arXiv:2602.08490v1 [math.AP] 9 Feb 2026

能量临界 Hartree 方程双泡解的构造

JACEK JENDREJ、XUEMEI LI 和 GUIXIANG XU

摘要。我们构造了空间维数为 $N \geq 7$ 的聚焦型能量临界 Hartree 方程的一个纯双泡解。该解具有球对称性，在负时间方向上（至少）是全局的，并且渐近表现为两个基态（或泡）的叠加：二者都以原点为中心，其尺度之比趋于 0，且两个泡的相位形成直角。主要论证方法包括调制分析、自举论证和拓扑论证。我们的证明与 [10, 11] 密切相关，区别在于非局部相互作用，这使得分析更为复杂。

1. 引言

1.1. 问题的设定。我们考虑聚焦型能量临界 Hartree 方程

$$i\partial_t u + \Delta u + \left(|x|^{-4} * |u|^2\right) u = 0, \quad f(u) := \left(|x|^{-4} * |u|^2\right) u, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N. \tag{1.1}$$

Hartree 方程出现在玻色星及其他物理现象的研究中，请参阅 [36]。在化学中，它作为介观结构的连续极限模型出现；见 [8]。出于稍后将阐明的原因（见注 3.3），本文中我们假设 $N \geq 7$。

与该方程相关联的能量泛函 对 $u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ 由公式定义

$$E(u_0) := \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}|\nabla u_0(x)|^2 - F(u_0(x))\,\mathrm{d}x, \tag{1.2}$$

其中 $F(u) := \frac{1}{4}\left(|x|^{-4} * |u|^2\right)|u|^2$。方程 (1.1) 的解的一个关键性质是，能量 E是一条守恒律。 E的微分为 $\mathrm{D}E(u_0) = -\Delta u_0 - f(u_0)$，因此，我们有方程 (1.1) 的如下哈密顿形式：

$$\partial_t u(t) = -i\mathrm{D}E(u(t)).$$

方程 (1.1) 的柯西问题已在 [3, 28] 中建立。也就是说，若 $u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N)$，则存在定义在极大区间 $I = (-T_-(u)\ T_+(u))$ 上的唯一解。“能量临界”这一名称指的是缩放

$$u(t,x) \to u_\lambda(t,x) = \lambda^{-\frac{N-2}{2}} u\left(\lambda^{-2}t, \lambda^{-1}x\right),\ \lambda > 0,$$

使方程 (1.1) 和能量 (1.2) 保持不变。

关于能量临界 Hartree 方程已有许多研究结果。在散焦情形下，Miao 等人运用能量归纳论证和局部化 Morawetz 恒等式，证明了 [27] 中径向解的全局适定性与散射。随后，Miao 等人同时在频率空间和物理空间中运用能量归纳论证，并借助频率局部化相互作用 Morawetz 估计，在 [33] 中去除了径向假设。

2010 数学主题分类。主要分类：35Q41，次要分类：35Q55。关键词和短语。动力学；双泡；Hartree 方程；调制分析。

而在聚焦情形下，动力学行为则变得更加复杂。事实证明，显式的基态

$$W(x) = c_0 \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + |x|^2} \right)^{-\frac{N-2}{2}} \text{ with } c_0 > 0, \lambda > 0,$$

在方程 (1.1) 的解的动力学行为中发挥着重要作用。函数 $e^{i\theta} W_\lambda$ 称为基态或（能量）泡。它们是临界椭圆问题的唯一径向对称解

$$-\Delta u - f(u) = 0.$$

根据 [25, 29], , 我们得到 W 的变分刻画；结合尖锐 Sobolev 不等式 [1, 24, 39] 与尖锐 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式 [23, 24]即可证明这一刻画。最近，第二位和第三位作者等人利用立体投影以及球面上的尖锐 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，在 [21]中为 $\mathbb{R}^N$中的这一尖锐 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的极值函数存在性给出了另一种证明。

Miao 等人运用集中紧性原理和刚性论证。这些方法最初由 C. Kenig 和 F. Merle 在非线性薛定谔方程和非线性波方程中引入，见 [14, 15],。他们通过全面分类方程 (1.1) 的解 $u(t)$ 的动力学行为，证明了所谓的阈值猜想</style}，其中这些解满足 (()) ()。之后，*Miao* 等人运用调制分析以及集中紧性刚性论证，证明了中满足 (()) () 的方程 *(1.1)* 的解 () 的动力学行为。略高于基态能量阈值的解已在中得到研究。关于解的动力学，更强的结论是孤子分解猜想：该猜想预言，一个有界（在适当意义下）的解会渐近分解为不同尺度上的能量泡之和以及一个辐射项（线性 Hartree 方程的解）。这一结论已在 [5, 6, 7, 13] 中针对 $N \geq 3$ 维的径向能量临界波方程得到证明。对于方程 (1.1)，这一问题仍完全悬而未决。关于 Hartree 方程的其他动力学结果，请参见
[2, 9, 16, 17, 19, 20, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 40]。

在本文中，我们始终假设初始数据是径向对称的，而这一性质在流下保持不变。我们用 $\mathcal{E}$ 表示 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$ 中的径向对称函数空间。

1.2. 主要结果。 鉴于孤子分解猜想，在一个或两个时间方向上都不表现出色散的解具有特殊的重要性。这类解的一个显然例子是基态 $e^{i\theta} W_\lambda$，这是一个平凡的结果。在本文中，我们将考虑最简单的非平凡情形，即构造一个全局径向解，使其在能量空间中趋近于两个泡之和。其中一个泡的尺度为 1，而另一个泡的长度尺度以速率 $|t|^{-\frac{2}{N-6}}$ 趋于 0。两个泡的相位形成直角。也就是说

定理 1。 存在一个解 $u: (-\infty, T_0] \to \mathcal{E}$ 满足 (1.1)，使得

$$\lim_{t \to -\infty} \left\| u(t) - \left(-iW + W_{\kappa |t|^{-\frac{2}{N-6}}} \right) \right\|_{\mathcal{E}} = 0,$$

其中 κ 是一个显式常数，见(3.13)。

注 1.1. 更确切地说，我们将证明

$$\left\| u(t) - \left(-iW + W_{\kappa |t|^{-\frac{2}{N-6}}} \right) \right\|_{\mathcal{E}} \leq C_0 |t|^{-\frac{1}{2(N-6)}},$$

对于某个常数 $C_0 > 0$。

注 1.2. 我们在此构造纯双泡解，即该解趋近于两个基态的叠加，且没有能量转化为辐射。由能量守恒和两个泡的解耦，我们必然有 $E(u(t)) = 2E(W)$。

注 1.3. 对于能量临界波方程和非线性薛定谔方程，第一作者在 [10] 和 [11]中构造了类似的对象。在后续工作中，我们将考虑维数 $N = 6$，并预期可以得到类似的结果，其集中速率为指数级。

注 1.4. 在 [4, 38]中构造了能量临界热方程的类似解。

注 1.5. 近期， [12]针对能量临界波映射方程构造了另一类双泡解：该解在有限时间内爆破，同时两个泡的尺度都趋于零。

1.3. **证明概要**。 整体结构与第一作者此前关于能量临界非线性薛定谔方程的工作 [11]类似。这里的 Hartree 方程与 [11] 中的非线性薛定谔方程的区别在于非局部相互作用，这使得分析更为复杂。主要工具包括调制分析、自举论证和拓扑论证。

本文结构如下。我们研究（1.1）的解，它们接近两个泡之和：

$$u(t) = \mathrm{e}^{i\zeta(t)} W_{\mu(t)} + \mathrm{e}^{i\theta(t)} W_{\lambda(t)} + g(t).$$

应将 $\zeta(t)$ 视为接近 $-\frac{\pi}{2}$, $\mu(t) \simeq 1$, $\theta(t) \sim 0$, $\lambda(t) \ll 1$ 和 $\|g(t)\|_{\mathcal{E}} \ll 1$。

在第 2 节中，我们首先回顾一些有用的引理。我们还陈述线性化算子 $Z_{\theta,\,\lambda}$ 在 $\mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda$ 附近的谱性质，以及双泡附近能量的强制性。这些对于估计 g（即无限维部分）非常重要。我们将利用能量守恒来处理这一问题。

在第 3 节中，我们估计调制参数。为此，我们施加正交条件，使调制方程中关于 g 的线性项消失。这种正交条件本质上是唯一的。在引理 3.1 中，我们在一些自举假设下建立了调制参数演化的界。我们的目标是改进这些界，从而完成自举。为了改进 $\|g\|_{\mathcal{E}}$ 的界以完成自举，我们建立引理 3.5 来控制不稳定分量。

在第 4 节中，我们建立自举估计，并证明主要结果定理 1。首先，我们利用隐函数定理得到调制分解。接下来，结合位力修正（用于改进 $\theta(t)$ 上的界 (3.6)），我们可以闭合调制参数的自举。加入位力修正后，我们能够在 (3.12) 右端得到一个小常数，这对于闭合自举至关重要。流的线性不稳定性可以通过基于布劳威尔不动点定理的经典拓扑论证来处理。最后，我们证明定理 1。

1.4. **致谢**。J. Jendrej 得到了欧洲研究委员会 INSOLIT 项目（编号 101117126）的资助。G. Xu 得到了国家自然科学基金委员会（编号 12371240、12431008）的资助。

2. 变分估计

2.1. **记号与初步结果**。 我们引入以下记号： $\langle x \rangle := \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{1}{2}}$。对于 $z = x + iy \in \mathbb{C}$，我们记 $\Re(z) = x$ 和 $\Im(z) = y$。对于两个函数 $v,\ w \in L^2(\mathbb{R}^N,\ \mathbb{C})$，我们记

$$\langle v, w \rangle := \Re \int_{\mathbb{R}^N} \overline{v(x)} \cdot w(x)\, \mathrm{d}x.$$

