arXiv:2602.08481v1 [math.NA] 9 Feb 2026

具有非恒定压缩因子的混合气体流网络稳态的存在性

S. Göttlich[1], M. Schuster[2], A. Ulke[1]

摘要 本文研究了通过管道网络输送的氢气-天然气混合物。流动过程采用带有压力定律的等温欧拉方程进行建模，其中压缩因子并非常数，而是取决于组分。对于一大类此类压缩因子模型，我们证明了含有压缩机站的网络上稳态解的存在性。分析基于压力分布的隐式表示，以及一种连续性论证，从而克服了气体组成对流动方向的不连续依赖。数值算例说明了不同压缩因子模型对所得状态的影响。

1 引言与动机

全球能源系统持续向气候中和转型，使氢气成为科学界和工业界讨论的核心。作为一种能源载体，氢气具有多项极具吸引力的特性。它可以利用风能或太阳能等可再生能源生产，且其使用不会产生二氧化碳排放，只释放水和热量 [8, 11]。此外，氢气被视为实现难以轻易电气化行业脱碳的关键推动力，其中包括部分重工业和长距离运输领域。此外，氢气还能够实现大规模能源储存和部门耦合，从而为能源系统提供灵活性 [11, 33], ，这凸显了氢气在未来能源基础设施中的预期重要性。

尽管氢气前景可期，但它不会立即取代天然气，成为主要能源。相反，目前普遍认为，逐步融入现有基础设施是最可行的路径。在这一背景下，将氢气掺入天然气管道网络已成为一种务实的过渡策略，既能减少温室气体排放，又能依托成熟的输送系统。全球范围内，大规模氢气输送网络已在建设中，参见 [12] 欧洲、 [25] 亚洲和 [34] 美国的相关情况。然而，在可预见的未来，实际应用仍将以氢气-天然气混合物为主，而非纯氢气流。

对输送富氢天然气的管道网络进行安全、高效的运行，需要深入理解其底层流动过程的数学机理。纯天然气（或任何其他单一气体）的输送可由等温欧拉方程准确描述，参见 [3, 9, 16, 24]:

$$\partial_t \rho_{\mathrm{NG}}(t,x) + \partial_x q_{\mathrm{NG}}(t,x) = 0, \tag{1.1a}$$

$$\partial_t q_{\mathrm{NG}}(t,x) + \partial_x \left[p_{\mathrm{NG}}(\rho_{\mathrm{NG}}(t,x)) + \frac{q_{\mathrm{NG}}^2(t,x)}{\rho_{\mathrm{NG}}(t,x)} \right] = -\frac{\lambda_{\mathrm{fr}}}{2D} \frac{q_{\mathrm{NG}}(t,x)|q_{\mathrm{NG}}(t,x)|}{\rho_{\mathrm{NG}}(t,x)}, \tag{1.1b}$$

[1]曼海姆大学，数学系，68131 曼海姆，德国（ulke@uni-mannheim.de, goettlich@uni-mannheim.de）[2]埃尔朗根-纽伦堡腓特烈-亚历山大大学，数学系，91058 埃尔朗根，德国（michi.schuster@fau.de）

双组分气体混合物的输送则可通过对每种气体分别应用质量守恒方程 (1.1a)，并对混合物应用动量平衡方程 (1.1b) 来建模，参见 [6, 22, 28], ，即:

$$\partial_t \rho_{\mathrm{NG}}(t,x) + \partial_x q_{\mathrm{NG}}(t,x) = 0, \tag{1.2a}$$

$$\partial_t \rho_{\mathrm{H_2}}(t,x) + \partial_x q_{\mathrm{H_2}}(t,x) = 0, \tag{1.2b}$$

$$\partial_t q(t,x) + \partial_x \left[p(\rho_{\mathrm{NG}}(t,x), \rho_{\mathrm{H_2}}(t,x)) + \frac{q^2(t,x)}{\rho(t,x)} \right] = -\frac{\lambda_{\mathrm{fr}}}{2D} \frac{q(t,x)|q(t,x)|}{\rho(t,x)}. \tag{1.2c}$$

时空域为 $(t,x) \in [0, t_{\mathrm{final}}] \times [0, L]$。此外， $\rho_{\mathrm{NG}}, \rho_{\mathrm{H_2}}$ 表示天然气和氢气的密度， $q_{\mathrm{NG}}, q_{\mathrm{H_2}}$ 表示天然气和氢气的流量； $\rho = \rho_{\mathrm{NG}} + \rho_{\mathrm{H_2}}$ 和 $q = q_{\mathrm{NG}} + q_{\mathrm{H_2}}$ 分别表示混合物的密度和流量。此外， $D > 0$表示管道直径，λ_{fr} 表示管道摩擦系数。气体的压力—密度关系由适当的状态方程或压力定律描述。对于纯天然气，压力通常表示为

$$p_{\mathrm{NG}}(\rho_{\mathrm{NG}}) = \frac{RT}{M_{\mathrm{NG}}} Z(p_{\mathrm{NG}}) \rho_{\mathrm{NG}},$$

其中， R 表示通用气体常数， M_{NG} 表示天然气的摩尔质量， T 表示恒定的气体温度， $Z(p_{\mathrm{NG}})$ 表示压缩因子。

对于天然气输送，文献中对压缩因子的建模已相当成熟。常见的选择包括对应于理想气体定律的常数近似，参见 [10, 15, 32], ；美国天然气协会提出的线性近似，参见美国天然气协会 [18, 30], ；以及基于***Papay***公式的二次模型，参见 [30, 36]。这些近似广泛应用于稳态和瞬态天然气网络模型，并已证明能够为纯天然气流量提供可靠结果。然而，对于气体混合物，目前仍缺乏成熟的选择。虽然混合物的摩尔质量通常定义为各个组分摩尔质量的凸组合，但对于相应的压缩因子，尚无普遍认可的模型。文献中已提出若干方法，主要应用于数值模拟。例如， [5,35] 通过恒定压缩因子的凸组合来近似混合物的压缩因子，而 [7]则采用线性压缩因子模型的凸组合。此外， [4] 采用了另一种策略，将临界温度和摩尔质量结合起来，以应用二次压缩因子。

尽管这些方法都受到成熟的纯天然气压缩因子模型的启发，但将其扩展到氢气-天然气混合物并非唯一。不同的建模选择会导致不同的压力—密度关系，因此即使在相同的边界条件下，也会产生明显不同的稳态，如图1所示。对于恒定压缩因子 [5, 35], 我们采用

$$Z(p_{\mathrm{NG}}) = Z(p_{\mathrm{H_2}}) = 1, \tag{1.3}$$

对于线性模型 [7, 30], 我们采用

$$Z(p) = 1 + (\eta\ \alpha_{\mathrm{H_2}} + (1-\eta)\alpha_{\mathrm{NG}})p \qquad \text{with} \qquad \alpha_X = \frac{0.257}{p_{c,X}} - \frac{0.5333\ T_{c,X}}{p_{c,X}\ T}, \tag{1.4}$$

其中， $X \in \{\mathrm{H_2}, \mathrm{NG}\}$， p 表示混合物的压力， η 表示混合物中的氢气百分比。此外， T 表示气体温度，$p_{c,\ X}$，$T_{c,\ X}$ 表示临界压力和

气体的温度。二次模型 [30, 4] 为

$$Z(p) = 1 - 3.52\exp\Big(-2.26\frac{T}{T_c}\Big)\frac{p}{p_c} + 0.274\exp\Big(-1.878\frac{T}{T_c}\Big)\frac{p^2}{p_c^2}, \tag{1.5}$$

其中， p_c， T_c 表示混合物的临界压力和温度，通过对各气体的临界压力和温度进行凸组合计算得出。图1中的仿真结果展示了两种效应：首先，恒定与非恒定压缩因子模型之间存在明显差异，而对于纯天然气，非恒定模型几乎重合；其次，随着氢气百分比增加，各模型之间的差异也随之增大。由于气体混合物尚无规范压缩因子模型，解析结果不应依赖压缩因子的特定函数形式。

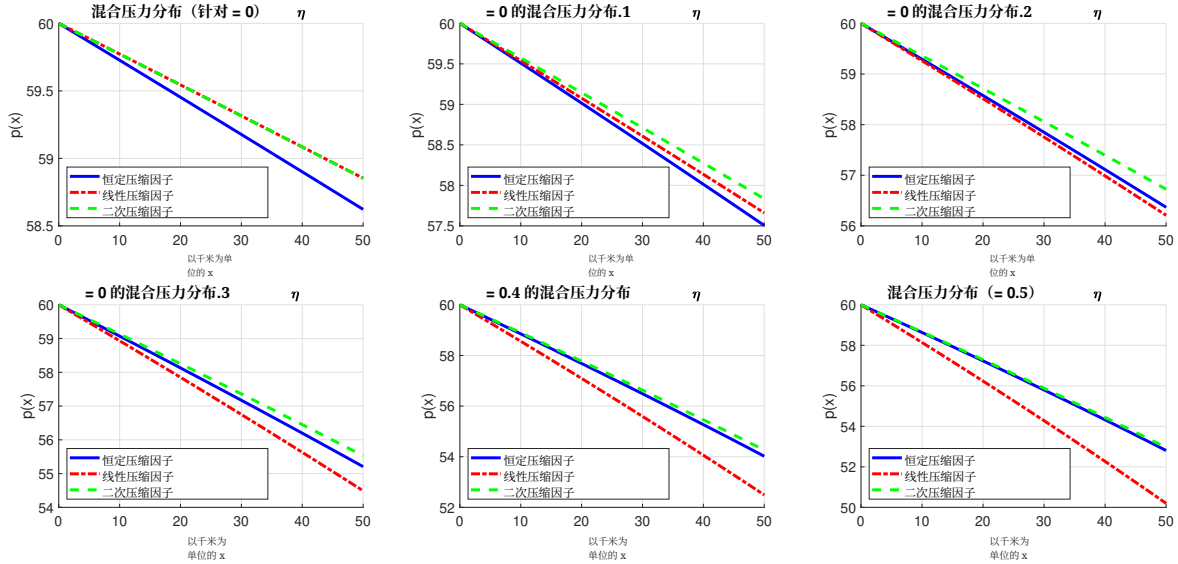


图1：单根管道长度为 $L = 50$ 千米， $\lambda_{\text{fr}} = 0.05$ 和 $D = 0.5$ 米时，压缩因子模型 (1.3) - (1.5) 的仿真结果。天然气参数为 $R = 8.3145$ J/(mol K)$^{-1}$、 $T = 283.15$ K、 $p_{c,\,\text{H}_2} = 13.15$ bar、$p_{c,\,\text{NG}} = 46.01$ bar、$T_{c,\,\text{H}_2} = 33.19$ K 和 $T_{c,\,\text{NG}} = 204.62$ K。

对于采用恒定压缩因子混合模型的情形，文献 [35] 已证明纯输送网络中稳态的存在性。相比之下，对于采用非恒定压缩因子混合物模型且包含压缩机站等可控元件的网络，稳态解是否存在仍是一个悬而未决的问题。为弥补这一空白，本文证明了一大类压缩因子条件下稳态的存在性，并将分析扩展到含压缩机站的网络。文献 [35] 中的存在性证明大量利用了这样一个事实：尽管组分对流动方向的依赖是不连续的，但沿路径的压力变化对边界数据的依赖是连续的。为确立这种对边界数据的连续依赖，关键在于观察到，在稳态情形下，方程（1.2）化为关于压力分布的常微分方程（ODE）。对于理想气体，该常微分方程存在闭式解，从而可以分析组分不连续性对压力变化的影响

。然而，对于任意压缩因子，一般不存在这样的闭式解。因此，本文的主要贡献是解决由此产生的技术困难。

本文结构如下：在第2节中，我们介绍网络中混合物的气体流动模型，并针对任意压缩因子，推导出由方程（1.2）的稳态形式所得到的常微分方程的隐式解。随后，在第3节中，我们证明树形网络和单环网络的稳态解存在性。最后，在第4节中，我们通过数值研究展示压缩因子的不同取值 Z 对混合物气体流动模型稳态解的影响。

