上述条件等价于给出一个有界格映射 Thick$^{\sqrt{\otimes}}$(K)$^{\omega} \longrightarrow \Phi(X)$。

我们可以通过对任意 Thomason 子集取原像，将态射 Thom(Spc K)$^{\omega} \longrightarrow \Phi(X)$ 扩展为映射 Thom(Spc K) $\longrightarrow \mathcal{P}(X)$。这些原像不一定是闭子集，但会是特化闭子集；如果 f 是准紧映射，它们甚至会是 Thomason 子集。若我们改为使用 Spc K 上的对偶拓扑，事情就会容易些，因为这样我们只需考虑一个框架映射

$$\operatorname{Thick}^{\sqrt{\otimes}}(\mathsf{K}) = \Omega(\operatorname{Spc}\mathsf{K}^{\vee}) \longrightarrow \Omega(X).$$

如果 X 相干且 f 拟紧——这正是我们真正关心的情形，因为我们想要计算谱——那么我们可以自由地取对偶，一切都会顺利进行。

显然，从我们的角度来看，存在一个万有支撑数据：它来自恒等映射 Spc K $\longrightarrow$ Spc K，也就是说，本质上它就是余单位

$$\mathrm{Thick}^{\sqrt{\otimes}}(\mathsf{K})^{\omega} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Thom}(\mathrm{Spc}\,\mathsf{K})^{\omega}.$$

事实上，给定一个支撑数据 σ，或者等价地，给定一个格映射 Thom(SpcK)$^{\omega} \longrightarrow \Phi(X) \cong \Omega(X)^{\mathrm{op}}$，我们可以（先取对偶）再应用伴随，得到映射

$$X \longrightarrow \mathrm{pt}\,\Omega(X) \longrightarrow \mathrm{Spc}\,\mathsf{K}$$

使得取原像即可恢复该支撑数据。

我们将万有支撑数据记为 supp；也就是说，对于每个 $a \in \mathsf{K}$，我们将其关联到 Spc K 的一个闭子集，该闭子集的拟紧开补集为 supp(a)。这个子集对应于格元素 $\sqrt{\mathrm{thick}^{\otimes}(a)}$。

我们可以将映射 Thom(Spc K)$^{\omega} \longrightarrow \Phi(X)$ 唯一延拓为完备格之间的映射 Thom(SpcK) $\longrightarrow \mathcal{P}(X)$，也就是说，一个保持并和有限交的映射。具体而言，若 σ 是相应的支撑数据，则只需在对象集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathsf{K}$ 上定义为

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma\left(\sqrt{\mathrm{thick}^{\otimes}(\mathcal{A})}\right) = \sigma\left(\bigvee_{a\in\mathcal{A}} \sqrt{\mathrm{thick}^{\otimes}(a)}\right) = \bigcup_{a\in\mathcal{A}} \sigma(a).$$

备注 2.4.3。在这里，我们看到了使用闭子集的一个不足：取并集后不一定仍是闭子集，而且没有理由认为每个 σ(a)都有拟紧开补集，因此我们不一定得到 Thomason 子集，而只能得到闭子集的并集。

我们以几个有用的观察结束本节（最初都出自 Balmer 的论文 [6]）。先来说明如何用更传统的方式，通过素理想描述 SpcK 和支撑。

命题 2.4.4。对于一个对象 $a \in \mathsf{K}$，我们有

$$\mathrm{supp}\,a = \{\mathsf{P} \in \mathrm{Spc}\,\mathsf{K} \mid a \notin \mathsf{P}\}$$

而这些子集构成 SpcK 的拓扑基。

证明。第二个陈述由构造可直接得出，因此我们只需确认支撑确如所述。根据定义，supp(a) 是与主理想 $\sqrt{\mathrm{thick}^{\otimes}(a)}$ 对应的 Thomason 子集（即 (SpcK)$^{\vee}$ 的开子集）。它是点p的集合：Thick$^{\sqrt{\otimes}}$(K) $\longrightarrow \{0,1\}$ 使得 $p\left(\sqrt{\mathrm{thick}^{\otimes}(a)}\right) = 1$。在点与格的素元之间的双射下，这恰好是满足以下条件的 P $\in$ Spc K:

$$\sqrt{\text{厚子范畴}^{\otimes}(a)} \nsubseteq \text{P 或 e q等价地 y 使得 } a \qquad \notin \mathsf{P}.$$ □

从斯通对偶的角度看，许多其他有用的性质也可以直接推出（在某些情况下，论证与 Balmer 的论文基本相同，读来亦颇有启发）。我们说明如何推导这些结果，但不提供完整细节。

命题 2.4.5. 设 K是一个 *tt*-范畴。

(a) 设 S 是 K 的一组对象，其中包含 **1**，且满足：若 k，$l \in S$，则 $k \otimes l \in S$。若 S 不包含 0，则存在一个 P $\in$ SpcK，使得 P $\cap S = \varnothing$。

(b) 对于任意真厚张量理想 $\mathsf{I} \subsetneq \mathsf{K}$，都存在一个极大真厚张量理想 M，满足 $\mathsf{I} \subseteq \mathsf{M}$。
(c) 极大真厚张量理想都是素的。(d) 谱非空：$\operatorname{Spc}\mathsf{K} \neq \varnothing$。$(e)$ 对于每个闭子集 $V \subseteq \operatorname{Spc}\mathsf{K}$，只要其补集是拟紧开集，就存在一个对象 $a \in \mathsf{K}$，满足 $\operatorname{supp}(a) = V$。

证明。 我们简要说明各情形下的论证（这段文字很重要，当然也不只是为了避免 itemize 环境中出现糟糕的间距）。

(a) 由 S 的子集生成的根理想构成一个滤子的基，因此由佐恩引理可得（参见 [24, I.2.3 和 I.2.4]）。(b) 这由相干空间的一般性质得出。(c) 这是关于格的一般事实，参见 [24, 定理 I.2.4]。(d) 我们假设 $\mathbf{1} \neq 0$，因此 $\mathsf{Thick}^{\sqrt{\otimes}}(\mathsf{K})$ 至少有两个元素，从而至少有一个点（空集的斯通对偶是单点集上的唯一格结构）。(e) 按构造，V 对应于格 $\Omega((\operatorname{Spc}\mathsf{K})^{\vee})$ 的一个有限呈示元素，因此对应于一个有限呈示的根张量理想。每个有限生成理想都是主理想，因此选取 a 作为该理想的任一生成元，即可得到所需的对象。

□

支撑的另一个非常重要的性质是，它可以检测一个对象是否为幂零对象。

引理 2.4.6. 给定 $a \in \mathsf{K}$，当且仅当存在某个 $n \geq 1$ 使得 $a^{\otimes n} = 0$ 时，我们有 $\operatorname{supp} a = \varnothing$。

证明。 </style>当且仅当 $\overline{\mathsf{Thick}^{\sqrt{\otimes}}}$ 中的每个点都将 a 映为 0 时，我们有 $\operatorname{supp} a = \varnothing$。只有当 $\sqrt{\mathsf{thick}^{\otimes}(a)}$ 是根张量理想格中的最小元时，这种情况才会发生。最小元是 $\sqrt{0}$，它恰好由张量幂零对象构成（见引理 2.3.5）。

□

引理 2.4.7. 设 $\mathsf{P} \in \operatorname{Spc}\mathsf{K}$。$\mathsf{P}$ 的闭包为

$$\overline{\{\mathsf{P}\}} = \{\mathsf{Q} \in \operatorname{Spc}\mathsf{K} \mid \mathsf{Q} \subseteq \mathsf{P}\}.$$

证明。 在 $(\operatorname{Spc}\mathsf{K})^{\vee}$ 中，素元 P 给出开子集 $\{\mathsf{Q} \in \operatorname{Spc}\mathsf{K} \mid \mathsf{P} \nsubseteq \mathsf{Q}\}$。其闭补集为 $\{\mathsf{Q} \in \operatorname{Spc}\mathsf{K} \mid \mathsf{P} \subseteq \mathsf{Q}\}$。容易验证，$(\operatorname{Spc}\mathsf{K})^{\vee}$ 的任意闭子集相对于包含关系都是上闭的，因此这必定是 P 的闭包（注意它是不可约的，且泛点为 P）。

从 $(\operatorname{Spc}\mathsf{K})^{\vee}$ 到 $\operatorname{Spc}\mathsf{K}$ 会反转闭包序：在 $(\operatorname{Spc}\mathsf{K})^{\vee}$ 中，$\mathsf{Q}_1 \subseteq \mathsf{Q}_2$ 当且仅当 $\mathsf{Q}_2 \subseteq \mathsf{Q}_1$，而取 $\overline{\text{Hochster}}$ 对偶后这一关系会互换。因此，$\operatorname{Spc}\mathsf{K}$ 中 P 的闭包由包含于 P 的素理想组成，正如所断言的那样。□

注记 2.4.8。 我们会发现，所取的对偶一开始会让我们感到些许精神上的不适。素理想上的闭包关系与代数几何中的闭包关系恰好相反。我们将在第 3.1 节通过一个具体例子来说明这一点。从某种意义上说，这种序反转也是自然的。在交换代数中，素理想越大，其补集就越小，因此在该素理想处局部化时，需要取逆的元素就越少（当然，这只是宽泛地说，因为所有这些集合的基数都可能相同）。而

另一方面，在三角范畴中，素理想越大，我们在相应的 Verdier 商中取逆的态射就越多；这正是素理想处局部化的 tt 版本。

2.5. **刚性 tt-范畴**。 在本节中，我们介绍一类重要的 tt-范畴。

定义 2.5.1. 设 K 为一个本质小张量三角范畴。假设 K 是闭对称幺半的，即对每个 $k \in \mathsf{K}$，函子 $k \otimes -$ 具有一个右伴随，我们将其记为 $\hom(k, -)$，并且这些函子可以组装成一个双函子 $\hom(-,-)$，我们称之为 K 的内 ***Hom*** 。由定义，对所有 $a, b, c \in \mathsf{K}$，有张量-Hom 伴随

$$\mathsf{K}(a \otimes b, c) \cong \mathsf{K}(a, \hom(b, c)),$$

以及相应的单位和余单位

$$\eta_{a,b} \colon b \longrightarrow \hom(a, a \otimes b) \quad \text{and} \quad \varepsilon_{a,b} \colon \hom(a,b) \otimes a \longrightarrow b.$$

我们将 $a \in \mathsf{K}$ 的对偶 定义为对象

$$a^\vee = \hom(a, \mathbf{1}).$$

给定 $a, b \in \mathsf{K}$，存在一个自然的求值映射

$$a^\vee \otimes b \longrightarrow \hom(a, b),$$

这是通过在复合映射中沿着 b上的恒等映射定义的

$$\mathsf{K}(b,b) \xrightarrow{\sim} \mathsf{K}(b \otimes \mathbf{1}, b) \xrightarrow{\mathsf{K}(b \otimes \varepsilon_{a,\mathbf{1}}, b)} \mathsf{K}(a \otimes a^\vee \otimes b, b) \xrightarrow{\sim} \mathsf{K}(a^\vee \otimes b, \hom(a,b))$$

我们称 K 是刚性的 ，若对所有 $a, b \in \mathsf{K}$，此自然求值映射都是同构

$$a^\vee \otimes b \xrightarrow{\sim} \hom(a, b).$$

注 2.5.2。 我们对 K 内部的对偶和 Hochster 对偶使用了相同的记号，但它们是足够不同类型的运算，因此似乎不太可能因此造成混淆。

注 2.5.3。 若 K 是刚性的，那么给定 $a \in$K，存在一个自然同构

$$(a^\vee)^\vee \cong a,$$

并且函子 $a^\vee \otimes -$ 既是函子 $a \otimes -$ （在左侧与 a 作张量积）的左伴随，也是其右伴随（因此，由对称性，它也伴随于在右侧作张量积）。

例 2.5.4。 我们来讨论例 2.2.4 中各个例子的刚性与否

(1),(2) 给定交换环 R ，范畴 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)$ 是刚性的。若将其视为 $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}R)$，这一点显而易见，因为此时我们使用投射模在 R 上的通常张量积，只需通过有限秩自由模进行简单计算即可得出结论。对于拟紧拟分离概形 X ，完美复形范畴 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ 也是刚性的，这一点可利用环的情形在局部验证。(3) 若 A 是有限维余交换 Hopf 代数，则 $\mathrm{mod}\ A$ 是刚性 tt-范畴。在这种情形下，所需的对偶基本上就是基域上向量空间范畴中相应的对偶。(4) 有限稳定同伦范畴 $\mathsf{SH}^{\mathrm{fin}}$ 连同谱的楔积构成一个刚性 tt-范畴。 ——

(5) 这些例子可能是刚性的，也可能不是，这取决于对称幺半加性范畴 M 的选择。事实上，K^{b}(M) 刚好在 M 刚性时才是刚性的（参见上文 (1)）。

现在来讨论刚性 tt-范畴的一项主要特征，它使理论得以简化。给定 $a \in \mathsf{K}$，$a \otimes -$ 与 $a^\vee \otimes -$ 之间的伴随关系意味着，根据伴随的三角恒等式，a 是 $a \otimes a \otimes a^\vee$ 的一个直和项。对偶地，我们有 $a^\vee$是 $a \otimes a^\vee \otimes a^\vee$的一个直和项。前者意味着每个张量理想都是根的:

$$\mathrm{Thick}^{\otimes}(\mathsf{K}) = \mathrm{Thick}^{\sqrt{\otimes}}(\mathsf{K})$$

因此，整个张量理想格是一个相干框架。后者说明每个张量理想对取对偶封闭，因而 supp(a) = supp($a^\vee$)。

作为一个重要的特例，我们看到，若 $a \in$K 是张量幂零的，也就是说，对于某个 n，$a^{\otimes n} \cong 0$，那么 $a \cong 0$。

注记 2.5.5。 在考察紧生成三角范畴时，刚性也发挥着特殊作用，并且对于当前通过支撑分类局部化张量理想的方法至关重要。

3. The spectrum in action

在本章中，我们将介绍一些早该给出的例子。首先，我们明确计算域 k 上多项式环 $k[x]$ 的谱，并比较代数几何中的通常结构与 tt 情形中的结构。随后，我们讨论各种例子的谱的计算，并运用 tt 技术证明拟紧拟分离概形上的完美复形的谱计算结果。

3.1. 一个真正的例子：手算多项式环。本节将明确计算固定基域 k 上的例子 $\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$ 中的许多对象。这之所以可行，是因为环 $k[x]$ 相当简单，但又足以展现该理论的诸多特征。

$k[x]$ 的素理想是零理想 (0) 以及理想 (f)，其中 f 是不可约多项式。因此，Spec $k[x]$ 是一个不可约空间，其泛点为 (0)，并且每个不可约理想对应一个闭点。特别地，当 k 是代数闭域时，不可约多项式恰好是线性多项式，而闭点可自然地与 k 识别。

$k[x]$ 的每个理想都是有限生成的（事实上还是主理想），因此格 Rad($k[x]$) 完全由有限表示元组成。根据斯通对偶，它自然同构于 Spec $k[x]$ 的开子集格。在这种对应关系下，根理想 (f)（即由不可约多项式 f 的无平方因子乘积生成的理想）对应于基本开子集 $D(f)$，其中包含所有不含 f 的素理想（换句话说，就是不整除 f 的不可约多项式）。

我们对有限生成的 $k[x]$-模有完整的了解。每个有限生成投射模都是自由模。其余的模都是有限维的，并且每个有限维模都可以本质唯一地表示为不可分解有限维模的直和。有限维不可分解模的形式为 $k[x]/(f^n)$，其中 f 是不可约多项式（也就是说，(f) 是素理想）。我们称 $k[x]/(f)$ 为 (f) 处的 剩余域 。

因此，对于 Spec $k[x]$ 的每个闭点，都有一族不可分解有限维模。对于固定的不可约多项式 f，有一个不可分解模

$k[x]/(f^n)$，对于每个 $n \geq 1$，其具有滤过

$$0 \subseteq (f^{n-1})/(f^n) \subseteq (f^{n-2})/(f^n) \subseteq \cdots \subseteq (f)/(f^n) \subseteq k[x]/(f^n)$$

其中每个子商都同构于 $k[x]/(f)$。特别地，我们看到

$$\operatorname{thick}(k[x]/(f)) \supseteq \operatorname{thick}(k[x]/(f^n)).$$

事实上，这两个厚子范畴相等。这个证明阐明了一条一般原理，它是理解任意交换环情形的关键。这里正好可以提醒自己：由于 $k[x]$ 生成 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$，由引理 2.2.8 可知，每个厚子范畴都是一个理想。

引理 3.1.1. 厚子范畴之间存在如下等式

$$\operatorname{thick}(k[x]/(f)) = \operatorname{thick}(k[x]/(f^n))$$

对每个 $n \geq 1$ 都成立。

证明。 我们已经观察到其中一个包含关系，因此只需验证 $k[x]/(f)$ 属于厚子范畴 $\operatorname{thick}(k[x]/(f^n))$。导出张量积 $k[x]/(f) \otimes^{\mathrm{L}} k[x]/(f^n)$ 可以通过对投射分解作张量积来计算

$$k[x] \xrightarrow{f^n} k[x]$$

的 $k[x]/(f^n)$ 与 $k[x]/(f)$。我们看到

$$k[x]/(f) \otimes^{\mathrm{L}} k[x]/(f^n) \cong k[x]/(f) \oplus \Sigma k[x]/(f)$$

因此 $k[x]/(f) \in$厚子范畴$^{\otimes}(k[x]/(f^n)) =$厚子范畴$(k[x]/(f^n))$。 □

注 3.1.2。 实际上， $k[x]/(f) \otimes^{\mathrm{L}} k[x]/(f^n)$ 是 $k[x]/(f)$ 的移位直和这一事实，完全基于形式上的理由。我们可以将与 $k[x]/(f)$ 做张量积分解为经过 $k[x]/(f)$-向量空间范畴的过程，其中每个复形都是移位的直和。这只依赖于 $k[x] \longrightarrow k[x]/(f)$ 是到一个域的映射这一事实；对于任意从交换环 R 到域 k 的映射 $R \longrightarrow k$，同样的论证也成立。

注 3.1.3。 无需进行张量积，也可以直接利用短正合列的存在性看出厚子范畴的这一相等性

$$0 \longrightarrow k[x]/(f^n) \longrightarrow k[x]/(f^{n+1}) \oplus k[x]/(f^{n-1}) \longrightarrow k[x]/(f^n) \longrightarrow 0.$$

这些是*Auslander-Reiten* 序列的一个特殊情形。

现在我们继续介绍 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$ 的一项重要结构性质。环 $k[x]$ 是遗传的，即它的整体维数为 1，因此每个有限生成 $k[x]$-模的有界复形都拟同构于一个由投射对象组成的有界复形。因此，$\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x]) = \mathsf{D}^{\mathrm{b}}($模 $k[x])$。此外， $k[x]$ 上的每个复形都拟同构于将其上同调模置于适当次数后得到的复形。我们称这样的复形为形式的。

引理 3.1.4。 若 A 是整体维数为1 的环，则每个 A-模的复形 C 都满足

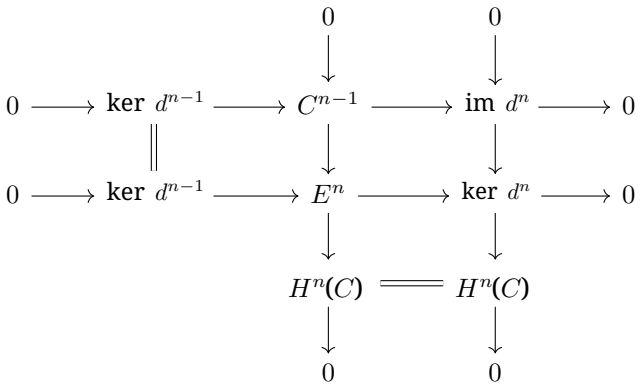
$$C \cong \bigoplus_i \Sigma^{-i} H^i(C)$$

在导出范畴 $\mathsf{D}(A)$ 中。

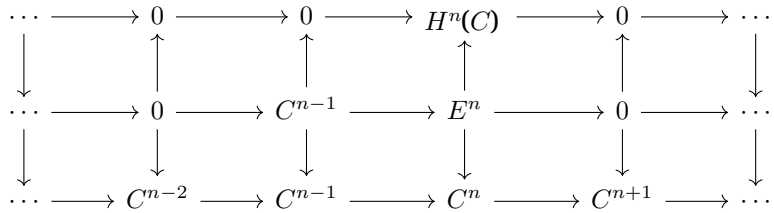
证明。 考虑 $n \in \mathbb{Z}$ 的正合列

$$0 \longrightarrow \ker d^{n-1} \longrightarrow C^{n-1} \longrightarrow \ker d^{n} \longrightarrow H^n(C) \longrightarrow 0$$

它代表 Ext群$^2(H^n(C),\ \ker\ d^{n-1})$中的一个类。由于 A 的整体维数为 1，因此这个 Ext群消失，该类必定是平凡的。因此，存在一个 A-模 E^n，使其嵌入交换图中



其中右上角的方块是一个拉回。利用这一点，我们可以将导出范畴中的一个态射定义为如下跨距



给出一个态射 $\Sigma^{-n}H^n(C) \longrightarrow C$，它在 H^n 中诱导出一个同构。取诱导映射 $\oplus_i \Sigma^{-i}H^i(C) \longrightarrow C$，即可得到所需的拟同构。□