本文中的所有函数都是径向对称的。我们记 $L^2 := L^2_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N;\ \mathbb{C})$ 和$\mathcal{E} := \dot{H}^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N;\ \mathbb{C})$。我们将它们视为实向量空间。我们记 $X^1 :=\mathcal{E} \cap \dot{H}^2(\mathbb{R}^N)$。

接下来，我们收集几个有用的引理。为了估计公式 (1.1) 的非线性项，下面的引理至关重要。

引理 2.1 ([21])。设 $\lambda \in (0, N)$ 以及 $\theta + \lambda > N$. 则

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^\lambda} \frac{1}{\langle y\rangle^\theta}\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \langle x\rangle^{N-\lambda-\theta}, & if\ \theta < N, \\ \langle x\rangle^{-\lambda}(1+\log\langle x\rangle), & if\ \theta = N, \\ \langle x\rangle^{-\lambda}, & if\ \theta > N. \end{cases}$$

回顾一下，对于 $u \in \mathbb{C}$，我们记 $f(u) := \left(|x|^{-4} * |u|^2\right) u$ 以及 $F(u) := \frac{1}{4}\left(|x|^{-4} * |u|^2\right)|u|^2$。我们通过以下公式定义 $\mathbb{R}$-线性函数 $f'(u)\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$f'(u)g := \left(|x|^{-4} * |u|^2\right) g + 2\left(|x|^{-4} * \Re(u\bar{g})\right) u. \tag{2.1}$$

通过简单计算，我们可以得到

引理 2.2。设 $N \geq 7$。对于 z_1、z_2、$z_3 \in \mathbb{C}$，有

$$\begin{aligned} &f(z_1+z_2) - f(z_1) - f(z_2) \\ =&\left(|x|^{-4} * |z_1|^2\right) z_2 + 2\left(|x|^{-4} * \Re(z_1\bar{z_2})\right) z_1 \\ &+ \left(|x|^{-4} * |z_2|^2\right) z_1 + 2\left(|x|^{-4} * \Re(z_2\bar{z_1})\right) z_2, \\ =&f'(z_1)z_2 + f'(z_2)z_1, \end{aligned} \tag{2.2}$$

and

$$\begin{aligned} &F(z_1+z_2) - F(z_1) - F(z_2) \\ =&\frac{1}{2}\left(|x|^{-4} * |z_1|^2\right)\Re(z_1\bar{z_2}) + \frac{1}{2}\left(|x|^{-4} * \Re(z_1\bar{z_2})\right)|z_1|^2 \\ &+ \frac{1}{2}\left(|x|^{-4} * |z_2|^2\right)\Re(z_2\bar{z_1}) + \frac{1}{2}\left(|x|^{-4} * \Re(z_2\bar{z_1})\right)|z_2|^2 \\ &+ \frac{1}{4}\left(|x|^{-4} * |z_1|^2\right)|z_2|^2 + \frac{1}{4}\left(|x|^{-4} * |z_2|^2\right)|z_1|^2 \\ &+ \left(|x|^{-4} * \Re(z_2\bar{z_1})\right)\Re(z_2\bar{z_1}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

下面的弱稳定性引理用于证明定理 1。

引理 2.3. 存在一个常数 $\eta > 0$，使得下述结论成立。设 $K \subset \mathcal{E}$ 是一个紧集，且 $u_n : [T_1, T_2] \to \mathcal{E}$ 是方程 (1.1) 的一列解，满足

$$\mathrm{dist}(u_n(t), K) \leq \eta, \qquad for\ all\ n \in \mathbb{N}\ and\ t \in [T_1, T_2].$$

假设 $u_n(T_1) \rightharpoonup u_0 \in \mathcal{E}$。那么，以初值条件$u(T_1) = u_0$ 为初值的方程 (1.1) 的解 $u(t)$ 在 $t \in [T_1, T_2]$ 上有定义，并且

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t), \qquad for\ all\ t \in [T_1, T_2].$$

证明。见 [11], 推论 A.4。 □

2.2. **基态附近的线性化**。根据 Fubini定理，容易验证，对于任意 $g, h, u \in \mathbb{C}$，都有

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Re\big(\overline{h}(f'(u)g)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \Re\big(\overline{g}(f'(u)h)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \Re\big((\overline{f'(u)h})g\big)\,\mathrm{d}x.$$

因此我们看到，对于复函数 $u(x)$，算子 $g \mapsto f'(u)g$ 关于实 L^2 内积是对称的。

我们将 $Z_{\theta,\lambda}:=i\Delta+if'(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)$ 记为 $i\Delta u+if(u)$ 在 $u=\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda$ 附近的线性化。为了更明确地表示$Z_{\theta,\lambda}$，我们引入以下记号:

$$V^+h_1:=-\Big(\frac{1}{|x|^4}*|W|^2\Big)h_1-2\Big(\frac{1}{|x|^4}*(Wh_1)\Big)W,\qquad V^-h_2:=-\Big(\frac{1}{|x|^4}*|W|^2\Big)h_2,$$

$$\begin{aligned}L^+h_1:=&-\Delta h_1-\Big(\frac{1}{|x|^4}*|W|^2\Big)h_1-2\Big(\frac{1}{|x|^4}*(Wh_1)\Big)W,\\ L^-h_2:=&-\Delta h_2-\Big(\frac{1}{|x|^4}*|W|^2\Big)h_2.\end{aligned}$$

由 [20, 21, 25], 可知，对所有 $g\in\mathcal{E}$，均有 $\langle g,\ L^-g\rangle\geq 0$，且 $\ker L^-=\mathrm{span}\{W\}$。算子 L^+ 有一个单重严格负特征值；限制在径向对称函数上时，$\ker L^+=\mathrm{span}\{\Lambda W\}$。

为便于后续参考，这里给出涉及 W 和 ΛW 的一些积分值:

$$\int_{\mathbb{R}^N}W^2\,\mathrm{d}x=C_1,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-4}*W^2\right)W\,\mathrm{d}x=C_2,\tag{2.4}$$

$$-\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\frac{1}{|x|^4}*W^2\Big)\Lambda W+2\Big(\frac{1}{|x|^4}*(W\Lambda W)\Big)W\,\mathrm{d}x=C_3,\tag{2.5}$$

其中 $C_1,\ C_2,\ C_3\in\mathbb{R}$ 是具体的实数。对于第一个积分，我们使用公式$B(x,\ y)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}(1+t)^{-x-y}\,\mathrm{d}t$，其中 C_1 是与 $B(x,\ y)$ 有关的常数。对于第二个积分，我们写作 $\left(|x|^{-4}*W^2\right)W=-\Delta W$，并进行分部积分。对于最后一个积分，由于 $\ker L^+=\mathrm{span}\{\Lambda W\}$，我们写作$-\Big(\frac{1}{|x|^4}*W^2\Big)\Lambda W-2\Big(\frac{1}{|x|^4}*(W\Lambda W)\Big)W=V^+\Lambda W=\Delta\Lambda W$，并进行分部积分。

根据 f'的定义，可以验证若 $g_1=\Re g$ 和 $g_2=\Im g$，则

$$Z_{\theta,\lambda}(\mathrm{e}^{i\theta}g_\lambda)=\frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\lambda^2}(L^-g_2-iL^+g_1)_\lambda.$$

特别地，我们得到

$$\begin{aligned}Z_{\theta,\lambda}(i\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)&=\frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\lambda^2}(L^-W)_\lambda=0,\\ Z_{\theta,\lambda}(\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda)&=\frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\lambda^2}(-iL^+\Lambda W)_\lambda=0.\end{aligned}$$

Thi对 $i\Delta(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)+if(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)$关于 θ 和 λ求导，也可以得到这一点。

现在考虑算子$Z^*_{\theta,\ \lambda}$。通过与 [11], 中的计算类似的计算，得到 $\{\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda,\ i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda\}\subset\ker Z^*_{\theta,\ \lambda}$。根据 [25, 命题2.15],，存在实函数$\mathcal{Y}^{(1)},\ \mathcal{Y}^{(2)}\in\mathcal{S}$ 和一个实数 $\nu>0$，使得

$$L^+\mathcal{Y}^{(1)}=-\nu\mathcal{Y}^{(2)},\qquad L^-\mathcal{Y}^{(2)}=\nu\mathcal{Y}^{(1)}.\tag{2.6}$$

我们可以假设 $\|\mathcal{Y}^{(1)}\|_{L^2}=\|\mathcal{Y}^{(2)}\|_{L^2}=1$。记

$$\alpha^+_{\theta,\lambda}:=\frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\lambda^2}\big(\mathcal{Y}^{(2)}_\lambda+i\mathcal{Y}^{(1)}_\lambda\big),\qquad \alpha^-_{\theta,\lambda}:=\frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\lambda^2}\big(\mathcal{Y}^{(2)}_\lambda-i\mathcal{Y}^{(1)}_\lambda\big).$$

对于 $g=g_1+ig_2$，我们有 $\langle \alpha_\theta^+,\ \lambda,\ \mathrm{e}^{i\theta}g_\lambda\rangle=\langle \mathcal{Y}^{(2)},\ g_1\rangle+\langle \mathcal{Y}^{(1)},\ g_2\rangle$ 以及 $\langle \alpha_\theta^-,\ \lambda,\ \mathrm{e}^{i\theta}g_\lambda\rangle=\langle \mathcal{Y}^{(2)},\ g_1\rangle-\langle \mathcal{Y}^{(1)},\ g_2\rangle$。注意

$$\langle W,\mathcal{Y}^{(1)}\rangle=\frac{1}{\nu}\langle W,L^-\mathcal{Y}^{(2)}\rangle=\frac{1}{\nu}\langle L^-W,\mathcal{Y}^{(2)}\rangle=0,$$
$$\langle \Lambda W,\mathcal{Y}^{(2)}\rangle=-\frac{1}{\nu}\langle \Lambda W,L^+\mathcal{Y}^{(1)}\rangle=-\frac{1}{\nu}\langle L^+(\Lambda W),\mathcal{Y}^{(1)}\rangle=0.$$