2 网络中混合物的气体流动建模

天然气网络包含不同的组成部分，例如向网络输送气体和从网络中取用气体的生产者与消费者、用于输送气体的管道，以及用于调节网络压力水平的压缩机。下面，我们先介绍一些基本术语和符号，再深入讨论气体流动的建模。

设有一个有向连通图 $G = (V, E)$，其节点集 V 表示网络节点，并作为气体的入口或出口；边集 $E \subseteq V \times V$。每条边 $e \in E$ 表示一段长度为 $L_e > 0$ 的管道，或一座压缩机比为 $\gamma_e \geq 1$的压缩机站，因此我们将边集划分为两个互不相交的子集 $E_{\text{pipe}} \subseteq E$ 和 $E_{\text{comp}} \subseteq E$，分别表示管道和压缩机。对于边 $e = (v, w) \in E$，令 $f(e) = v$和 $h(e) = w$ 分别表示尾节点和起节点。节点集由两个互不相交的集合 $V_{<0}$ 和 $V_{\geq 0}$ 构成：前者表示供气节点，气体在此注入网络；后者表示需求节点，在此质量守恒或气体从网络中取出。对于每个节点，我们用以下符号表示入边和出边的集合：

$$\mathcal{E}_-(v) = \{e \in \mathcal{E} \mid e = (\bullet, v)\} \quad \text{and} \quad \mathcal{E}_+(v) = \{e \in \mathcal{E} \mid e = (v, \bullet)\},$$

分别地。集合 $E(v) = E_-(v) \cup E_+(v)$ 包含与 v 相连的所有边。此外，我们要求 节点-边关联矩阵 $A \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{E}|}$ 的元素为：

$$a(v, e) = \begin{cases} -1, & \text{if } v = f(e), \\ 1, & \text{if } v = h(e), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.1}$$

为了描述网络中的气体流动，我们将动态过程分为三部分：管道内流动、节点间流动以及压缩机运行。

2.1 管道内气体流动

管道网络中的气体流动由等温欧拉方程 (1.1)支配，这是一组双曲型偏微分方程 (PDE)。等温性意味着气体温度在空间和时间上保持恒定。由于我们关注由氢气和天然气组成的混合物的流动，因此考虑一个允许由两个任意组分构成混合物的框架 $i \in \{1,2\}$。我们假设完全混合，即两种组分具有

相同的速度和温度。在此框架下，将氢气设为组分 $i=1$，将天然气设为组分 $i=2$，即可对氢气和天然气的流动进行建模，参见 (1.2)。令 η_e 表示边 $e \in$E 上混合物中第一种组分（即氢气）的质量分数。因此，(1.2) 等价于以下方程组：

$$\partial_t \rho_e + \partial_x q_e = 0, \tag{2.2a}$$

$$\partial_t \left(\eta_e \rho_e\right) + \partial_x \left(\eta_e q_e\right) = 0, \tag{2.2b}$$

$$\partial_t q_e + \partial_x \left[p_e + \frac{q_e^2}{\rho_e}\right] = -\frac{\lambda_{\mathrm{fr}}}{2D_e}\frac{q_e|q_e|}{\rho_e}, \tag{2.2c}$$

其中，ρ_e 表示气体密度，q_e 表示质量流量，p_e 表示气体混合物的压力。常数 D_e 和 λ_{fr} 分别表示管道的直径和摩擦因子。压力和密度由状态方程联系起来

$$p_e(\rho_e) = \frac{RT}{M} Z(p_e)\rho_e,$$

其中，R 表示通用气体常数，T 表示温度，M 表示摩尔质量，$Z\left(p_e\right) > 0$表示气体的压缩因子。分析气体混合物的流量时，需要注意，组分变化会导致气体性质发生变化，包括摩尔质量和压缩因子。然而，由于气体混合物始终由相同且固定的组分构成，我们可以根据混合物的组分及其各组分的性质来表示气体混合物的气体性质，即摩尔质量 M 和压缩因子 Z 也取决于气体组成。为提高可读性，本节余下部分省略下标 e 。

我们根据气体混合物各组分的摩尔质量 M_i 以及第一种组分的摩尔分数 η_{mol} 来确定其摩尔质量，参见 [4, 5]。混合物的摩尔质量 M 由下式给出

$$M = \eta_{\mathrm{mol}} M_1 + (1-\eta_{\mathrm{mol}}) M_2. \tag{2.3}$$

我们还可以使用以下关系，用质量分数 η 表示摩尔质量 M：

$$\eta_{\mathrm{mol}} = \frac{n_1}{n_1+n_2} \quad \text{with} \quad n_1 = \frac{\eta}{M_1}, \quad n_2 = \frac{1-\eta}{M_2}, \tag{2.4}$$

其中，n_i 是混合物中组分 i 的物质的量。我们利用关系式 (2.4)，将方程 (2.3) 中的摩尔分数 η_{mol} 替换为：

$$M = M(\eta) = \frac{M_1 M_2}{\eta M_2 + (1-\eta) M_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{M(\eta)} = \frac{\eta}{M_1} + \frac{(1-\eta)}{M_2}. \tag{2.5}$$

接下来，我们对压缩因子 Z 对气体组成的依赖关系进行建模。由于关系式 (2.4) 可使我们在质量分数与摩尔分数之间相互转换，因此我们用质量分数表示气体组成：

$$\eta_{\mathrm{mol}} = \frac{\eta\, M_2}{\eta\, M_2 + (1-\eta)\, M_1} \qquad \text{and} \qquad \eta = \frac{\eta_{\mathrm{mol}} M_1}{\eta^{\mathrm{mol}} M_1 + (1-\eta_{\mathrm{mol}}) M_2}. \tag{2.6}$$

由于压缩因子的建模方法有多种，参见 [26], ，我们采用一种一般性方法，将压缩因子视为压力 p 和质量分数 η的函数，并满足以下假设：

假设1。 对于每一个质量分数 $\eta \in [0,1]$ 和压力 $p \in [0,\infty$，压缩因子 $Z(\eta,p)$ 关于 p 可积且可微。

假设2。 对于每一个质量分数 $\eta \in [0,1]$ 和压力 $p \in [0,\infty$，压缩因子 $Z(\eta,p)$ 关于 η 可微。

最后，我们得到气体混合物的压力定律，它将压力 p、密度 ρ 和气体的组分联系起来，其中组分通过质量分数 η 表示：

$$p(\rho) = \frac{RT}{M(\eta)}\, Z(\eta,p)\, \rho = \left[\frac{RT}{M_1}\eta + \frac{RT}{M_2}(1-\eta)\right] Z(\eta,p)\, \rho. \tag{2.7}$$

由于我们旨在分析稳态气体流，欧拉方程 (2.2) 中的时间导数为零。因此，等温欧拉方程中的前两个方程意味着质量流量 q 和质量分数 η 沿管道保持恒定，从而将偏微分方程组简化为一个常微分方程：

$$\partial_x \left[p(x) + \frac{q^2}{\rho(x)}\right] = -\frac{\lambda_{\mathrm{fr}}}{2D}\frac{q|q|}{\rho(x)} \quad \text{for} \quad x \in [0,L]. \tag{2.8}$$

下面，我们求解此常微分方程，以得到沿管道的压力分布 $p(x)$，并将压力分布的推导分为两步：

(i) 我们利用压力定律 (2.7) 从常微分方程中消去密度 ρ，得到一个仅依赖变量 q、 η和 p的常微分方程。

(ii) 我们利用分离变量法求解 (i) 中关于压力 p 的常微分方程。

我们首先将常微分方程 (2.8) 转换为一个与密度 ρ无关的常微分方程。首先，考虑方程右侧，并应用压力定律 (2.7)：

$$-\frac{\lambda_{\mathrm{fr}}}{2D}\frac{q|q|}{\rho} = -\frac{\lambda_{\mathrm{fr}}}{2D}\frac{RT}{M(\eta)}\frac{Z(\eta,p)}{p} q|q|.$$

接下来，我们考虑方程左侧，并进一步应用链式法则，得到：

$$\begin{aligned}\partial_x \left[p + \frac{q^2}{\rho}\right] = \partial_x \left[p + \frac{RT}{M(\eta)} q^2 \frac{Z(\eta,p)}{p}\right] &= \partial_x p + \frac{RT}{M(\eta)} q^2\, \partial_p \left[\frac{Z(\eta,p)}{p}\right] \partial_x p, \\ &= \left[1 + \frac{RT}{M(\eta)} q^2 \left(\frac{\partial_p Z(\eta,p)}{p} - \frac{Z(\eta,p)}{p^2}\right)\right] \partial_x p.\end{aligned}$$

回想 t 质量流量 q 和质量分数 η 沿管道保持恒定。将两者结合 g

，我们得到如下压力损失常微分方程 (2.8) 的表达式：

$$\begin{aligned}
&\left[1+\frac{RT}{M(\eta)}q^2\left(\frac{\partial_p Z(\eta,p)}{p}-\frac{Z(\eta,p)}{p^2}\right)\right]\partial_x p=-\frac{\lambda_{\mathrm{fr}}}{2D}\frac{RT}{M(\eta)}\frac{Z(\eta,p)}{p}q|q|,\\
\Leftrightarrow\quad &\underbrace{\left[\frac{p}{Z(\eta,p)}+\frac{RT}{M(\eta)}q^2\left(\frac{\partial_p Z(\eta,p)}{Z(\eta,p)}-\frac{1}{p}\right)\right]}_{=F'(\eta,q,p)}\partial_x p=-\frac{\lambda_{\mathrm{fr}}}{2D}\frac{RT}{M(\eta)}q|q|. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

下一步是使用分离变量法求解常微分方程。由于我们已经将方程变形为适合对 x直接积分的形式，因此只需对 F'求一个原函数；忽略积分常数后，该原函数为：

$$F(\eta,q,p)=\int\frac{p}{Z(\eta,p)}\,\mathrm{d}p+\frac{RTq^2}{M(\eta)}\left[\ln(|Z(\eta,p)|)-\ln(|p|)\right]. \qquad (2.10)$$

因此，对 x 积分常微分方程 (2.9)，得到：

$$F(\eta,q,p(x))=F(\eta,q,p(0))-\frac{\lambda_{\mathrm{fr}}}{2D}\frac{RT}{M(\eta)}q|q|\,x\quad\text{for}\quad x\in[0,L]. \qquad (2.11)$$

备注 2.1。 鉴于对气体（混合物）的压缩因子 Z 有多种建模方法，我们在此简要概述。我们还求出这些示例对应的积分$\int Z^{p}(\eta,\ p)\mathrm{d}p$，因为对于一般的 Z，该积分没有闭式~~表达式~~。

- 对于压缩因子 $Z(\eta,\ p)=k\in\mathbb{R}$ 的常数近似（参见以及 [5, 32, 15, 35]），我们得到：(1.3)

$$\int\frac{p}{Z(\eta,p)}\,\mathrm{d}p=\frac{1}{2k}p^2.$$

- 对于压缩因子 $Z(\eta,\ p)=1+\alpha p$的线性近似，其中 α 由气体特定常数$\alpha_{\mathrm{H_2}}$ 和α_{NG} 的凸组合给出（参见 (1.4) 和 [7, 30, 18, 17]），我们得到

$$\int\frac{p}{Z(\eta,p)}\,\mathrm{d}p=\frac{p}{\alpha_1\eta+\alpha_2(1-\eta)}-\frac{\ln(|Z(\eta,p)|)}{\left[\alpha_1\eta+\alpha_2(1-\eta)\right]^2}.$$