注记 3.1.5。 证明并不需要环，对任意遗传阿贝尔范畴都成立。

因此，给出 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$ 的一个对象，等价于指定有限个有限生成的 $k[x]$-模及其所在的次数。态射在次数 0 时由通常的模态射给出，在次数 1 时则由 Ext^1 给出。

特别地，每个厚子范畴都可以由 $k[x]$-模生成，而且事实上由它所包含的不可分解模决定。如上所述，引理 2.2.8 告诉我们

$$\mathrm{Thick}(\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])) = \mathrm{Thick}^{\otimes}(\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x]))$$

并且 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$ 是刚性的，因此每个张量理想都是根的。

现在我们来描述 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$ 的素理想。

引理 3.1.6。 若 f 和 g 是不同的不可约多项式，则剩余域$k[x]/(f)$ 和 $k[x]/(g)$ 满足

$$k[x]/(f) \otimes^{\mathrm{L}} k[x]/(g) = 0.$$

特别地，若 $\mathsf{P} \in \operatorname{Spc} \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$，则至多存在一个不可约多项式 f，使得 $k[x]/(f) \notin \mathsf{P}$。

证明。我们可以直接通过将 $k[x]/(f)$ 的分解 $k[x] \xrightarrow{f} k[x]$ 与 $k[x]/(g)$ 张量积，得到 $k[x]/(g) \xrightarrow{f} k[x]/(g)$。由于 g 和 f 互素，乘以 f 在 $k[x]/(g)$ 上是一个同构，因此这个复形是无环的。关于素理想的结论随即由定义得出：任何素理想都包含 0，因此在张量积为 0 的两个对象中，至少有一个属于该素理想。□

备注 3.1.7。同样，这基于某种形式上的理由而成立，并且可以推广：$k[x]/(f) \otimes^{\mathrm{L}} k[x]/(g)$ 的上同调必须同时是一个 $k[x]/(f)$-向量空间和一个 $k[x]/(g)$-向量空间，而这只有在它为零时才可能。

练习 3.1.8。验证：若 R 是交换环，且 $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{q}$ 是不同的素理想，则 $k(\mathfrak{p}) \otimes k(\mathfrak{q}) = 0$，其中 $k(\mathfrak{p}) = (R/\mathfrak{p})_{(0)}$ 是剩余域，即整环 $R/\mathfrak{p}$的分式域。

对于一个 $k[x]$-模 M，我们用 $\operatorname{ann}(M)$ 表示它的湮灭子；对于完美复形 E，令 $H^*(E) = \oplus_i H^i(E)$。

命题 3.1.9。$\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$ 的素理想为

$$\begin{aligned}\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}_{\mathrm{tors}}(k[x]) &= \{E \in \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x]) \mid \operatorname{ann}(H^*(E)) \neq 0\}\\ &= \{E \in \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x]) \mid H^*(E)_{(0)} = 0\}\\ &= \operatorname{thick}(k[x]/(f) \mid (f) \in \operatorname{Spec} k[x] \setminus \{(0)\})\end{aligned}$$

且对于每个$(f) \in$ 谱 $k[x] \setminus \{(0)\}$，理想

$$\begin{aligned}\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}_{(f)}(k[x]) &= \{E \in \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x]) \mid H^*(E)_{(f)} = 0\}\\ &= \operatorname{thick}(k[x]/(g) \mid (g) \in \operatorname{Spec} k[x] \setminus \{(0), (f)\}).\end{aligned}$$

证明。不难验证，上述定义的理想都是真理想；并且根据我们对 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$ 中对象的说明，每种情况下给出的两种描述是一致的。

理想 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}{}_{\mathrm{tors}}(k[x])$ 是极大的：它包含除$k[x]$ 之外的每个不可分解模，而我们显然无法再加入张量单位并仍保持其为真理想。由此也可直接得出它是素理想，因为非挠（即自由）模的张量积不是挠模。也可以由命题 2.4.5(c) 推出它是素理想。

剩下要证明 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}{}_{(f)}(k[x])$ 是素理想。证明这一点有几种方法。最直接的方法是利用我们对 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$ 中对象的描述。只需验证：如果两个不可分解模的导出张量积属于 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}{}_{(f)}(k[x])$，那么其中一个模已经属于其中。这一点在其中一个模为 $k[x]$ 时显而易见，因此唯一需要考虑的情况是对两个有限维不可分解模取张量积。我们已经验证了 $k[x]/(f) \otimes^{\mathrm{L}} k[x]/(g) = 0$，因此

$$\operatorname{thick}(k[x]/(f)) \otimes^{\mathrm{L}} \operatorname{thick}(k[x]/(g)) = 0$$

也就是说，$k[x]/(f^n) \otimes^{\mathrm{L}} k[x]/(g^m) = 0$ 对所有 $n,\ m \geq 1$。因此，将两个不可分解有限维模作张量积并得到 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}{}_{(f)}(k[x])$ 中的一个对象，只有两种方式：要么对两个已包含在其中的模作张量积，要么与 $k[x]/(f^n)$ 作张量积并得到零。这是可以的，因为所有其他族 $k[x]/(g^m)$ 都已包含在 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}{}_{(f)}(k[x])$ 中。□

该命题的表述在 $\operatorname{Spec} k[x]$ 与 $\operatorname{Spc} \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$ 两个集合之间给出了一个显然的双射，该双射是序反转的：$k[x]$ 的极小素理想 (0) 对应于

$\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}{}_{\mathrm{tors}}(k[x])$ 中的极大素理想，即 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$ 的极大素理想。这与闭包运算中的序反转一致，如引理 2.4.7 所示。

为简洁起见，也为避免区分各种情形，我们用 $\mathsf{P}(\mathfrak{p})$ 表示与 $k[x]$ 的素理想 $\mathfrak{p}$ 相对应的素张量理想。如下结果表明，这个双射确实是自然的（第一部分已隐含在命题 3.1.9 中）。

命题 3.1.10。我们有

$$\mathsf{P}(\mathfrak{p}) = \ker((-)\otimes k[x]_{\mathfrak{p}} \colon \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x]) \longrightarrow \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x]_{\mathfrak{p}})).$$

并且实际上 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])/\mathsf{P}(\mathfrak{p})$ 等价于 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x]_{\mathfrak{p}})$。

证明。 映射 $k[x] \longrightarrow k[x]_{\mathfrak{p}}$ 是平坦满态射。因此，诱导的基变换函子 $\operatorname{Mod} k[x] \longrightarrow \operatorname{Mod} k[x]_{\mathfrak{p}}$ 是正合的，其右伴随——标量限制——是全忠实的，并且保持内射对象。对其取导函子后可知，$\mathsf{D}(k[x]_{\mathfrak{p}})$ 是 $\mathsf{D}(k[x])$ 关于余积封闭三角子范畴的 Verdier 局部化

$$\{E \in \mathsf{D}(k[x]) \mid E \otimes k[x]_{\mathfrak{p}} \cong 0\}.$$

（预先说明，$k[x]_{\mathfrak{p}}$ 是 $\mathsf{D}(k[x])$ 中的一个幂等代数，见第 4.2 节。）这个局部化保持紧对象，因此很容易验证，范畴 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x]_{\mathfrak{p}})$ 是 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$ 对以下对象取 Verdier 商所得的幂等完备化

$$\{E \in \mathsf{D}(k[x]) \mid E \otimes k[x]_{\mathfrak{p}} \cong 0\} \cap \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x]) = \ker(\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x]) \longrightarrow \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x]_{\mathfrak{p}})).$$

这个核是由满足 $M \otimes k[x]_{\mathfrak{p}} = 0$ 的那些不可分解模 M 生成的厚子范畴，即被$k[x] \setminus \mathfrak{p}$中某个非零多项式零化的那些 M。这正是 $\mathsf{P}(\mathfrak{p})$。根据这一描述，可以手工验证幂等完备化并非必要。□

注 3.1.11. 一般而言，在取局部化之后需要进行幂等完备化。

注 3.1.12. 也可以从素张量理想 P 出发，并依照 [7] 构造 $k[x]$ 的一个素理想。我们令

$$\rho(\mathsf{P}) = \{f \in k[x] \mid \operatorname{cone}(k[x] \xrightarrow{f} k[x]) \notin \mathsf{P}\}.$$

这是一个素理想，并且 ρ 给出双射 $\mathfrak{p} \mapsto \mathsf{P}(\mathfrak{p})$ 的一个逆。（我们注意到，这其实并不依赖于我们知道自己是在 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$ 中工作，因为我们可以把 $k[x]$恢复为单位对象的自同态环。）

直观上，商掉 P 会使每一个其锥属于 P 的态射 f 变为可逆；特别地，若 $\operatorname{cone}(k[x] \xrightarrow{f} k[x])$ 属于 P，则它在关于 P 的 Verdier 商中会变为可逆。因此，与 $\mathfrak{p}$ 本身相比，P 更接近 $k[x] \setminus \mathfrak{p}$，即在 $\mathfrak{p}$ 处局部化时所逆的那些映射的集合。这为我们所观察到的序反转提供了另一种解释。

到目前为止，即使我们原先不知道，也应该已经猜到 $\operatorname{Spc} \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$ 就是 $\operatorname{Spec} k[x]$。让我们通过明确描述张量理想格，并将其与 $\operatorname{Thom}(\operatorname{Spec} k[x])$ 识别，来验证这一点；后者是 $k[x]$ 的根理想框架的对偶。

注记 3.1.13。 由于 $k[x]$ 是诺特的，$\operatorname{Spec} k[x]$ 的每个开子集都是拟紧的，因此一个子集是 Thomason 子集，当且仅当它是若干闭子集（可以有无限多个）的并集。我们称这样的子集为特化闭子集。因此，$\operatorname{Spec} k[x]$ 的非空真 Thomason 子集恰好由闭点的任意子集给出。

我们来定义函数

$$\phi\colon \operatorname{Thick}^{\sqrt{\otimes}}(\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])) \longrightarrow \operatorname{Thom}(\operatorname{Spec} k[x])$$

and

$$\psi\colon \operatorname{Thom}(\operatorname{Spec} k[x]) \longrightarrow \operatorname{Thick}^{\sqrt{\otimes}}(\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x]))$$

如下。对于一个厚张量理想 J，我们定义

$$\phi(\mathsf{J}) = \{(f) \in \operatorname{Spec} k[x] \mid k[x]/(f) \in \mathsf{J}\}.$$

例如

- $\phi(0) = \varnothing$
- $\phi(\mathsf{D}_{\text{完美}}(k[x])) = \text{谱}\ k[x]$
- $\phi(\mathsf{D}_{\text{完美扭挠}}(k[x])) = \text{谱}\ k[x] \setminus \{(0)\}$
- $\phi(\mathsf{D}_{\text{完美}(f)}(k[x])) = \text{谱}\, k[x] \setminus \{(0), (f)\}$
- $\phi(\text{厚子范畴}(k[x]/(g))) = V(g) = \{(f) \in \text{谱}\, k[x] \mid g \in (f)\}$

对于 Thomason 子集 $V \subseteq \text{谱}\, k[x]$，我们定义

$$\psi(V) = \operatorname{thick}(k[x]/(f) \mid (f) \in V).$$

例如

- $\psi(\varnothing) = 0$
- $\psi(\text{谱}\ k[x]) = \mathsf{D}_{\text{完美}}(k[x])$
- $\psi(\text{谱}\ k[x] \setminus \{(0)\}) = \mathsf{D}_{\text{完美挠}}(k[x])$

到这里，你大概已经明白其中的思路了。

命题 3.1.14. 映射 ϕ 和 ψ 给出相干框架的一个同构

$$\operatorname{Thom}(\operatorname{Spec} k[x]) \cong \operatorname{Thick}^{\sqrt{\otimes}}(\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])).$$

因此存在一个同胚 $\text{谱}\ k[x] \longrightarrow \operatorname{Spc} \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$，它在素理想上的作用为 $\mathfrak{p} \mapsto \mathsf{P}(\mathfrak{p})$。

证明。 显然， ϕ 和 ψ 都是保序映射，并且根据定义，它们都保并。可以直接验证，它们都保有限交（事实上保任意交）和有限呈示对象。为完成证明，我们来说明它们互为逆映射。设 J 是一个张量理想， V 是一个 Thomason 子集。

显然， $\phi\psi(V) \supseteq V$，我们需要验证不会出现额外的点。如果 V 是正则的，也就是说有需要核查之处，那么 $\psi(V)$ 由挠模生成，因此不可能有 $k[x] \in \psi(V)$（因为挠性在有限和与扩张下保持不变）。如果 $(f) \notin V$ 是一个闭点，那么正合函子 $k[x]/(f) \otimes^{\mathrm{L}} (-)$ 会消去 $\psi(V)$ 的生成元，从而消去 $\psi(V)$。但是 $k[x]/(f) \otimes^{\mathrm{L}} k[x]/(f) \neq 0$，因此不可能有 $(f) \in \phi\psi(V)$。

从 J 出发，显然 $\psi\phi(\mathsf{J}) \subseteq \mathsf{J}$。由引理 3.1.4 可知，只需验证这两个厚子范畴包含相同的不可分解模。如果 J 包含 $k[x]$，那么 $(0) \in \phi(\mathsf{J})$，因此 $\psi\phi(\mathsf{J})$ 也就是整个 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$ 了。于是我们只需考虑 $\phi(\mathsf{J})$ 是一组闭点的情形，并需要证明：如果 $k[x]/(f^n)$ 属于 J，那么它也属于 $\psi\phi(\mathsf{J})$。我们在引理 3.1.1 中已经看到，这归结为确定 J 包含哪些剩余域，而这正是 ϕ 所做的。□

最后，我们应当讨论支撑。抽象理论为 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$ 中的对象赋予一个取值于 $\operatorname{Spc}\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$ 的支撑；我们现在知道，后者与 $\operatorname{Spec} k[x]$ 同胚。几何还为 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$ 上的对象赋予了一个支撑，我们暂且将其记为 σ。它定义在一个完美复形 E 上，定义如下：

$$\begin{aligned}\sigma(E) &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} k[x] \mid E_{\mathfrak{p}} \neq 0\}\\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} k[x] \mid H^*(E)_{\mathfrak{p}} \neq 0\}\\ &= \cup_i \sigma(H^i(E))\end{aligned}$$

这里 $E_{\mathfrak{p}} = E \otimes k[x]_{\mathfrak{p}}$ 而这些等式只是局部化的正合性和交换代数中的一个小练习。子集 $\sigma(H^i(E))$ 无非是通常意义下的 $k[x]$-模 $H^i(E)$ 的支撑。特别地，$\sigma(E)$ 总是 $\operatorname{Spec} k[x]$ 的闭子集，因此对于一个张量理想 J，令

$$\sigma(\mathsf{J}) = \bigcup_{E \in \mathsf{J}} \sigma(E)$$

便得到 $\operatorname{Spec} k[x]$ 的一个 Thomason 子集。

练习 3.1.15。证明 $\sigma(\mathsf{J}) = \phi(\mathsf{J})$。

因此，完美复形的支撑 σ 给出了 Thomason 子集与厚张量理想之间的格同构，进而在相应的谱双射下对应于普适支撑 supp。

在第 3.3 节中，我们将讨论如何把这一讨论推广到任意交换环。虽然无法在如此一般的情形下进行显式处理，但利用剩余域来控制问题的一般方法仍然适用。还有其他使用张量幂零性的论证；例如，Thomason 在其论文 [39] 中采用了这种方法，在没有任何诺特假设的情况下，首次证明了环的谱与其完美复形的谱之间存在同胚（尽管当时并非使用这种表述）。

3.2. **文献中的进一步的计算**。本节将简要概述一些已计算出其谱的例子系列。我们不求面面俱到，而是介绍一些重要和/或具有说明性的例子。写作当时，[8]提供了一个很好的概述。

我们注意到，许多例子是在 tt-几何这一语言出现之前计算出来的。讨论这些例子时，我们不会特别区分这一点；也就是说，我们会把早期的工作追溯性地置于一个 tt-几何自始便存在的世界中。

3.2.1. 代数几何。先从仿射情形开始。若 R 是一个交换环，则有由 R 上的完美复形构成的刚性 tt-范畴 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)$。该范畴由单位 R 生成，因此根张量理想、张量理想和厚子范畴的格彼此重合。注 3.1.12 中的映射 ρ 在如此一般的层次上仍然成立，并给出一个连续映射

$$\rho\colon \operatorname{Spc}\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R) \longrightarrow \operatorname{Spec} R, \quad \rho(\mathsf{P}) = \{r \in R \mid R \xrightarrow{r} R \notin \mathsf{P}\}.$$

Hopkins 与 Neeman [29] 在诺特情形下，以及 Thomason [39]在一般情况下证明了 ρ 是一个同胚。因此：

- $\operatorname{Spc}\mathsf{D}_{\mathrm{perf}}(R) \cong$ 谱 R 恢复了 R 的扎里斯基谱
- $\mathsf{D}_{\mathrm{perf}}(R)$ 的厚子范畴由谱 R 的 Thomason 子集分类
- 普适支撑理论由上同调的 R-模论支撑给出。

Neeman 的方法通过无界导出范畴，并利用 $k(\mathfrak{p}) = (R/\mathfrak{p})_{(0)}$ 在 R 的素理想处的剩余域。Thomason 的方法基于针对态射的张量幂零论证。在第 3.3 节中，我们将使用剩余域给出 Thomason 结果的张量三角证明；尽管张量幂零性是一种重要且有用的视角，本讲义中不会对此作深入讨论。

事实上，Thomason 证明，这一推广不仅适用于不一定是诺特的交换环，也适用于一类非常一般的概形。设 X 是一个拟紧拟分离概形。这些条件保证 X 的底层空间是相干的，因此可以作为某个 tt-范畴的谱。然后，正如我们所提到的，$\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ 是一个刚性 tt-范畴。Thomason 证明了

$$\operatorname{Spc} \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X) \cong X$$

作为空间，因此 X 的张量理想由 X 的 Thomason 子集分类。一般而言，此处确实需要张量积，因为 $\operatorname{Spc} \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ 的厚子范畴格未必是分配的！事实上，在域上的射影直线上就已经会出现这种情况。目前，分类 $\operatorname{Spc} \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ 的一般厚子范畴完全超出能力范围：在射影情形中，只有射影直线和椭圆曲线这两个例子得到了完整理解；对于这两种情形，我们都完全了解凝聚层有界导出范畴中的对象。

注记 3.2.1。 事实上，我们不仅可以通过完美复形的谱及其导出张量积，将 X 恢复为空间，还能做得更好。对于一个 tt-范畴 K，可以在 $\operatorname{Spc} \mathsf{K}$ 上赋予一个环层，使其成为局部环化空间（见 [6] 和 [7]）。具体做法是，在 $\operatorname{Spc} \mathsf{K}$ 的拟紧开子集上定义一个取值于以下对象的预层：

$$U \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathsf{K}/\mathsf{K}_{U^c}}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$$

其中 K_{U^c} 是与 U的补集对应的根张量理想。由于拟紧开子集构成拓扑的一组基，这便确定了一个层，即结构层 $\mathcal{O}_{\mathsf{K}}$。

若将此构造应用于 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)$，我们便将 X 恢复为一个局部环化空间，也就是说，得到一个概形。 [3]中讨论了这一过程的范畴化。

注记 3.2.2。 一般而言，利用张量积从 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ 恢复 X 确实是必要的。有许多例子，其中 X 和 Y 是非同构概形，却满足 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X) \cong \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(Y)$。上述研究表明，这种等价不可能是幺半的。

然而，有些情况下，张量理想这一性质是内在的，因此无需借助幺半群结构，就能从 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ 重构出 X 。例如，对于典范丛丰沛或反丰沛的光滑概形，情况便是如此：除一个移位外，光滑概形上的完美复形范畴能够揭示其典范丛，而（反）丰沛性可用于识别张量理想。

3.2.2. 同伦论。 有限谱的例子已在 [20] 中计算过。这是这些计算中的第一个，也启发了此后许多研究。可以说，整个学科都植根于（色）同伦论。

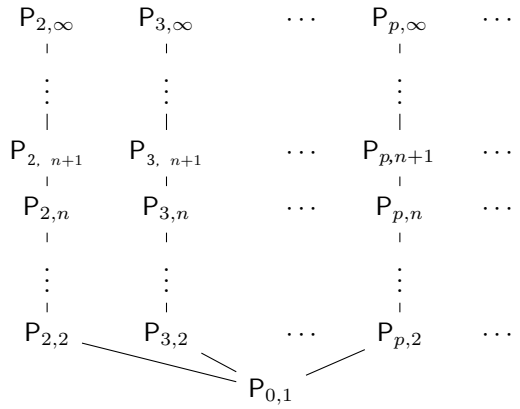
所讨论的三角范畴是 $\mathrm{ho}(\mathrm{Sp}^{\omega})$，即谱的稳定同伦范畴中的紧对象；等价地说，它是有限 CW 复形的 Spanier-Whitehead 范畴。粗略地说，这个范畴是通过在有限 CW 复形的同伦范畴中求悬挂的逆而构造的，并捕捉有限 CW 复形的稳定同伦群（其动机来自 Freudenthal 悬挂定理）。这里不再回顾精确的构造，只需记住，对象是有限

CW复形，可以从悬挂谱的角度来看，也可以从 CW 复形与整数的对 (X, n) 的角度来看；对称幺半结构由楔积给出$\wedge$，而张量单位则分别是球谱或 $(S^0,0)$，具体取决于所采用的观点。

范畴 $\mathrm{ho}(\mathrm{Sp}^\omega)$ 相当复杂，并呈现出非常明显的非诺特行为。它由张量单位生成，但具有无限的 Rouquier维数（即从球谱开始，需要任意多个锥才能得到所有对象），而理解这一范畴中的态射是一个极其困难的公开问题。