由此可得

$$\langle \alpha^+_{\theta,\lambda},i\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\rangle=\langle \alpha^-_{\theta,\lambda},i\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\rangle=0,$$
$$\langle \alpha^+_{\theta,\lambda},\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda\rangle=\langle \alpha^-_{\theta,\lambda},\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda\rangle=0.$$

由于 $\mathcal{Y}^{(2)}\neq W$，我们还有

$$\langle \mathcal{Y}^{(1)},\mathcal{Y}^{(2)}\rangle=\frac{1}{\nu}\langle \mathcal{Y}^{(2)},L^-\mathcal{Y}^{(2)}\rangle=:M>0. \tag{2.7}$$

为证明强制性，我们定义

$$\mathcal{Y}^+_{\theta,\lambda}:=\frac{1}{2M}\mathrm{e}^{i\theta}(\mathcal{Y}^{(1)}_\lambda+i\mathcal{Y}^{(2)}_\lambda),\qquad \mathcal{Y}^-_{\theta,\lambda}:=\frac{1}{2M}\mathrm{e}^{i\theta}(\mathcal{Y}^{(1)}_\lambda-i\mathcal{Y}^{(2)}_\lambda).$$

与 [11], 相同，我们有 $\alpha_\theta^+{}_{,\lambda}$ 和 $\alpha_\theta^-{}_{,\lambda}$ 是 $Z^*_{\theta,\lambda}$ 的特征函数，对应的特征值分别为 $\frac{\nu}{\lambda^2}$ 和 $-\frac{\nu}{\lambda^2}$。

2.3. **双泡附近能量的强制性**。我们考虑 $u\in\mathcal{E}$ 形式为$u=\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda+g$ 其中

$$\Big|\zeta+\frac{\pi}{2}\Big|+|\mu-1|+|\theta|+\lambda+\|g\|_{\mathcal{E}}\ll 1.$$

此外，我们将假设 g 满足

$$\langle i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu,g\rangle=\langle -\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu,g\rangle=\langle i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,g\rangle=\langle -\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda,g\rangle=0. \tag{2.8}$$

选择这些正交条件是由$Z^*_{\zeta,\ \mu}$ 和$Z^*_{\theta,\ \lambda}$ 的核决定的，并且在后文中将发挥重要作用。

当上下文中已知 ζ，μ，θ，λ和 g时，我们记

$$a_1^+:=\langle \alpha^+_{\zeta,\mu},g\rangle,\qquad a_1^-:=\langle \alpha^-_{\zeta,\mu},g\rangle,\qquad a_2^+:=\langle \alpha^+_{\theta,\lambda},g\rangle,\qquad a_2^-:=\langle \alpha^-_{\theta,\lambda},g\rangle. \tag{2.9}$$

我们将证明以下结果。

命题 2.4。存在仅依赖于 N 的常数 η、C_0、$C>0$，使得对于所有形如 $u=\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda+g$ 的 $u\in\mathcal{E}$，其中 $\big|\zeta+\frac{\pi}{2}\big|+|\mu-1|+|\theta|+\lambda+\|g\|_{\mathcal{E}}\leq\eta$ 和 g 满足(2.8)，有

$$|E(u)-2E(W)|\leq C\Big(\big(\big|\zeta+\frac{\pi}{2}\big|+|\mu-1|+|\theta|+\lambda\big)\lambda^{\frac{N-2}{2}}+\|g\|^2_{\mathcal{E}}\Big), \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\|g\|^2_{\mathcal{E}}+C_0\theta\lambda^{\frac{N-2}{2}}\leq& C\Big(\lambda^{\frac{N-2}{2}}\big(\big|\zeta+\frac{\pi}{2}\big|+|\mu-1|+|\theta|^3+\lambda\big)\\&+E(u)-2E(W)+\sum_{j=1,2}\big((a_j^+)^2+(a_j^-)^2\big)\Big).\end{aligned} \tag{2.11}$$

证明思路如下。利用能量表达式、Sobolev不等式、Hölder 不等式和 Hardy-Littlewood-Sobolev不等式，我们得到

(2.12)
$$\begin{aligned}
&\left|E(u)-E(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-\langle \mathrm{D}E(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda),g\rangle-\frac{1}{2}\langle \mathrm{D}^2E(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g,g\rangle\right|\\
\lesssim&\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-4}*|g|^2\right)\Re\left((\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\overline{g}\right)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-4}*|g|^2\right)|g|^2\,\mathrm{d}x\\
\lesssim&\||x|^{-4}*g^2\|_{L^{\frac{N}{2}}}\|\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\|g\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}+\||x|^{-4}*g^2\|_{L^{\frac{N}{2}}}\|g\|^2_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\\
\lesssim&\|W\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\|g\|^3_{L^{\frac{2N}{N-2}}}+\|g\|^4_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\\
\lesssim&\|g\|^3_{\mathcal{E}}.
\end{aligned}$$

我们只需以足够高的精度计算所有项。我们将这一计算拆分为几个引理。

引理 2.5. 设 ζ,μ,θ,λ 如命题 *2.4* 中所述。那么

$$\left|E(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-2E(W)-C_2\theta\lambda^{\frac{N-2}{2}}\right|\le C\lambda^{\frac{N-2}{2}}\left(\left|\zeta+\frac{\pi}{2}\right|+|\mu-1|+|\theta|^3+\lambda\right),\tag{2.13}$$

其中 C 是仅依赖于 N的常数。

证明. 由能量的表达式可得

$$\begin{aligned}
E(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)=&E(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)+E(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)+\Re\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{i(\zeta-\theta)}\nabla(W_\mu)\cdot\nabla(W_\lambda)\,\mathrm{d}x\\
&-\int_{\mathbb{R}^N}\left(F(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-F(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-F(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{2.14}$$

由伸缩不变性， $E(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)+E(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)=2E(W)$。分部积分可得

$$\Re\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{i(\zeta-\theta)}\nabla(W_\mu)\cdot\nabla(W_\lambda)\,\mathrm{d}x=-\Re\int_{\mathbb{R}^N}\overline{\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda}\Delta(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)\,\mathrm{d}x=\Re\int_{\mathbb{R}^N}\overline{\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda}\cdot f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)\,\mathrm{d}x,$$

因此，由 (2.14) 可得

$$\begin{aligned}
&E(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)=2E(W)\\
&-\int_{\mathbb{R}^N}\left(F(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-F(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-F(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-\Re\big(\overline{\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda}\cdot f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)\big)\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{2.15}$$

利用 (2.3)、 $z_1=\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu$ 和 $z_2=\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda$ 以及 Fubini定理，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N}\left(F(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-F(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-F(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-\Re\big(\overline{\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda}\cdot f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)\big)\right)\mathrm{d}x\\
=&\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\overline{\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda})\right)\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\overline{\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda})\,\mathrm{d}x\\
&+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-4}*W_\mu^2\right)W_\lambda^2\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\overline{\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda})\right)W_\lambda^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{2.16}$$

在区域 $|x|\geq\sqrt{\lambda}$, $W_\mu\lesssim 1$ 中，我们看到

$$
\begin{aligned}
|x|^{-4}*W_\lambda &= \lambda^{-\frac{N-2}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}|x-y|^{-4}W(\frac{y}{\lambda})\,\mathrm{d}y \\
&= \lambda^{-\frac{N-2}{2}}\lambda^{-4}\int_{\mathbb{R}^N}|\frac{x}{\lambda}-\frac{y}{\lambda}|^{-4}W(\frac{y}{\lambda})\,\mathrm{d}y \\
&= \lambda^{-\frac{N-2}{2}-4+N}\int_{\mathbb{R}^N}|\frac{x}{\lambda}-y|^{-4}W(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \lambda^{\frac{N-6}{2}}(|\cdot|^{-4}*W)(\frac{x}{\lambda}).
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

利用引理 2.1，我们可以得到 $(|\cdot|^{-4}*W)_-(\frac{x}{\lambda})_-\lesssim\langle\frac{x}{\lambda}\rangle^{-2}$。结合 $W_\mu\lesssim 1$, $W_\mu\lesssim W$，我们可以得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|\geq\sqrt{\lambda}}\left(|x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\overline{\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda})\right)\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\overline{\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda})\,\mathrm{d}x \\
\lesssim&\int_{|x|\geq\sqrt{\lambda}}\left(|x|^{-4}*W_\lambda\right)W_\mu W_\lambda\,\mathrm{d}x \\
\lesssim&\int_{|x|\geq\sqrt{\lambda}}\lambda^{\frac{N-6}{2}}\langle\frac{x}{\lambda}\rangle^{-2}\langle x\rangle^{-(N-2)}\lambda^{-\frac{N-2}{2}}\langle\frac{x}{\lambda}\rangle^{-(N-2)}\,\mathrm{d}x \\
\lesssim&\lambda^{-2}\int_{\sqrt{\lambda}\leq|x|\leq 1}|\frac{x}{\lambda}|^{-N}\,\mathrm{d}x+\int_{|x|\geq 1}|x|^{-(N-2)}|\frac{x}{\lambda}|^{-N}\,\mathrm{d}x \\
\lesssim&\lambda^{-2}\left(-\frac{1}{2}\lambda^N\log\lambda+\lambda^N\right) \\
\lesssim&\lambda^{N-3}\ll\lambda^{\frac{N}{2}}.
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

再次利用引理 2.1 和 $W_\mu\lesssim W$，我们有$|x|^{-4}*W_\mu^2\lesssim\langle x\rangle^{-4}$。因此，

$$
\left(|x|^{-4}*W_\mu^2\right)W_\lambda^2\lesssim W_\lambda^2.
\tag{2.19}
$$

由（2.18）的计算可得 $\left(|x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\right)\lesssim 1$. 因此,

$$
\left(|x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\overline{\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda})\right)W_\lambda^2\lesssim W_\lambda^2,
\tag{2.20}
$$

$$
\int_{|x|\geq\sqrt{\lambda}}W_\lambda^2\,\mathrm{d}x=\lambda^2\int_{|x|\geq\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}W^2\,\mathrm{d}x\lesssim\lambda^2\int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}^{+\infty}r^{-2N+4}r^{N-1}\,\mathrm{d}r=\lambda^{\frac{N}{2}}.
\tag{2.21}
$$