- 对于压缩因子的二次近似 (1.5)（参见*Papay*公式，见 [4, 30, 36]），其中 $T_c(\eta_{\text{摩尔}})$ 和 $p_c(\eta_{\text{摩尔}})$ 分别为通过对各组分的临界温度和压力进行凸组合得到的临界温度和压力，(2.10) 中的积分可写为

$$\begin{aligned}
&\int\frac{p}{Z(\eta_{\mathrm{mol}},p)}\,\mathrm{d}p=\frac{\ln(|Z(\eta_{\mathrm{mol}},p)|)}{2b}-\frac{a}{b\sqrt{4b-a^2}}\arctan\left(\frac{2bx+a}{\sqrt{4b-2}}\right),\\
&\text{where}\quad a=\frac{1}{p_c(\eta_{\mathrm{mol}})}\exp\left(-\frac{T}{T_c(\eta_{\mathrm{mol}})}\right),\quad b=\frac{1}{p_c(\eta_{\mathrm{mol}})^2}\exp\left(-\frac{T}{T_c(\eta_{\mathrm{mol}})}\right).
\end{aligned}$$

如果函数 F 关于 p可逆，我们就可以通过方程 (2.11) 得到压力分布 $p(x)$。在对 F进行正则性分析时，我们大量运用了一项关键的物理

性质：为确保系统安全并防止结构损坏 [9,14]，天然气网络在亚声速条件下运行，即气体中的气体速度 v 小于声速 σ。对于亚声速流动，马赫数 $\mathrm{Ma} := v/\sigma$ 满足 $\mathrm{Ma} < 1$，因此：

$$\mathrm{Ma}^2 = \left(\frac{v}{\sigma}\right)^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{RT}{M(\eta)}\,\frac{q^2}{p^2}\left[Z(\eta,p) - p\cdot\partial_p Z(\eta,p)\right] < 1, \tag{2.12}$$

这里用到了压力定律 (2.7)、关系式 $q = v\rho$，以及以下声速表达式：

$$\left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 = \partial_p\,\rho = \partial_p\left[\frac{M(\eta)}{RT}\,\frac{p}{Z(\eta,p)}\right] = \frac{M(\eta)}{RT}\,\frac{Z(\eta,p) - p\cdot\partial_p Z(\eta,p)}{Z(\eta,p)^2}.$$

由于处于亚声速状态，我们将方程 (2.12) 乘以 p^2，以此定义亚声速流动的区域：

$$D_{\text{subsonic}} := \left\{(\eta,q,p)\in[0,1]\times\mathbb{R}\times[0,\infty)\;\middle|\; p^2 - \frac{RT}{M(\eta)}q^2\left[Z(\eta,p) - p\,\partial_p Z(\eta,p)\right] > 0\right\}.$$

接下来证明，对于亚声速流动，函数 F 关于 p 严格单调递增。

引理 2.2. 令 $D_F \subseteq \{(\eta,q,p)\in[0,1]\times\mathbb{R}\times[0,\infty) \mid Z(\eta,p) > 0\}\cap D_{\text{subsonic}}$ 并定义

$$F\colon D_F\to\mathbb{R} \quad \textit{with} \quad F(\eta,q,p) = \int \frac{p}{Z(\eta,p)}\,\mathrm{d}p + \frac{RT\,q^2}{M(\eta)}\ln\left(\left|\frac{Z(\eta,p)}{p}\right|\right).$$

则函数 F 可微，且在 D_F 上严格单调递增。

证明。 F 的可微性可由其推导过程直接得出，因为它是在求解微分方程 (2.8) 时得到的一个原函数。 F 关于 p 的导数为

$$\partial_p F(\eta,q,p) = \frac{p}{Z(\eta,p)} + \frac{RT}{M(\eta)}\,q^2\left[\frac{\partial_p Z(\eta,p)}{Z(\eta,p)} - \frac{1}{p}\right] = \frac{p^2 - \frac{RT}{M(\eta)}\,q^2\,\left[Z(\eta,p) - p\cdot\partial_p Z(\eta,p)\right]}{p\cdot Z(\eta,p)}.$$

由于我们处于亚声速状态，且根据 D_F 的选取，可得

$$p^2 - \frac{RT}{M(\eta)}q^2\left[\partial_p Z(\eta,p) - Z(\eta,p)\right] > 0 \quad \text{and} \quad Z(\eta,p)\geq 0.$$

因此， $\partial_p F(\eta,\ q,\ p) > 0$ 成立，这意味着 F严格单调递增。 □

结合隐函数定理，定理 2.2 意味着 F 关于压力 p局部双射。

推论 2.3. 定理 *2.2* 中定义的函数 $F\colon D_F\to\mathbb{R}$ 关于压力 p 是局部双射的。此外，相应的逆函数 $(\eta,q,y)\mapsto g(\eta,q,y)$ 是连续的，且满足：

$$F(\eta,q,p) = y \quad \Leftrightarrow \quad p = g(\eta,q,y).$$

证明. 将隐函数定理应用于函数 $f(\eta, q, p, y) = F(\eta, q, p) - y$，可立即得到该结论，因为 $\partial_p f(\eta, q, p, y) = \partial_p F(\eta, q, p)$，并且根据定理 2.2，有 $\partial_p F(\eta, q, p) \neq 0$. □

总之，通过应用逆函数 $p \mapsto g(\eta, q, p)$，我们可由方程 (2.11) 得到压力分布 $p(x)$。于是，每条管道 e 上的压力分布 $p(x)$ 具有以下形式：

引理 2.4。设 $q \in \mathbb{R}$ 为气体流量，$\eta \in [0, 1]$ 为质量分数。那么，压力常微分方程 (2.8) 的解为

$$p(x) = g\left(\eta, q, F(\eta, q, p(0)) - \frac{\lambda_{\mathrm{fr}}}{2D}\frac{RT}{M(\eta)} q|q|\, x\right).$$

注 2.5。对于摩擦主导的压力损失，非线性项 $\partial_x\left(q^2/\rho\right)$ 可以忽略不计，从而得到半线性等温欧拉方程（参见例如 [9, 24]）。求解半线性方程稳态的压力损失，其推导与上文类似，但函数 F 替换为

$$F_{\mathrm{semi}}(\eta, q, p) = \int \frac{p}{Z(\eta, p)}\, \mathrm{d}p.$$

定理 2.2 中的定义域 D_F 满足 $Z(\eta, p) > 0$。因此，函数 F_{semi} 关于 p 也严格单调递增，并且定理 2.2 和定理 2.4 的结果同样适用于半线性等温欧拉方程。

2.2 气体在交汇点间的流动

节点间的气体流动由耦合条件决定，参见例如 [3, 9, 24]。对于气体混合物，这些条件如下：

(i) 混合物的质量以及各个组分的质量均守恒。

(ii) 气体完全且瞬时混合，即形成均匀混合物，且没有时间延迟。

(iii) 压力在节点处连续。

质量守恒和压力连续性在单一气体流动中也成立，而完全混合条件则是气体混合物流动所特有的。

质量平衡。令 $b_v \in \mathbb{R}$ 为节点 $v \in \mathrm{V}$ 的负荷，即进入或离开网络的气体量。我们有

$$\begin{aligned} b_v < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad v \in \mathcal{V}_{<0}, \text{ which means } v \text{ is a supply node,} \\ b_v \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad v \in \mathcal{V}_{\geq 0}, \text{ which means } v \text{ is a demand node.} \end{aligned}$$

因此，节点 $v \in \mathrm{V}$ 的质量平衡是指所有流入流量与所有流出流量之和等于负荷。利用关联矩阵 $A \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{E}|}$（参见方程 (2.1)），网络的质量平衡可表示为以下线性方程组

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} a(v, e) q_e = b_v \quad \text{for all } v \in \mathcal{V} \quad \Leftrightarrow \quad A\boldsymbol{q} = \boldsymbol{b},$$

其中， $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{V}|}$ 是负荷向量，其分量为 b_v； $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ 是流量向量，其分量为 q_e。

组分的完全混合与质量平衡。完全且瞬时的混合意味着，流入的气体会立即在节点处形成均匀混合物，然后流入流出管道。因此，所有管道中流出气体的组分都相同，从而自动确保各个组分的质量平衡。由于流动方向可能与边的方向不同，因此事先无法确定哪些管道承载流入流量，哪些管道承载流出流量。不过，当 e $(v,e)q_e \geq 0$时，管道 e 向节点供气；当 $a(v,e)q_e < 0$时，管道 a将气体输送离开节点。对于每个供气节点$v \in \mathrm{V}_{<0}$，令 $\zeta_v \in [0,1]$ 为供气节点中第一个组分的质量分数。则节点质量分数 η_v 为

$$\eta_v = \frac{\sum_{e \in \mathcal{E}(v)} \eta_e \left(a(v,e)q_e\right)^+ + \zeta_v b_v^-}{\sum_{e \in \mathcal{E}(v)} \left(a(v,e)q_e\right)^+ + b_v^-},$$

其中，对于标量 $\alpha \in \mathbb{R}$，定义 $\alpha^+ = \max\{\alpha, 0\}$和 $\alpha^- = \max\{-\alpha, 0\}$。此外，节点质量分数 η_v 与管道沿线质量分数 η_e之间满足以下关系：

$$\eta_e = \begin{cases} \eta_{f(e)}, & \text{if } q_e \geq 0, \\ \eta_{h(e)}, & \text{if } q_e < 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

这表示沿管道的质量分数始终由上游节点组成决定。

压力连续性。压力连续性确保与节点v 相连的所有管道在共用端点处具有相同的压力。为此，我们引入节点压力 p_v，得到以下条件：

$$p_e(x_e) = p_v \quad \text{for all} \quad e \in \mathcal{E}(v) \quad \text{where} \quad x_e = \begin{cases} 0, & e \in \mathcal{E}_-(v), \\ L_e, & e \in \mathcal{E}_+(v). \end{cases}$$

结合描述管道 e沿线压力损失的方程 (2.11)，我们可以得到两个相连相邻节点之间的压力损失：

$$F(\eta_e, q_e, p_{h(e)}) - F(\eta_e, q_e, p_{f(e)}) = -\frac{\lambda_{\mathrm{fr}}}{2D} \frac{RT}{M(\eta_e)} L_e q_e |q_e|.$$

我们回顾一下， F 的具体表达式取决于压缩因子 Z，参见方程（2.10）。

2.3 压缩机运行

压缩机在天然气网络运行中发挥着关键作用，因为它们能够提高局部压力。管道网络需要在一定的压力范围内运行以确保安全，而输送气体本身会因摩擦造成压力下降，因此需要压缩机来抵消压力损失并维持安全的压力水平。

每台压缩机 $e \in \mathrm{E}^{\mathrm{comp}}$ 都配有一个所谓的增压比或压缩机比 $\gamma_e \geq 1$，并且我们假设压缩机比与气体组成无关，参见 [19, 22]。

压缩机的运行由压力增压方程控制：

$$p_{h(e)} = \gamma_e \, p_{f(e)} \quad \text{where} \quad e = (f(e), h(e)). \tag{2.14}$$

压缩机站的设计仅用于提升一个方向上的压力，气体无法向相反方向流动，参见 [9, 24]。因此，我们作出如下假设：

假设 3. 对于每条边 $e \in \mathrm{E}^{\mathrm{comp}}$，气体均从节点 $f(e)$ 流向节点 $h(e)$，即对于所有 $e \in \mathrm{E}^{\mathrm{comp}}$，均有 $q_e \geq 0$ 。

因此，压缩机中的气体组分由上游组分$\eta_e = \eta_{f(e)}$决定。此外，为避免环内气体循环，我们禁止压缩机形成环等病态结构，也禁止压缩机与其他边并行运行。