然而，如上所述，空间 $\mathrm{Spc}(\mathrm{ho}(\mathrm{Sp}^\omega))$ 已经被计算出来，并且具有相当丰富的结构。它可以如下图所示，其中向上的线表示特化，即较高的点位于较低点的闭包中：

$\mathrm{Spc}(\mathrm{ho}(\text{谱}^\omega)) =$



我们非常简要地说明一下这里的记号，但不打算深入介绍稳定同伦论中的相关构造。

(1) 素张量理想 $\mathsf{P}_{0,1}$ 是由具有挠稳定同伦群的谱构成的子范畴。它可以视为有理同调函子的核。它是 $\mathrm{Spc}(\mathrm{ho}(\mathrm{Sp}^\omega))$ 的泛点。(2) 对每个素数 p，素理想 $\mathsf{P}_{p,\infty}$ 是局部化函子 $\mathrm{ho}(\mathrm{Sp}^\omega) \longrightarrow \mathrm{ho}(\mathrm{Sp}^\omega)_{(p)}$ 的核。换言之，$\mathsf{P}_{p,\infty}$ 由稳定同伦群被某个不被p整除的整数 n 湮灭的那些对象构成。这些 $\mathsf{P}_{p,\infty}$ 正是 $\mathrm{Spc}(\mathrm{ho}(\mathrm{Sp}^\omega))$ 的闭点。(3) 对每个素数 p和每个整数 $2 \le n < \infty$，素理想 $\mathsf{P}_{p,n}$ 是先在 p 处局部化、再与（$n-1$）Morava K 理论 $K_{p,n-1}$进行 smashing 的核。

（4）对象 A 的支撑在 $A = 0$ 时为空；在 A 不是挠对象时为整个空间；而对于非零挠谱，它是有限个“列”的并集

$$\overline{\mathsf{P}_{p,m_p}} = \{\mathsf{P}_{p,n} \mid m_p \le n \le \infty\}$$

其中整数 $2 \le m_p < \infty$ 取决于素数 p。

（5）$\mathrm{Spc}(\mathrm{ho}(\mathrm{Sp}^\omega))$ 的 Thomason 子集包括空集、整个空间，以及列 P_{p,m_p} 的任意并集，其中 $m_p \ge 2$ 如上所述。

我们看到，该谱具有无限 Krull 维数且不可约。

此后，人们在理解其他同伦论例子方面开展了大量工作。值得注意的是，研究各种群类的等变稳定同伦范畴，以及各种环谱上的完美复形，已投入了大量精力。

3.2.3. 模表示论。我们从 [13] 关于稳定模范畴的工作谈起。设 G 是一个有限群，k 是一个域（若要得到有趣的结果，其特征必须整除 G 的阶）。我们构造群代数 kG，并考虑 $\operatorname{mod} kG$：有限维 kG-模所成的范畴，或者等价地，G的有限维表示所成的范畴。代数 kG 是一个余交换 Hopf 代数，其余乘法由对每个群元素 g 均有 $g \mapsto g \otimes g$ 确定，因此符合例 2.2.4（3）。由此，$\operatorname{mod} kG$ 是一个对称幺半弗罗贝尼乌斯范畴，而 $\operatorname{mod} kG$ 是一个以平凡表示 k为单位的刚性张量三角范畴。

——

情况并非总是如此：k 生成 $\operatorname{mod} kG$，这只有在 G 是 p-幂零时才会发生，其中 p 是 k的特征。如果 G 是一个 p-群，情况便是如此。因此，一般而言，我们需要考虑张量理想，而厚子范畴的分类通常看来难以实现，除非是在 p-幂零的情形下。

我们还可以考虑稍大的子范畴 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} kG)$，它也是一个刚性 tt-范畴，张量积取自 k（无需导出，因为它是正合的），单位对象为 k。我们有一个局部化序列

$$\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(kG) \longrightarrow \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} kG) \longrightarrow \underline{\operatorname{mod}}\, kG$$

其中完美复形构成一个张量理想（根据弗罗贝尼乌斯互反律，这在一般情况下也称为投影公式），因此局部化函子是幺半的。

我们可以考虑 G的上同调环

$$H^*(G,k) = \operatorname{Ext}^*_{kG}(k,k)$$

它是 $\operatorname{mod} kG$ 的张量单位的分次自同态环的非负部分，也是有界导出范畴中 k 的分次自同态环。这是一个分次交换环，因此考虑 $\operatorname{Spec}^{\mathrm{h}} H^*(G,\ k)$ 是有意义的；它是这个分次环的齐次素理想（即由齐次元素生成的素理想）构成的集合，并带有扎里斯基拓扑；这正是上同调环的根齐次理想所成的相干框架的斯通对偶。在 $\operatorname{Spec}^{\mathrm{h}} H^*(G,\ k)$ 内，我们可以考虑开子空间

$$\operatorname{Proj} H^*(G,k) = \operatorname{Spec}^{\mathrm{h}} H^*(G,k) \setminus \{H^{\geq 1}(G,k)\}.$$

Benson、Carlson 和 Rickard 的定理是：

$$\operatorname{Spc} \underline{\operatorname{mod}}\, kG \cong \operatorname{Proj} H^*(G,k) \quad \text{and} \quad \operatorname{Spc} \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} kG) \cong \operatorname{Spec}^{\mathrm{h}} H^*(G,k).$$

这与许多早期研究密切相关，例如 Dade 和 Quillen 的工作，并且为理解 G的表示论提供了许多启示。例如，我们可以从 $\operatorname{Proj} H^*(G,\ k)$ 中对应的闭子集读出 kG-模的最小投射分解的增长速率，而 Carlson 证明了 [17] 不可分解模具有连通支撑。

由有限群可以构造出许多其他刚性 tt-范畴。例如，Balmer 和 Gallauer 研究了 [10], 中的置换模的有界同伦范畴，它是一个有趣而复杂的例子。

3.2.4. 流氓画廊。以上讨论的所有例子都是刚性的。因此可以对所有张量理想进行分类：根性是自然具备的。我们先列举几个非刚性例子，其中可以观察到一些在刚性情形下不可能出现的行为。

关于上述稳定模范畴的非刚性类似物，已有一些研究。人们不再在域 k 上进行研究，而是考虑在更

一般环上进行研究，例如 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$。仍然可以得到一个 Hopf 代数，但在 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 上的张量积并非正合，因此取稳定范畴并不能得到一个 tt-范畴。为了解决这一问题，可以调整正合结构：只有当一个序列限制到 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$后分裂时，才将其视为正合序列。详情请参见 [15] 。由此得到一个非刚性 tt-范畴 $\mathsf{mod}_{\mathrm{rel}}\,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}G$ ，其单位对象为 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ，且带有平凡作用。该范畴的谱已在 [4]中计算。

$$\operatorname{Spc}\underline{\mathsf{mod}}_{\mathrm{rel}}\,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}G=\coprod_{i=1}^{n}\operatorname{Spc}\underline{\mathsf{mod}}\,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}G.$$

因此，尽管单位对象 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$是不可分解的，谱却并不连通。在刚性情形下不可能发生这种情况。事实上，上述分解对应于一个分解为 n 个张量理想的半正交分解，而这些张量理想都与 $\mathsf{mod}\,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}G$幺半群等价。

这种现象在非刚性情形下似乎相当常见。Aoki 在非常一般的情形下计算了谱：考虑取值于一个性质良好的对称幺半稳定 ∞-范畴 [2]中的、定义在相干空间上的层范畴的紧对象。在这种情形下，经常会得到半正交分解，而谱通常会高度不连通（例如参见 [21] ，其中给出了一个典型例子）。

正如例 2.2.4 中简要讨论的那样，有许多自然的 tt-范畴并不具备刚性；深入理解它们的行为以及可以对此有何预期，或许会很有趣。尚未得到充分探讨的一个方面，是带有幂零对象的 tt-范畴的行为。在上述例子中，并不会出现张量幂零对象！我在撰写本文时唯一能想到的、既有幂零对象且其谱已有所理解的例子都非常人为（例如 [36, 第 5]节）。

练习 3.2.3. 找一篇关于 tt-几何的文章，例如上文提到的文章之一，看看你能认出哪些内容。

3.3. **Thomason 定理的 tt-证明**。 本节将运用一些 tt-几何的技巧，给出 Thomason 定理的完整证明。借此可以了解这类结果的证明方法、tt-几何的技巧，以及一些我们尚未讨论的结果和策略。本节并不力求自成一体，我们会用到一些 tt-几何的结果，以及更一般的三角范畴理论中的一些结果，而这些内容在上文都未曾讨论。

我们已经在注 3.1.12 中，以及讨论代数几何中的分类时，提到了比较映射 ρ。事实上，这个映射是在完全一般的情形下定义的。

定理 3.3.1 ([7])**.** 设 K 是一个 *tt*-范畴，并令 $R_{\mathsf{K}}=\mathsf{K}(\mathbf{1},\mathbf{1})$。存在一个连续的比较映射

$$\rho\colon \operatorname{Spc}\mathsf{K}\longrightarrow\operatorname{Spec}R_{\mathsf{K}}\quad \textit{given by } \rho(\mathsf{P})=\{f\in R_{\mathsf{K}}\mid \operatorname{cone}(f)\notin\mathsf{P}\}.$$

它对K 而言是自然的；若 R_{K} 是相干环，或K 是连通的，则它是满射，这意味着

$$\operatorname{Hom}_{\mathsf{K}}(\mathbf{1},\Sigma^i\mathbf{1})=0 \textit{ for all } i\geq 1.$$

证明。 这是 Balmer 论文中 5.6、7.3 和 7.13 的综合结果。 □

关于何时 ρ是单射，也可以给出精确的表述，尽管由于该条件还是必要条件，检查起来要困难得多。（这一结果出现在 [19,命题 3.11] 中。）

引理 3.3.2。 设 K 为一个张量三角范畴，并令

$$\rho = \rho_{\mathsf{K}} \colon \operatorname{Spc}\mathsf{K} \longrightarrow \operatorname{Spec} R_{\mathsf{K}}$$

表示 *Balmer* 比较映射。那么当

$$\mathcal{B} = \{\operatorname{supp}\operatorname{cone}(\mathbf{1} \xrightarrow{r} \mathbf{1}) \mid r \in R_{\mathsf{K}}\}$$

是 $\operatorname{Spc}\mathsf{K}$ 上拓扑的闭集基。

证明。 假设是一个基。令 $(r) = \operatorname{cone}(\mathbf{1} \xrightarrow{r} \mathbf{1})$。设 $\mathsf{P}, \mathsf{Q} \in \operatorname{Spc}\mathsf{K}$ 满足 $\rho(\mathsf{P}) = \rho(\mathsf{Q})$，即对每个 $r \in R_{\mathsf{K}}$，$K(r) \notin \mathsf{P}$ 当且仅当 $K(r) \notin \mathsf{Q}$。利用我们的基 $\mathcal{B}$，可得

$$\overline{\{\mathsf{P}\}} = \bigcap_{\substack{r \in R_{\mathsf{K}} \\ K(r) \notin \mathsf{P}}} \operatorname{supp} K(r) = \bigcap_{\substack{r \in R_{\mathsf{K}} \\ K(r) \notin \mathsf{Q}}} \operatorname{supp} K(r) = \overline{\{\mathsf{Q}\}}$$

其中，中间的等式由 $\rho(\mathsf{P}) = \rho(\mathsf{Q})$ 得出，而根据 [6, 命题 2.8]（或一个简单的练习），闭包可以这样计算。但由于 $\operatorname{Spc}\mathsf{K}$ 是相干的，因此 $\mathsf{P} = \mathsf{Q}$，且 T_0。□

注 3.3.3. 受交换代数启发，对象

$$K(r) = \operatorname{cone}(\mathbf{1} \xrightarrow{r} \mathbf{1})$$

有时称为 $r \in R_{\mathsf{K}}$ 在 r 上的 Koszul 复形。

我们想证明，对于任意拟紧拟分离概形 X，存在一个概形的典范同构

$$(\operatorname{Spc}\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X), \mathcal{O}_{\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)}) \xrightarrow{\sim} X.$$

我们在注3.2.1中简要讨论了局部环化结构，这里不再多作说明。事实上，只要 ρ 是一个同胚，它就自动是局部环化空间的同构，因此可以放心地忽略这一额外结构（知道它会随之而来即可；若或当人们决定深入了解时，它自然就在其中）。

我们会引用 Thomason 的论文中的一些结果，但不会使用任何证明困难的结果；关键在于，我们能够在不使用任何张量幂零定理的情况下证明该定理，因为这些定理已隐藏在这套机制之中。接下来，通过谱的构造，我们将推导出 Thomason 的原始结果：

定理 3.3.4 (Thomason)。设 X 是一个拟紧拟分离概形。在厚子范畴 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)^{\sqrt{\otimes}}$ 与 $\operatorname{Thom}(\underline{X})$ 之间存在一个保序双射（事实上，是相干框架的同构）。

我们分三步证明所声称的局部环化空间同构确实存在。与通常的代数几何惯例相反，我们从仿射诺特概形入手，逐步构造出任意概形，而不是从一般情形开始再进行约化。在开始讨论仿射情形之前，我们先回顾层论支撑的概念，并利用泛性质构造一个态射 $X \longrightarrow \operatorname{Spc}\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)$。

定义 3.3.5. 设 X 为拟紧拟分离概形，并设 $E \in \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)$。 E 的层论支撑 为

$$\operatorname{supp}_X E = \{x \in X \mid E_x \neq 0\} = \cup_i \operatorname{supp}_X H^i(E).$$

这里，支撑$_X$ $H^i(E)$是 X上拟凝聚层的通常支撑。我们使用下标 X 以将其与普适支撑区分开来。

层论支撑很容易验证为定义 2.4.1 意义下的支撑数据。因此，由 Spc 的泛性质，存在连续映射$\sigma\colon\ X \longrightarrow \operatorname{Spc} \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)$，使得 σ^{-1} 支撑 $E =$ 支撑$_X$ E。它可以显式地由

$$\sigma(x) = \{E \in \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X) \mid E_x \cong 0\}.$$

应当将其与第 3.1 节的讨论相比较；在那里，我们针对仿射直线的情形显式构造了恰好这些素理想。

本节中我们将使用无界导出范畴。我们用 D(R) 表示 R-模的无界导出范畴，并用 D(X) 表示拟紧且拟分离概形 X 上具有拟凝聚上同调的 $\mathcal{O}_X$-模的无界导出范畴（当 X 为仿射时，二者是同一事物）。我们回顾，$\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ 是 D(X) 中紧对象的全子范畴。（我们尚未讨论紧生成三角范畴，但在第 4 章开头可以找到一些提示。）无界导出范畴是具有任意余积的三角范畴。给定一族对象 $\mathcal{S}$，我们用 loc($\mathcal{S}$) 表示 D(X) 的最小局部化子范畴，即三角且对余积封闭的子范畴。

引理 3.3.6. 设 R 是一个交换环。那么，与层论支撑相对应的映射 σ 在拓扑空间层面满足 $\rho\sigma = 1_{\operatorname{Spec} R}$。特别地，若 ρ 是双射，则它是一个同胚。

证明. 这可以通过直接计算得到。给定 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$，我们有

$$\sigma(\mathfrak{p}) = \{E \in \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R) \mid E_{\mathfrak{p}} \cong 0\}$$

而要计算 $\rho\sigma(\mathfrak{p})$，我们需要精确确定哪些 Koszul 复形 $K(r)$ =cone($R \xrightarrow{r} R$) 包含在素张量理想 $\sigma(\mathfrak{p})$ 中。现在，$K(r)_{\mathfrak{p}} = 0$ 当且仅当 r 在 $\mathfrak{p}$ 处局部化后成为同构。这恰好在 $r \notin \mathfrak{p}$ 时成立，因此

$$\rho\sigma(\mathfrak{p}) = \{r \in R \mid K(r) \notin \sigma(\mathfrak{p})\} = \{r \in R \mid K(r)_{\mathfrak{p}} \neq 0\} = \mathfrak{p}$$

正如所述。 □

命题 3.3.7. 设 R 是一个诺特环。那么比较映射

$$\rho\colon \operatorname{Spc} \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R) \longrightarrow \operatorname{Spec} R$$

是局部环化空间之间的一个同构。

证明。 在全文中，我们将张量单位的自同态环与 R 视为相同。由于 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)$ 是连通的，根据定理 3.3.1，ρ 的满射性成立。因此，如上所述，要证明 ρ 是同构，只需证明其具有单射性。我们通过检验引理 3.3.2 中给出的判据来证明这一点。于是，我们只需证明 Koszul 对象的支撑（在普适意义下）构成一个基。我们已经知道，对于 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)$ 中的对象 E，集合 supp E 构成一个基，因此只需检验：对于任意这样的 E，以及任意 P $\in$ Spc $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)$ 且 P $\in$ supp E，都存在一个 $r \in R$，使得 supp $E \subseteq \subseteq$ supp $K(r)$ 且 P $\in$ supp $K(r)$。

我们知道，$\operatorname{supp}_R K(r) = V((r))$ 构成 $\operatorname{Spec} R$ 的一个基，并且

$$\begin{aligned}\rho^{-1}\operatorname{supp}_R K(r) &= \{\mathsf{P} \in \operatorname{Spc} \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R) \mid \rho(\mathsf{P}) \in \operatorname{supp}_R K(r)\}\\ &= \{\mathsf{P} \in \operatorname{Spc} \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R) \mid r \in \rho(\mathsf{P})\}\\ &= \{\mathsf{P} \in \operatorname{Spc} \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R) \mid K(r) \notin \mathsf{P}\}\\ &= \operatorname{supp} K(r).\end{aligned}$$

因此，只要我们能证明 $\rho^{-1}\operatorname{supp}_R E = \operatorname{supp} E$，就能推出 Koszul 复形的支撑构成一个基，从而完成证明。由下面的引理即可较容易地得到这一结论；该引理依赖于转到无界导出范畴。

引理 3.3.8。$\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)$ 中的每个非零素张量理想都包含一个非零 *Koszul* 复形，即一个形如以下形式的对象

$$K(r_1, \dots, r_n) = K(r_1) \otimes \cdots K(r_n).$$

证明。回忆一下，$\mathsf{D}(R)$ 表示由所有 R-模构成的无界导出范畴。令$E \in \mathsf{D}(R)$为一个非零完美复形，并考虑由 E生成的局部化子范畴 $\mathsf{loc}(E)$。由于 E 非零，子集 $\operatorname{supp}_R E \subset \operatorname{Spec} R$ 非空；又由于 E 是完美复形，它是闭的。取一个闭点 $\mathfrak{m} \in \operatorname{supp}_R E$，其对应的剩余域为 $k = R/\mathfrak{m}$。于是 $E \otimes^{\mathrm{L}} k$ 属于 $\mathsf{loc}(E)$（由引理 2.2.8 的类似结论），且是 k 的平移的直和（参见注 3.1.2）。由中山引理，$E \otimes^{\mathrm{L}} k$ 非零，因此 $\mathsf{loc}(k) \subseteq \mathsf{loc}(E)$。

利用 $\mathsf{D}(R)$ 上的标准 t-结构，我们看到 $\mathsf{loc}(k)$ 包含所有同调有限长度且支撑在 $\mathfrak{m}$ 处的有界复形。由于 R 是诺特的，我们可以取 $\mathfrak{m}$ 的一个生成集，记为 $(m_1, \dots, m_n)$。相应的 Koszul 复形 $K(\mathfrak{m}) = K(m_1, \dots, m_n)$ 的同调具有有限长度，因此包含于 $\mathsf{loc}(k)$ 中。此外，按构造，$K(\mathfrak{m})$ 是一个完美复形。由于 E 是紧的，我们可以应用 [29, 定理 4.4。9]，该定理断言

$$\operatorname{loc}(E) \cap \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R) = \operatorname{thick}(E).$$

总之，我们已经证明，对于其层论支撑中的每个闭点 $\mathfrak{m}$，$\mathsf{thick}(E)$ 都包含 $K(\mathfrak{m})$。特别地，若 P 是一个非零素理想，则它包含这样的一个E，因而包含一个 Koszul 复形。□

现在，我们通过证明对每个完美复形 E，都有 $\rho^{-1}\operatorname{supp}_R E = \operatorname{supp} E$，来完成命题的证明。我们将 Q 记为一个素张量理想，并令 $\mathfrak{q} = \rho\mathsf{Q}$。与 Q 相关联的张量理想为

$$\mathsf{J} = \operatorname{thick}(K(s) \mid K(s) \in \mathsf{Q}) \subseteq \mathsf{Q}.$$

根据中心局部化理论（见 [7, 定理 3.6]），我们有

$$\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)/\mathsf{J} \cong \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)_{\mathfrak{q}}$$

其中，右侧是将 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)$ 中所有同态模与 $R_{\mathfrak{q}}$ 作张量积得到的。这仍然是一个 tt-范畴，因为它是对一个张量理想取商得到的。（事实上，可以验证，除去幂等完备化后，这给出 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R_{\mathfrak{q}})$，但我们不会用到这一事实。）这个商以及通过在 $\mathfrak{q}$ 处局部化得到的描述，是我们除刚刚证明的引理之外所需的主要工具。

我们首先证明，对于 $E \in \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)$，有包含关系 支撑 $E \subseteq \rho^{-1}$ 支撑$_R E$。事实上，对任意 $\mathsf{Q} \in$支撑 E，我们有 $\operatorname{Hom}_{\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)/\mathsf{Q}}(E, E) \neq 0$。沿用上述记号，我们