结合（2.16）、（2.18）、（2.19）、（2.20）和（2.21），我们得到

$$
\int_{|x|\geq\sqrt{\lambda}}\left(F(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-F(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-F(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-\Re\left(\overline{\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda}\cdot f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)\right)\right)\mathrm{d}x\lesssim\lambda^{\frac{N}{2}}.
$$

在区域$|x|\leq\sqrt{\lambda}$ 中，(2.15) 中的最后一项可以忽略，因为 $\left|\Re\left(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\cdot f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)\right)\right|\lesssim W_\lambda$ 且 $\int_{|x|\leq\sqrt{\lambda}}W_\lambda\,\mathrm{d}x\lesssim\lambda^{\frac{N+2}{2}}\int_0^{1/\sqrt{\lambda}}r^{-N+2}r^{N-1}\,\mathrm{d}r\sim\lambda^{\frac{N}{2}}$。类似地，项 $F(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)$ 也可以忽略。与 (2.16) 同理，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|\leq\sqrt{\lambda}}\left(F(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-F(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-F(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-\Re\left(\overline{\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu}\cdot f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\right)\right)\mathrm{d}x \\
=&\int_{|x|\leq\sqrt{\lambda}}\left(|x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\lambda\overline{\mathrm{e}^{i\theta}W_\mu})\right)\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\lambda\overline{\mathrm{e}^{i\theta}W_\mu})\,\mathrm{d}x \\
&+\frac{1}{2}\int_{|x|\leq\sqrt{\lambda}}\left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)W_\mu^2\,\mathrm{d}x+\int_{|x|\leq\sqrt{\lambda}}\left(|x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\lambda\overline{\mathrm{e}^{i\theta}W_\mu})\right)W_\mu^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

利用 $W_\mu \lesssim 1$ 和 (2.17)，我们得到

$$
\begin{aligned}
(2.23)\qquad & \int_{|x|\le\sqrt{\lambda}} \left(|x|^{-4} * \Re(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\lambda \overline{\mathrm{e}^{i\theta} W_\mu})\right) \Re(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\lambda \overline{\mathrm{e}^{i\theta} W_\mu})\,\mathrm{d}x \\
\lesssim & \int_{|x|\le\sqrt{\lambda}} \left(|x|^{-4} * W_\lambda\right) W_\mu W_\lambda\,\mathrm{d}x \\
\lesssim & \int_{|x|\le\sqrt{\lambda}} \lambda^{\frac{N-6}{2}} \langle \frac{x}{\lambda}\rangle^{-2} \lambda^{-\frac{N-2}{2}} W(\frac{x}{\lambda})\,\mathrm{d}x \\
\lesssim & \lambda^{-2} \int_{|x|\le\sqrt{\lambda}} \langle \frac{x}{\lambda}\rangle^{-N}\,\mathrm{d}x \\
\lesssim & \lambda^{N-2} \int_{|x|\le\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \langle x\rangle^{-N}\,\mathrm{d}x \\
\lesssim & \lambda^{N-2} \left(\int_{|x|\le 1} \mathrm{d}x + \int_{1\le|x|\le\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} |x|^{-N}\,\mathrm{d}x\right) \\
\lesssim & \lambda^{N-2} - \frac{1}{2}\lambda^{N-2}\log\lambda \ll \lambda^{\frac{N}{2}}.
\end{aligned}
$$

作如（2.17）所示的变量替换，可得

$$
(2.24)\qquad |x|^{-4} * W_\lambda^2 = \lambda^{-2}\left(|\cdot|^{-4} * W^2\right)\left(\frac{x}{\lambda}\right).
$$

利用这一点和 $W_\mu \lesssim 1$，可得

$$
\begin{aligned}
(2.25)\qquad & \int_{|x|\le\sqrt{\lambda}} \left(|x|^{-4} * W_\lambda^2\right) W_\mu^2\,\mathrm{d}x \\
\lesssim & \lambda^{-2} \int_{|x|\le\sqrt{\lambda}} \left(|\cdot|^{-4} * W^2\right)\left(\frac{x}{\lambda}\right)\,\mathrm{d}x \\
\lesssim & \lambda^{N-2} \int_{|x|\le\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \left(|\cdot|^{-4} * W^2\right)(x)\,\mathrm{d}x \\
\lesssim & \lambda^{N-2} \int_{|x|\le\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \langle x\rangle^{-4}\,\mathrm{d}x \\
\lesssim & \lambda^{N-2}\lambda^{-\frac{N-4}{2}} = \lambda^{\frac{N}{2}}.
\end{aligned}
$$

按（2.23）进行计算，可得

$$
\begin{aligned}
(2.26)\qquad & \int_{|x|\le\sqrt{\lambda}} \left(|x|^{-4} * \Re(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\lambda \overline{\mathrm{e}^{i\theta} W_\mu})\right) W_\mu^2\,\mathrm{d}x \\
\lesssim & \int_{|x|\le\sqrt{\lambda}} \left(|x|^{-4} * W_\lambda\right) W_\mu^2\,\mathrm{d}x \\
\lesssim & \int_{|x|\le\sqrt{\lambda}} \lambda^{\frac{N-6}{2}} \langle \frac{x}{\lambda}\rangle^{-2}\,\mathrm{d}x \\
\lesssim & \lambda^{N-2} \ll \lambda^{\frac{N}{2}}.
\end{aligned}
$$

结合 (2.22)、(2.23)、(2.25) 和 (2.26)，可得

$$
\int_{|x|\le\sqrt{\lambda}} \left(F(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda) - F(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu) - F(\mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda) - \Re\left(\overline{\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu} \cdot f(\mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda)\right)\right)\mathrm{d}x \lesssim \lambda^{\frac{N}{2}}.
$$

因此，为了完成 (2.13) 的证明，我们需要验证

$$\begin{aligned}&\Big|-\int_{|x|\le\sqrt{\lambda}}\Re\big(\overline{\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu}\cdot f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\big)\,\mathrm{d}x-C_2\theta\lambda^{\frac{N-2}{2}}\Big|\\ \lesssim&\lambda^{\frac{N-2}{2}}\big(\big|\zeta+\frac{\pi}{2}\big|+|\mu-1|+|\theta|^3+\lambda\big).\end{aligned}\tag{2.27}$$

利用 (2.24)，有

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{|x|\le\sqrt{\lambda}}\Re\big(\overline{\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu}\cdot f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\big)\,\mathrm{d}x-\Re\big(\mathrm{e}^{i(\zeta-\theta)}\big)\int_{\mathbb{R}^N}\big(|x|^{-4}*W_\lambda^2\big)W_\lambda\,\mathrm{d}x\Big|\\ \lesssim&\int_{|x|\le\sqrt{\lambda}}|W_\mu-1|\big(|x|^{-4}*W_\lambda^2\big)W_\lambda\,\mathrm{d}x+\int_{|x|\ge\sqrt{\lambda}}\big(|x|^{-4}*W_\lambda^2\big)W_\lambda\,\mathrm{d}x\\ \lesssim&(|\mu-1|+\lambda)\int_{|x|\le\sqrt{\lambda}}\big(|x|^{-4}*W_\lambda^2\big)W_\lambda+\int_{|x|\ge\sqrt{\lambda}}\big(|x|^{-4}*W_\lambda^2\big)W_\lambda\,\mathrm{d}x\\ \lesssim&(|\mu-1|+\lambda)\lambda^{\frac{N-2}{2}}+\lambda^{\frac{N}{2}}\\ \lesssim&(|\mu-1|+\lambda)\lambda^{\frac{N-2}{2}},\end{aligned}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^N}\big(|x|^{-4}*W_\lambda^2\big)W_\lambda\,\mathrm{d}x=\lambda^{\frac{N-2}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}\big(|x|^{-4}*W^2\big)W\,\mathrm{d}x=C_2\lambda^{\frac{N-2}{2}}.$$

我们有

$$\big|\Re(-i\mathrm{e}^{-i\theta})+\theta\big|=\big|\Im(\mathrm{e}^{-i\theta})+\theta\big|\lesssim|\theta|^3,$$

并利用 (2.4)

$$\big|\mathrm{e}^{i(\zeta-\theta)}+i\mathrm{e}^{-i\theta}\big|=\big|\mathrm{e}^{i\zeta}+i\big|\le\big|\zeta+\frac{\pi}{2}\big|,$$

因此

$$\big|\Re(\mathrm{e}^{i(\zeta-\theta)})+\theta\big|\lesssim|\theta|^3+\big|\zeta+\frac{\pi}{2}\big|.\tag{2.28}$$

由 (2.28) 即可得到估计 (2.27)，证明至此完成。 □

引理 2.6. 在命题 *2.4* 的假设下，有

$$\big|\langle\mathrm{D}E(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda),g\rangle\big|\lesssim\|g\|_{\mathcal{E}}\cdot\lambda^{\frac{N+2}{4}}.\tag{2.29}$$

证明. 利用 $\mathrm{D}E(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)=\mathrm{D}E(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)=0$ 这一事实，可知 (2.29) 等价于

$$\big|\langle f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda),g\rangle\big|\lesssim\|g\|_{\mathcal{E}}\cdot\lambda^{\frac{N+2}{4}}.$$

根据 Sobolev 不等式，只需验证

$$\|f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}\lesssim\lambda^{\frac{N+2}{4}}.\tag{2.30}$$