2.4 完整气体流动模型

总而言之，混合物的稳态气体流动模型包括管道中的压力损失、节点处的压力连续性、压缩机特性、质量平衡以及混合条件。该模型表示为

$$F(\eta_e, q_e, p_{h(e)}) - F(\eta_e, q_e, p_{f(e)}) = -\frac{\lambda_{\mathrm{fr}}}{2D} \frac{RT}{M(\eta_e)} L_e q_e |q_e| \quad \text{for all } e \in \mathcal{E}_{\mathrm{pipe}}, \tag{2.15a}$$

$$p_{h(e)} = \gamma_e p_{f(e)} \quad \text{for all } e \in \mathcal{E}_{\mathrm{comp}}, \tag{2.15b}$$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_+(v)} q_e - \sum_{e \in \mathcal{E}_-(v)} q_e = b_v \quad \text{for all } v \in \mathcal{V}, \tag{2.15c}$$

$$\eta_v = \frac{\sum_{e \in \mathcal{E}(v)} \eta_e \left(a(v,e) q_e\right)^+ + \zeta_v b_v^-}{\sum_{e \in \mathcal{E}(v)} \left(a(v,e) q_e\right)^+ + b_v^-} \quad \text{for all } v \in \mathcal{V}. \tag{2.15d}$$

与 [35], 中的设定相比，气体流动模型（2.15）还适用于压缩机站和非恒定压缩因子。主要区别在于方程（2.15a），因为对于任意压缩因子，函数 F 不再能够显式表示。对于满足 $Z = 1$ 的理想气体，有 $F(\eta,\ q,\ p) = \frac{1}{2}p^2$，由此可还原 [35, 方程 2.15]。

3 稳态解的存在性

我们通过扩展 [18] 中针对采用准线性模型、假设为真实气体的单组分气体流动，以及 [35] 中针对采用半线性模型、假设为理想气体的双组分气体混合物所提出的方法，证明了至多含一个环的网络中模型 (2.15) 的解的存在性。与 [18, 35], 中的设定相比，我们的创新之处在于将存在性结果推广到任意压缩因子 Z ，而不再假设压缩因子恒定或呈线性。这一推广带来了重大困难：对于非恒定压缩因子，一般而言，连接两个节点的路径上的压力变化缺乏闭式表达式。我们将详细说明，与理想气体情形相比，缺少显式表示在证明中的哪些环节以及如何带来了额外挑战。

3.1 树形网络

对于树形网络，证明很直接，因为模型方程彼此解耦，因此我们可以依次求解模型方程：先求流量 q_e，再求质量分数 η_v，最后求压力 p_v。

定理 3.1 (树网络解的存在性)。 设 $\mathcal{G} = (\mathcal{V},\mathcal{E})$ 是一个树形网络，且令 $v^* \in \mathcal{V}$ 为任意选定的节点。此外，给定

(i) 对所有满足 $\sum_{v\in\mathcal{V}} b_v = 0$ 的 $v \in \mathcal{V}$，其负荷为 b_v，

(ii) 对所有满足 $b_v \leq 0$ 的 $v \in \mathcal{V}$，其供给组成为 $\zeta_v \in [0,1]$，

(iii) 对所有满足 comp 的 $e \in \mathcal{E}$，其压缩机比为 $\gamma_e \geq 1$，以及

(iv) $v = v^*$ 处的节点压力为 p_v。

此外，假设压缩因子 Z 满足假设*1*和假设*2*，且气体流动为亚音速。则稳态混合物模型存在唯一解。

证明。 树形网络唯一解存在性的证明类似于 [35, 定理3.5]的证明。然而，在求解压力损失方程（2.15a）时，我们还必须利用：对于固定的 $\eta \in [0,1]$，函数$p \mapsto F(\eta, q, p)$是局部双射的（定理 2.2）。

□

3.2 含一个环的网络

网络中存在环使得稳态存在性的证明更为复杂。下面，我们陈述主要定理，并给出证明该定理所需的辅助结果。

定理 3.2 （含一个环的网络解的存在性）。 设$\mathcal{G} = (\mathcal{V},\mathcal{E})$ 为含一个环的网络，并设 $v^* \in \mathcal{V}$ 为任意但固定的节点。此外，给出

(i) 对所有满足 $\sum_{v\in\mathcal{V}} b_v = 0$ 的 $v \in \mathcal{V}$，负荷为 b_v，

(ii) 对所有满足 $b_v \leq 0$ 的 $v \in \mathcal{V}$，供给组成是 $\zeta_v \in [0,1]$，

(iii) 对所有 $e \in \mathcal{E}_{\text{comp}}$，压缩机压比为 $\gamma_e \geq 1$，且

(iv) $v = v^*$ 的节点压力为 p_v。

此外，假设压缩因子 Z 满足假设*1*和假设*2*，且气体流动为亚音速。则稳态混合物模型至少有一个解。

证明定理 3.2 的思路是切割环中的一条边 e^c，得到一个树形网络，其结构与原图相同，但不包含被切割的边 e^c，并新增两个节点 v_ℓ 和 v_{r}，以及由切割产生的两条边 $e_\ell = (f(e^c), v_\ell)$ 和$e_{\mathrm{r}} = (v_{\mathrm{r}}, h(e^c))$。所得网络称为 G^c 相对于 e^c 的切割网络，记作 G^c，参见 [18, 37],，其定义如下：

$$\mathcal{G}^c = (\mathcal{V}^c, \mathcal{E}^c) \quad \text{with} \quad \mathcal{V}^c = \mathcal{V} \cup \{v_\ell, v_{\mathrm{r}}\}, \quad \mathcal{E}^c = (\mathcal{E} \setminus \{e^c\}) \cup \{e_\ell, e_{\mathrm{r}}\}.$$

目标是在割图上找到同时也是原图上的解。在割图上，这类解在切口两侧具有相同的流量、质量分数和压力。为了提取这些解，我们必须为切割产生的新节点确定合适的边界数据，即负荷和供给组成。本文中，我们使用上标 c表示与割图相关联的变量。

由于关系 $b^c_{v_\ell} = -b^c_{v_\mathrm{r}}$ 会自动确保流量通过切割处保持恒定，我们引入参数 λ ，并设定 $b^c_{v_\ell} = \lambda$ 和 $b^c_{v_\mathrm{r}} = -\lambda$。此外，我们引入参数 μ ，根据 λ的符号，对节点 v_ℓ 或节点 v_r 的供给组成进行建模。于是，切割网络上依赖参数的边界数据如下：

$$p^c_{v^*} = p^*, \quad b^c_v = \begin{cases} b_v, & v \in \mathcal{V}, \\ -\lambda, & v = v_\mathrm{r}, \\ \lambda, & v = v_\ell, \end{cases} \quad \text{and} \quad \zeta^c_v = \begin{cases} \zeta_v, & v \in \mathcal{V}_{<0}, \\ \mu, & v = v_\mathrm{r} \text{ and } \lambda \geq 0, \\ \mu, & v = v_\ell \text{ and } \lambda < 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

剩下的两个条件——通过切割处的质量分数和压力保持恒定——构成一个非线性系统，需要求解参数 λ 和 μ：

$$\mathcal{H}_\eta(\lambda, \mu) \coloneqq \eta^c_{v_\mathrm{r}}(\lambda, \mu) - \eta^c_{v_\ell}(\lambda, \mu) = 0 \tag{3.2a}$$
$$\mathcal{H}_p(\lambda, \mu) \coloneqq p^c_{v_\mathrm{r}}(\lambda, \mu) - p^c_{v_\ell}(\lambda, \mu) = 0. \tag{3.2b}$$

方程 $\mathrm{H}_\eta = 0$ 确保通过切割处的质量分数保持恒定，而方程 $\mathrm{H}_p = 0$ 则意味着压力在切割处连续。因此，证明非线性系统 (3.2) 至少有一个解 $(\lambda^*, \ \mu^*) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$，等价于证明含一个环的网络的气体流动模型 (2.15) 至少有一个解，参见 [35, 引理 3.8]。证明非线性系统 (3.2) 可解所采用的论证，与 [35] 中针对理想气体及半线性压力方程情形所提出的基本论证相同。核心思路如下：

(i) 固定一条割边 $e^c \in$E。由于原始网络上的流量必须是无环的，我们可以将解 λ^* 的可容许值限制在区间 I_sol内。

(ii) 对于每个固定的 $\lambda \in I_\mathrm{sol}$，函数氢$\eta(\lambda, \mu)$具有唯一根$\mu_\eta(\lambda)$。

(iii) 函数 $g(\lambda) =$ 氢$p(\lambda,\mu_\eta(\lambda))$在区间 I_sol上满足介值定理，即

(a) 函数 g 在 I_sol上连续，且(b) 它在 I_sol的边界值处取相反的符号。

尽管在我们的设定下，证明的整体结构保持不变，但非恒定压缩因子 Z 带来了显著的技术困难。图2展示了证明的结构，并着重说明一个微妙但重要的论证：该论证对任意压缩因子都不成立。主要困难在于证明连续性。我们的思路是证明根曲线 $\mu_\eta(\lambda)$ 和函数 $\mathrm{H}p(\lambda, \ \mu)$ 在所有自变量上连续，因为这样一来， g 作为连续函数的复合函数也是连续的。割图上的组分与压力无关，因此也与压缩因子 Z无关，因为割图是树形的。因此，μ_η 的推导与理想气体的情形类似，参见 [35, 引理3.20]。对于所有满足气体不从节点 v_ℓ 流向节点 v_r的 $\lambda \in \mathbb{R}$ ，

我们得到以下表达式:

$$\mu_\eta(\lambda) = \begin{cases} \eta^c_{v_\mathrm{r}}(\lambda), & \lambda < 0, \\ \eta^c_{v_\ell}(\lambda), & \lambda \geq 0. \end{cases}$$

由于根曲线 μ_η 由任一节点 v_ℓ 或节点 v_r处的组分给出，因此其连续性可由组分的连续性推出。组分的连续性不依赖于压缩因子 Z，而氢的连续性p 则依赖于它，参见 [35,引理 3.18、引理 3.21]。对于理想气体，其中 $Z = 1$，氢p 可用流量和组分表示为显式表达式。这种显式依赖关系使我们能够根据流量和组分的连续性推出氢p 的连续性，正如[35, 推论 3.15、引理 3.16、引理 3.17]所示。不过存在一个问题：切割所生成节点处的组分仅具有右侧连续性。幸运的是，这种显式依赖关系使我们能够分析 $\lambda = 0$ 处的单侧连续性对氢p连续性的影响，并发现这种不连续性实际上会消失。

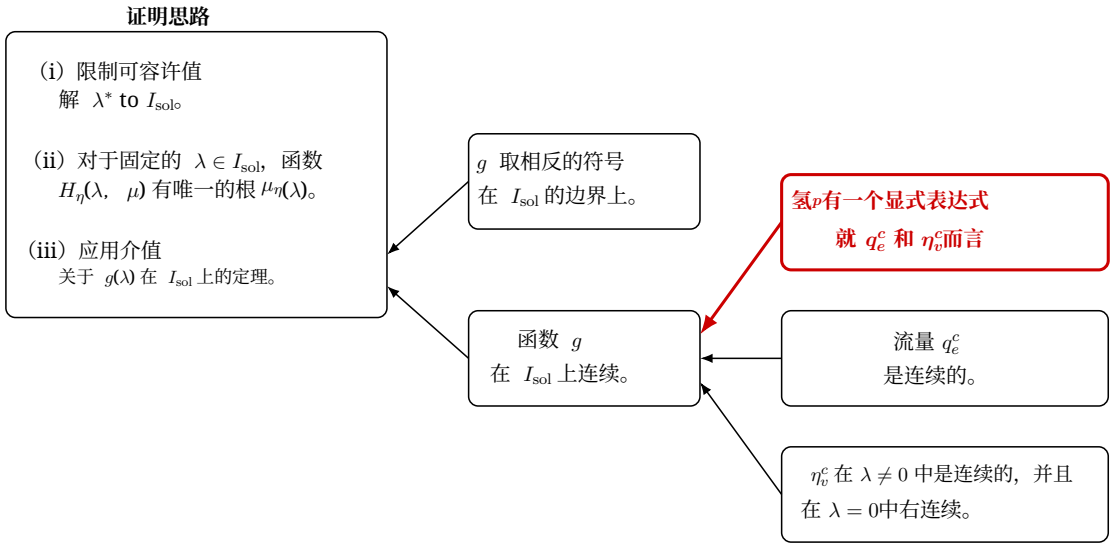


图2：证明稳态存在性的关键思路，以及对于任意压缩因子$Z = Z(\eta, p)$而言，[35, Lemma3.13] 在理想气体情况下的论证失效的步骤（以红色标出）。