有 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)/\mathsf{Q} \cong (\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)/\mathsf{J})/(\mathsf{Q}/\mathsf{J})$，因此

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)/\mathsf{J}}(E,E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)}(E,E)_{\mathfrak{q}} \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R_{\mathfrak{q}})}(E_{\mathfrak{q}},E_{\mathfrak{q}})$$

因为 E 在进一步施加杀死 Q 的局部化下仍然存在。因此， $E_{\mathfrak{q}} \neq 0$ 或者等价地$\mathfrak{q} \in$ 支撑$_R E$，所以 $\mathsf{Q} \in \rho^{-1}$支撑$_R E$，如所声称。

现在让我们检验另一个包含关系。设 E 是一个完美复形，并且 $\mathsf{Q} \notin$ 支撑 E，但 $\mathsf{Q} \in \rho^{-1}$ 支撑$_R E$。考虑由局部化诱导的函子

$$\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R) \xrightarrow{\phi} \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R_{\mathfrak{q}})$$

以及上文所述的函子

$$\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R) \xrightarrow{\pi} \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)/\mathsf{J} \cong \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)_{\mathfrak{q}}$$

。我们注意到，这两个目标范畴都以 $R_{\mathfrak{q}}$ 作为各自张量单位的自同态环。现在，$\mathsf{Q} \in \rho^{-1}$ 支撑$_R E$ 意味着 $\phi E \neq 0$ 属于 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R_{\mathfrak{q}})$。我们可以看到，$\mathsf{J} = \ker \pi \subseteq \ker \phi$，因为生成 J 的对象 $K(r)$ 在 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R_{\mathfrak{q}})$ 中变为零。事实上，如果 $K(r) \in \mathsf{Q}$，那么 $r \notin \mathfrak{q}$，因此 r 在 $R_{\mathfrak{q}}$ 中被取逆，其锥 $\phi(K(r))$ 变为零。于是，局部化的泛性质给出了一个交换三角

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R) & \xrightarrow{\pi} & \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)_{\mathfrak{q}} \\ & \searrow^{\phi} & \downarrow{\scriptstyle \phi'} \\ & & \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R_{\mathfrak{q}}) \end{array}$$

因此 $\pi(E) \neq 0$。现在 $\pi(\mathsf{Q}) = \mathsf{Q}/\mathsf{J} = \mathsf{Q}_{\mathfrak{q}} \in \mathrm{Spc}\, \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)_{\mathfrak{q}}$ 是一个素理想，并且是非零的，因为它包含我们刚才看到的非零的 E 的像。根据假设，它不包含任何 Koszul 复形。我们断言 $\ker \phi \subseteq \mathsf{Q}$。确实，

$$\ker \phi = \{F \in \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R) \mid F \otimes R_{\mathfrak{q}} = 0\} = \{F \in \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R) \mid \mathfrak{q} \notin \mathrm{supp}_R F\}$$

因此，如果 $F \in \ker \phi$，我们可以利用已经证明的支撑包含关系以及上面的第二种描述，得到存在某个 $s \notin \mathfrak{q}$，使得 $\mathrm{supp}\, F \subseteq \mathrm{supp}\, K(s)$，从而 $F \in \mathsf{thick}(K(s)) \subseteq \mathsf{Q}$（记住，我们知道 $V((r))$ 是 $\mathrm{Spec}\, R$ 的一个基，而它们在 ρ 下的原像就是子集 $\mathrm{supp}\, K(r)$）。由此可知 $\phi\mathsf{Q} = \phi'\mathsf{Q}_{\mathfrak{q}}$ 是 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R_{\mathfrak{q}})$ 中的一个素理想，并且是非零的，因为它包含 ϕE。但根据假设，它不包含任何非零的 Koszul 复形，这与上面的引理矛盾。□

备注 3.3.9。 事实上，正如分类所推出的，$\mathsf{Q} = \mathsf{J}$，而该商在幂等完备化意义下是 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R_{\mathfrak{q}})$。

现在很容易将该结果推广到非诺特环。

命题 3.3.10。 设 R 是一个环（不一定是诺特环），则 ρ是一个同构。

证明。 在证明素理想包含 Koszul 复形这一关键引理之前，我们并不需要使用诺特假设。因此，如上所述，只需证明 $\rho^{-1}\mathrm{supp}_R = \mathrm{supp}$。我们可以将 R 写成

$$R = \mathrm{colim}\, R_{\alpha}$$

其中，余极限取遍 R 的子环 R_{α}，这些子环在 $\mathbb{Z}$上是有限型的。特别地，每个 R_{α} 都是诺特的。

现在设 E 是 R上的一个完美复形，我们可以假定它事实上就是有限生成投射 R-模的有界复形本身。如 [39, 3.6.4] 中那样，我们可以

找到某个 β 以及某个 $E_\beta \in \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R_\beta)$，它同样是有限生成投射模的复形本身，使得

$$E \cong R \otimes_{R_\beta} E_\beta.$$

换言之，导出函子

$$\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R_\beta) \xrightarrow{F} \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)$$

沿 f 的基变换：$R_\beta \longrightarrow R$ 满足 $FE_\beta = E$。由 ρ 的自然性，该函子适合于一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spc}\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R) & \xrightarrow{\operatorname{Spc}F} & \operatorname{Spc}\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R_\beta) \\ \downarrow{\scriptstyle\rho} & & \downarrow{\scriptstyle\rho_\beta} \\ \operatorname{Spec}R & \xrightarrow[\operatorname{Spec}f]{} & \operatorname{Spec}R_\beta \end{array}$$

Thus

$$\begin{aligned} \rho^{-1}\operatorname{supp}_R E &= \rho^{-1}(\operatorname{Spec}f)^{-1}\operatorname{supp}_{R_\beta} E_\beta \\ &= (\operatorname{Spc}F)^{-1}\rho_\beta^{-1}\operatorname{supp}_{R_\beta} E_\beta \\ &= \operatorname{supp} FE_\beta \\ &= \operatorname{supp} E \end{aligned}$$

其中 $\rho_\beta^{-1}\operatorname{supp}_{R_\beta} E_\beta = \operatorname{supp} E_\beta$ 由诺特情形得出，而关于支撑的原像以及 FE_β 的支撑、$\operatorname{supp}_R E$ 和 $\operatorname{supp}_{R_\beta} E_\beta$ 的公式只是斯通对偶（或者，前者是命题 3.6] ，后者则是交换代数中的一个小练习）。□

注记 3.3.11。上面的要点是，R 上的完美复形 E 本质上由指定有限多个 R 上的矩阵给出，也就是说，给出 R 中的有限个元素。这些元素总是属于 R 的某个有限生成子代数，例如，将所需元素添加到 R 中 $\mathbb{Z}$ 的像所得到的子代数，因此我们可以在这个子代数上实现 E。理解谱只需一次处理有限多个完美复形，因此我们应该能够归约到诺特情形。

最后，我们已准备好处理 X 拟紧拟分离概形的情形 .

定理 3.3.12. 设 X 是一个拟紧拟分离概形。存在一个自然同胚

$$\operatorname{Spc}\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X) \cong X$$

它给出了局部环化空间的一个同构。

证明。我们先做一些准备。如定义 3.3.5 所述，X上的层论支撑是一个取值于 X的支撑数据。因此，正如该定义之后所讨论的，存在唯一的连续映射

$$\sigma\colon X \longrightarrow \operatorname{Spc}\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)$$

使得对于 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ 中的每个对象 E，都有 $\sigma^{-1}\operatorname{supp} E = \operatorname{supp}_X E$。我们断言，$\sigma$ 实际上是一个同胚，并且可以提升为局部环化空间的同构。令 $X = \cup_{i=1}^n U_i$，其中 $U_i \cong \operatorname{Spec}R_i$，为 X 的一个开仿射覆盖。由拟紧性可知，我们可以取有限个开集。记 Z_i 为 X 中 U_i 的补集。我们令

$\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}_{Z_i}(X)$ 为完美复形的全子范畴，其中完美复形的层论支撑包含于 Z_i。于是我们得到一个复合

$$\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X) \twoheadrightarrow \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)/\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}_{Z_i}(X) \hookrightarrow (\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)/\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}_{Z_i}(X))^{\natural} \cong \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(U_i)$$

我们将其记为 π_i，其中 $\natural$ 表示取幂等完备化，而最后的范畴等价在 [40]中得到了证明。考虑下面的方块：

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spc}\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(U_i) & \xhookrightarrow{\operatorname{Spc}\pi_i} & \operatorname{Spc}\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X) \\ {\scriptstyle\rho_i^{-1}}\uparrow\wr & & \uparrow{\scriptstyle\sigma} \\ U_i & \xhookrightarrow[j_i]{} & X \end{array} \tag{3.1}$$

我们断言这个方块是交换方块。这是斯通对偶的推论。支撑数据 $\operatorname{supp}_X(-) \cap U_i$ 定义了一个唯一的连续映射 $\sigma_i\colon U_i \longrightarrow \operatorname{Spc}\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)$，使得 $(\sigma j_i)^{-1} = \sigma_i^{-1} = (\operatorname{Spc}\pi_i\rho_i^{-1})^{-1}$（最后一个等式成立是因为 π_i 与拉回同构）。特别地，它与支撑数据 $\operatorname{supp}_{U_i}\pi_i(-)$相符，因此方块中的两个复合映射相等（参见 [6, 引理 3.3]）。这样我们便可以进行局部处理，现在可以证明 σ 是一个同构。

首先我们证明 σ 是满射。利用上面的交换方块，显然只需证明

$$\operatorname{Spc}\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X) = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Spc}\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(U_i)$$

（这里我们已将右侧的空间与其同胚像视为相同。）等价地，我们需要证明每个素理想 P 都属于某个 π_i 的原像。这等同于证明：对某个 i，$\pi_i\mathsf{P}$ 是 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(U_i)$ 中的素理想（这里稍微滥用了记号，将商范畴中素理想的幂等完备化记作 $\pi_i\mathsf{P}$），也就是说，对某个 i，$\ker\pi_i$ 包含于 P 中。于是设 P 是一个素张量理想。对每个 i，我们可以考虑

$$\ker\pi_i = \{E \in \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X) \mid \operatorname{supp}_X E \subseteq Z_i\}$$

它是一个根张量理想。这些核的交集为

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker\pi_i = \{E \in \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X) \mid \operatorname{supp}_X E \subseteq \cap_i Z_i\} = \{E \in \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X) \mid \operatorname{supp}_X E = \varnothing\}$$

因为 U_i 覆盖 X，所以没有任何点同时包含在所有 Z_i 中。但 $\operatorname{supp}_X E = \varnothing$ 当且仅当 $E \cong 0$，因此这个交集为 $\mathbf{0}$。由于 P 是根张量理想格中的交素理想，并且包含这些 $\ker\pi_i$ 的交集，所以它必定包含某个 $\ker\pi_i$。因此，P 属于 $\operatorname{Spc}\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(U_i)$ 的像。

接下来证明 σ 是单射。假设 $x, y \in X$ 满足 $\sigma(x) = \sigma(y)$。那么，由于根据（3.1）的交换性，每个 σj_i 都是单射，我们必然有 x 和 y位于覆盖中出现的不同开集中。于是，假设 $\sigma(x) \in \operatorname{Spc}\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(U_i)$，且$\sigma(y) \in \operatorname{Spc}\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(U_j)$，其中 $i \neq j$；并且我们如上所述，通过典范同胚，将这些幂等完备化商的谱与其像等同。换言之，$\pi_i\sigma(x)$ 和 $\pi_j\sigma(y)$ 分别是 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(U_i)$ 和 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(U_j)$ 中的素理想。这等价于

$$\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}_{Z_i}(X) \subseteq \sigma(x) \quad \text{and} \quad \mathsf{D}^{\mathrm{perf}}_{Z_j}(X) \subseteq \sigma(y).$$

由于 $\sigma(x)=\sigma(y)$，因此我们有 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}_{Z_j}(X)\subseteq\sigma(x)$，所以 $\pi_j\sigma(x)$ 是 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(U_j)$ 中的素张量理想。但我们知道 ρ_j 是一个同构，由此可推出 $x\in U_j$，从而得到矛盾。

因此，我们已证明 σ 是双射；由此立即可得，$\mathrm{supp}=$ 在 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ 上为 $\mathrm{supp}x$。由此可知，σ 将拟紧开集映射为拟紧开集（例如利用 [39, 引理 3.4]，或思考更多类似于 (3.1) 的交换图）。因此，σ 是开映射，因而是同胚。□

4. Categorified lattices and the local-to-global principle

正如我们所见，利用斯通对偶，可以构建一个框架，从原则上完全解决本质小 tt-范畴的根张量理想的分类问题。在本章中，我们考虑大 tt-范畴的类似问题，即具有任意余积、并由一组小对象控制的对称幺半三角范畴。事实证明，这要困难得多；对于一般情形下相应的分类问题，我们尚无解决框架，而且还有许多悬而未决的问题和挑战。

4.1. 大 tt-范畴。

紧生成三角范畴 T 之于一个本质小的三角范畴 K，大致如同一个环上所有模的范畴之于有限呈示模的范畴（为使这一类比特别恰当，该环应当是相干的）。其含义是：紧生成三角范畴具有所有余积，因而若非平凡则不可能是本质小的，但它在某种意义上由一个本质小的子范畴所决定，其中的对象相对于滤过余极限表现良好。

定义 4.1.1. 设 T 是一个容许所有由集合指标化的余积的三角范畴。对象 $t\in\mathsf{T}$ 是紧的，如果对 T 中对象的任意集合 $\{M_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$，任意态射 $t\longrightarrow\coprod_\lambda M_\lambda$ 都经由一个仅涉及其中有限多个 M_λ 的直和项 $\coprod_{i=1}^n M_{\lambda_i}$ 分解。用更范畴论的语言来说，这表明余表示函子 $\mathsf{T}(t,-)$ 保持余积，即对每一个这样的族，自然态射

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathsf{T}(t,M_\lambda)\longrightarrow\mathsf{T}(t,\coprod_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda)$$

是一个同构。

我们称 T 为紧生成的，如果存在一组 $\mathcal{G}$ T 的紧对象，使得对象 $M\in\mathsf{T}$ 为零当且仅当

$$\mathsf{T}(g,\Sigma^i M)=0\text{ for every }g\in\mathcal{G}\text{ and }i\in\mathbb{Z}.$$

我们用 T^{c} 表示 T 的紧对象构成的全子范畴，并注意到它是 T 的一个本质小厚子范畴。

例 4.1.2。 例 4.1.2 中的每个例子都可以补全为一个紧生成的三角范畴。

(1) 设 R 是一个交换环。那么 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)$ 是无界导出范畴 $\mathsf{D}(R)=\mathsf{D}(\mathrm{Mod}\,R)$ 中所有 R-模的紧对象构成的全子范畴。(2) 更一般地，对于 X 一个拟紧拟分离概形，范畴 $\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ 是由具有拟凝聚上同调的 $\mathcal{O}_X$-模构成的无界导出范畴 $\mathsf{D}(X)$ 的紧部分。(3) 如果 A 是域上的有限维 Hopf 代数，那么 $\mathrm{mod}\,A$ 是 $\mathrm{Mod}\,A$（所有 A-模构成的稳定范畴）中紧对象构成的全子范畴。

(4) 有限谱的同伦范畴 $\mathrm{ho}(\mathrm{Sp}^{\omega})$ 是所有谱构成的稳定同伦范畴 ho(Sp) 中紧对象构成的子范畴。(5) 还可以将加性范畴 M 的有界同伦范畴 K^{b}(M) 完备化为一个紧生成三角范畴。

事实上，这些中的每一个都对应一个紧生成三角范畴，其幺半群结构扩展了紧对象上的幺半群结构。

定义 4.1.3. 一个紧生成张量三角范畴 是一个三元组 $(\mathrm{T}, \otimes, \mathbf{1})$，其中 T 是一个紧生成三角范畴，而 $(\otimes, \mathbf{1})$ 是 T 上的对称幺半群结构，并且张量积 $\otimes$ 在每个变量上都是保持余积的正合函子，紧对象 T^{c} 构成一个张量子范畴。特别地，我们要求单位**1**是紧的。

显然，T 实际上是闭幺半范畴，我们通常还假设内 Hom（记作 hom(–, –）在两个变量上都是正合的。（这在实际中成立，不过在实践中未必重要。）

备注 4.1.4. 我们通常只说 T 是一个紧生成张量三角范畴，而将张量积和单位留作默认。

注记 4.1.5。 有一些有趣的例子，其中 T^{c} 并不构成张量子范畴，因此需要采用不同的方法。不过，我们不会在本讲义中讨论这类例子。

与本质小的情形不同，如果没有额外假设，很快就会遇到微妙的问题。我们的最低限度工作框架如下。

定义 4.1.6。 称一个刚性紧生成张量三角范畴 T（简称大 *tt*-范畴），若它是紧生成张量三角范畴，且其紧对象全子范畴 T^{c} 是刚性的。因此，T^{c} 是 T 的一个张量子范畴，对内 Hom 封闭，并满足定义 2.5.1。

例 4.1.7。 拟紧且拟分离概形 X上的紧生成三角范畴 D(X)、余交换 Hopf 代数 A的 Mod A，以及 ho(Sp)，都是大 tt-范畴。——

4.2. **局部化理想与 smashing 理想**。 现在我们来引入大 tt-范畴中厚张量理想格的类比；但几乎立刻，我们便束手无策，转而寻找更温和的选择。本节始终假设 T 是一个大 tt-范畴。

定义 4.2.1。T 的一个局部化子范畴 L 是一个对余积封闭的全三角子范畴。局部化张量理想是一个局部化子范畴 L，且它对与 T 中任意对象作张量积封闭。

我们用 Loc(T) 和 $\mathrm{Loc}^{\otimes}$(T) 分别表示 T 的局部化子范畴和局部化张量理想的集合。它们按包含关系偏序，并且显然对任意集合的交封闭。这为这些偏序集赋予了交，因此也有并运算，如下文所明确说明。

给定一个对象类 $\mathcal{M}$，我们将 loc($\mathcal{M}$) 记为包含 $\mathcal{M}$ 的最小局部化子范畴，即所有包含 $\mathcal{M}$ 的局部化子范畴的交集；对于 $\mathrm{loc}^{\otimes}$($\mathcal{M}$) 也同样如此。我们将这些称为由$\mathcal{M}$生成的局部化子范畴（分别为张量理想）。因此，可以通过取一个局部化子范畴族（分别为理想）所生成的局部化子范畴（分别为理想），来取该族的并。

注 4.2.2: 紧生成三角范畴的局部化子范畴自动是厚子范畴（即对直和项封闭）。这只要求可数的余积（或积），并且可通过沿幂等元的反复作用取 Milnor余极限得到，参见 [31,命题 1.6.8]。

注记 4.2.3. 无法保证 Loc(T) 或 $\mathrm{Loc}^{\otimes}$(T) 构成一个集合。至少我们不知道这是否必然如此！有若干已知的例子，但目前唯一可用的方法是完整描述局部化子范畴或理想的全体。不难找到我们对其规模一无所知的例子。这促使我们引入若干已知具有温和性质的特殊局部化理想类。

尽管如此，我们不会引入专门术语来区分它们可能是“大”的这一事实，而只是简单地称它们为格。

注记 4.2.4. 存在余局部化子范畴的对偶概念，以及余局部化同态理想的相应定义。

紧生成与局部化子范畴的生成这两个概念以人们所期望的方式相互关联。T 的一组紧对象 $\mathcal{G}$ 生成 T，当且仅当 $\mathsf{T} = \mathrm{loc}(\mathcal{G})$。其证明例如可见于 [30, 引理 3.2]（另见下文定理 4.2.10）。特别地，若 $t \in \mathsf{T}^{\mathrm{c}}$ 满足支撑 $t = \operatorname{Spc} \mathsf{T}^{\mathrm{c}}$，则 $\mathrm{loc}^{\otimes}(t) = \mathsf{T}$。

我们还需要一些关于正交子范畴的记号。

定义 4.2.5. 设 $\mathcal{M}$ 为一类对象。$\mathcal{M}$ 的右正交（或右*“perp”*）为

$$\mathcal{M}^{\perp} = \{N \in \mathsf{T} \mid \mathsf{T}(M, \Sigma^i N) = 0 \text{ for all } i \in \mathbb{Z}\}.$$

范畴 $\mathcal{M}^{\perp}$ 在直和项、锥、平移和积下总是封闭的，也就是说，它是余局部化的。对偶地，我们可以考虑左正交（或左*“perp”*）

$$^{\perp}\mathcal{M} = \{N \in \mathsf{T} \mid \mathsf{T}(\Sigma^i N, M) = 0 \text{ for all } i \in \mathbb{Z}\}$$

它是一个局部化子范畴。

注 4.2.6. 将右正交和左正交定义为在平移下封闭并非完全通行的做法（如果研究 t-结构或相关对象，这种做法相当不可取）。我们真正关注的只是悬移封闭结构，因此这样定义对我们而言比较方便。

练习 4.2.7. 证明对于一组对象 $\mathcal{M}$，有以下等式

$$\mathcal{M}^{\perp} = \mathrm{loc}(\mathcal{M})^{\perp} \text{ and } {}^{\perp}\mathcal{M} = {}^{\perp}\mathrm{coloc}(\mathcal{M})$$