和往常一样，我们分别考虑区域 $|x|\le\sqrt{\lambda}$ 和 $|x|\ge\sqrt{\lambda}$。在第一个区域中，我们有 $W_\mu\lesssim W_\lambda$，因此由 $z_1=W_\lambda$ 和 $z_2=W_\mu$ 可得 (2.2)

$$\begin{aligned}&\big|f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\big|\\ \lesssim&\big(|x|^{-4}*W_\lambda^2\big)W_\mu+\big(|x|^{-4}*W_\lambda W_\mu\big)W_\lambda+\big(|x|^{-4}*W_\mu^2\big)W_\lambda+\big(|x|^{-4}*W_\lambda W_\mu\big)W_\mu\\ \lesssim&\big(|x|^{-4}*W_\lambda^2\big)W_\mu+\big(|x|^{-4}*W_\lambda W_\mu\big)W_\lambda\\ \lesssim&|x|^{-4}*W_\lambda^2+\big(|x|^{-4}*W_\lambda\big)W_\lambda.\end{aligned}$$

利用 (2.24)，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\big\||x|^{-4}*W_\lambda^2\big\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(|x|\le\sqrt{\lambda})}\\
=&\left(\int_{|x|\le\sqrt{\lambda}}\lambda^{-2\cdot\frac{2N}{N+2}}\left(|\cdot|^{-4}*W^2\right)^{\frac{2N}{N+2}}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{N+2}{2N}}\\
=&\lambda^{\frac{N-2}{2}}\left(\int_{|x|\le\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}\left(|\cdot|^{-4}*W^2\right)^{\frac{2N}{N+2}}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{N+2}{2N}}\\
=&\lambda^{\frac{N-2}{2}}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}r^{-4\cdot\frac{2N}{N+2}}r^{N-1}\,\mathrm{d}r\right)^{\frac{N+2}{2N}}\\
=&\lambda^{\frac{N-2}{2}-\frac{(N-6)N}{2(N+2)}\cdot\frac{N+2}{2N}}=\lambda^{\frac{N+2}{4}}.
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

同样，利用 (2.17)，我们可以得到

$$
\left\|\left(|x|^{-4}*W_\lambda\right)W_\lambda\right\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(|x|\le\sqrt{\lambda})}\lesssim\lambda^{\frac{N+2}{4}}.
$$

因此，在区域 $|x|\le\sqrt{\lambda}$ 中，(2.30) 成立。

在区域 $|x|\ge\sqrt{\lambda}$ 中，我们有 $W_\lambda\lesssim W_\mu$，因此由 $z_1=W_\mu$ 和 $z_2=W_\lambda$ 可得 (2.2)

$$
\begin{aligned}
&\left|f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\right|\\
\lesssim&\left(|x|^{-4}*W_\mu^2\right)W_\lambda+\left(|x|^{-4}*W_\lambda W_\mu\right)W_\mu+\left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)W_\mu+\left(|x|^{-4}*W_\lambda W_\mu\right)W_\lambda\\
\lesssim&\left(|x|^{-4}*W_\mu^2\right)W_\lambda+\left(|x|^{-4}*W_\lambda W_\mu\right)W_\mu\\
\lesssim&W_\lambda+\left(|x|^{-4}*W_\lambda\right)W_\mu,
\end{aligned}
$$

并且我们有

$$
\begin{aligned}
\|W_\lambda\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(|x|\ge\sqrt{\lambda})}&=\lambda^2\|W\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(|x|\ge1/\sqrt{\lambda})}\\
&\lesssim\lambda^2\Big(\int_{1/\sqrt{\lambda}}^{+\infty}r^{-(N-2)\cdot\frac{2N}{N+2}}r^{N-1}\,\mathrm{d}r\Big)^{\frac{N+2}{2N}}\sim\lambda^{2+\frac{(N-6)N}{2(N+2)}\cdot\frac{N+2}{2N}}=\lambda^{\frac{N+2}{4}}.
\end{aligned}
$$

与 (2.31) 类似，利用 (2.17)，我们有

$$
\left\|\left(|x|^{-4}*W_\lambda\right)W_\mu\right\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(|x|\ge\sqrt{\lambda})}\lesssim\lambda^{\frac{N+2}{4}}.
$$

因此，在区域 $|x|\ge\sqrt{\lambda}$ 中，(2.30) 成立。 □

现在我们考察线性化算子的强制性。

引理 2.7。 存在常数 $c,C>0$，使得

- 对于任意实值径向 $g\in\mathcal{E}$，都有

$$
\langle g,L^+g\rangle\ge c\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}x-C\big(\langle W,g\rangle^2+\langle\mathcal{Y}^{(2)},g\rangle^2\big),
\tag{2.32}
$$

$$
\langle g,L^-g\rangle\ge c\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}x-C\langle\Lambda W,g\rangle^2,
\tag{2.33}
$$

- 如果 $r_1 > 0$ 足够大，那么对于任意实值径向 $g \in \mathcal{E}$，都有

$$
\begin{aligned}
(2.34)\qquad (1-2c)\int_{|x|\le r_1} |\nabla g|^2\,\mathrm{d}x + c\int_{|x|\ge r_1} |\nabla g|^2\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} \left(|x|^{-4} * W^2\right)|g|^2\,\mathrm{d}x \\
-2\int_{\mathbb{R}^N} \left(|x|^{-4} * Wg\right) Wg\,\mathrm{d}x \ge -C\big(\langle W, g\rangle^2 + \langle \mathcal{Y}^{(2)}, g\rangle^2\big), \\
(2.35)\qquad (1-2c)\int_{|x|\le r_1} |\nabla g|^2\,\mathrm{d}x + c\int_{|x|\ge r_1} |\nabla g|^2\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} \left(|x|^{-4} * W^2\right)|g|^2\,\mathrm{d}x \\
\ge -C\langle \Lambda W, g\rangle^2,
\end{aligned}
$$

- 若 $r_2 > 0$ 足够小，则对任意实值径向 $g \in \mathcal{E}$，有

$$
\begin{aligned}
(2.36)\qquad (1-2c)\int_{|x|\ge r_2} |\nabla g|^2\,\mathrm{d}x + c\int_{|x|\le r_2} |\nabla g|^2\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} \left(|x|^{-4} * W^2\right)|g|^2\,\mathrm{d}x \\
-2\int_{\mathbb{R}^N} \left(|x|^{-4} * Wg\right) Wg\,\mathrm{d}x \ge -C\big(\langle W, g\rangle^2 + \langle \mathcal{Y}^{(2)}, g\rangle^2\big), \\
(2.37)\qquad (1-2c)\int_{|x|\ge r_2} |\nabla g|^2\,\mathrm{d}x + c\int_{|x|\le r_2} |\nabla g|^2\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} \left(|x|^{-4} * W^2\right)|g|^2\,\mathrm{d}x \\
\ge -C\langle \Lambda W, g\rangle^2.
\end{aligned}
$$

证明。(2.32) 和 (2.33) 的证明与 [35], 相同，因此略去。

(2.34)、(2.35)、(2.36) 和 (2.37) 的证明遵循 [10] 中引理 2.1 的论证。不过，非局部相互作用更为复杂，需要仔细估计。

我们定义投影 Π_r，$\Psi_r : \dot{H}^1 \to \dot{H}^1$:

$$
(\Pi_r g)(x) := \begin{cases} g(r) & \text{if } |x| \le r, \\ g(x) & \text{if } |x| \ge r, \end{cases} \qquad (\Psi_r g)(x) := \begin{cases} g(x) - g(r) & \text{if } |x| \le r, \\ 0 & \text{if } |x| \ge r, \end{cases}
$$

(因此 $\Pi_r + \Psi_r = \mathrm{Id}$)。

将（2.32）应用于 $\Psi_{r_1} g$，其中用 $2c$ 替换 c，并用 $\frac{C}{2}$ 替换 C，可得

$$
\begin{aligned}
(2.38)\qquad (1-c)\int_{|x|\le r_1} |\nabla g|^2\,\mathrm{d}x =& (1-c)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\Psi_{r_1} g)|^2\,\mathrm{d}x \\
\ge& (1+c)\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|x|^{-4} * W^2\right)|\Psi_{r_1} g|^2 + 2\left(|x|^{-4} * W\Psi_{r_1} g\right) W\Psi_{r_1} g\,\mathrm{d}x\right) \\
& - \frac{C}{2}\big(\langle W, \Psi_{r_1} g\rangle^2 + \langle \mathcal{Y}^{(2)}, \Psi_{r_1} g\rangle^2\big).
\end{aligned}
$$

由引理 2.1、Sobolev不等式、Hölder不等式和Hardy-Littlewood-Sobolev不等式，我们有 e

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|\geq r_1}\left(|x|^{-4}*W^2\right)|g|^2+2\left(|x|^{-4}*Wg\right)Wg\,\mathrm{d}x\\
\lesssim&\||x|^{-4}*W^2\|_{L^{\frac{N}{2}}(|x|\geq r_1)}\|g\|^2_{\dot{H}^1(|x|\geq r_1)}\\
&+\||x|^{-4}*Wg\|_{L^{\frac{N}{2}}(|x|\geq r_1)}\|W\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(|x|\geq r_1)}\|g\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(|x|\geq r_1)}\\
\lesssim&\||x|^{-4}\|_{L^{\frac{N}{2}}(|x|\geq r_1)}\|g\|^2_{\dot{H}^1(|x|\geq r_1)}\\
&+\|Wg\|_{L^{\frac{N}{N-2}}}\|W\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(|x|\geq r_1)}\|g\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(|x|\geq r_1)}\\
\lesssim&r_1^{-2}\|g\|^2_{\dot{H}^1(|x|\geq r_1)}+\|W\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(|x|\geq r_1)}\left(\|g\|^2_{L^{\frac{2N}{N-2}}(|x|\geq r_1)}+\|g\|^2_{L^{\frac{2N}{N-2}}(|x|\leq r_1)}\right)\\
\leq&\frac{c}{4}\int_{|x|\geq r_1}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}x+\frac{c}{2}\int_{|x|\leq r_1}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

若 r_1 足够大。

在区域 $|x|\leq r_1$ 中，我们应用逐点不等式

$$
|g(x)|^2\leq(1+c)|(\Psi_{r_1}g)(x)|^2+(1+c^{-1})|g(r_1)|^2,\qquad |x|\leq r_1. \tag{2.40}
$$