对于任意压缩因子 Z，$\mathrm{H}p$ 对流量和组分的显式依赖关系是未知的。因此，尚不清楚不连续性如何进入 $\mathrm{H}p$，也无法立即验证 $\mathrm{H}p$ 在 $\lambda = 0$ 处同样连续。为克服这一困难，我们采取以下步骤:

- 我们使用归纳论证证明 $\mathrm{H}p$ 对 $\lambda \neq 0$ 连续，并证明其在 $\lambda = 0$ 处具有右连续性。

- 我们证明存在一条割边，使得 $I_{\text{解}} \subset [0, \infty)$。这一选择使我们能够立即在 $I_{\text{解}}$ 上对 g 应用介值定理。

3.3 流量、质量分数和压力的连续性

除了确保压力在割边处连续外，函数 H^p 还描述了连接节点 v_r 和 v_ℓ的路径上的压力变化。我们旨在通过一种基于归纳法并利用方程（2.15a）的方法，证明 H^p 的连续性。因此，我们回顾流量和组分的连续性性质。由于切割网络呈树状，推论 3.11] 中关于理想气体的连续性结论可直接应用于我们的情形，并保证流量连续。对于质量分数的连续性，我们有：

引理 3.3（质量分数的连续性）。设 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$ 是一个含有环的连通有向图。此外，设 e 为该环的一条边，$\mathcal{G}^c$ 为相应的割图，其边界数据如方程(3.1)所定义。则质量分数 $\eta_v^c=\eta_v^c(\lambda,\mu)$ 具有以下性质

(i) 对所有 $v\in\mathcal{V}^c$，关于 μ 连续，

(ii) 对所有 $v\in\mathcal{V}^c$，关于 $\lambda\neq 0$ 连续；*(iii)* 对所有 $v\in\mathcal{V}^c\setminus\{v_\ell,v_\mathrm{r}\}$，关于 $\lambda=0$ 连续；*(iv)* 对于 $v\in\{v_\ell,v_\mathrm{r}\}$，关于 $\lambda=0$ 右连续。

证明。关于 μ 的连续性可直接由 [35, 引理 3.13], 得到；关于 λ 的连续性，在所有 $v\in\mathrm{V}^c$ 处关于 $\lambda\neq 0$，以及在所有 $v\notin\{v_\ell,v_\mathrm{r}\}$处关于 $\lambda=0$ 的连续性，均可由 [35, 引理 3.12] 得到。此外，我们还可以利用边界数据 (3.1) 关于 $\lambda=0$右连续这一性质。结合 [35, 引理 3.12]，可得对于 $v\in\{v_\ell,v_\mathrm{r}\}$，关于 $\lambda=0$ 右连续。 □

对于理想气体，流量和质量分数的连续性立即意味着 H^p的连续性，因为在这种情况下，沿路径的压力变化具有仅取决于流量和质量分数的闭式表示，参见 [35]。对于真实气体，压力定律的结构通常使得无法将沿路径的压力变化显式表示为流量和组分的函数。然而，我们仍然可以通过基于归纳法的论证，建立 H^p 关于 λ 和 μ 的连续性。

引理 3.4（节点压力的连续性）。设 $\mathcal{G}$ （$\mathcal{V}$、$\mathcal{E}$）为一个有向连通图，e^c 为环的一条边，且$\mathcal{G}^c$ 为对应于割边 e^c的割图。设已给出满足方程 （3.1） 的边界数据。那么，对于所有 $v\in\mathcal{V}^c$，压力 $p_v^c=p_v^c$（λ、μ） 是

（*i*）关于 μ连续，

（*ii*）关于 $\lambda\neq 0$ 连续，并且关于 $\lambda=0$.右连续

证明。我们固定任意一个节点 $v\in\mathrm{V}^c\setminus\{v^*\}$。由于该割图呈树形，因此连接 v 和 v^*的路径唯一。我们将路径的第一个节点设为 $v_1=v^*$，然后沿路径依次为各节点标记，直至到达路径末端，即节点$v_{n_v}=v$。于是，路径上的节点可表示为 v_i，其中 $i=1,\ldots\ldots,n_v$。此外，两个相邻节点 v_i 和 v_{i+1} 由边 e_i连接；参见图3。为了证明 p_v^c的连续性，我们按照节点沿路径的位置 i 进行归纳。

基本情形。在位置 $i=1$，我们有节点 v^*。由于节点 v^* 处的压力由边界数据给定，压力 $p_{v^*}^c$ 为常数，因此在 λ 和 μ上均连续。

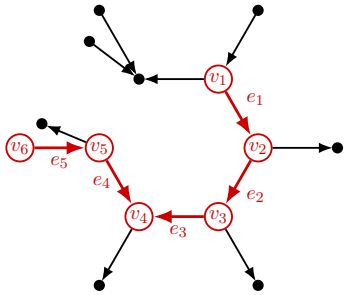


图3：一个切割网络，其中路径连接节点 $v_1 = v^*$ 和节点 $v_6 = v_\circ$ 路径和编号以红色突出显示。

归纳步骤。假设对于任意但固定的 $i < n_v$，压力 $p^c_{v_i}$ 在 μ 和 $\lambda \neq 0$ 上连续，并且在 $\lambda = 0$ 上右连续。目标是证明：给定 $p^c_{v_i}$ 的连续性，压力 $p^c_{v_{i+1}}$ 也连续。

因此，我们区分两种情况。第一种情况是 $e_i = (v_i,\ v_{i+1})$，第二种情况是 $e_i = (v_{i+1},\ v_i)$。我们证明第一种情况。如果边 e_i 是管道，则利用方程（2.15a）将压力 $p^c_{v_{i+1}}$ 表示为压力 $p^c_{v_i}$的函数：

$$F(\eta^c_{e_i}, q^c_{e_i}, p^c_{v_{i+1}}) - F(\eta^c_{e_i}, q^c_{e_i}, p^c_{v_i}) = \underbrace{-\frac{\lambda_{\mathrm{fr}}}{2D}\frac{RT}{M(\eta^c_{e_i})} L^c_{e_i} q^c_{e_i} |q^c_{e_i}|}_{=S(\eta^c_{e_i}, q^c_{e_i})},$$

结合定理2.3，可得：

$$\begin{aligned} & F(\eta^c_{e_i}, q^c_{e_i}, p^c_{v_{i+1}}) = F(\eta^c_{e_i}, q^c_{e_i}, p^c_{v_i}) + S(\eta^c_{e_i}, q^c_{e_i}) \\ \Leftrightarrow \quad & p^c_{v_{i+1}} = g\left(\eta^c_{e_i}, q^c_{e_i}, F(\eta^c_{e_i}, q^c_{e_i}, p^c_{v_i}) + S(\eta^c_{e_i}, q^c_{e_i})\right). \end{aligned}$$

回顾这些依赖关系：$\eta^c_{e_i} = \eta^c_{e_i}(\lambda,\ \mu)$、$q^c_{e_i} = q^c_{e_i}(\lambda)$ 和 $p^c_{v_i} = p^c_{v_i}(\lambda,\ \mu)$。由 [35, 引理 3.10] 可知，$q^c_e$ 在 λ上连续。定理 3.3结合方程（2.13）表明，η^c_e 在 μ 和 $\lambda \neq 0$ 上连续，并且在 $\lambda = 0$上右连续。此外，根据定理2.3，函数 g 的所有分量都连续，而 S 根据定义是连续的。因此，$p^c_{v_{i+1}}$ 作为连续函数的复合函数是连续的。如果边 e_i 是压缩机，则有关系式 $p^c_{v_{i+1}} = \gamma_{e_i}\, p^c_{v_i}$。然而，在这种情况下，$p^c_{v_{i+1}}$ 的连续性可直接得出，因为 γ_{e_i} 是常数。

情形 $e_i = (v_{i+1},\ v_i)$ 类似，因此根据 $v = v_{n_v}$，我们同样得到 p^c_v在 μ 和 $\lambda \neq 0$ 中连续，并在 $\lambda = 0$中右连续。 □

推论3.5。设 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 为有向连通图，e^c 为环的一条边，且 $\mathcal{G}^c$ 为对应于割边 e^c 的割图。假设给定了满足方程 (3.1) 的边界数据。那么函数 氢$p(\lambda, \mu) = p^c_{v_r}(\lambda, \mu) - p^c_{v_\ell}(\lambda, \mu)$ 是

(i) 在 μ中连续，

(ii) 在 $\lambda \neq 0$ 中连续，并在 $\lambda = 0$.处右连续

3.4 合适割边的存在性

对于理想气体情形，利用 [35, 引理 3.15]，我们得到区间 I_{sol}。这里的关键观察是：如果 λ 足够小，气体就会在割图中从节点 v_{r} 流向节点 v_ℓ；如果它足够大，气体流动方向则相反。在原图上，这对应于循环气体流动。然而，由于气体流动必须是无环的，我们现在可以从下方和上方界定 λ 的可容许值，从而得到区间 I_{sol}。I_{sol} 的边界值仅取决于网络的流量 q_e^c 和负荷 b_v、网络拓扑以及割边 e^c的选择。因此，引理 3.15] 独立于压力变化方程，并可推广到压缩因子任意的情形 Z。

由于区间 I_{sol} 取决于割边，我们旨在找到一个割边 e^c，使得$I_{\mathrm{sol}} \subset [0,\infty)$。对于理想气体，不存在寻找合适割边的问题，因为在这种情况下，函数 $\mathrm{H}p$ 对所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 都是连续的。为了探讨真实气体的这一问题，我们仔细考察区间 I_{sol} 的推导过程，并引入必要的记号。

定义 3.6（环的子图）。设 $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ 是一个含有环的有向连通图。那么，该环构成图 G 的一个连通子图 $\mathrm{G}_{\mathrm{cycle}} = (\mathrm{V}_{\mathrm{cycle}}, \mathrm{E}_{\mathrm{cycle}})$，其中 $\mathrm{V}_{\mathrm{cycle}} \subseteq \mathrm{V}$ 表示环中的节点，$\mathrm{E}_{\mathrm{cycle}} \subseteq \mathrm{E}$ 表示环中的边。此外，$n_{\mathrm{cycle}} = |\mathrm{V}_{\mathrm{cycle}}|$ 表示环中节点的数量。

定义 3.7（割环的子图）。设 $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ 是一个含有环的有向连通图，且 $e^c \in \mathrm{E}_{\mathrm{cycle}}$ 是环中的一条边。通过切割边 e^c，我们得到该环的割图 $\mathrm{G}^c_{\mathrm{cycle}} = (\mathrm{V}^c_{\mathrm{cycle}}, \mathrm{E}^c_{\mathrm{cycle}})$，其中

$$\mathcal{V}^c_{\mathrm{cycle}} = \mathcal{V}_{\mathrm{cycle}} \cup \{v_\ell, v_{\mathrm{r}}\}, \quad \mathcal{E}^c_{\mathrm{cycle}} = \mathcal{E}_{\mathrm{cycle}} \setminus \{e^c\} \cup \{e_\ell, e_{\mathrm{r}}\},$$

割图 $\mathrm{G}^c_{\mathrm{cycle}}$ 是树形的，仅由连接两个新节点 v_ℓ 和 v_{r}的一条路径构成。它也是 G 的割图 G^c 的子图。

割环上各边的流量关于 λ 呈线性关系，且与 μ无关，参见 [35, 引理 3.10],，这意味着对于所有 $e \in \mathrm{E}^c_{\mathrm{cycle}}$，每个流量 q_e^c 相对于 λ 都有唯一的根 β_e。结合 [35, 引理 3.15],，我们可以确定区间$I_{\mathrm{sol}} = [\lambda^-, \lambda^+]$ 的合适边界数值 $\lambda^\pm$，并在以下引理中总结这一结果。