其中 coloc($\mathcal{M}$) 表示包含 $\mathcal{M}$ 的最小余局部化子范畴。

现在我们开始探讨局部化张量理想，以及它们与厚张量理想之间的联系。

引理 4.2.8. 如果 $\mathcal{M}$ 是T 中的一个对象类，且对与紧对象作张量积封闭，那么$\mathrm{loc}(\mathcal{M})$ 是一个局部化张量理想（如果我们在T^{c}内部讨论，其厚闭包也同样如此）。特别地，如果J 是T^{c} 的一个厚张量理想，那么$\mathrm{loc}(\mathsf{J})$ 是一个局部化张量理想，并且$\mathrm{Loc}^{\otimes}(\mathsf{T})$ 是$\mathrm{Loc}(\mathsf{T})$的一个子格。

证明。 这是一个很好的练习（参见练习 2.2.11）。 □

练习 4.2.9. 设 T 是一个刚性紧生成张量三角范畴。若**1** 是 T 的紧生成元，即 T =loc(**1**)，那么 T 的每个局部化子范畴都是局部化张量理想。

此处正适合陈述一些极其有用的事实，我们将在后文中用到它们。

定理 4.2.10. 设 T 为紧生成三角范畴，$\mathcal{R}$ 为一组紧对象，并令 $\mathsf{R}=\mathrm{loc}(\mathcal{R})$。则：

(1) R 是以 $\mathcal{R}$ 为生成集的紧生成三角范畴；(2) 若 $\mathcal{R}$ 生成 T，则 $\mathsf{R}=\mathsf{T}$；(3) $\mathsf{R}\cap\mathsf{T}^{c}=\mathrm{thick}(\mathcal{R})$；(4) 对任意三角范畴 S，正合函子 $F\colon \mathsf{T}\longrightarrow\mathsf{S}$ 具有右伴随G当且仅当 F 保持余积，且在此情形下，G 保持余积当且仅当 F 将紧对象映为紧对象；(5)商 T/R 是紧生成的，其紧对象为$\mathsf{T}^{c}/\mathrm{thick}(\mathcal{R})$的幂等完备化。

证明. 前三个陈述是 Neeman-Thomason 局部化定理的一部分，见 [30, 定理 2.1], ，该定理也蕴含最后一项中关于幂等完备化的陈述。第 (4) 部分是定理 4.1 与定理 5.1，出自所引文献 □

取局部化子范畴的过程可以按照引理 4.2.8 将厚张量理想扩张为局部化理想，而且这一过程在格论意义上表现良好。

命题 4.2.11. 赋值 $\mathsf{J}\mapsto\mathrm{loc}(\mathsf{J})$ 定义了偏序集之间的单射态射厚$(\mathsf{T})\longrightarrow$局部化$(\mathsf{T})$，且保持任意并。它限制为一个单射映射

$$\mathrm{Thick}^{\otimes}(\mathsf{T})\longrightarrow\mathrm{Loc}^{\otimes}(\mathsf{T})$$

它保持任意并。两个映射都有一个截面，其定义为将局部化子范畴（分别为理想）L 映为$\mathsf{L}\cap\mathsf{T}^{c}$，并且保持任意交。

证明。 根据定理 4.2.10 的第 (3) 部分，限制到紧对象是一个截面，由此可得单射性。根据引理 4.2.8，该赋值将紧对象中的理想映为 T 中的理想。因此，我们需要验证这些构造保持所述的并与交。由于张量理想在局部化子范畴格和厚子范畴格中对并与交封闭，因此只需考虑不带张量的情形。

让我们从 $(-)^{c}\colon$ Loc(T) $\longrightarrow$ Thick(T^{c}) 开始。如果 L_{λ} 是局部化子范畴族，那么

$$\left(\bigcap_{\lambda}\mathsf{L}_{\lambda}\right)\cap\mathsf{T}^{c}=\left(\bigcap_{\lambda}(\mathsf{L}_{\lambda}\cap\mathsf{T}^{c})\right).$$

N现在设 J_{λ} 是 T^{c} 的厚子范畴族。并的保持性显然： s
al因此非常直接：

$$\mathrm{loc}\left(\bigvee_{\lambda}\mathsf{J}_{\lambda}\right)=\mathrm{loc}\left(\mathrm{thick}\left(\bigcup_{\lambda}\mathsf{J}_{\lambda}\right)\right)=\mathrm{loc}\left(\bigcup_{\lambda}\mathsf{J}_{\lambda}\right)=\mathrm{loc}\left(\bigcup_{\lambda}\mathrm{loc}(\mathsf{J}_{\lambda})\right)=\bigvee_{\lambda}\mathrm{loc}(\mathsf{J}_{\lambda}).$$

□

注记 4.2.12。 这两个对应，即完备化为局部化子范畴以及限制到紧对象，互为左伴随和右伴随，参见第4.3节。

定义 4.2.13。 我们称映射 Thick$^{\otimes}$(T) $\longrightarrow$ Loc$^{\otimes}$(T) 为膨胀，并称其像中的局部化理想为有限。

膨胀在 Spc T^c 与所有局部化理想的集合之间建立了联系。我们希望更好地理解膨胀的像，并利用这种联系为 T 的任意对象给出支撑的概念。关键观察是米勒定理，它引出了幂等代数和余代数的概念。这一切在更一般的情形下也成立，因此我们以抽象的方式加以阐述，从而更清晰地展现它与一些相对近期发展的联系。

我们将若干事实汇总为下一个定理，其中一部分内容也构成定义 .

定理 4.2.14. 设T 为刚性紧生成张量三角范畴，且J $\in$厚子范畴$^{\otimes}(\mathsf{T}^c)$。则

(1) ***loc(J)*** 和 $J^{\perp}$ =***loc(J)***$^{\perp}$ 均为局部化张量理想；*(2)* 包含关系 i_****: loc(J)*** $\longrightarrow$ ***T*** 存在右伴随 $i^!$，且 $C = i_*i^!\mathbf{1}$ 是幂等余代数，即它带有一个态射 ε***:*** $C \longrightarrow \mathbf{1}$（伴随的余单位），并且 $C \otimes \varepsilon$***:*** $C \otimes C \longrightarrow C$ 是同构（该映射的逆给出唯一的余代数结构，其余单位为 ε）；*(3)* 包含关系 j_****: loc(J)***$^{\perp}$ $\longrightarrow$ ***T*** 存在左伴随 j^*，且 $A = j_*j^*\mathbf{1}$ 是幂等代数，即它带有一个态射 η***:*** $\mathbf{1} \longrightarrow A$（伴随的单位），并且 $A \otimes \eta$***:*** $A \longrightarrow A \otimes A$ 是同构（该映射的逆给出唯一的代数结构，其单位为 η）；*(4)* 对象 A 和 C 满足 $A \otimes C \cong 0$；*(5)* 对象 A 和 C 以如下意义实现这些伴随：存在自然同构

$$i_*i^! \cong C \otimes (-) \text{ and } j_*j^* \cong A \otimes (-)$$

以及同一化

$$\mathrm{loc}(\mathsf{J}) = \mathrm{Comod}_{\mathsf{T}}(C) = \ker(A \otimes (-))$$

and

$$\mathrm{loc}(\mathsf{J})^{\perp} = \mathrm{Mod}_{\mathsf{T}}(A) = \ker(C \otimes (-))$$

其中，这些分别是 C 在T 上的余模范畴和 A 在T上的模范畴，或者等价地，是配备同构 $M \cong C \otimes M$或 $M \cong A \otimes M$的对象 M；

(6) 对每个 $N \in \mathsf{T}$，都存在一个三角

$$C \otimes N \longrightarrow N \longrightarrow A \otimes N \longrightarrow$$

它关于 N是函子性的，并且 $C \otimes N \in \mathrm{loc}(\mathsf{J})$ 和 $A \otimes N \in \mathrm{loc}(\mathsf{J})^{\perp}$ 由将 N 与该三角作张量积得到

$$C \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow A \longrightarrow$$

其中，这些映射分别是 C 的余单位和单位，以及 A 的余单位和单位。

证明。 我们粗略概述证明，并给出一些参考文献。先来看看证明思路。$\mathsf{J}^{\perp}$ 中的对象是紧对象，这保证了 $\mathsf{J}^{\perp}$ 对余积封闭，因而既是局部化的，也是余局部化的。$\mathsf{J}^{\perp}$ 是张量理想这一事实才是关键所在，而这正是刚性发挥作用之处。可以证明，对于$t \in \mathsf{T}^c$，函子 $\mathrm{hom}(t,\mathbf{1}) \otimes (-)$ 在整个 T 上既是 $t \otimes (-)$ 的右伴随，也是其左伴随。利用伴随关系，可以证明，$\mathsf{J}^{\perp}$ 对与紧对象作张量积封闭，等价于 loc(J) 对与紧对象作张量积封闭；后者由引理 4.2.8 得出。同一引理进而表明，这两个局部化范畴都是局部化理想。

这些伴随函子的存在性是 Brown 表示定理的一个推论，具体来说是定理 4.2.10(4)；它们保证了存在一个三角

$$i_*i^!\mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow j_*j^*\mathbf{1} \longrightarrow$$

接着利用外侧项属于理想这一点，将这个三角张量展开，其他结论便可直接推出。

关于细节，一个方便的参考来源是 [9] ； [37]的第 2 节中也有相关讨论和更多参考文献。□

注 4.2.15。 定理的表述极其冗余：J、J$^\perp$、 A或 C 中的任意一个都能确定其余全部内容；而 A 的幂等性等价于 C 的幂等性，也等价于 $A \otimes C \cong 0$。

例 4.2.16。 我们先给出一个一般性例子（更具体的例子见例 4.2.20）。若 R 是一个交换环，且 S 是 R 的一个乘法子集，那么 $S^{-1}R$是D(R)中的一个幂等代数。这是因为 $R \longrightarrow S^{-1}R$ 是一个平坦满态射。它对应于由基变换给出的局部化D(R) $\longrightarrow$ D($S^{-1}R$)，其右伴随是标量限制。标量限制将D($S^{-1}R$)与D(R)中的 $S^{-1}R$-模等同起来。

习题 4.2.17. 描述 D(R) $\longrightarrow$ D($S^{-1}R$) 的核，并证明它由完美复形生成，也就是说，它是 D^{perf}(R) 的某个厚子范畴的膨胀。

有了这些工具，我们便可以证明膨胀 Thick$^{\otimes}$(T^c) $\longrightarrow$ Loc$^{\otimes}$(T) 保持有限交。

命题 4.2.18. 膨胀映射 $\mathrm{Thick}^{\otimes}(\mathsf{T}^c) \longrightarrow \mathrm{Loc}^{\otimes}(\mathsf{T})$ 保持有限交。

证明. 设 J$_1$ 和 J$_2$ 是 T^c 的张量理想。由于 T^c 是刚性的，我们知道

$$\mathsf{J}_1 \cap \mathsf{J}_2 = \mathsf{J}_1 \otimes \mathsf{J}_2$$

由引理 2.3.7 得。记 J$_1$ ⊗J$_2$ 为 J$_{12}$。我们需要证明

$$\mathrm{loc}(\mathsf{J}_1) \cap \mathrm{loc}(\mathsf{J}_2) = \mathrm{loc}(\mathsf{J}_{12}).$$

我们注意到，包含关系 loc(J$_{12}$) $\subseteq$ loc(J$_1$) ∩loc(J$_2$) 显然成立。

根据定理，我们知道 loc(J$_1$) 和 loc(J$_2$) 由幂等余代数 C_1 和 C_2确定。张量积 $C_{12} = C_1 \otimes C_2$ 仍是幂等余代数，我们断言，它在 T 中的余模范畴恰好是 loc(J$_1$) ∩ loc(J$_2$)。事实上，对于$M \in$loc(J$_1$)∩loc(J$_2$)，我们有 $C_1 \otimes M \cong M$和 $C_2 \otimes M \cong M$，因此 $C_1 \otimes C_2 \otimes M \cong M$，而且如果 $C_1 \otimes C_2 \otimes M \cong M$，那么

$$C_1 \otimes M \cong C_1 \otimes C_1 \otimes C_2 \otimes M \cong C_1 \otimes C_2 \otimes M \cong M$$

对 $C_2 \otimes M$ 也同样如此。只要证明 $C_{12} \in$loc(J$_{12}$)，命题便得证。直观上，论证思路是：C_i 由 J$_i$ 生成，因此 $C_1 \otimes C_2$ 由 J$_1$ ⊗J$_2$生成。准确的表述是

$$\mathrm{loc}(\mathsf{J}_{12}) = \mathrm{loc}(\mathsf{J}_1 \otimes \mathsf{J}_2) = \mathrm{loc}(M \otimes N \mid M \in \mathrm{loc}(\mathsf{J}_1), N \in \mathrm{loc}(\mathsf{J}_2))$$

其中右侧的非平凡等式是 [33, 引理 3.11] 的一个特例（它只是将启发式论证严格化）。□

注记 4.2.19。 膨胀并不保留任意交！一个反例见 [11,注记 5.12]。

例 4.2.20。 让我们回到第 3.1 节的例子，在一个具体情境中探讨上述内容。我们知道，$\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$ 的张量理想由 $\operatorname{Spec} k[x] = \mathbb{A}^1$ 的特化闭子集给出。$\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(k[x])$ 的膨胀就是 $\mathsf{D}(k[x])$，相应的幂等余代数为 $k[x]$，其互补幂等代数为 0。类似地，0 的膨胀为 0，此时幂等余代数为 0，代数为 $k[x]$。对象既是幂等代数又是幂等余代数并不常见：这意味着它是张量单位的一个直和项。

现在来考虑一些适当的厚张量理想。我们可以考虑由具有挠上同调的完美复形组成的极大张量理想 M

$$\mathsf{M} = \operatorname{thick}(k[x]/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathbb{A}^1 \setminus \{(0)\}).$$

膨胀 $\operatorname{loc}(\mathsf{M})$ 就是

$$\begin{aligned}\operatorname{loc}(\mathsf{M}) &= \operatorname{loc}(k[x]/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathbb{A}^1 \setminus \{(0)\}) \\ &= \{M \in \mathsf{D}(k[x]) \mid H^i(M) \text{ is torsion for each } i \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

局部化，即右正交，由 $k(x)$-向量空间的复形构成的全子范畴给出

$$\mathsf{M}^{\perp} \cong \mathsf{D}(k(x)),$$

其中，$k(x)$ 是有理函数域，而相应的幂等代数是 $k(x)$。这并不令人意外：$k(x)$ 是一个平坦的 $k[x]$-代数，并且是幂等的，因为 $k[x] \longrightarrow k(x)$ 是环的满态射，因此在导出范畴中也是一个幂等代数。我们可以利用三角计算相应的幂等余代数 C

$$C \longrightarrow k[x] \longrightarrow k(x) \longrightarrow \Sigma C$$

并注意到（利用 $k[x] \longrightarrow k(x)$ 是单射的，因此这只是由一个短正合序列导出的）

$$C = \Sigma^{-1}k(x)/k[x] = \Sigma^{-1} \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathbb{A}^1 \setminus \{(0)\}} E(k[x]/\mathfrak{p})$$

w这里，$E(k[x]/\mathfrak{p})$ 是剩余域 $k[x]/\mathfrak{p}$ 的内包络。具体而言，如果 $\mathfrak{p} = (f$ $)$ then

$$E(k[x]/\mathfrak{p}) = k[x]_f/k[x] = \operatorname{colim}_n k[x]/(f^n).$$

这是典型的情形：对于任意一组 $X \subseteq \mathbb{A}^1$ 闭点

$$C_X = \Sigma^{-1} \bigoplus_{\mathfrak{p} \in X} E(k[x]/\mathfrak{p})$$

是一个幂等余代数，并对应于对支撑在 X 上的完美复形张量理想的膨胀。

一个有启发性的特殊情形是 $X = \mathbb{A}^1 \setminus \{\mathfrak{p}, (0)\}$，此时可由上面的公式得到幂等代数 $k[x]_{\mathfrak{p}}$ 和幂等余代数。

这一切引出了一个想法：我们能否跳过膨胀，直接考察幂等（余）代数？答案是肯定的，相应的概念就是 smashing 理想。

定义 4.2.21。 T 的理想 S 称为 *smashing*，如果 $\mathsf{S}^{\perp}$ 对余积封闭（因此它本身也是一个局部化张量理想）。

与定理 4.2.14 相同的论证表明，对于一个 smashing 理想 S：

(1) S 及其右正交 $\mathsf{S}^{\perp}$ 分别具有右伴随和左伴随，这些伴随分别由幂等余代数 C 和幂等代数A实现（特别地，所有这些函子都保持余积）；

(2) 幂等余代数 C 通过以下方式确定 S

$$\mathsf{S} = \mathrm{Comod}_{\mathsf{T}}(C) = \{M \in \mathsf{T} \mid C \otimes M \cong M\}$$

(3) 幂等代数通过以下方式确定 $\mathsf{S}^{\perp}$

$$\mathsf{S}^{\perp} = \mathrm{Mod}_{\mathsf{T}}(A) = \{M \in \mathsf{T} \mid A \cong A \otimes M\}.$$

注记 4.2.22. 并非每个 smashing 理想都是有限的，也就是说，并非每个都来自紧对象的厚张量理想。对于非诺特交换环，存在反例（见 [25]）。

定义 4.2.23. 记 $\mathcal{S}(\mathsf{T})$ 为 T 的 smashing 张量理想按包含关系构成的集合。这确实是一个集合，因此构成一个真正的偏序集！（这可由所有 smashing 子范畴的类似事实推出，见 [27]；如今也已有其他几种证明，例如 [11] 直接证明了 smashing 理想的情形。）

定理 4.2.24. 偏序集 $\mathcal{S}(\mathsf{T})$ 是一个框架，其并由以下给出

$$\bigvee_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{S}_\lambda = \mathrm{loc}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{S}_\lambda\right)$$

有限交由以下给出

$$\mathsf{S}_1 \wedge \mathsf{S}_2 = \mathsf{S}_1 \cap \mathsf{S}_2.$$

特别地，包含关系 $\mathcal{S}(\mathsf{T}) \longrightarrow \mathrm{Loc}(\mathsf{T})$ 保并且保持有限交。

证明。 这可以由 [11]推导得出。论证基于转向紧对象上的加性预层范畴 $\mathsf{Fun}((\mathsf{T}^{c})^{\mathrm{op}}, \mathsf{Mod}\,\mathbb{Z})$。若存在到稳定对称幺半 ∞-范畴的增强，则可以给出更直接的证明（见下文讨论）。

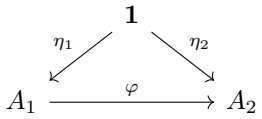
由于 [11] 中没有明确给出论证，我们来说明并确实如所声称的那样计算。我们有一系列等式

$$\begin{aligned}
\mathrm{loc}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{S}_\lambda\right)^{\perp} &= \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{S}_\lambda\right)^{\perp} \\
&= \left\{ M \in \mathsf{T} \;\middle|\; \mathsf{T}(S, M) = 0 \;\forall\; S \in \bigcup_{\lambda} \mathsf{S}_\lambda \right\} \\
&= \bigcap_{\lambda} \{M \in \mathsf{T} \mid \mathsf{T}(S, M) = 0 \;\forall\; S \in \mathsf{S}_\lambda\} \\
&= \bigcap_{\lambda} (\mathsf{S}_\lambda^{\perp})
\end{aligned}$$

其中第一个等式是一个简单的练习（利用左正交总是局部化的这一事实），其余的显然成立。从最后一种描述可以看出，右正交是局部化理想的交集，因此仍是一个局部化理想，所以作为局部化理想的 S_λ 的并如所声称的那样是 smashing。□

注 4.2.25。 取无限交并非那么直接：一族 smashing 子范畴的交集未必是 smashing（这与注 4.2.19 有关，且同一个反例 [11, 注 5.12]也适用）。

定义 4.2.26。 我们用 Idem(T) 表示幂等代数的集合，并令 $\mathrm{Idem}^{\mathrm{fin}}$(T) 表示由 T^{c} 的张量理想膨胀而来的 smashing 理想所对应的幂等代数子集。集合 Idem(T) 按如下方式偏序：对于代数$\eta_i\colon\ \mathbf{1} \longrightarrow A_i (i = 1,\ 2)$，若存在一个交换三角，则有 $A_1 \leq A_2$



这使得 Idem(T) 成为一个完备格（见 [11]），而且它还是一个框架。 A_1 与 A_2 的并由 $A_1 \otimes A_2$ 给出，交则由 Mayer-Vietoris 三角给出

$$A_1 \wedge A_2 = \mathrm{fibre}(A_1 \oplus A_2 \longrightarrow A_1 \otimes A_2).$$

注 4.2.27. 对于 $A_1, A_2 \in$ Idem(T)，我们有 $A_1 \leq A_2$，当且仅当下列任一等价条件成立：

- 模$\tau(A_1) \supseteq$模$\tau(A_2)$;
- 核$(A_1 \otimes -) \subseteq$ 核$(A_2 \otimes -)$】【。
- 存在一个同构 $A_2 \cong A_1 \otimes A_2$;
- $\eta_1 \otimes A_2\colon\ A_2 \longrightarrow A_1 \otimes A_2$ 是一个同构。

练习 4.2.28. 证明上述条件等价。

注记 4.2.29。 对于一族无限的幂等代数，其并是所有有限并的余极限，也就是可以利用单位映射构造的“无限张量积”。如果 T 是一个 ∞-范畴，这样做自然是有意义的；但如果 T 仅是三角范畴，且不假设它具有增强，则可以在函子范畴中定义这一构造。