回忆一下，根据 Strauss 引理，对于径向函数 g，有

$$
|g(r_1)|\lesssim\|\Pi_{r_1}g\|_{\dot{H}^1}\cdot r_1^{-\frac{N-2}{2}}. \tag{2.41}
$$

由于当 $r^{-4}*W^2\lesssim r^{-4}$ as $r\to+\infty$ 时，我们有

$$
\int_{|x|\leq r_1}|x|^{-4}*W^2\,\mathrm{d}x\ll r_1^{N-2},\qquad \text{as } r_1\to+\infty,
$$

因此

$$
\int_{|x|\leq r_1}|x|^{-4}*W^2\cdot(1+c^{-1})|g(r_1)|^2\,\mathrm{d}x\leq\frac{c}{8}\int_{|x|\geq r_1}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}x, \tag{2.42}
$$

如果 r_1 足够大。

至于项 $\int_{|x|\leq r_1}\left(|x|^{-4}*Wg\right)Wg\,\mathrm{d}x$，我们将证明

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|\leq r_1}\left(|x|^{-4}*Wg\right)Wg\,\mathrm{d}x\leq&\int_{|x|\leq r_1}\left(|x|^{-4}*W\Psi_{r_1}g\right)W\Psi_{r_1}g\,\mathrm{d}x\\
&+\frac{c}{4}\int_{|x|\leq r_1}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}x+\frac{c}{16}\int_{|x|\geq r_1}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

在区域 $|x|\leq r_1$，$g=\Psi_{r_1}g+g(r_1)$，因此

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|\leq r_1}\left(|x|^{-4}*Wg\right)Wg\,\mathrm{d}x\\
=&\int_{|x|\leq r_1}\left(|x|^{-4}*W\Psi_{r_1}g\right)W\Psi_{r_1}g\,\mathrm{d}x+2g(r_1)\int_{|x|\leq r_1}\left(|x|^{-4}*W\right)W\Psi_{r_1}g\,\mathrm{d}x\\
&+|g(r_1)|^2\int_{|x|\leq r_1}\left(|x|^{-4}*W\right)W\,\mathrm{d}x\\
=:&I+II+III.
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

第一项 I 具有 (2.43) 右侧的形式，因此无需考虑。现在，我们考虑第二项 II。容易验证 $W \in L^{\frac{N+1}{N-2}} \cap L^{\frac{2N}{(N+1)}}_{(N+\frac{3}{2})(N-2)}$，于是有

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\le r_1} \left(|x|^{-4} * W\right) W \Psi_{r_1} g \,\mathrm{d}x \\
\lesssim & \||x|^{-4} * W\|_{L^{\frac{N(N+1)}{N+4}}(|x|\le r_1)} \|W\|_{L^{\frac{2N(N+1)}{(N+\frac{3}{2})(N-2)}}(|x|\le r_1)} \|\Psi_{r_1} g\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(|x|\le r_1)} \\
\lesssim & \|W\|_{L^{\frac{N+1}{N-2}}} \|\Psi_{r_1} g\|_{\dot{H}^1(|x|\le r_1)} \\
\lesssim & \|\Psi_{r_1} g\|_{\dot{H}^1}.
\end{aligned}$$

结合式 (2.41)，得到

$$\begin{aligned}
|II| &\lesssim r_1^{-\frac{N-2}{2}} \|\Pi_{r_1} g\|_{\dot{H}^1} \cdot \|\Psi_{r_1} g\|_{\dot{H}^1} \\
&\lesssim \left(r_1^{-\frac{N-2}{4}} \|\Pi_{r_1} g\|_{\dot{H}^1}\right)^2 + \left(r_1^{-\frac{N-2}{4}} \|\Psi_{r_1} g\|_{\dot{H}^1}\right)^2 \\
&\lesssim \frac{c}{4} \int_{|x|\le r_1} |\nabla g|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{c}{32} \int_{|x|\ge r_1} |\nabla g|^2 \,\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{2.45}$$

若 r_1 足够大。

对于第二项 III，利用式 (2.17) 和 $W \sim \langle x\rangle^{-(N-2)}$，我们有

$$\int_{|x|\le r_1} \left(|x|^{-4} * W\right) W \,\mathrm{d}x \lesssim \int_{|x|\le r_1} \langle x\rangle^{-N} \,\mathrm{d}x \ll r_1^{N-2}.$$

结合式 (2.41)，我们有

$$|III| \lesssim \frac{c}{32} \int_{|x|\ge r_1} |\nabla g|^2 \,\mathrm{d}x, \tag{2.46}$$

若 r_1 足够大。

结合 (2.44)、(2.45) 和 (2.46)，可得 (2.43)。

由估计 (2.39)、(2.40)、(2.42) 和 (2.43) 可得

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|x|^{-4} * W^2\right) |g|^2 + 2\left(|x|^{-4} * Wg\right) Wg \,\mathrm{d}x\right) \\
\le & (1+c)\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|x|^{-4} * W^2\right) |\Psi_{r_1} g|^2 + 2\left(|x|^{-4} * W\Psi_{r_1} g\right) W\Psi_{r_1} g \,\mathrm{d}x\right) \\
&+ c\int_{|x|\ge r_1} |\nabla g|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{c}{2}\int_{|x|\ge r_1} |\nabla g|^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

利用这一事实 $\mathcal{Y}^{(2)} \in L^1 \cap L^{\frac{2N}{N+2}}$ 可得

$$|\langle \mathcal{Y}^{(2)}, \Pi_{r_1} g\rangle| \lesssim \|\Pi_{r_1} g\|_{\dot{H}^1} \cdot r_1^{-\frac{N-2}{2}} + \int_{|x|\ge r_1} \mathcal{Y}^{(2)} |g| \,\mathrm{d}x \lesssim (r_1^{-\frac{N-2}{2}} + \|\mathcal{Y}^{(2)}\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(|x|\ge r_1)}) \|\Pi_{r_1} g\|_{\dot{H}^1},$$

因此

$$\frac{C}{2}\langle \mathcal{Y}^{(2)}, \Psi_{r_1} g\rangle^2 \le C\langle \mathcal{Y}^{(2)}, g\rangle^2 + C\langle \mathcal{Y}^{(2)}, \Pi_{r_1} g\rangle^2 \le C\langle \mathcal{Y}^{(2)}, g\rangle^2 + \frac{c}{4}\int_{|x|\ge r_1} |\nabla g|^2 \,\mathrm{d}x, \tag{2.48}$$

前提是 r_1 取值足够大。类似地，

$$\frac{C}{2}\langle W, \Psi_{r_1} g\rangle^2 \le C\langle W, g\rangle^2 + C\langle W, \Pi_{r_1} g\rangle^2 \le C\langle W, g\rangle^2 + \frac{c}{4}\int_{|x|\ge r_1} |\nabla g|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{2.49}$$

估计式 (2.34) 可由 (2.38)、(2.47)、(2.48) 和 (2.49) 得出。(2.35) 的证明与 (2.34) 相同，因此略去。

下面证明 (2.36)。将 c 替换为 $3c$，并将 C 替换为 $\frac{C}{2}$ 后，将 (2.32) 应用于 $\Pi_{r_2}g$，可得

$$
\begin{aligned}
(1-3c)\int_{|x|\geq r_2}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}x =&(1-3c)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(\Pi_{r_2}g)|^2\,\mathrm{d}x\\
&\geq \int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-4}*W^2\right)|\Pi_{r_2}g|^2\,\mathrm{d}x+2\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-4}*W\Pi_{r_2}g\right)W\Pi_{r_2}g\,\mathrm{d}x\\
&\quad-\frac{C}{2}\big(\langle W,\Pi_{r_2}g\rangle^2+\langle\mathcal{Y}^{(2)},\Pi_{r_2}g\rangle^2\big).
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

当 r_2 足够小时，我们有

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|\leq r_2}\left(|x|^{-4}*W^2\right)|g|^2\,\mathrm{d}x&\lesssim \||x|^{-4}*W^2\|_{L^{\frac{N}{2}}(|x|\leq r_2)}\|g\|^2_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\\
&\lesssim \|1\|_{L^{\frac{N}{2}}(|x|\leq r_2)}\|g\|^2_{\dot{H}^1}\\
&\lesssim \frac{c}{4}\|g\|^2_{\dot{H}^1},\\
2\int_{|x|\leq r_2}\left(|x|^{-4}*Wg\right)Wg\,\mathrm{d}x&\lesssim \||x|^{-4}*(Wg)\|_{L^{\frac{N}{2}}}\|W\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(|x|\leq r_2)}\|g\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\\
&\lesssim \|W\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\|g\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\|W\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(|x|\leq r_2)}\|g\|_{\dot{H}^1}\\
&\lesssim \frac{c}{4}\|g\|^2_{\dot{H}^1}.
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

根据 Π_r 的定义，有

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|\geq r_2}\left(|x|^{-4}*W^2\right)|g|^2+2\left(|x|^{-4}*Wg\right)Wg\,\mathrm{d}x\\
\leq&\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-4}*W^2\right)|\Pi_{r_2}g|^2+2\left(|x|^{-4}*W\Pi_{r_2}g\right)W\Pi_{r_2}g\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

因此 (2.50) 和 (2.51) 得出

$$
\begin{aligned}
&(1-2c)\int_{|x|\geq r_2}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}x+\frac{c}{2}\int_{|x|\leq r_2}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}x\\
\geq&\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-4}*W^2\right)|g|^2+2\left(|x|^{-4}*Wg\right)Wg\,\mathrm{d}x-\frac{C}{2}\big(\langle W,\Pi_{r_2}g\rangle^2+\langle\mathcal{Y}^{(2)},\Pi_{r_2}g\rangle^2\big).
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