引理 3.8. 设 $\mathcal{G} = (\mathcal{V},\mathcal{E})$ 是一个含有一个环的有向连通图，且 $e^c \in \mathcal{E}_{\mathrm{cycle}}$是割边。此外，记流量 q_e^c 相对于 λ 的根为 β_e（其中 $e \in \mathcal{E}^c_{\mathrm{cycle}}$），参见 *[35,* 引理 *3.10],*，并令：

$$\lambda^- = \min_{e \in \mathcal{E}^c_{\mathrm{cycle}}} \beta_e \quad \textit{and} \quad \lambda^+ = \max_{e \in \mathcal{E}^c_{\mathrm{cycle}}} \beta_e,$$

那么，非线性系统(3.2) 的一个解(λ^*, μ^*) 必须满足 $\lambda^* \in [\lambda^-, \lambda^+]$。此外，数值 $\lambda^\pm$ 满足以下不等式：

$$\mathcal{H}_p(\lambda^-, \mu) \le 0 \quad \textit{and} \quad \mathcal{H}_p(\lambda^+, \mu) \ge 0 \quad \textit{for all} \quad \mu \in [0,1].$$

证明。对于理想气体的情况，证明与 [35, 引理 3.15] 类似，因为割图上的流量与压力定律无关，这是由于割图是树形的。证明利用了压力沿流动方向递减这一事实，即气体流动必须是

无环的，除非环中存在压缩机，但这与假设相矛盾。对于真实气体，压力也沿流动方向递减，因为根据方程（2.15a），我们有：

$$F(\eta_e, q_e, p_{h(e)}) - F(\eta_e, q_e, p_{f(e)}) = \underbrace{-\frac{\lambda_{\mathrm{fr}}}{2D}\frac{RT}{M(\eta_e)} L_e |q_e|\, q_e}_{<0}$$

$$\Rightarrow \qquad \operatorname{sign}\Big(F(\eta_e, q_e, p_{h(e)}) - F(\eta_e, q_e, p_{f(e)})\Big) = -\operatorname{sign}(q_e).$$

当气体从节点 $f(e)$ 流向节点 $h(e)$ 时，我们有 $q_e \geq 0$，因此，

$$F(\eta_e, q_e, p_{h(e)}) \leq F(\eta_e, q_e, p_{f(e)}).$$

由于 F 关于压力 p 的单调性（参见定理 2.2），我们得到 $p_{h(e)} \leq p_{f(e)}$。气体沿相反方向流动的情形，即从节点 $h(e)$ 流向节点 $f(e)$，可用类似方法推得，结果为 $p_{h(e)} \geq p_{f(e)}$，因为此时我们有 $q_e \leq 0$. □

数值 β_e 取决于割边 e^c 的选择，因此区间 I_{sol} 也随之而定。因此，是否存在一条割边 e^c 使得 $I_{\mathrm{sol}} \subset [0, \infty)$，等价于寻找一条割边 e^c，使得对所有 $e \in \mathrm{E}^c_{\mathrm{cycle}}$，都有 $\beta_e \geq 0$。

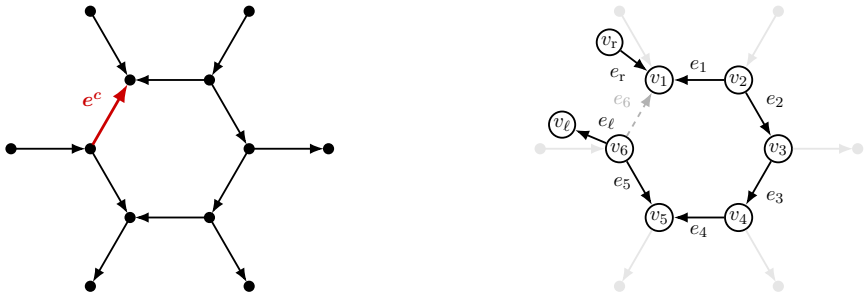


图 4：含有割边 e^c 和 $n_{\mathrm{cycle}} = 6$ 的天然气网络（左），以及相应的割图，其中原环的节点和边已编号（右）。

下文中，理解数值 β_e 的推导和计算至关重要。因此，我们固定一条割边 e^c，并为环的节点和边编号。对于节点，我们设定 $v_1 = h(e^c)$，然后沿环依次遍历，为后续各节点编号，直到到达环的末端，并设定 $v_{n_{\mathrm{cycle}}} = f(e^c)$；示意图见图 4。对于边，我们采用类似的方式：每条边 e_i 连接节点 v_i 和 v_{i+1}，其中$i = 1$、.....、$n_{\mathrm{cycle}} - 1$，但边 $e_{n_{\mathrm{cycle}}} = e^c$除外，它连接节点$v_{n_{\mathrm{cycle}}}$ 和 v_1，从而闭合该环。

有了这一记号，我们可以将前述环上一条边的流量 q^c_e 表示为关于 λ的线性函数，由此引入数值 β_e：

引理 3.9（参见 [35, 引理 3.10] 和 [18, 定理 1]）。设 $\mathcal{G} = (\mathcal{E}, \mathcal{V})$ 是一个仅含一个环的网络，且 $e^c \in \mathcal{E}_{\mathrm{cycle}}$ 为割边。那么，原环上的边 $e \in \mathcal{E}^c_{\mathrm{cycle}}$ 上的流量关于 λ呈线性。按照图 4 中所示的节点和边编号进行调整后，

这些边上的流量 $q^c_{e_i}$ 对于 $i \in \{1,\ldots, n_{\text{cycle}}-1\}$ 为：

$$a^c(v_i, e_i) q^c_{e_i}(\lambda) = \beta_{e_i} - \lambda \quad where \quad \beta_{e_i} = \sum_{j=1}^{i} b^{\mathcal{P}}_{v_j}, \tag{3.3}$$
$$b^{\mathcal{P}}_v = b_v - \sum_{e \in \mathcal{E}(v) \setminus \mathcal{E}^c_{\text{cycle}}} a^c(v,e) q^c_e \quad for \quad v \in \mathcal{V}_{\text{cycle}},$$

其中 $a^c(v,e)$ 表示割图$\mathcal{G}^c$的关联矩阵 A^c 中的元素。或者，流量 $q^c_{e_i}$ 可以写为

$$a^c(v_{i+1}, e_i) q^c_{e_i}(\lambda) = \tilde{\beta}_{e_i} + \lambda \quad where \quad \tilde{\beta}_{e_i} = \sum_{j=1}^{n_{\text{cycle}}-i} b^{\mathcal{P}}_{v_{n_{\text{cycle}}-j+1}}. \tag{3.4}$$

此外，切割所生成的新边 e_{r} 和 e_ℓ 满足：

$$q^c_{e_{\text{r}}}(\lambda) = \lambda \quad and \quad q^c_{e_\ell}(\lambda) = \lambda \quad \Rightarrow \quad \beta_{e_{\text{r}}} = \beta_{e_\ell} = 0 \quad and \quad \tilde{\beta}_{e_{\text{r}}} = \tilde{\beta}_{e_\ell} = 0.$$

备注3.10。在方程（3.3）中，我们从 $v_{\text{r}} = v_0$ 到$v_\ell = v_{n_{\text{cycle}}+1}$遍历原环的节点；而在公式 (3.4) 中，我们沿相反方向遍历这些节点。数值 β_{e_i} 是修改后的负载 $b^{\mathcal{P}}_v$ 的部分和，从 v_1开始，沿连接节点 v_{r} 和 v_ℓ的路径向前˜累加。相反，数值 β_{e_i} 是反向部分和，即沿相反方向遍历节点所得，示意见图 5。

总之，定理 3.9 允许我们使用图 4 所示的记号，以数值 β_{e_i} 表示 $\lambda^{\pm}$ ，即

$$\lambda^- = \min M_\beta, \quad \lambda^+ = \max M_\beta, \quad \text{where} \quad M_\beta = \{\beta_{e_i} \mid 1 \le i \le n_{\text{cycle}} - 1\} \cup \{0\}.$$

这也表明，不存在满足 $0 \notin I_{\text{sol}}$ 的割边。由于数值$\beta_{e_{\text{r}}}$ 和 β_{e_ℓ} 与割边无关，因此始终有 $0 \in I_{\text{sol}}$。于是，寻找一条满足$I_{\text{sol}} \subset [0, \infty)$的割边意味着 0 必须位于 I_{sol}的左边界上。

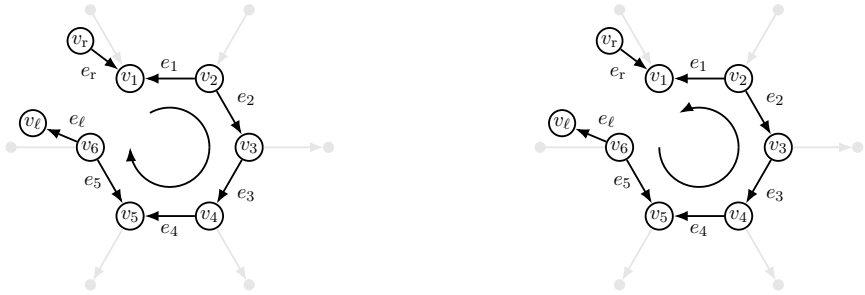


图 5： β_e 的计算从 v_1 （左侧）开始，按升序遍历节点；而 β_e 的计算则从 v_6 （右侧）开始，按降序进行。˜

为了解决是否存在一条割边 e^c 使得 $\beta_e \ge 0$这一问题，我们提出两个关键观察：首先，修改后的负载 $b^{\mathcal{P}}_v$ 之和为零，即 $\sum_{j=1}^{n_{\text{cycle}}} b^{\mathcal{P}}_{v_j} = 0$。其次，即使我们决定切割另一条边 $\tilde{e}^c \neq e^c$，仍可以保留由边 e^c引入的节点和边的编号。例如，假设我们选择 $\tilde{e}^c = e_4 = (v_4,\ v_5)$，而不是

$(v_6,\ v_1)$，作为图6所示网络的割边。那么，我们仍然可以在保留原有编号的同时应用定理3.9。在这种情况下，与割边e_4 相关的数值 β_{e_i} 由从 v_5开始的部分和给出。当求和到达节点 v_6时，接下来是节点 v_1:

$$\begin{aligned}
\beta_{e_5} &= b^{\mathcal{P}}_{v_5}, & \beta_{e_6} &= b^{\mathcal{P}}_{v_5} + b^{\mathcal{P}}_{v_6},\\
\beta_{e_1} &= b^{\mathcal{P}}_{v_5} + b^{\mathcal{P}}_{v_6} + b^{\mathcal{P}}_{v_1}, & \beta_{e_2} &= b^{\mathcal{P}}_{v_5} + b^{\mathcal{P}}_{v_6} + b^{\mathcal{P}}_{v_1} + b^{\mathcal{P}}_{v_2},\\
\beta_{e_3} &= b^{\mathcal{P}}_{v_5} + b^{\mathcal{P}}_{v_6} + b^{\mathcal{P}}_{v_1} + b^{\mathcal{P}}_{v_2} + b^{\mathcal{P}}_{v_3}, &&
\end{aligned}$$

为了将这一过程形式化，我们引入环绕部分和的概念。



图6：带有割边 e^c 的天然气网络及其相应的编号（左），以及保留原有编号、带有割边 $\tilde{e}^c = e_4$ 的割图（右）。

定义3.11 （环绕部分和）。设 $(y_j)_{j=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ 是一个实数有限序列，且 $k \in \{1, \dots, n\}$ 是一个固定指标。那么，从元素 y_k 开始的环绕部分和 $T_i(k)$ 定义为

$$T_i(k) = \begin{cases} \sum_{j=k}^{n} y_j + \sum_{j=1}^{(k+i-1)-n} y_j, & k+i-1 > n,\\ \sum_{j=k}^{k+i-1} y_j, & k+i-1 \le n. \end{cases}$$