命题 4.2.30. 存在框架的一个同构

$$\mathcal{S}(\mathsf{T}) \cong \mathrm{Idem}(\mathsf{T})$$

将有限局部化映至 $\mathrm{Idem}^{\mathrm{fin}}(\mathsf{T})$。

证明。 这只需将 smashing 理想映至相应的幂等代数（即相应局部化下$\mathbf{1}$ 的像），并将幂等代数映至其所消去的对象构成的理想。□

注记 4.2.31。 类似地，可以定义幂等余代数的框架，并且预期存在格同构。

最后需要指出的是，我们不能指望 Idem(T) 像相干框架 $\mathrm{Idem}^{\mathrm{fin}}(\mathsf{T}) \cong \mathrm{Thick}^{\otimes}(\mathsf{T}^{\mathrm{c}})$ 那样具有良好的性质。

注记 4.2.32。 Idem(T) 是否为空间框架仍是一个未解决的问题。已知在某些特殊情形下它是空间的，但一般情形下我们尚无头绪。即使它确实为空间框架，它似乎也未必是相干框架。

备注 4.2.33。 我们来说明一下记号。人们常用 e 和f 的某种形式分别表示一对幂等余代数和代数。当 V 是 Spc T 中的 Thomason 子集时，通常用 $\Gamma_V\mathbf{1}$ 和 $L_V\mathbf{1}$ 表示相应的幂等余代数和代数。

4.3. **大 tt-范畴的支撑**。 现在我们将介绍一种为 T 的对象定义某些支撑概念的方法。本节内容受到 [9] 和 [5] 的启发，所采用的视角则基于我与 Scott Balchin 的合作研究。我们的观点并不寻常，它使我们能够在同一框架下把握朴素和精细的支撑概念。在某些情况下（我们会特别指出），我们的概念与文献中已有的概念并不完全相同。不过，据我所知，在这些情况下，旧概念并没有被证明特别有用，因此我并不特别执着于它。此外，我们将看到，在这些情况下，我们实际上并没有丢失信息。

我们暂时离开框架的世界，至少在原则上如此。除去集合论问题，$\mathsf{Loc}^{\otimes}(\mathsf{T})$ 是一个完备格，因此，用我们所理解的完备格（它们不一定是框架）来探测它是有意义的。完备格态射是保持任意并和有限交的映射。

设 F 是一个完备格（我们使用 F，因为我们想到它可能是一个框架 e a而且我缺乏想象力）。

定义 4.3.1。 我们称完备格之间的映射 $\tau\colon F \longrightarrow \mathsf{Loc}^{\otimes}(\mathsf{T})$ 为一个范畴化完备格（沿用 Clausen 和 Scholze 的术语）。

注记 4.3.2。 这个说法不够简洁，因此最好直接称其为范畴化格。

备注 4.3.3。 假设 T 是一个可呈示的对称幺半稳定 ∞-范畴，F 是一个框架，并且 τ 经由 $\mathsf{Idem}(\mathsf{T})$ 分解，那么根据 [1] 定义 4.3.1，这等价于给出一个从 F 上的谱层范畴 $\mathsf{Shv}(F;\mathsf{Sp}) \longrightarrow \mathsf{T}$ 的对称幺半保余极限函子。它确定了谱层范畴在 T 上的作用，由此产生了我们已经观察到以及将要观察到的结构。

例 4.3.4。 下面给出一些我们将在后文中考虑的抽象例子：

(1) 我们可以取 $\tau = \mathrm{id}\colon \mathsf{Loc}^{\otimes}(\mathsf{T}) \longrightarrow \mathsf{Loc}^{\otimes}(\mathsf{T})$。这是普适例子。(2) 我们可以取 τ 为 $\mathsf{Thick}^{\otimes}(\mathsf{T}^{\omega}) \cong \mathsf{Idem}(\mathsf{T})$ 的包含关系，这由命题 4.2.11 和 4.2.18 保证成立。(3) 我们可以取 τ 为 $\mathcal{S}(\mathsf{T}) \cong \mathsf{Idem}(\mathsf{T})$ 的包含关系，这由定理 4.2.24 保证成立。（在本节中，我们通常会把这个同构视为一种等同，也就是说，我们会不严格地区分 smashing 理想与相应的幂等代数。）

正如我们稍后将看到的，在适当条件下，我们可以改进其中一些例子，从而得到对 $\mathsf{Loc}^{\otimes}(\mathsf{T})$ 更好的逼近。

注 4.3.5。 如果我们要求 T 是一个可呈示的对称幺半稳定 ∞ 范畴，F 是一个框架，并且 τ 经由框架 $\mathsf{Idem}(\mathsf{T})$ 分解，那么这就是 Clausen 和 Scholze 在通过凝聚数学的视角研究复几何时引入的范畴化局部 概念 [18, 定义 7.1]。这是一个合理的限制（另见注 4.3.3）。不过，要建立一个合理的定义，似乎并不一定需要这样做；而且由于我们对一般情况下的 $\mathsf{Loc}^{\otimes}(\mathsf{T})$ 了解不够，或许值得克制施加这些假设的冲动。

由于 τ 保并，即保余极限，因此它总有一个右伴随 $(-)^{\circ}\colon \mathsf{Loc}^{\otimes}(\mathsf{T}) \longrightarrow F$，它将局部化理想 L 映为

$$\mathsf{L}^{\circ} = \bigvee \{f \in F \mid \tau(f) \leq \mathsf{L}\}.$$

例 4.3.6. 如果取例 4.3.4 中的 (2) 和 (3)，那么上述映射分别将 L 映为 L ∩T^c以及 L 中最大的 smashing 子范畴。这启发我们采用如下记号：L° 是相对于 τ的内部。

这个构造很有用，但对于理解一般的局部化理想而言，帮助并不大。实际上，许多局部化理想不含紧对象，因此我们无法真正利用这个右伴随构造出有用的不变量。

左伴随如何？正如我们所指出的，在一些例子中，τ 不一定保持任意交，因此左伴随未必存在。不过，无论左伴随是否存在，用来定义它的公式都有意义。这就是定义 4.3.8 的基础。为此，我们先回顾偏序集上滤子的概念。

给定完备格 F，$\mathcal{V}$ 上的滤子是 F 的一个非空子集 F，它是上闭且向下有向的。具体来说，这意味着，如果 $f \leq f'$ 且 $f \in \mathcal{V}$，那么$f' \in \mathcal{V}$；并且只要 $f,\ g \in \mathcal{V}$，那么 $f \wedge g$ 也成立。我们用 Filt(F) 表示 F 上所有滤子的集合，并按包含关系排序；注意这是一个完备格，并且当 F 是分配格时，它还是一个框架。

练习 4.3.7. 构造 Filt(F) 上的交和并，并验证上述断言。

定义 4.3.8. 设 τ: $F \longrightarrow \mathrm{Loc}^{\otimes}(\mathsf{T})$ 是完备格之间的一个映射。我们定义偏序集之间的映射

$$\widetilde{\sigma}\colon \mathrm{Loc}^{\otimes}(\mathsf{T})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Filt}(F) \quad \text{by} \quad \widetilde{\sigma}\mathsf{L} = \{f \in F \mid \mathsf{L} \leq \tau f\}$$

and

$$\sigma\colon \mathrm{Loc}^{\otimes}(\mathsf{T}) \longrightarrow F \quad \text{by} \quad \sigma\mathsf{L} = \bigwedge \widetilde{\sigma}\mathsf{L}.$$

我们分别称这些赋值为 L 的支撑滤子和支撑（隐含地相对于 τ 而言，必要时则明确指出）。

给定对象 $M \in$T，我们定义

$$\sigma(M) = \sigma(\mathrm{loc}^{\otimes}(M)) \quad \text{and} \quad \widetilde{\sigma}(M) = \widetilde{\sigma}(\mathrm{loc}^{\otimes}(M))$$

注记4.3.9.如果 τ 保持交，则 σ 是它的左伴随。在此情形下，L $\leq \tau$(f) 当且仅当 σ(L) $\leq f$，因此 $\widetilde{\sigma}$(L) 就是 σ(L) 的上闭包，也就是说，支撑与支撑滤子是等价的数据。

现在我们将进行一段较长的题外讨论，探讨“例子”以及与取值于紧对象谱的传统概念之间的比较。先来看一个启发性的例子及相应的计算。令 τ 为由膨胀给出的包含关系 Thick$^{\otimes}$(T^c) $\longrightarrow$Loc$^{\otimes}$(T)。方便时，我们将 Thick$^{\otimes}$(T^c) 视为 Thomason 子集构成的格。对于一个局部化子范畴 L，我们有

$$\widetilde{\sigma}\mathsf{L} = \{V \in \mathrm{Thom}(\mathrm{Spc}\,\mathsf{T}^c) \mid \mathsf{L} \subseteq \mathrm{loc}(\mathsf{T}^c_V)\}$$

满足 L 包含于 loc(T^c_V) 的 Thomason 子集集合 V，其中 T^c_V 是对应于 V 的理想。根据定义，σL 是这些 Thomason 子集的交，即包含于它们交集中的最大 Thomason 子集。

让我们通过两个例子，将其与传统概念进行比较。为此，我们需要回顾一下通常所说的朴素支撑。下面先引入一些记号，并给出一个留作练习的小结论。对于空间 X 中的点 x，我们定义

$$\mathcal{Z}(x) = \{y \in T \mid x \notin \overline{\{y\}}\}$$

也就是说，我们取所有不特化到 x 的点。对于 Thomason 子集V，及其对应的紧对象理想 $\mathsf{T}^{\mathrm{c}}_V$，我们令 A_V 为相应的幂等代数（如果你更喜欢，也可以在脑海中将其替换为 $L_V\mathbf{1}$ ）。

练习 4.3.10. 设 P 是紧对象的一个素张量理想。证明 suppP $=\mathcal{Z}$(P)（因此特别地， $\mathcal{Z}$(P) 是 Thomason 集）。

定义 4.3.11. 对于局部化理想 L，朴素支撑为

$$\operatorname{supp}\mathsf{L}=\{\mathsf{P}\in\operatorname{Spc}\mathsf{T}^{\mathrm{c}}\mid A_{\mathcal{Z}(\mathsf{P})}\otimes\mathsf{L}\neq 0\}.$$

等价地，这是满足以下条件的素理想 P 的集合：L 在关于 P 的局部化中仍然存在，即 L 不包含于 loc(P) =loc($\mathsf{T}^{\mathrm{c}}_{\mathcal{Z}(\mathsf{P})}$)。

考虑

$$U(\mathsf{L})=\operatorname{Spc}\mathsf{T}^{\mathrm{c}}\setminus\operatorname{supp}\mathsf{L}=\{\mathsf{P}\in\operatorname{Spc}\mathsf{T}^{\mathrm{c}}\mid\mathsf{L}\subseteq\operatorname{loc}(\mathsf{T}^{\mathrm{c}}_{\mathcal{Z}(\mathsf{P})})\}.$$

继续取 τ 为 Thick$^{\otimes}$(T^{c}) 的包含关系，并继续滥用厚张量理想与 Thomason 子集之间的对应关系，我们看到

$$U(\mathsf{L})=\widetilde{\sigma}(\mathsf{L})\cap\{\mathcal{Z}(\mathsf{P})\mid\mathsf{P}\in\operatorname{Spc}\mathsf{T}^{\mathrm{c}}\}$$

i.e。朴素支撑的补集恰好是限制在交素 Thomason 子集
集上的。如果 supp L 是 Thomason 子集，那么

$$\operatorname{supp}\mathsf{L}=\bigwedge_{\mathsf{P}\in U(\mathsf{L})}\mathcal{Z}(\mathsf{P})=\sigma(\mathsf{L})$$

并且，如果我们将交替换成交集，第一个等式总是成立。因此， $\widetilde{\sigma}$ 是朴素支撑的真正推广，而 σ 则尽了最大努力。

注记 4.3.12。 在 Idem T 为空间的情形下，存在一个完全类似的朴素 smashing 支撑概念。当τ 是 Idem T 的包含关系时，通过我们的定义也能以相同方式得到这一概念。我们构造的优点在于，即使 smashing 理想不构成空间框架，它也依然适用。

现在我们举一个例子，看看我们定义的概念实际上如何比还原朴素支撑做得更好。这将为第 4.4 节的讨论提供动机。

我们用 $\mathcal{P}$ 表示集合上的幂集运算。按包含关系排序后，集合的幂集是一个空间框架，它与给定集合上的离散拓扑对偶。

例 4.3.13. 设 R 是一个交换诺特环，并取 T $=$ D(R)。考虑函数 τ：$\mathcal{P}$(谱 R) $\longrightarrow$ Loc$^{\otimes}$(T)，它定义在谱 R的幂集上，定义如下：

$$\tau(W)=\operatorname{loc}(k(\mathfrak{p})\mid\mathfrak{p}\in W),$$

其中 k(p) 是 p处的剩余域。显然，该映射保持并，即使没有诺特假设，它也保持二元下确界。诺特性保证了（这一非平凡事实）： τ(谱 R) $=$D(R)，这表明 τ是完备格之间的映射。在此情形下， σ 是 Foxby 小支撑：

$$\sigma(\mathsf{L})=\{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}R\mid\mathsf{L}\otimes k(\mathfrak{p})\neq 0\}$$

而 Neeman 定理断言， τ 实际上是一个框架同构。（关于这一点的进一步讨论，见例 4.4.9。）

练习 4.3.14. 验证如例中所示的 τ 保持二元下确界（如果你有勇气，也可以不作诺特假设）。

最后，我们来给出支撑和支撑滤子的基本性质。任取一些 F 和 τ，用 M 的变体指代 T 的对象，并设 L 和 M 为局部化理想。

引理 4.3.15. 支撑滤子 $\widetilde{\sigma}$ 满足以下性质：

(1) $\widetilde{\sigma}(\Sigma^i M) = \widetilde{\sigma}(M)$ 对所有 $i \in \mathbb{Z}$均成立；*(2)* $\widetilde{\sigma}(0) = F$且 $\widetilde{\sigma}(T) = \{f \in F \mid \tau(f) = T\}$。特别地，如果 τ 是单射，则 $\widetilde{\sigma}(T) = \{1_F\}$。*(3)* 若 $L \subseteq M$，则 $\widetilde{\sigma}(L) \geq \widetilde{\sigma}(M)$。*(4)* $\widetilde{\sigma}(\coprod_\lambda M_\lambda) = \bigcap_\lambda \widetilde{\sigma}(M_\lambda)$；*(5)* 给定一个三角 $M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$，有 $\widetilde{\sigma}(M) \geq (\widetilde{\sigma}(M') \cap \widetilde{\sigma}(M''))$。*(6)* $\widetilde{\sigma}(\vee_\lambda L_\lambda) = \cap_\lambda \widetilde{\sigma}(L)$；*(7)* $(\widetilde{\sigma}(L) \vee \widetilde{\sigma}(M)) \subseteq \widetilde{\sigma}(L \cap M)$。

证明。 这些都可以很快地按如下方式处理：

(1) 这直接来自定义，因为一个对象的所有平移都生成相同的局部化理想。(2) 这些陈述依据定义成立。(3) 若 $\mathsf{M} \subseteq \tau(g)$，则我们也有 $\mathsf{L} \subseteq \tau(g)$，因此 $\widetilde{\sigma}(\mathsf{L}) \geq \widetilde{\sigma}(\mathsf{M})$。

(4) 我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\sigma}\left(\coprod_\lambda M_\lambda\right) &= \{f \in F \mid \coprod_\lambda M_\lambda \in \tau f\} \\ &= \cap_\lambda \{f \in F \mid M_\lambda \in \tau f\} \\ &= \cap_\lambda \widetilde{\sigma}(M_\lambda)\end{aligned}$$

其中，非平凡的等式源于局部化子范畴对直缩和任意余积封闭。

(5) 若 $M' \in \tau f$且 $M'' \in \tau f$，即 $f \in (\widetilde{\sigma}(M') \cap \widetilde{\sigma}(M''))$，那么给定的三角蕴含 $M \in \tau f$，即 $f \in \widetilde{\sigma}(M)$，因为局部化理想对扩张封闭。

(6) 我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\sigma}(\vee_\lambda \mathsf{L}_\lambda) &= \{f \in F \mid \cup_\lambda \mathsf{L}_\lambda \subseteq \tau f\} \\ &= \cap_\lambda \{f \in F \mid \mathsf{L}_\lambda \subseteq \tau f\} \\ &= \cap_\lambda \widetilde{\sigma}(\mathsf{L})\end{aligned}$$

(7) 我们有

$$\widetilde{\sigma}(\mathsf{L} \cap \mathsf{M}) = \{f \in F \mid \mathsf{L} \cap \mathsf{M} \subseteq \tau f\}$$

and

$$\begin{aligned}\widetilde{\sigma}(\mathsf{L}) \vee \widetilde{\sigma}(\mathsf{M}) &= \{f \in F \mid \mathsf{L} \subseteq \tau f\} \vee \{g \in F \mid \mathsf{M} \subseteq \tau g\} \\ &= \{f \wedge g \mid \mathsf{L} \subseteq \tau f \text{ and } \mathsf{M} \subseteq \tau g\}\end{aligned}$$

由于 τ 保交，因此我们知道，如果 f 和 g 满足上述条件，那么

$$\mathsf{L} \cap \mathsf{M} \subseteq \tau(f) \cap \tau(g) = \tau(f \wedge g).$$

这表明 $f \wedge g \in \widetilde{\sigma}(\mathsf{L} \cap \mathsf{M})$，因此

$$(\widetilde{\sigma}(\mathsf{L}) \vee \widetilde{\sigma}(\mathsf{M})) \subseteq \widetilde{\sigma}(\mathsf{L} \cap \mathsf{M}).$$

□

注记 4.3.16。 利用这一事实，命题 (4) 是 (6) 的一个特例：

$$\bigvee_{\lambda} \operatorname{loc}(M_\lambda) = \operatorname{loc}\left(\coprod_{\lambda} M_\lambda\right).$$

引理 4.3.17. 支撑 σ 满足以下性质：

(1) 对所有 $i \in \mathbb{Z}$， $\sigma(\Sigma^i M) = \sigma(M)$；*(2)* $\sigma(0) = 0_F$，且 $\sigma(T) = \wedge\{f \in F \mid \tau(f) = T\}$。特别地，若 τ 是单射，则 $\sigma(T) = 1_F$。*(3)* 对所有 λ， $\sigma(\coprod_\lambda M_\lambda) \geq \vee_\lambda \sigma(M_\lambda)$，若 $M_\lambda \in \tau\sigma(M_\lambda)$，则取等号。*(4)* 给定一个三角 $M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$，我们有 $\sigma(M) \leq (\sigma(M') \vee \sigma(M''))$。*(5)* $\sigma(L) \wedge \sigma(M) \geq \sigma(L \cap M)$；*(6)* $(\sigma(L) \vee \sigma(M)) \leq \sigma(L \vee M)$。

证明。 练习。 □

4.4. **大 tt-范畴的精细支撑**。 现在我们讨论如何从支撑理论出发，经由 τ: $F \longrightarrow \mathrm{Loc}^{\otimes}(\mathsf{T})$，并尝试对其进行精细化。这将引出局部到整体原理，以及关于 T 的生成元的问题。

假设 4.4.1。 本节中，我们始终假设 F 是一个空间框架，且τ 是单射并经由 IdemT 分解。

因此， τ 是一个范畴化空间框架（或范畴化空间局部）。

注 4.4.2。 上述分解是通过将 Idem T 与 smashing 理想的框架等同起来实现的。我们需要考虑 smashing 理想、幂等余代数和幂等代数；但正如我们所见，它们都是同构的格，因此我们会视情况将它们等同起来。通常，我们将 τf 视为 smashing 理想，并将$A_{\tau f}$ 和 $C_{\tau f}$ 分别记作相应的代数和余代数。

注记 4.4.3。 应该可以建立一个至少不要求 F 为空间的框架，但其中存在一些挑战。我对此有一些想法。

这在其他方面也有所限制。为了涵盖所有情况，它要求 smashing 局部化足以确定所有局部化。这已经超出了我们目前能够计算的范围，因此在实践中，这项要求目前相当宽松。不过，我们知道，smashing 理想一般来说并不足够。

例 4.4.4。 如果 A 是绝对平坦交换环（即每个模都是平坦的），那么由 [12], 可知，望远镜猜想对 $\mathsf{D}(A)$ 成立，即

$$\mathrm{Idem}^{\mathrm{fin}}(\mathsf{D}(A)) = \mathrm{Idem}(\mathsf{D}(A)).$$

然而，我们从 [34] 得知，存在这样的例子：无法使用支撑理论方法从 $\mathrm{Idem}(\mathsf{D}(A))$ 得到所有局部化子范畴。

定义 4.4.5。 τ 的离散化 是一个完备格之间的单射 υ，使得下列三角图交换

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathrm{pt}\, F) \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & \swarrow_{\upsilon} & \\ \mathrm{Loc}^{\otimes}(\mathsf{T}) & & \end{array}$$

其中映射 $F \longrightarrow \mathcal{P}(\mathrm{pt}\ F)$ 将 f发送到相应的开子集 U_f。

注记 4.4.6。特别是，对每个 $x \in \mathrm{pt}(F)$，离散化都会给出一个局部化理想 $\upsilon(x)$，使得 $\upsilon(x) \cap \upsilon(y) = 0$ 适用于 $x \neq y$，且 $\tau(f) = \vee_{x \in U_f} \upsilon(x)$。专门考虑 1_F，我们看到 $\upsilon(x)$ 必须生成 T。这些要求相当多。

注记 4.4.7。我看不出有何先验 理由能说明一般情况下离散化不应有多个。若放宽 τ 经由 Idem T 分解这一条件，那么离散化就可能有多种选择。在我们所理解的例子中，它们是唯一的；但要验证这一点，就需要对 $\mathsf{Loc}^{\otimes}(\mathsf{T})$ 有足够完备的理解，以至于目的本身也就失去了意义。