利用 $\mathcal{Y}^{(2)}\in L^{\frac{2N}{N+2}}$ 这一事实，我们得到

$$
|\langle\mathcal{Y}^{(2)},\Psi_{r_2}g\rangle|\lesssim\int_{|x|\leq r_2}\mathcal{Y}^{(2)}|g|\,\mathrm{d}x\lesssim\|\mathcal{Y}^{(2)}\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(|x|\leq r_2)}\|\Psi_{r_2}g\|_{\dot{H}^1},
$$

因此

$$
\frac{C}{2}\langle\mathcal{Y}^{(2)},\Pi_{r_2}g\rangle^2\leq C\langle\mathcal{Y}^{(2)},g\rangle^2+C\langle\mathcal{Y}^{(2)},\Psi_{r_2}g\rangle^2\leq C\langle\mathcal{Y}^{(2)},g\rangle^2+\frac{c}{4}\int_{|x|\leq r_2}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}x,
\tag{2.53}
$$

前提是 r_2 取得足够小。同理，

$$
\frac{C}{2}\langle W,\Pi_{r_2}g\rangle^2\leq C\langle W,g\rangle^2+C\langle W,\Psi_{r_2}g\rangle^2\leq C\langle W,g\rangle^2+\frac{c}{4}\int_{|x|\leq r_2}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}x.
\tag{2.54}
$$

估计式 (2.36) 可由 (2.52)、(2.53) 和 (2.54) 得出。同理，(2.37) 的证明与 (2.36) 相同，因此略去。

□

现在我们利用这个引理，研究围绕 $\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda$ 对复值扰动 g 的线性化。

命题2.8。 存在常数 c、$C>0$，使得对于任意 $\theta\in\mathbb{R}$ 和 $\lambda>0$

- 对任意复值径向 $g\in\mathcal{E}$，都有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)|g|^2\,\mathrm{d}x-2\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\lambda\overline{g})\right)\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\lambda\overline{g})\,\mathrm{d}x\\ \geq& c\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}x-C\big(\langle\lambda^{-2}\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda,g\rangle^2+\langle\lambda^{-2}i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,g\rangle^2+\langle\alpha^+_{\theta,\lambda},g\rangle^2+\langle\alpha^-_{\theta,\lambda},g\rangle^2\big),\end{aligned}$$

- 若 $r_1>0$ 足够大，则对任意复值径向 $g\in\mathcal{E}$，都有

$$\begin{aligned}&(1-2c)\int_{|x|\leq r_1}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}x+c\int_{|x|\geq r_1}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)|g|^2\,\mathrm{d}x\\ &-2\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\lambda\overline{g})\right)\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\lambda\overline{g})\,\mathrm{d}x\\ \geq&-C\big(\langle\lambda^{-2}\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda,g\rangle^2+\langle\lambda^{-2}i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,g\rangle^2+\langle\alpha^+_{\theta,\lambda},g\rangle^2+\langle\alpha^-_{\theta,\lambda},g\rangle^2\big),\end{aligned}\tag{2.55}$$

- 若 $r_2>0$ 足够小，则对任意复值径向 $g\in\mathcal{E}$，都有

$$\begin{aligned}&(1-2c)\int_{|x|\geq r_2}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}x+c\int_{|x|\leq r_2}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)|g|^2\,\mathrm{d}x\\ &-2\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\lambda\overline{g})\right)\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\lambda\overline{g})\,\mathrm{d}x\\ \geq&-C\big(\langle\lambda^{-2}\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda,g\rangle^2+\langle\lambda^{-2}i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,g\rangle^2+\langle\alpha^+_{\theta,\lambda},g\rangle^2+\langle\alpha^-_{\theta,\lambda},g\rangle^2\big).\end{aligned}$$

证明。 证明与 [11,命题 2.8],类似，因此从略。 □

上一个命题的一个推论是：在不同尺度的两个泡之和附近具有强制性：

引理2.9。 存在 η、$C>0$，使得若 $\lambda\leq\eta\mu$，则对所有满足条件的 $g\in\mathcal{E}$ 成立 (2.8)

$$\frac{1}{C}\|g\|_{\mathcal{E}}^2\leq\frac{1}{2}\langle\mathrm{D}^2E(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g,g\rangle+\frac{\nu}{2M}\big((a_1^+)^2+(a_1^-)^2+(a_2^+)^2+(a_2^-)^2\big)\leq C\|g\|_{\mathcal{E}}^2,$$

其中M由(2.7)定义。

证明。 我们将证明分为两个步骤。

步骤1。 考虑由下列公式定义的算子 H_λ：

$$\begin{aligned}H_\lambda g:=&-\Delta g-\left(|x|^{-4}*W_\mu^2\right)g-2\left(|x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\overline{g})\right)\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\\ &-\left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)g-2\left(|x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\overline{g})\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda.\end{aligned}$$

我们将证明，对任意 $c>0$ 成立

$$|\langle\mathrm{D}^2E(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g,g\rangle-\langle H_\lambda g,g\rangle|\leq c\|g\|_{\mathcal{E}}^2,\qquad\forall g\in\mathcal{E},\tag{2.56}$$

只要 $|\mu-1|$ 和 λ 足够小。这等价于证明下列公式

$$\begin{aligned}&-2\langle\left(|x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\overline{\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda})\right)g,g\rangle-2\langle\left(|x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\overline{g})\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda,g\rangle\\ &-2\langle\left(|x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\overline{g})\right)\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu,g\rangle\leq c\|g\|_{\mathcal{E}}^2,\qquad\forall g\in\mathcal{E}.\end{aligned}$$

对于第一项 $\langle\left(|x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\right)g,\ g\rangle$，由 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式可知，只需验证（最终改变 c）

$$\||x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\overline{\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda})\|_{L^{\frac{N}{2}}}\leq c.\tag{2.57}$$

利用 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式，我们有

$$\begin{aligned}
&\||x|^{-4} * \Re(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu \overline{\mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda})\|_{L^{\frac{N}{2}}} \\
\lesssim &\|\Re(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu \overline{\mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda})\|_{L^{\frac{N}{N-2}}} \\
\lesssim &\|W_\mu\|_{L^{\frac{N(N+1)}{N-2}}} \|W_\lambda\|_{L^{\frac{N+1}{N-2}}} \\
\lesssim &\lambda^{\frac{(N-1)(N-2)}{2(N+1)}} \leq c,
\end{aligned}$$

前提是 $|\mu - 1|$ 和 λ 足够小。

现在，我们考虑第二项 $\langle \left(|x|^{-4} * \Re(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu g W_\lambda)\right) \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda,\ g\rangle$。利用 Hölder、Sobolev 和 Hardy-Littlewood-Sobolev不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\langle \left(|x|^{-4} * \Re(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu \overline{g})\right) \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda, g\rangle \\
\lesssim &\| \left(|x|^{-4} * \Re(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu \overline{g})\right) \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}} \|g\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}} \\
\lesssim &\| \left(|x|^{-4} * \Re(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu \overline{g})\right) \|_{L^{\frac{2N(2N+1)}{N+2}}} \|W_\lambda\|_{L^{\frac{2N+1}{N+2}}} \|g\|_{\mathcal{E}} \\
\lesssim &\|W_\mu \overline{g}\|_{L^{\frac{2N(2N+1)}{2(2N+1)(N-4)+N+2}}} \|W_\lambda\|_{L^{\frac{2N+1}{N+2}}} \|g\|_{\mathcal{E}} \\
\lesssim &\|W_\mu\|_{L^{\frac{2N(2N+1)}{2(2N+1)(N-6)+N+2}}} \|g\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}} \|W_\lambda\|_{L^{\frac{2N+1}{N+2}}} \|g\|_{\mathcal{E}} \\
\lesssim &\|W_\lambda\|_{L^{\frac{2N+1}{N+2}}} \|g\|_{\mathcal{E}}^2.
\end{aligned}$$

利用 W_λ的表达式，我们得到

$$\begin{aligned}
\|W_\lambda\|_{L^{\frac{2N+1}{N+2}}} &= \lambda^{-\frac{N-2}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \langle \frac{x}{\lambda} \rangle^{-(N-2)\frac{2N+1}{N+2}} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{N+2}{2N+1}} \\
&= \lambda^{-\frac{N-2}{2}} \left(\int_{|x|\leq\lambda} \mathrm{d}x + \int_{|x|\geq\lambda} |\frac{x}{\lambda}|^{-(N-2)\frac{2N+1}{N+2}} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{N+2}{2N+1}} \\
&\lesssim \lambda^{-\frac{N-2}{2}} \lambda^{N\cdot\frac{N+2}{2N+1}} = \lambda^{\frac{7N+2}{2(2N+1)}}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\langle \left(|x|^{-4} * \Re(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu \overline{g})\right) \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda, g\rangle \lesssim \lambda^{\frac{7N+2}{2(2N+1)}} \|g\|_{\mathcal{E}}^2 \leq c\|g\|_{\mathcal{E}}^2, \tag{2.58}$$

p前提是 λ 足够小。类似地，我们可以得到第三项的估计

$$\langle \left(|x|^{-4} * \Re(\mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda \overline{g})\right) \mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu, g\rangle \leq c\|g\|_{\mathcal{E}}^2. \tag{2.59}$$

结合（2.57）、（2.58）和（2.59），我们得到（2.56）。

步骤 2。 鉴于（2.56），只需证明：如果 g 满足正交条件（2.8），那么

$$\frac{1}{2}\langle H_\lambda g, g\rangle + \frac{\nu}{2M}\left(\langle \alpha^+_{\zeta,\mu}, g\rangle^2 + \langle \alpha^-_{\zeta,\mu}, g\rangle^2 + \langle \alpha^+_{\theta,\lambda}, g\rangle^2 + \langle \alpha^-_{\theta,\lambda}, g\rangle^2\right) \gtrsim \|g\|_{\mathcal{E}}^2.$$

令 $a_1^{\pm}$,$a_2^{\pm}$由 (2.9) 定义，并将其分解

$$g = a_1^- \mathcal{Y}^-_{\zeta,\mu} + a_1^+ \mathcal{Y}^+_{\zeta,\mu} + a_2^- \mathcal{Y}^-_{\theta,\lambda} + a_2^+ \mathcal{Y}^+_{\theta,\lambda} + k.$$