因此，问题“是否存在一条割边 e^c 使得 $\beta_e \ge 0$ ”可转化为：我们能否为序列 $(b^{\mathcal{P}}_{v_j})_{j=1}^{n_{\text{cycle}}}$ 确定一个指标 $k^* \in \{1, \dots, n_{\text{cycle}}\}$，使得所有环绕部分和 $T_i(k^*)$ 都是非负的？答案如下：

引理3.12 （非负环绕部分和的存在性）。设 $(y_j)_{j=1}^n$ 是一个满足 $\sum_{j=1}^n y_j = 0$ 的有限序列。那么，存在一个指标 k^* 使得

$$T_i(k^*) \ge 0 \quad \textit{for all} \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

证明。我们计算序列 $(y_j)_{j=1}^n$ 的部分和 S_k，并确定其最小值。具体而言，我们有：

$$m := \operatorname*{arg\,min}_{i \in \{1,\dots,n\}} S_i \quad \text{where} \quad S_i := \sum_{j=1}^{i} y_j \quad \Rightarrow \quad S_i \ge S_m \quad \text{for all} \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

如果最小部分和不唯一，我们选择所有极小化指标 $\tilde{m}$ 中最大的 m 。那么，从元素 x_{m+1} 开始的部分和 $T_i(m+1)$ 满足$T_i(m+1) \ge 0$，对所有 $i \in \{1, \dots, n\}$ 均成立。为证明这一点，我们区分两种情况：

(i) 设 $m+i>n$，并回忆 $S_n=\sum_{j=1}^{n} y_j=0$ 成立。于是我们有

$$T_i(m+1)=\sum_{j=m+1}^{n} y_j+\sum_{j=1}^{m+i-n} y_j=S_n-S_m+S_{m+i-n}=S_{m+i-n}-S_m\geq 0,$$

(ii) 令 $m+i\leq n$。于是我们有

$$T_i(m+1)=\sum_{j=m+1}^{m+i} y_j=S_{m+i}-S_m\geq 0,$$

因此，令 $k^*=m+1$ 即可证明该结论。 □

注 3.13。若指标 k^* 满足 $T_i(k^*)\geq 0$，则按相反顺序求和并从前驱 x_{k^*-1} 开始，会得到非正的部分和。

接下来，我们将定理 3.12 应用于我们的情形——非负 β_e 的存在性。

引理 3.14。设 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$ 是一个只有一个环的网络。那么，存在一条割边$e^c\in\mathcal{E}^{\text{cycle}}$，使得根据定理 *3.9* 定义的对应数值 β_e 满足

$$\beta_e\geq 0\quad \textit{for all}\quad e\in\mathcal{E}_{\text{cycle}},$$

允许改变环中一条边 $e\in\mathcal{E}^{\text{cycle}}$ 的方向。

证明。固定环中的任意一条边 $\tilde{e}\in \mathrm{E}^{\text{cycle}}$（不一定是割边），并按照图 4 中的描述为环的节点和边编号。由于数值 β_{e_i} 是修改后的负载 $b_v^{\mathcal{P}}$的部分和（环绕），参见定理 3.9，且修改后的负载之和为零，因此我们可以将定理 3.12 应用于序列 $(b_{v_j}^{\mathcal{P}})_{j=1}^{n_{\text{cycle}}}$。由此，我们得到一个指标 k^*，使得相应的环绕部分和 $T_i(k^*)$均为非负，即，

$$T_i(k^*)\geq 0\quad \text{for all}\quad i=1,\dots,n_{\text{cycle}}.$$

现在，我们需要区分 $e_{k^*}=(v_{k^*-1},\ v_{k^*})$ 的情形和$e_{k^*}=(v_{k^*},\ v_{k^*-1})$ 的情形。在第一种情形下，我们选择 $e_{k^*}=(v_{k^*-1},\ v_{k^*})$ 作为割边，并应用定理 3.9，得到

$$\beta_{e_i}=T_i(k^*)\geq 0\quad \text{for all}\quad i=1,\dots,n_{\text{cycle}}.$$

在第二种情况下，我们有 $e_{k^*}=(v_{k^*},\ v_{k^*-1})$。然而，在这种情况下，将割边设为 $e^c=e_{k^*}$ 无法得到预期结果，因为计算 β_e 需要沿着 v_{r} 到 v_ℓ的方向遍历被切割的环上的节点。但是，切割边 e_{k^*} 并计算部分和 $T_i(k^*)$，对应的是沿着 v_ℓ 到 v_{r}的方向遍历被切割的环上的节点，这意味着

$$T_i(k^*)=\tilde{\beta}_{e_i},$$

其中 $\tilde{\beta}_e$ 定义见方程 (3.4)；另见图 5。结合定理 3.13，可得 $\tilde{\beta}_e\leq 0$。我们通过将网络 G 替换为网络$\tilde{\mathrm{G}}=(\tilde{\mathrm{V}}、\tilde{\mathrm{E}})$ 来解决这个问题，其中边 e_{k^*} 被翻转，即 $\tilde{e}_{k^*}=(v_{k^*-1}、\ v_{k^*})\in\tilde{\mathrm{E}}$。将上述分析应用于网络 G，可得到相同的指标 k^*；但由于我们翻转了边的方向，因此属于第一种情况。 □

注 3.15。 当证明中适用第二种情况时，我们必须继续分析˜如何在修改后的网络 G 上找到气体流动模型 (2.15) 的解。在找到网络 G 的一个˜解后，通过改变翻转边上流量的符号，即可恢复原始网络 G 的一个解。

根据定理 3.14，我们可以选取一条割边，使得对于所有 $e \in \mathrm{E}^{\mathrm{cycle}}$， $\beta_e \geq 0$ ，由此可以证明，非线性系统 (3.2) 对于压缩因子 Z 任意的真实气体也至少有一个解。

引理 3.16。 设 $\mathcal{G} = (\mathcal{V},\mathcal{E})$ 是一个仅含一个环的连通有向图。此外，设 e^c 是环上的一条合适的 边，并设$\mathcal{G}^c$ 是相应的割图，其边界数据由方程 (3.1)给出。那么，下列非线性系统（另见方程 (3.2)）至少有一个解：

$$\mathcal{H}_\eta(\lambda,\mu) = 0 \quad and \quad \mathcal{H}_p(\lambda,\mu) = 0.$$

证明。 首先，根据定理 3.14 确定一条合适的割边 e^c ，并根据定理 3.8 设定区间 $I_{\mathrm{sol}} = [\lambda^-,\lambda^+]$。接着，函数 $g(\lambda) = 氢p(\lambda, \mu\eta(\lambda))$ 在 I_{sol} 上连续，因为根据定理 3.3，根曲线 μ_η 在 I_{sol} 上连续，且根据定理 3.5，函数氢p 在 $I_{\mathrm{sol}} \times [0,1]$ 上连续。此外，应用定理 3.8 可得， g 在 I_{sol} 的边界上取相反的符号。最后，由介值定理可知，函数 g 在 I_{sol} 中至少有一个根 λ^* 。因此，根据曲线 μ_η 和函数 g 的定义可知，$(\lambda^*, \mu\eta(\lambda^*))$ 是非线性系统 (3.2) 的一个解。

□

最后，我们得以证明定理 3.2，从而将气体流动模型 (2.15) 至少存在一个解这一结果扩展到任意压缩因子。

定理 *3.2* 的证明。 选择图 G 的环上的一条边 e^c ，该边满足定理 3.14，并将其设为割边。此外，令 $\mathrm{G}^c = (\mathrm{V}^c,\mathrm{E}^c)$ 表示相应的割图，其具有方程 (3.1) 中定义的依赖参数的边界数据。然后，非线性系统 (3.2) 至少有一个解，见定理 3.16。因此，根据 $[35,$ 引理 3.8$]$, ，气体流动模型 (2.15) 至少存在一个解。

□

4 GasLib-11 上的一个数值示例

为了说明前文推导的理论结果在实际中的意义，我们给出一个数值示例，展示不同压缩因子模型对所得稳态的影响。具体而言，我们表明，压缩因子模型的选择不仅会影响压力分布（参见图1），还会影响网络中所得的氢气浓度。仿真在 GasLib-11[1] 基准网络上进行（见图 7）。该网络由 11 个节点、8 条边、两个压缩机站和一个可解释为无摩擦管道的阀门组成。该网络包含一个单环，非常适合在与本文所建立的分析框架一致的场景中突出模型选择的影响。

在本例中，天然气由90%的甲烷、6%的乙烷和4%的丙烷组成。为方便读者，我们假设每条管道的管道摩擦系数、管道直径和管道长度

[1]网络数据可在 `https://gaslib.zib.de/` 中找到

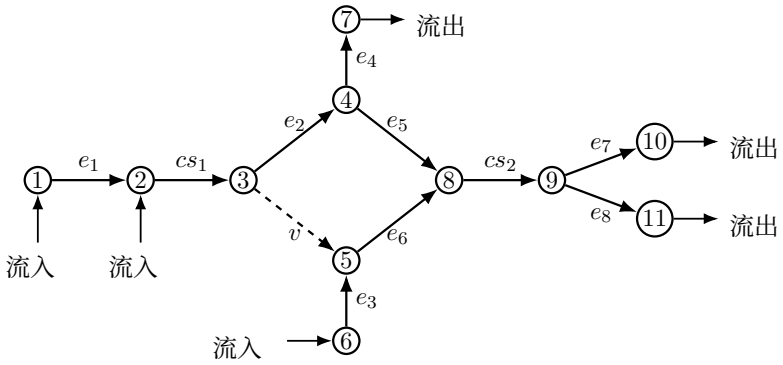


图 7：GasLib-11，包含十一个节点、八条管道、两个压缩机站和一个阀门 .

均相同 e_i。网络和天然气参数列于表1。流入节点的天然气压力和流出节点的天然气需求由下式给出

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_6 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 60 & 58 & 63 \end{pmatrix}^\top \text{bar}, \qquad \begin{pmatrix} b_7 & b_{10} & b_{11} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 120 & 80 & 90 \end{pmatrix}^\top \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}.$$

参数	变量	数值	Unit
管道摩擦系数	λ_{fr}	0.05	
管道直径	D	0.5	m
管道长度	L	10	km
通用气体常数	R	8.3145	J/(mol K)$^{-1}$
气体温度	T	283.15	K
氢气临界压力	p_{c,H_2}	13.15	bar
天然气临界压力	$p_{c,\text{NG}}$	46.01	bar
氢气临界温度	T_{c,H_2}	33.19	K
天然气临界温度	$T_{c,\text{NG}}$	204.62	K

表1：GasLib-11 示例的参数和系数

第一座压缩机站已关闭，即 $\gamma_{cs_1} = 1$；对于第二座压缩机站，我们有 $\gamma_{cs_2} = 1.2$。此外，我们假设在节点 1 注入纯天然气，在节点 2 注入纯氢气，并在节点 6 注入组分为 25% 氢气和 75% 天然气的气体。根据定理 3.2，对于近似式 (1.3)、(1.4) 和 (1.5)，模型 (2.15) 存在一个解。该解显示于图 8 中，使用 *AMPL* 软件和 *ipopt* 求解器计算得到（见 [13]），图像则使用 *MATLAB® 2023b*创建。

流出节点处的压力分布差异十分明显。恒定可压缩性模型 (1.3) 在流出节点处得出的压力分别为 40.85 bar、48.54 bar 和 47.54 bar；线性可压缩性模型 (1.4) 得出的压力较低，分别为 38.64 bar、46.08 bar 和 44.88 bar；二次可压缩性模型 (1.5) 得出的压力则较高，分别为 44.41 bar、50.73 bar 和 49.87 bar。这一观察结果与图1所示的仿真结果一致：输送距离越长（相应地，在网络中的位置越靠下游），不同可压缩性模型之间的压力