定义 4.4.8。也可以考虑一种弱离散化，其中我们只要求一个自然变换 $\upsilon(U_{(-)}) \longrightarrow \tau(-)$，也就是说，对每个 f，都有一个包含关系 $\upsilon(U_f) = \vee_{x \in U_f} \upsilon(x) \subseteq \tau(f)$，而不要求严格交换。我们也可以对 υ 提出较弱的要求。例如，只要求它保并（因而不一定保最大元）。它会自动成为笛卡尔幺半群结构上的反松弛幺半群函子。这类结构通常是我们最初采用的，有时也是我们所知能做到的最好选择。

让我们举一个例子，然后开始尝试对我们的范畴化框架进行离散化。

例 4.4.9. 取 $\mathsf{T} = \mathsf{D}(R)$，其中 R 是一个交换诺特环（参见例 4.3.13）。我们取 τ 为膨胀

$$\mathrm{Thom}(\operatorname{Spec} R) \cong \mathrm{Thick}(\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R)) \longrightarrow \mathrm{Loc}(\mathsf{D}(R)).$$

它总是单射，而且我们知道 $\mathsf{Thick}(\mathsf{D}^{\mathrm{perf}}(R))$ 是一个空间框架，其对应的点空间为 $(\operatorname{Spec} R)^{\vee}$，即 $\operatorname{Spec} R$ 的 Hochster 对偶（本例中我们只讨论点和子集，因此这个对偶拓扑无关紧要）。对每个素理想 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$，我们都可以考虑剩余域 $k(\mathfrak{p})$，Neeman 在 [29] 中证明了

$$\mathsf{D}(R) = \mathrm{loc}(k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R).$$

我们定义 $\upsilon\colon \mathcal{P}(\operatorname{Spec} R) \longrightarrow \mathsf{Loc}^{\otimes}(\mathsf{D}(R))$ 为

$$\upsilon(W) = \mathrm{loc}(k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in W).$$

根据构造，它与并相容；它也是单射的，因为 $\upsilon(W)$ 恰好包含对应于 W 中各点的剩余域。我们已经证明它保持有限交，并且它扩张了 τ，因为我们可以取局部化理想 $\mathsf{D}(R) = \mathsf{loc}(k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R)$ 的等式，并与 Thomason 子集 V 对应的幂等余代数 C_V 作张量，以此看出

$$\begin{aligned}
\tau(V) &= \mathrm{loc}(C_V) \\
&= C_V \otimes \mathsf{D}(R) \\
&= C_V \otimes \mathrm{loc}(k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R) \\
&= \mathrm{loc}(C_V \otimes k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R) \\
&= \mathrm{loc}(k(\mathfrak{p}) \mid C_V \otimes k(\mathfrak{p}) \neq 0) \\
&= \mathrm{loc}(k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in V) \\
&= \upsilon(V).
\end{aligned}$$

因此，υ 是 τ 的离散化；事实上，Neeman 证明了 υ 是一个格同构。特别地，υ^{-1} 给出了一个分类支撑；在这种情况下，这个支撑与 Foxby 小支撑和 Balmer-Favi 支撑一致。

现在我们讨论一种细化范畴化空间框架 τ: $F \longrightarrow$Idem(T) 的一般方法（符合我们的既定假设）。第一项要素是对点空间施加的一个拓扑限制。

定义 4.4.10. 设 X 为一个拓扑空间。若X 的每一个点都是局部闭的，则称 X 是 T_D。若 F 是空间框架，则当 pt(F) 是时，称 F 是 T_D。

这实际上是 pt(F) 上的一个关键条件。通过 F，我们只能触及 pt(F) 的开闭子集，而 T_D 条件使我们能够用 F中的一对元素切出任意一点。

定义 4.4.11. 设 F 是 T_D。对于点 $p \in$ pt(F)，选取一对元素$f, g \in F$，使得 $\{p\} = U_f \cap V_g$，其中 $V_g =$pt(F) $\setminus U_g$。我们将 p处的幂等元定义为

$$\Gamma_p = C_{\tau f} \otimes A_{\tau g}$$

其中 $C_{\tau f}$ 是对应于 τf 的幂等余代数， $A_{\tau g}$ 是 τg的幂等代数。

注 4.4.12. 对象 Γ_p 有时用来指相应的函子，而我们上面定义的对象记为 $\Gamma_p\mathbf{1}$。我们选择优先考虑对象，并将相应的函子记为 $\Gamma_p \otimes$(–)。记号 κ(p)用于 [9]中的类似构造。

或许最好换一种记号，以表明 Γ_p 是幂等余代数和幂等代数的组合（但通常两者都不是）。

备注 4.4.13。给定一个空间 X，子集 W 是局部闭的，当且仅当存在一个从 W 上的阿贝尔群层到 X 上的阿贝尔群层的零延拓函子（例如参见 [38, 第 3 章，定理 8.6]）。知道这一点后，很难不纯粹凭感觉发表一些评论。

实际上，这与备注 4.3.3 有关。假设 T 是一个可呈示的对称幺半稳定 ∞-范畴，那么根据 [1],，我们有一个 Shv(F; Sp) =Shv(pt(F); Sp) 在 T 上的作用，该作用对应于 τ。当且仅当 pt(F) 是 T_D 时，才能从 F 的每个点进行零延拓；沿着不同的点对 Sp 的单位进行零延拓，就会得到 Γ_x。

引理 4.4.14。对象 Γ_p 与 f 和 g的选择无关。

证明。我们来证明一个更强的陈述：

$$\text{if } U_f \cap V_g = U_m \cap V_n \text{ then } C_{\tau f} \otimes A_{\tau g} \cong C_{\tau m} \otimes A_{\tau n}.$$

我们可以将其分成两部分：仅改变开子集，以及仅改变闭子集。事实上，对于该引理，我们只需改变开子集，因为总可以将闭子集取为 V_p p 所对应的闭集（我们将 p 同时视为一个点和一个交素元）。我们证明这一情形，其余部分留作练习。

因此，设 $U_f \cap V_g = U_m \cap V_g$。我们声称可以将 $C_{\tau f}$替换为 $C_{\tau(f \vee g)} = C_{\tau f} \vee C_{\tau g}$.
In实际上，幂等余代数的并由如下三角定义

$$C_{\tau f} \otimes C_{\tau g} \longrightarrow C_{\tau f} \oplus C_{\tau g} \longrightarrow C_{\tau f} \vee C_{\tau g}$$

并且与 $A_{\tau g}$ 作张量积会消去 $C_{\tau g}$，从而得到 $C_{\tau f} \otimes A_{\tau g}$ 与 $(C_{\tau f} \vee C_{\tau g}) \otimes A_{\tau g}$ 同构；m 的情形也类似。因此，我们已归结为 $U_g \subseteq U_f$ 且 $U_g \subseteq U_m$ 的情形。根据假设

$$U_f \cap V_g = U_m \cap V_g$$

也就是说， U_f 和 U_m 相差 U_g 中的元素。但 U_f 和 U_m 都包含 U_g，因此它们必定相等。于是 $\tau f = \tau m$，因此将相应的余代数与 $A_{\tau g}$ 作张量积会得到同构的对象。□

注记 4.4.15. 这一陈述是 [9, 引理 7.4] 的一个推广，其证明本质上相同。

引理 4.4.16. 若 p 是 F 的局部闭点，则 $\Gamma_p \neq 0$。

证明. 我们将 Γ_p 写成 $C_{\tau f} \otimes A_{\tau g}$，其中 $f, g \in F$。若 Γ_p 是平凡的，则我们必有

$$C_{\tau f} \in \ker(A_{\tau g} \otimes -) = \mathrm{loc}^{\otimes}(C_{\tau g}).$$

这表明 $\tau f \leq \tau g$，从而由 τ 的单射性，我们必有 $f \leq g$。由构造，$p(g) = 0$，因此将得出 $p(f) = 0$，但我们已选取 f 使得 $p(f) = 1$，即我们得出了荒谬的结论。因此 Γ_p 不可能是平凡的。□

习题 4.4.17. 证明：若 p 是 F 的点，则 $\Gamma_p \otimes \Gamma_p \cong \Gamma_p$。它是否必然是幂等代数或余代数?

习题 4.4.18. 证明，若 $p \neq q$ 是 F 的点，则 $\Gamma_p \otimes \Gamma_q = 0$。

命题 4.4.19. 设 F 是 T_D。则由下式定义 υ： $\mathcal{P}(\mathrm{pt}(F)) \longrightarrow \mathrm{Loc}^{\otimes}(\mathsf{T})$

$$\upsilon(W) = \mathrm{loc}^{\otimes}(\Gamma_p \mid p \in W)$$

是弱离散化，即它保并、是单射，并且对每个 f，都有

$$\upsilon(U_f) = \bigvee_{x \in U_f} \upsilon(x) \subseteq \tau(f).$$

证明。由构造可知，赋值 υ 保并。单射性由上一道习题得出：若 $W \neq W'$，则不妨设存在一个 $p \in W \setminus W'$，且有 $\upsilon(W') \subseteq \ker(\Gamma_p \otimes -)$，但 $\Gamma_p \otimes \upsilon(W) \neq 0$。

令 $C_{\tau f}$ 表示与 $\tau(f)$ 对应的幂等余代数。若我们能证明对每个 $p \in U_f$ 都有 $\Gamma_p \otimes C_{\tau f} \cong \Gamma_p$，则可推出 $\upsilon(U_f) \subseteq \tau(f)$。取元素 $g, h \in F$，使其将 Γ_p 表示为 $C_{\tau h} \otimes A_{\tau g}$。我们计算得

$$\Gamma_p \otimes C_{\tau f} \cong C_{\tau h} \otimes A_{\tau g} \otimes C_{\tau f} = C_{\tau f \wedge \tau h} \otimes A_{\tau g} = C_{\tau(f \wedge h)} \otimes A_{\tau g}.$$

根据假设，$p \in U_f$ 和 $p \in U_h$，所以 p 也属于 $U_f \cap U_h = U_{f \wedge h}$。因此我们知道 $p \in U_{f \wedge h} \cap V_g \subseteq U_h \cap V_g = \{p\}$。由引理 4.4.14 可得 $\Gamma_p \otimes C_{\tau f} \cong \Gamma_p$，正如所需。□

接下来我们讨论如何将 υ 提升为离散化。

定义 4.4.20. 假设 F 是 T_D。若 $\upsilon(\mathrm{pt}(F)) = \mathsf{T}$，则称局部到整体原理 对 τ 成立，即

$$\mathsf{T} = \mathrm{loc}^{\otimes}(\Gamma_p \mid p \in \mathrm{pt}(F)).$$

注 4.4.21. 这可以改述为： υ 保持空交。

备注 4.4.22. 从某种意义上说，这一定义可追溯至 Neeman 的论文 [29]，他在文中证明了剩余域生成诺特环的导出范畴。随后，Benson、Iyengar 和 Krause [14]对这一结果进行了抽象，并为其命名。上文给出的定义直接源自 [33]中在大 tt-几何背景下提出的表述。

推论 4.4.23. 如果 τ 满足局部到整体原理，那么 υ 是τ 的一种离散化，并且保留任意交。

证明。 我们需要验证 υ 保持交，且 $\tau(f) \subseteq \upsilon(U_f)$。先来看后者。假设 $\upsilon(\mathrm{pt}(F)) = \mathsf{T}$。给定 $f \in F$，我们有

$$\begin{aligned}\tau f &= C_{\tau f} \otimes \mathsf{T} \\ &= C_{\tau f} \otimes \mathrm{loc}^{\otimes}(\Gamma_p \mid p \in \mathrm{pt}(F)) \\ &= \mathrm{loc}^{\otimes}(C_{\tau f} \otimes \Gamma_p \mid p \in \mathrm{pt}(F)) \\ &= \mathrm{loc}^{\otimes}(\Gamma_p \mid p \in U_f) \\ &= \upsilon(U_f)\end{aligned}$$

其中，第一个等式来自关联幂等余代数的构造，第二个等式来自局部到整体原理，第三个等式来自 [33, 引理 3.12], ，第四个等式是由命题 4.4.19 的证明中的计算结合一个小练习得到的，最后一个等式则来自定义。

接下来证明 υ 保持交。设 W_i 对于 $i \in I$ 是 $\mathrm{pt}(F)$ 的子集，且交集为 W。根据交的泛性质，我们知道

$$\upsilon(W) \subseteq \cap_i \upsilon(W_i).$$

设 M 属于 $\upsilon(W_i)$ 的交集。我们知道

$$\mathrm{loc}^{\otimes}(M) = M \otimes \mathsf{T} = M \otimes \mathrm{loc}^{\otimes}(\Gamma_p \mid p \in \mathrm{pt}(F)) = \mathrm{loc}^{\otimes}(M \otimes \Gamma_p \mid p \in \mathrm{pt}(F))$$

因此， M 由满足 $M \otimes \Gamma_p \neq 0$ 的 Γ_p 生成。若 $p \in W_i$ 但不属于 W_j，那么根据习题 4.4.18, 与 Γ_p 作张量积会消去 $\upsilon(W_j)$。特别地， $M \otimes \Gamma_p = 0$。因此， $\Gamma_p \otimes M \neq 0$ 蕴含对所有 i 都有 $p \in W_i$，从而 $M \in \upsilon(W)$。□

引理 4.4.24。 假设 F 是 T_D，且局部到整体原理成立。那么， υ 的左伴随在局部化理想L 上的取值为

$$\mathrm{Supp}\,\mathsf{L} = \{p \in \mathrm{pt}(F) \mid \Gamma_p \otimes \mathsf{L} \neq 0\}.$$

证明。 我们知道，左伴随在 L 处的公式为

$$Y = \bigcap \{W \subseteq \mathrm{pt}(F) \mid \mathsf{L} \subseteq \upsilon(W)\}$$

我们需要证明 $Y = \mathrm{Supp}\,\mathsf{L}$。若 $p \notin Y$，则对某个子集 W 有 $p \notin W$，且 $\mathsf{L} \subseteq \upsilon(W)$；运用现在广为人知的技巧， $\Gamma_p \otimes \upsilon(W) = 0$。因此 $p \notin \mathrm{Supp}\,\mathsf{L}$，从而证明了 $\mathrm{Supp}\,\mathsf{L} \subseteq Y$。另一方面，由局部到整体原理可推出

$$\mathsf{L} = \mathsf{L} \otimes \mathsf{T} = \mathsf{L} \otimes \mathrm{loc}^{\otimes}(\Gamma_p \mid p \in \mathrm{pt}(F)) = \mathrm{loc}^{\otimes}(\mathsf{L} \otimes \Gamma_p \mid p \in \mathrm{Supp}\,\mathsf{L}).$$

这表明 L 是 $\upsilon(\mathrm{Supp}\,\mathsf{L})$的一个子范畴，因此 $Y \subseteq \mathrm{Supp}\,\mathsf{L}$。

□

注 4.4.25。 运用 Verasdanis 关于支撑-余支撑对的理论 [42]，将这一切推广为同时捕捉局部化子范畴和余局部化子范畴信息的理论，或许会是一项有趣的研究。

推论 4.4.26. 假设 F 是 T_D，且局部到整体原理成立。那么，引理 *4.4.24* 的支撑能够检测消失：

$$M \in \mathsf{T} \text{ is } 0 \text{ if and only if } \mathrm{Supp}\,M = \varnothing$$

并给出到 $\mathcal{P}(\mathrm{pt}\ F)$ 的一个收缩。

证明。 如果 $M = 0$，那么 $\mathrm{loc}^{\otimes}(M) = 0$，因此显然 $\mathrm{Supp}\ M = \varnothing$。另一方面，如果 $\mathrm{Supp}\ M = \varnothing$，那么根据定义，对于每个 $p \in \mathrm{pt}\ F$，都有 $M \otimes \Gamma_p = 0$。但局部到整体原理告诉我们

$$\mathrm{loc}^{\otimes}(M) = \mathrm{loc}^{\otimes}(M \otimes \Gamma_p \mid p \in \mathrm{pt}(F))$$

（如推论 4.4.23 的证明中所示），右侧的局部化理想显然为零。因此 $M \cong 0$。

现在我们来讨论收缩。设 W 是 F 的点子集。我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Supp}\, \upsilon(W) &= \mathrm{Supp}(\mathrm{loc}^{\otimes}(\Gamma_q \mid q \in W)) \\ &= \{p \in \mathrm{pt}(F) \mid \Gamma_p \otimes \mathrm{loc}^{\otimes}(\Gamma_q \mid q \in W) \neq 0\} \\ &= \{p \in \mathrm{pt}(F) \mid \Gamma_p \otimes \Gamma_q \neq 0 \text{ for some } q \in W\}\end{aligned}$$

由练习 4.4.17 和 4.4.18 以及引理 4.4.16，我们知道 $\Gamma_p \otimes \Gamma_p \neq 0$ 和 $\Gamma_p \otimes \Gamma_q = 0$，若 $p \neq q$。因此，$\mathrm{Supp}\ \upsilon(W)$ 恰好是 W。□

总而言之，在局部到整体原理成立的情况下，我们有一个单射

$$\upsilon \colon \mathcal{P}(\mathrm{pt}(F)) \longrightarrow \mathrm{Loc}^{\otimes}(\mathsf{T})$$

它保持任意并和交，其左伴随——精细支集——给出一个收缩。于是很自然地会想寻找一些条件，以保证 υ 也是满射，进而成为格同构。当且仅当每个 $\upsilon(\{p\}) = \mathrm{loc}^{\otimes}(\Gamma_p)$ 都是一个原子，也就是说，一个极小的非零局部化理想时，这种情况才会发生。

4.5. **例子。** 现在来讨论一些例子，在这些例子中，我们可以掌握上述所有对象，并检验对于某些 F 和 τ 的取值，局部到整体原理是否成立。

4.6. **诺特交换环。** 令 R 为一个交换诺特环，这个例子到现在应该已经相当熟悉了。正如我们在例 4.4.9 中看到的，我们知道 $\mathsf{D}(R)$ 的所有局部化子范畴，并且 $\mathrm{IdemD}(R) \cong \mathrm{Thick}^{\otimes}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})$。然而，我们的论证用到了剩余域 $k(\mathfrak{p})$，而这些并不是由 τ 得到的那些对象：$\mathrm{Thick}^{\otimes}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}}) \longrightarrow \mathrm{Loc}^{\otimes}(\mathsf{D}(R))$。（尽管事实证明它们提供了等价的信息。）

第一个观察（留作练习）是，如果 R 是诺特的，那么

$$\mathrm{pt}(\mathrm{Thick}^{\otimes}(\mathsf{D}(R)^{\mathrm{c}})) \cong (\operatorname{Spec} R)^{\vee}$$

是 T_D。因此我们处于命题 4.4.19 的情形。在这种情况下，对象 $\Gamma_{\mathfrak{p}}$ 可以描述为在 $\mathfrak{p}$ 处对 $\mathfrak{p}$ 处的稳定 Koszul 复形进行局部化（参见 [37,第 3.4] 节，其中总结了相关内容，包括定义及更多参考文献）。如果我们将情形限制为 R 是 Gorenstein 的，那么可以将其简单地描述为

$$\Gamma_{\mathfrak{p}} \cong \Sigma^{-\mathrm{ht}(\mathfrak{p})} E(k(\mathfrak{p}))$$

将其移位 $\mathfrak{p}$ 的高度 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$，得到剩余域在 $\mathfrak{p}$ 处的内包络 $E(k(\mathfrak{p}))$。特别地，它已经是 $\mathsf{D}(R_{\mathfrak{p}})$ 中的一个对象，并且可以验证 $k(\mathfrak{p})$ 和 $E(k(\mathfrak{p}))$ 生成相同的局部化子范畴（无需任何 Gorenstein 假设，这一结论也成立）。

特别地，由例 4.4.9 可知，τ 满足局部到整体原理。

4.7. **绝对平坦环**。 本节研究一个例子，在这个例子中，相对于紧对象的厚张量理想的局部到整体原理可能失效。它涉及一类特殊的交换环。

定义 4.7.1。 若交换环 A 的每个 A-模都是平坦的，则称其为绝对平坦的。这等价于 A 是既约且零维的。

我们固定一个绝对平坦环 A。它的谱 Spec A 是一个零维相干空间，因此是一个仿有限空间（所以尤其是豪斯多夫且 Hochster 自对偶）。因此它当然是 T_D ，我们可以通过取开子集 $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}) = \operatorname{Spec} A \setminus \{\mathfrak{p}\}$ 的补集来选出一个点 $\mathfrak{p}$ ；该开子集由那些不特化到 $\mathfrak{p}$ 的点组成。相应的幂等代数是局部化 $A_{\mathfrak{p}}$。由于 A 绝对平坦，这就是剩余域 $k(\mathfrak{p})$。换言之， $\Gamma_{\mathfrak{p}} = k(\mathfrak{p})$。

于是，局部到整体原理要问的是 $k(\mathfrak{p})$ 是否生成 $\mathsf{D}(A)$。有时成立，有时不成立（参见 [34] 和 [35] ，以及下一节中局部到整体原理的证明）。

定义 4.7.2。 如果 A 的每个非零商在 $\operatorname{Mod} A$ 中都包含一个简单子模（即，它含有某个 $k(\mathfrak{p})$ 作为子模），则称 A 是半阿廷的。

定理 4.7.3。 设 A 是绝对平坦的。当且仅当 A 是半阿廷的，局部到整体原理对 A 成立。

我们不提供证明，只作一些说明。如上所述，该陈述等价于：剩余域生成，当且仅当 A 是半阿廷的。如果 A 是半阿廷的，则剩余域生成，这一事实是下一节中的定理的推论；再结合这样一个事实： A 是半阿廷的，当且仅当 Spec A 具有康托尔-本迪克松秩（定义见下一节）。另一方面，如果 A 不是半阿廷的，那么利用 Trlifaj 的工作，对于 [41] ，存在一个没有不可分解直和项的内射模；由于 $k(\mathfrak{p})$ 是简单内射对象，该模必然属于 $\operatorname{loc}(k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A)$ 的右正交。

4.8. **局部到整体原理的一些情形**。 本节给出目前所知关于局部到整体原理的最一般结果（说它最一般并不费什么劲，因为本章所用的框架是我刚刚创立的）。这一结果有若干前身。不过，先前已知的结果仅限于以下情形： $\tau\colon \mathsf{Thick}^{\otimes}(\mathsf{T}^{c}) \longrightarrow \mathsf{Idem}(\mathsf{T})$。Benson、Iyengar 和 Krause 最初在由有限克鲁尔维数的诺特环作用所产生的有限局部化这一背景下证明了这一结果，见 [14, 推论 3.5]。随后，这一结果被推广到 tt-框架中，见 [33]；之后又受绝对平坦环情形的启发，进一步推广，见 [35] 。在[35] 中，诺特情形和拟有限情形分别得到了处理。实际上，这并非必要； [32, 定理 7.18] 表明，只要 $(\operatorname{Spc} \mathsf{T}^{c})^{\vee}$具有下文定义的康托尔-本迪克松秩，就可以用相同的方法，针对紧对象的膨胀建立局部到整体原理；事实证明，这一秩正是基本不变量。

定义 4.8.1. 设 X 是一个空间。令 $X_{\leq 0}$ 表示 X 的孤立（即开）点集，并令 $X_{>0} = X \setminus X_{\leq 0}$。然后通过超限归纳进一步定义子空间。假设 $X_{\leq \alpha}$ 已定义，并用 $X_{>\alpha}$ 表示其补集。令

$$X_{\leq \alpha+1} = X_{\leq \alpha} \cup (X_{>\alpha})_{\leq 0}$$

也就是说，将 $X_{>\alpha}$ 的孤立点添加到 $X_{\leq\alpha}$中。如果 λ 是一个极限序数，则令

$$X_{\leq\lambda} = \bigcup_{\kappa<\lambda} X_{\leq\kappa}.$$

这是 X 的康托尔-本迪克松滤过 。如果存在一个 α ，使得 $X = X_{\leq\alpha}$ ，那么我们称 X 具有康托尔-本迪克松（*CB*）秩 ，并将其秩定义为满足 $X = X_{\leq\beta}$ 的最小序数 β 。如果不存在这样的序数，即该滤过不是穷尽的，我们就称该秩未定义，或者称 X 没有秩。

例 4.8.2。 如果 X 是诺特相干空间，那么 $X^\vee$ 具有 CB 秩。

例 4.8.3。 如果 A 是半阿廷绝对平坦环，那么 Spec A 具有 CB 秩 .

现在我们给出局部到整体原理成立的判据。我们固定一个具有 CB 秩的不可约闭集有泛点的 T_D 空间 X ，以及一个大 tt-范畴 T。假设给定一个框架的单射映射 $\tau\colon \Omega(X) \longrightarrow$ Idem(T)（并且像往常一样，我们可以在幂等代数、余代数和 smashing 理想之间自由转换）。在陈述判据之前，我们先给出一些准备性引理。

引理 4.8.4。 对于每个序数 α，子集 $X_{\leq\alpha}$ 都是开集。

证明。 我们采用超限归纳。基例显然成立： $X_{\leq 0}$ 是开点的并集，因此是开集。假设 α 是一个序数，且 $X_{\leq\alpha}$ 是开集。根据定义

$$X_{\leq\alpha+1} = X_{\leq\alpha} \cup \{x \in X_{>\alpha} \mid x \text{ is open in } X_{>\alpha}\}.$$

如果 $x \in X_{\leq\alpha+1} \setminus X_{\leq\alpha}$，也就是说 x 在 $X_{>\alpha}$中是开集，那么存在 x 的一个开邻域U，使得 $U \cap X_{>\alpha} = \{x\}$，即 $U \setminus \{x\} \subseteq X_{\leq\alpha}$。因此， U是 x 的一个包含于 $X_{\leq\alpha+1}$ 中的开邻域，这说明 $X_{\leq\alpha+1}$ 是开集。如果 λ 是一个极限序数，那么

$$X_{\leq\lambda} = \bigcup_{\kappa<\lambda} X_{\leq\kappa}.$$

根据归纳假设，每个 $X_{\leq\kappa}$ 都是开集，因此 $X_{\leq\lambda}$ 也是开集。 □

接下来的两个结果允许我们将范畴化局部结构传递到由 smashing 理想取商得到的 T 的商上。

引理 4.8.5。 设 U 是 X 的一个开子集，其闭补集为 Z。那么区间

$$[U, X] = \{W \in \Omega(X) \mid U \subseteq W\}$$

是一个框架，并且通过将 W 映到 $W \setminus U = W \cap Z$而自然同构于$\Omega(Z)$。

证明. 区间 $[U, X]$ 以 U为底元、以 X为最大元，并且在$\Omega(X)$中对非空并与交封闭。因此它显然是一个框架。我们记 $f\colon [U, X] \longrightarrow \Omega(Z)$为将 W 映到它与 Z的交集的映射。我们注意到这正是复合

$$[U, X] \hookrightarrow \Omega(X) \xrightarrow{\Omega(i)} \Omega(Z)$$

其中 $i\colon Z \longrightarrow X$是包含关系。它保序；由于 $X = U \coprod Z$作为集合，故为单射；并且是满射，因为如果 $V \in \Omega(Z)$，那么存在 X 的一个开子集 W ，使得$W \cap Z = V$，且开子集 $W \cup U \in [U, X]$ 满足 $f(W \cup U) = V$。最后，我们需要检查 f 是否反映序关系，但这显然成立。这表明 f 是偏序集的同构，因此它自动也是框架同构，因为框架结构是偏序集的一种性质。

□

引理 4.8.6. 设 S 是 T 的一个 *smashing* 理想，其对应的幂等代数为 A。那么T/S 仍是一个大 *tt*-范畴，并且

$$(-)\otimes A\colon [A,0]\longrightarrow \mathrm{Idem}(\mathsf{T}/\mathsf{S})$$

是框架的一个同构，其中 $[A,0]=\{B\in\mathrm{Idem}(\mathsf{T})\mid A\leq B\leq 0\}$。

证明。 由于 S 是 smashing 的，局部化函子 T $\longrightarrow$T/S 将紧对象映射为紧对象（这等价于右伴随保持余积，见定理 4.2.10），因此 T^c 的像给出了 T/S 的一个紧生成集。该局部化继承了幺半群结构；由于 S 是一个理想，局部化是幺半群的。任何幺半群函子都会将刚性对象映射为刚性对象，因此 T/S 的紧生成元也是刚性的，从而它是一个大 tt-范畴。T/S 的单位对象是 A。

让我们证明态射 $(-)\otimes A$ 是一个保序双射（关于幂等代数所定义的序，参见定义 4.2.26 及其后面的注记）。设 $A_1\leq A_2$ 属于 $[A,0]$，即它们带有代数映射 $A\longrightarrow A_i$。由于 $A_i\geq A$ 与 A_i 张量化 A 的单位映射给出同构 $A_i\xrightarrow{\sim}A\otimes A_i$，因此我们看到，映射 $A\longrightarrow A_i$ 使 A_i 成为 T/S 中的幂等代数，而映射 $A_1\longrightarrow A_2$ 仍然成立。由此构造立即可知，引理中的映射是良定义的、保序的且为单射。

我们来检验满射性。假设 $A\longrightarrow B$ 是 T/S 中的一个幂等代数。复合映射 $\mathbf{1}\longrightarrow A\longrightarrow B$ 使 B 成为 T 中的一个幂等代数，这一点可通过与 $B\cong(A\otimes B)$ 作张量积看出。根据构造，它属于 $[A,0]$，而与 A 作张量积会将其映回 B，视为 T/S 中的一个幂等代数。□

命题 4.8.7. 假设 $\tau\colon\Omega(X)\longrightarrow\mathrm{Idem}(\mathsf{T})$ 是一个范畴化框架。设 $U\in\Omega(X)$具有闭补集 Z。那么 τ 在对应的局部化 $\Omega(Z)\longrightarrow\mathrm{Idem}(\mathsf{T}/\tau(U))$上诱导出一个范畴化框架。

证明。 这归结为将 τ 限制到 $[U,X]\longrightarrow[\tau(U),0]$，并应用前两个引理。□

注 4.8.8. 上述假设过于严格：稍作显而易见的修改后，同样的论证适用于任意框架映射 $F\longrightarrow\mathrm{Idem}(\mathsf{T})$ 和元素 $f\in F$。

现在我们可以证明，康托尔-本迪克松秩足以保证局部到整体原理。

定理 4.8.9. 假设 X 是不可约闭集有泛点的，T_D，并且具有康托尔-本迪克松秩。那么任意单射框架映射 $\tau\colon\Omega(X)\longrightarrow\mathrm{Idem}(\mathsf{T})$ 都满足局部到整体原理。特别地，命题 *4.4.19* 中对应的映射 υ 是 τ 的一种离散化，并且保持任意交。

证明。 我们将通过超限归纳证明

$$\tau(X_{\leq\alpha})=\mathrm{loc}^{\otimes}(\Gamma_x\mid x\in X_{\leq\alpha})=\upsilon(X_{\leq\alpha})$$

对所有序数 α均成立。特别是，若 β 是 X 的康托尔-本迪克松秩，那么

$$\mathsf{T}=\tau(X)=\tau(X_{\leq\beta})=\upsilon(X_{\leq\beta})=\upsilon(X).$$

基例为 $\tau(X_{\leq 0})=\upsilon(X_{\leq 0})$。根据定义，$X_{\leq 0}$ 中的每个点都是开集。因此，利用 τ 是框架的映射这一点，我们得到

$$\tau(X_{\leq 0})=\tau(\cup_{x\in X_{\leq 0}}\{x\})=\vee_{x\in X_{\leq 0}}\tau(\{x\})$$

因此，只需将 $\tau(\{x\})$ 与 $\upsilon(\{x\})$ 对应起来（我们知道，根据命题 4.4.19，υ 保持并）。由于 $\{x\}$ 是开集，我们可以将 x 分离出来，写作 $\{x\} = \{x\} \cap X$（将 X 视为开子集 $\varnothing$的闭补集），从而得到

$$\Gamma_x = C_{\tau(\{x\})} \otimes A_{\varnothing} = C_{\tau(\{x\})} \otimes \mathbf{1} = C_{\tau(\{x\})}$$

因此 $\upsilon(\{x\}) = \mathsf{loc}^{\otimes}(\Gamma_x) = \mathsf{loc}^{\otimes}(C_{\tau(\{x\})}) = \tau(\{x\})$。

现在我们讨论极限序数的情形。根据我们的设定，这种情形本质上是平凡的。假设 λ 是一个极限序数，并且对每个 $\kappa < \lambda$，都有 $\tau(X_{\leq\kappa}) = \upsilon(X_{\leq\kappa})$。我们看到

$$\begin{aligned}\tau(X_{\leq\lambda}) &= \tau(\cup_{\kappa<\lambda} X_{\leq\kappa}) \\ &= \vee_{\kappa<\lambda}\, \tau(X_{\leq\kappa}) \\ &= \vee_{\kappa<\lambda}\, \upsilon(X_{\leq\kappa}) \\ &= \upsilon(\cup_{\kappa<\lambda} X_{\leq\kappa}) \\ &= \upsilon(X_{\leq\lambda})\end{aligned}$$

这里我们用到了 τ 和 υ 都与并可交换，以及归纳假设。最后，我们讨论后继序数的情形。设对所有 $\beta \leq \alpha$，都有 $\tau(X_{\leq\beta}) = \upsilon(X_{\leq\beta})$。我们考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} \tau(X_{\leq\alpha}) & \longrightarrow & \tau(X_{\leq\alpha+1}) & \longrightarrow & \mathsf{Q} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathsf{T} & \longrightarrow & \mathsf{T}/\tau(X_{\leq\alpha}) \end{array}$$

其中 $\mathsf{Q} = \tau(X_{\leq\alpha+1})/\tau(X_{\leq\alpha})$，也就是说，顶行是一个局部化序列，竖直箭头是全忠实的，并且每个函子都有右伴随。由命题 4.8.7，我们得到一个范畴化局部 $\tau' \colon \Omega(X_{>\alpha}) \longrightarrow \mathsf{T}/\tau(X_{\leq\alpha})$。根据康托尔-本迪克松秩的定义，我们有

$$X_{\leq\alpha+1} \cap X_{>\alpha} = (X_{>\alpha})_{\leq 0}$$

因此，利用引理 4.8.5 和 4.8.6，我们将 Q 识别为 $\tau'((X_{>\alpha})_{\leq 0})$。根据归纳法基例的论证，我们知道 $\upsilon'((X_{>\alpha})_{\leq 0}) = \tau'((X_{>\alpha})_{\leq 0})$；再利用局部化的右伴随，将 Q 视为包含在 $\tau(X_{\leq\alpha+1})$ 中的局部化理想，我们看到

$$\tau(X_{\leq\alpha+1}) = \tau(X_{\leq\alpha}) \vee \mathsf{Q} = \upsilon(X_{\leq\alpha}) \vee \upsilon'((X_{>\alpha})_{\leq 0}).$$

因此，只需针对康托尔-本迪克松秩为 $\alpha+1$ 的 $x \in X$，识别对象 Γ_x 和 Γ'_x；后者是利用 τ' 构造的（换言之，验证等式 $\upsilon'((X_{>\alpha})_{\leq 0}) = \upsilon(X_{\leq\alpha+1} \cap X_{>\alpha})$）。

我们将对应于 $\tau(X_{\leq\alpha})$ 的幂等代数记为 A。我们知道，对于作为 $(X_{>\alpha})$ 中一点的 $x_{\leq 0}$，对象 Γ'_x 就是 $\tau'(\{x\})$ 的幂等余代数（参见归纳基例的证明）。结合引理 4.8.5 和引理 4.8.6 的另一种方法可知，这是 $\mathbf{1} \otimes A \longrightarrow A_{\tau X_{\leq\alpha} \cup \{x\}} \otimes A$ 的纤维，而它恰好是 $C_{\tau X_{\leq\alpha} \cup \{x\}} \otimes A$。但是，$A$ 是 $\tau(X_{\leq\alpha})$ 的幂等代数，而 $X_{>\alpha} \cap (X_{\leq\alpha} \cup \{x\}) = \{x\}$，因此这个由幂等代数和余代数构成的张量积给出了 Γ_x。证明至此完成。□

References

1. K. Aoki, *The sheaves-spectrum adjunction*, arXiv 预印本 arXiv:2302.04069（2023）。2. , *Tensor triangular geometry of filtered objects and sheaves*, 《数学杂志》303（2023），第 3 期，论文编号 62，27 页。3. K. Aoki、T. Barthel、A. Chedalavada、T. Schlank 和 G. Stevenson, *Higher Zariski geometry*, arXiv 预印本 arXiv:2508.11621（2025）。4. S. Baland、A. Chirvasitu 和 G. Stevenson, *The prime spectra of relative stable module categories*, 《美国数学会汇刊》371（2019），第 1 期，489–503。5. S. Balchin 和 G. Stevenson, *Big categories, big spectra*, arXiv 预印本 arXiv:2109.11934（2021）。6. P. Balmer, *The spectrum of prime ideals in tensor triangulated categories*, 《纯粹与应用数学杂志》588（2005），149–168。7. , *Spectra, spectra, spectra—tensor triangular spectra versus Zariski spectra of endomorphism rings*, 《代数几何与拓扑》10（2010），第 3 期，1521–1563。8. P. Balmer, *A guide to tensor-triangular classification*, 《同伦论手册》，CRC出版社/Chapman Hall数学手册系列，CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，[2020] ©2020，第 145–162 页。9. P. Balmer 和 G. Favi, *Generalized tensor idempotents and the telescope conjecture*, 《伦敦数学会会刊》（第 3 辑）102（2011），第 6 期，1161–1185。10. P. Balmer 和 M. Gallauer, *The geometry of permutation modules*, 预印本见作者网页（2023）。11. P. Balmer、H. Krause 和 G. Stevenson, *The frame of smashing tensor-ideals*, 《剑桥哲学学会数学会刊》 **168** 2020 2, 323 343 4064108 ( ), 第 – 期。MR 。S. Bazzoni 和 J. ˇ St' ovi ˇ cek, 12 ´ *Smashing localizations of rings of weak global dimension at most one* **305** 2017 351 401 , 《数学进展》（ ），–。13. D. J. Benson、J. F. Carlson 和 J. Rickard, *Thick subcategories of the stable module category*, 《数学基础》153（1997），59–80。14. D. J. Benson、S. B. Iyengar 和 H. Krause, *Stratifying triangulated categories*, 《拓扑学杂志》4（2011），641–666。15. , *Module categories for group algebras over commutative rings* **11** 2013 2, , 《K-理297 论杂志》（ ），第 –329 期，附有 Greg Stevenson 的附录。16. A. B. Buan、H. Krause 和 Ø. Solberg, *Support varieties: an ideal approach*, 《同调、同伦及其应用》9（2007），第 1 期，45–74。17. J. F. Carlson, *The variety of an indecomposable module is connected*, 《数学发明》77（1984），291–299。18. D. Clausen 和 P. Scholze, *Condensed mathematics and complex geometry*, 笔记见 https://people.mpim-bonn.mpg.de/scholze/Complex.pdf（2022）。19. I. Dell'Ambrogio 和 G. Stevenson, *Even more spectra: tensor triangular comparison maps via graded commutative 2-rings* **22** 2014 1, 169 210 , 《应用范畴结构》（ ），第 – 期。20. E. S. Devinatz、M. J. Hopkins 和 J. H. Smith, *Nilpotence and stable homotopy theory I*, 《数学年刊》128（1988），第 2 期，207–241。21. M. Gallauer, *Supports for constructible systems*, 《数学文献》27（2022），1739–1772。22. S. Gratz 和 G. Stevenson, *Approximating triangulated categories by spaces*, 《数学进展》425（2023），论文编号 109073，44 页。23. M. Hochster, *Prime ideal structure in commutative rings*, 《美国数学会汇刊》142（1969），43–60。24. P. T. Johnstone, 剑桥高等数学研究丛书，第 3 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1982。25. B. Keller, *A remark on the generalized smashing conjecture* **84** 1994 2, , 《数学193, 198 手稿》（ ），第 – 期。26. J. Kock 和 W. Pitsch, *Hochschild duality in derived categories and point-free reconstruction of schemes* **369** 2017 261 , 《美国数学会汇刊》（ ），第 1 期，223– 。27. H. Krause, *Smashing subcategories and the telescope conjecture - an algebraic approach*, 《数学发明》139（2000），99–133。28. D. K. Nakano、K. B. Vashaw 和 M. T. Yakimov, *Noncommutative tensor triangular geometry*, 《美国数学杂志》144（2022），第 6 期，1681–1724。29. A. Neeman, *The chromatic tower for D（R）*，拓扑学 31（1992），519–532。30. , *The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability*, 《美国数学会杂志》9（1996），205–236。31. , *Triangulated categories*, 《数学年刊研究》丛书，第 148 卷，普林斯顿大学出版社，2001。

32. W. T. Sanders, *Support and vanishing for non-noetherian rings and tensor triangulated categories*, arXiv 预印本 arXiv:1710.10199（2017）。33. G. Stevenson, *Support theory via actions of tensor triangulated categories*, 《纯粹与应用数学杂志》**681** （2013），219–254。34. G. Stevenson, *Derived categories of absolutely flat rings* **16** 2014 2, , 《同调、同伦及其应用》（），第 – 期。35. , *The local-to-global principle for triangulated categories via dimension functions*, 《代数杂志》**473** （2017），406–429。36. , *Complete Boolean algebras are Bousfield lattices*, 《有限群表示论的几何与拓扑方面》，《施普林格数学与统计学会议录》，第242卷，施普林格，Cham，2018，第393–405页。37. , *A tour of support theory for triangulated categories through tensor triangular geom-etry*, 《搭建代数与拓扑之间的桥梁》，《巴塞罗那 CRM 数学进阶课程》，Birkh¨ 2018, 63 101 3793858 auser/施普林格，Cham，第 – 页。MR 。B. R. Tennison, *Sheaf theory*, 《伦敦数学会讲义系列》，第20卷，剑桥大学出版社，剑桥，英格兰-纽约-墨尔本，1975。39. R. W. Thomason, *The classification of triangulated subcategories*, 《数学汇编》**105** （1997），1–27。40. R. W. Thomason 和 T. Trobaugh, *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories*, 《格罗滕迪克纪念文集》，第III卷，《数学进展》，第88卷，Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1990，第247–435页。41. J. Trlifaj, *Two problems of Ziegler and uniform modules over regular rings*, 《阿贝尔群与模》（科罗拉多斯普林斯，科罗拉多州，1995），《纯粹与应用数学讲义》，第182卷，德克尔，纽约，1996，第373–383页。42. C. Verasdanis, *Costratification and actions of tensor-triangulated categories*, arXiv 预印本 arXiv:2211.04139（2022）。

Greg Stevenson, Aarhus University, Department of Mathematics, Ny Munkegade 118, bldg.1530 DK-8000 Aarhus C, Denmark*Email address*: greg@math.au.dk