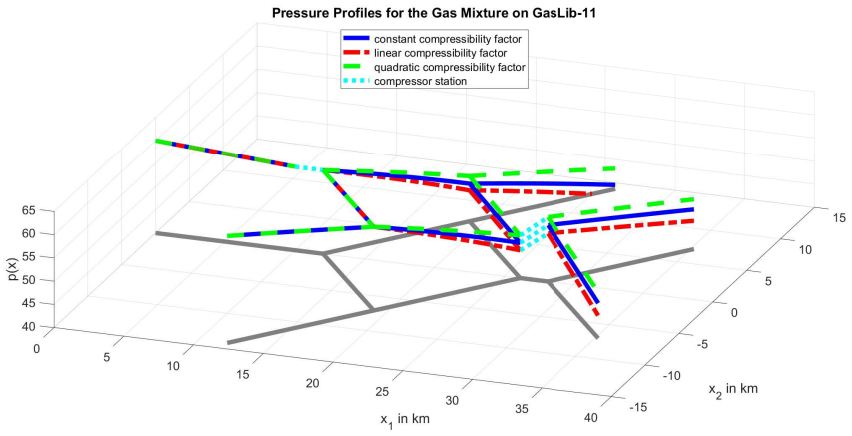


图 8：GasLib–11 上混合模型的仿真结果

分布差异就越显著。然而，与图1中对单根管道的仿真不同，网络结构意味着流入量以及管道中的气体组成也取决于可压缩性模型。结果见表2，其中 q_{in} 表示节点 1、2 和 6 处的流入量， η_{out} 表示节点 7、10 和 11 处的组分。

	常数近似	线性近似	二次近似
q_{in}	$\begin{pmatrix}134.36 & 59.09 & 96.55\end{pmatrix}\frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}$	$\begin{pmatrix}147.01 & 60.30 & 82.69\end{pmatrix}\frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}$	$\begin{pmatrix}146.98 & 45.49 & 97.53\end{pmatrix}\frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}$
η_{out}	$\begin{pmatrix}0.4429 & 0.4159 & 0.4159\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.4204 & 0.3926 & 0.3926\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.4348 & 0.3876 & 0.3876\end{pmatrix}$

表2：入口节点处的气体流量及出口节点处的气体组成

5 结论

文献中采用的不同氢气-天然气混合物压缩因子模型，即使在边界条件相同的情况下，也会导致明显不同的稳态。这表明，气体混合物流量的解析结果不应依赖于压缩因子的某种特定函数形式，而应涵盖一类通用模型。

本文证明了对于一大类非恒定且依赖组分的压缩因子，气体混合物在管道网络中输送时稳态的存在性。该分析适用于树形网络，也适用于包含一个环的网络，并且还涵盖压缩机站。与理想气体不同，对于真实气体，压力只能用隐式形式表示。此外，混合物模型还存在另一项难点：压力和组分都取决于流动方向，导致建模中出现不连续性。存在性证明基于沿管道稳态压力的隐式表述，并结合连续性分析。对于含环的网络，该论证通过切割环将网络转化为树形网络，利用依赖参数的边界数据求解由此得到的问题，并借助网络的拓扑结构控制压力对流量和组分的依赖关系，

来克服压力无法显式表示以及考虑气体混合物所导致的不连续依赖关系这一困难。

本文给出的结果为进一步研究管道网络中的氢气-天然气输送提供了严谨的解析基础。尤其是，这些结果为压缩机运行和网络管理中的最优控制问题打开了大门。尽管此类问题在单一气体输送网络中已得到充分研究（例如，参见 [1, 2, 15, 20, 21, 27,31]），但迄今为止，关于混合气体输送的研究仅限于数值分析（例如，参见 [7, 23, 29]），全面的解析研究仍然缺失。本文推导出的存在性结果，是对具有真实气体效应的混合气体网络中的最优控制与优化问题进行系统分析的第一步。

致谢 两位作者的研究工作获得了德国研究基金会（DFG）协同研究中心 CRC/Transregio 154“以气体网络为例的数学建模、仿真与优化”项目 C03 的资助，项目编号 239904186（Michael Schuster）；Simone Göttlich 还获得了资助项目 GO 1920/12-1 的支持，项目编号为 526006304。

参考文献

[1] L. Baker、S. Kazi、R. Platte 和 A. Zlotnik。《含氢气与天然气非均质混合物的管道网络瞬态流动最优控制》。载于：*2023*年美国控制会议（*ACC*）。2023年，第 1221–1228 页。[2] M. Banda 和 M. Herty。《面向天然气网络动态压缩机优化的空间映射方法》。载于：《优化与控制应用方法》32 (2011)，第 253–269 页。[3] M. K. Banda、M. Herty 和 A. Klar。《由等温欧拉方程描述的天然气网络耦合条件》。载于：《网络与异质介质》1.2 (2006)，第 295–314 页。doi: 10.3934/nhm.2006.1.295。[4] A. Bermúdez 和 M. Shabani。《天然气输送网络中的气体组分追踪数值仿真》。载于：《能源》247 (2022)。doi: 10.1016/j.energy.2022.123459。[5] P. Börner、M. Pfetsch 和 S. Ulbrich。《网络上的气体混合物建模与优化》。载于：《*2024*年运筹学研究会议论文集》。L. Glomb 编。SpringerNature Switzerland，2025年。[6] D. Bothe 和 W. Dreyer。《化学反应流体混合物的连续介质热力学》。载于：《力学学报》226 (2015)，第 1757–1805 页。[7] Y. Brodskyi、V. Gyrya 和 A. Zlotnik。《使用显式交错网格离散对管道网络中的混合气体动力学进行仿真》。载于：《应用数学建模》137 (2025)。doi: 10.1016/j.apm.2024.115717。[8] 德国联邦政府。气候友好型气体能源。2024年。url: https://www.bundesregierung.d

e/br

[9] P. Domschke, B. Hiller, J. Lang 和 C. Tischendorf。燃气网络建模：综述。技术报告 2717。达姆施塔特工业大学，2017年。网址：http://www3.mathematik.tu-darmst

adt.

[10] P. Domschke、O. Kolb 和 J. Lang。《大型天然气网络的快速可靠瞬态仿真与连续优化》。载于：数学方法与运筹研究 95（2022年），第 475–501 页。

[11] 欧盟委员会。 气候中和欧洲氢能战略。2020年。 网址：
https://energy.ec.europa.eu/system/files/2020-07/hydrogen_strategy_0.pdf。[12] 欧洲氢能主干网。 *2030*年面向欧洲的五条氢能供应走廊——执行摘要。2022年。 网址：
https://ehb.eu/files/downloads/EHB-Supply-corrido rs-presentat
[13] R. Fourer、D. Gay 和 B. Kernighan。*AMPL*：数学规划建模语言。第二版。DUXBURY，2002年。[14] M. Gugat、F. Hante、M. Hirsch-Dick 和 G. Leugering。“天然气网络中的稳态”。载于：《网络与异质介质》10.2（2015），第295–320页。doi：10.3934/nhm.2015.10.2 95.
[15] M. Gugat、M. Schuster 和 J. Sokolowski。“管道网络中压缩机站的选址问题”。载于：《数学、力学与复杂系统》12.4（2024），第507–546页。doi：10.2140/memocs.2024.12.507.[16] M. Gugat 和 S. Ulbrich。“平衡律初边值问题的 Lipschitz 解”。载于：《数学模型、方法与应用科学》28.5（2018），第921–951页。[17] M. Gugat 和 D. Wintergerst。“天然气网络中的瞬态流动：行波”。载于：《国际应用数学与计算》28.2（2018），第341–348页。doi：10.2478/amcs-2018-0025.[18] M. Gugat、R. Schultz 和 D. Wintergerst。“压缩因子非常数的天然气管道网络：稳态”。载于：《计算与应用数学》37（2018），第1066–1097页。doi：10.1007/s40314-016-0383-z.[19] M. Gugat 和 M. Schuster。“带压缩机控制和随机负荷的稳态天然气网络：概率约束优化”。载于：《数学问题工程》2018.1（2018）。doi：10.1155/2018/7984079.[20] F. Hante。“偏微分方程的混合整数最优控制：通过微分包含进行松弛及其在天然气网络优化中的应用”。载于：数学建模、优化、解析与数值解。P. Manchanda、R. Lozi 和 A. Siddiqi 编。Springer Singapore，2020年，第157–171页。[21] F. Hante、G. Leugering、A. Martin、L. Schewe 和 M. Schmidt。“管道与运河网络中天然气与流体流动最优控制问题的挑战：从建模到工业应用”。载于：工业数学与复杂系统。Springer，2017年，第77–122页。[22] S. Kazi、K. Sundar、S. Srinivasan 和 A. Zlotnik。“管道网络中天然气与氢气混合物稳态流动的建模与优化”。载于：《国际氢能杂志》54（2024），第14–24页。doi：10.1016/j.ijhydene.2023.12.054.[23] S. Kazi、K. Sundar 和 A. Zlotnik。“天然气网络中氢气掺混运行的动态优化与最优控制”。载于：*2024*年美国控制会议（*ACC*）。电气电子工程师学会（IEEE），2024年。[24] T. Koch、B. Hiller、M. E. Pfetsch 和 L. Schewe。天然气网络容量评估。MOS-SIAM，2015年。[25] K. Kumar、G. John、L. Lim、K. Seeger、M. Wakabayashi 和 G. Kawamura。亚洲绿色氢能：现有计划与项目简述。2023年。网址：
https://www.orrick.com/en/Insights/2023/07/Green-Hydrogen-in-Asia-A-Brief -Survey-of-
[26] O. Kunz 和 W. Wagner。《天然气及其他混合物的 GERG-2008 宽范围状态方程：GERG-2004 的扩展》。载于：《化学工程数据杂志》57.11（2012），第 3032–3091 页。doi：10.1021/je300655b。

[27] F. Liers、A. Martin、M. Merkert、N. Mertens 和 D. Michaels。《通过同步凸化求解混合整数非线性优化问题：天然气网络案例研究》。载于：《全球优化杂志》80（2021），第 307–340 页。doi：10.1007/s10898-020-00974-0。[28] J. Málek 和 O. Souček。《两种相互作用流体混合物的导热流动热力学框架》。载于：《应用数学与力学杂志》102（2022），论文编号 e202100389。[29] A. Nayak 和 S. Grundel。《管道中复合气体流的收敛性研究》。载于：《应用数学与力学会议论文集》23（第 1 期，2022），共 7 页。doi：10.1002/pamm.202200231。[30] M. Schmidt、M. C. Steinbach 和 B. M. Willer。《天然气网络的高细节稳态优化模型：验证与结果》。载于：《优化工程》17（2016），第 437–472 页。doi：10.1007/s11081-015-9300-3。[31] M. Schuster。《不确定性下的控制与优化：天然气网络运行背景下的研究》。habilitation 学位论文。埃尔朗根-纽伦堡大学，德国，2026 年。网址：https://opus4.kobv.de

[32] M. Schuster.《以天然气网络为例的节点控制与概率约束优化》。博士论文。埃尔朗根-纽伦堡大学，德国，2021年。网址：https://opus4.kobv.de/opus4-trr154/frontdoor/index/index/docId/410。[33] 美国能源部，OCED。氢：灵活能源载体。2017年。网址：https://www.energy.gov/cmei/articles/hydrogen-flexible-energy-carrier。[34] 美国能源部，OCED。多年计划。2023年。网址：https://www.energy.gov/si

[35] A. Ulke、M. Schuster 和 S. Göttlich。“网络上的稳态混合气体流：解的存在性与唯一性”。载于：《网络与异质介质》20.3（2025年），第903–937页。doi：10.3934/nhm.2025039。[36] T. Walther 和 B. Hiller。天然气网络中的压缩机站建模。预印本。柏林扎斯研究所（ZIB），2017年。网址：https://opus4.kobv.de/opus4-trr154/203。[37] D. Wintergerst。《随机边界条件下天然气网络的优化博士论文。埃尔朗根-纽伦堡大学，德国，2019年。网址：https://open.fau.de/handle/open