利用这一事实

$$\begin{aligned}
&|\langle\alpha^{\pm}_{\zeta,\mu},\mathcal{Y}^{\pm}_{\theta,\lambda}\rangle|+|\langle\alpha^{\pm}_{\theta,\lambda},\mathcal{Y}^{\pm}_{\zeta,\mu}\rangle|+|\langle\lambda^{-2}\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda,\mathcal{Y}^{\pm}_{\zeta,\mu}\rangle|+\\
&|\langle\mu^{-2}\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu,\mathcal{Y}^{\pm}_{\theta,\lambda}\rangle|+|\langle\lambda^{-2}i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,\mathcal{Y}^{\pm}_{\zeta,\mu}\rangle|+|\langle\mu^{-2}i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu,\mathcal{Y}^{\pm}_{\theta,\lambda}\rangle|\lesssim\lambda^{\frac{N-2}{2}},\\
&|a_1^-|+|a_1^+|+|a_2^-|+|a_2^+|\lesssim\|\boldsymbol{g}\|_{\mathcal{E}},\\
&\langle\alpha^-_{\zeta,\mu},\mathcal{Y}^+_{\zeta,\mu}\rangle=\langle\alpha^+_{\zeta,\mu},\mathcal{Y}^-_{\zeta,\mu}\rangle=\langle W,\mathcal{Y}^{(1)}\rangle=\langle\Lambda W,\mathcal{Y}^{(2)}\rangle=0,
\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&\langle\alpha^-_{\zeta,\mu},k\rangle^2+\langle\alpha^+_{\zeta,\mu},k\rangle^2+\langle\alpha^-_{\theta,\lambda},k\rangle^2+\langle\alpha^+_{\theta,\lambda},k\rangle^2+\langle\lambda^{-2}\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda,k\rangle^2+\\
&\langle\mu^{-2}\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu,k\rangle^2+\langle\lambda^{-2}i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,k\rangle\lesssim\lambda^{N-2}\|g\|^2_{\mathcal{E}}.
\end{aligned}\tag{2.60}$$

由于 H_λ 是自伴的，我们可以写成

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\langle H_\lambda g,g\rangle=&\frac{1}{2}\langle H_\lambda k,k\rangle+\langle H_\lambda(a_1^-\mathcal{Y}^-_{\zeta,\mu}+a_1^+\mathcal{Y}^+_{\zeta,\mu}),k\rangle+\langle H_\lambda(a_2^-\mathcal{Y}^-_{\theta,\lambda}+a_2^+\mathcal{Y}^+_{\theta,\lambda}),k\rangle\\
&+\frac{1}{2}\langle H_\lambda(a_1^-\mathcal{Y}^-_{\zeta,\mu}+a_1^+\mathcal{Y}^+_{\zeta,\mu}),a_1^-\mathcal{Y}^-_{\zeta,\mu}+a_1^+\mathcal{Y}^+_{\zeta,\mu}\rangle\\
&+\frac{1}{2}\langle H_\lambda(a_2^-\mathcal{Y}^-_{\theta,\lambda}+a_2^+\mathcal{Y}^+_{\theta,\lambda}),a_2^-\mathcal{Y}^-_{\theta,\lambda}+a_2^+\mathcal{Y}^+_{\theta,\lambda}\rangle\\
&+\langle H_\lambda(a_1^-\mathcal{Y}^-_{\zeta,\mu}+a_1^+\mathcal{Y}^+_{\zeta,\mu}),a_2^-\mathcal{Y}^-_{\theta,\lambda}+a_2^+\mathcal{Y}^+_{\theta,\lambda}\rangle.
\end{aligned}\tag{2.61}$$

利用 H_λ的表达式，我们有

$$\begin{aligned}
H_\lambda(\mathcal{Y}^-_{\zeta,\mu})=&-\Delta\mathcal{Y}^-_{\zeta,\mu}-\left(|x|^{-4}*W_\mu^2\right)\mathcal{Y}^-_{\zeta,\mu}-2\left(|x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\overline{\mathcal{Y}^-_{\zeta,\mu}})\right)\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\\
&-\left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)\mathcal{Y}^-_{\zeta,\mu}-2\left(|x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\overline{\mathcal{Y}^-_{\zeta,\mu}})\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\\
=&-\frac{\nu}{2M}\alpha^+_{\zeta,\mu}-\left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)\mathcal{Y}^-_{\zeta,\mu}-2\left(|x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\overline{\mathcal{Y}^-_{\zeta,\mu}})\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda.
\end{aligned}$$

利用（2.24），我们得到

$$\begin{aligned}
\|\left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)\mathcal{Y}^-_{\zeta,\mu}\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}\lesssim&\|\lambda^{-2}\left(|\cdot|^{-4}*W^2\right)\langle\frac{x}{\lambda}\rangle\mathcal{Y}^-_{\zeta,\mu}\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}\\
\lesssim&\|\lambda^{-2}\langle\frac{x}{\lambda}\rangle^{-4}\mathcal{Y}^-_{\zeta,\mu}\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}\\
\lesssim&\lambda^2\|\mathcal{Y}^-_{\zeta,\mu}\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}\to0,
\end{aligned}$$

如 $\lambda\to0$。类似地，我们可以证明 $\|\left(|x|^{-4}*\Re(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\overline{\mathcal{Y}^-_{\zeta,\mu}})\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}\to0$ 如 $\lambda\to0$。由此可得

$$\|H_\lambda(\mathcal{Y}^-_{\zeta,\mu})+\frac{\nu}{2M}\alpha^+_{\zeta,\mu}\|_{\mathcal{E}^*}\xrightarrow[\lambda\to0]{}0.$$

类似地，我们可以得到

$$\|H_\lambda(\mathcal{Y}^+_{\zeta,\mu})+\frac{\nu}{2M}\alpha^-_{\zeta,\mu}\|_{\mathcal{E}^*}\xrightarrow[\lambda\to0]{}0,\ \|H_\lambda(\mathcal{Y}^-_{\theta,\lambda})+\frac{\nu}{2M}\alpha^+_{\theta,\lambda}\|_{\mathcal{E}^*}\xrightarrow[\lambda\to0]{}0,\ \|H_\lambda(\mathcal{Y}^+_{\theta,\lambda})+\frac{\nu}{2M}\alpha^-_{\theta,\lambda}\|_{\mathcal{E}^*}\xrightarrow[\lambda\to0]{}0.$$

将这些代入 (2.61)，并利用 (2.60)，我们得到

$$\frac{1}{2}\langle H_\lambda g,g\rangle\geq-\frac{\nu}{2M}a_2^-a_2^+-\frac{\nu}{2M}a_1^-a_1^++\frac{1}{2}\langle H_\lambda k,k\rangle-\widetilde{c}\|\boldsymbol{g}\|^2_{\mathcal{E}},\tag{2.62}$$

其中，当 $\lambda\to0$ 时 $\widetilde{c}\to0$。

应用（2.34）和（2.35），取 $r_1=\sqrt{\lambda}$,¯进行缩放并使用（2.60），可得当 λ 足够小时,

$$\begin{aligned}(1-2c)\int_{|x|\le\sqrt{\lambda}}|\nabla k|^2\,\mathrm{d}x+c\int_{|x|\ge\sqrt{\lambda}}|\nabla k|^2\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-4}*W^2\right)k_1^2\\ +2\left(|x|^{-4}*Wk_1\right)Wk_1\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-4}*W^2\right)k_2^2\ge-\widetilde{c}\|\boldsymbol{g}\|_{\mathcal{E}}^2.\end{aligned}\tag{2.63}$$

由 (2.36) 和 (2.37)，取 $r_2=\sqrt{\lambda}$ ，可得

$$\begin{aligned}(1-2c)\int_{|x|\ge\sqrt{\lambda}}|\nabla k|^2\,\mathrm{d}x+c\int_{|x|\le\sqrt{\lambda}}|\nabla k|^2\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-4}*W^2\right)k_1^2\\ +2\left(|x|^{-4}*Wk_1\right)Wk_1\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}\left(|x|^{-4}*W^2\right)k_2^2\ge-\widetilde{c}\|\boldsymbol{g}\|_{\mathcal{E}}^2.\end{aligned}\tag{2.64}$$

将 (2.63) 和 (2.64) 相加，并利用 (2.62)，得到

$$\frac{1}{2}\langle H_\lambda\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}\rangle\ge-\frac{\nu}{2M}a_2^-a_2^+-\frac{\nu}{2M}a_1^-a_1^++c\|\boldsymbol{k}\|_{\mathcal{E}}^2-2\widetilde{c}\|\boldsymbol{g}\|_{\mathcal{E}}^2.$$

只要 $\widetilde{c}$ 足够小，结论便成立。 □

命题 *2.4* 的证明。 由 (2.12)、引理 2.5、2.6、2.9 和三角不等式，可立即得到界 (2.10)。

对于任意 $c>0$ ，若 η 取值足够小，则有 $\|g\|_{\mathcal{E}}^3\le c\|g\|_{\mathcal{E}}^2$ ，因此由 (2.12) 和引理 2.5、2.6 可得

$$\begin{aligned}&\left|E(u)-2E(W)-C_2\theta\lambda^{\frac{N-2}{2}}-\frac{1}{2}\langle\mathrm{D}^2E(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g,g\rangle\right|\\ \le&C\big(\big|\zeta+\frac{\pi}{2}\big|+|\mu-1|+|\theta|^3+\lambda\big)\lambda^{\frac{N-2}{2}}+c\|g\|_{\mathcal{E}}^2,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&C_2\theta\lambda^{\frac{N-2}{2}}+\frac{1}{2}\langle\mathrm{D}^2E(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g,g\rangle\\ \le&E(u)-2E(W)+C\big(\big|\zeta+\frac{\pi}{2}\big|+|\mu-1|+|\theta|^3+\lambda\big)\lambda^{\frac{N-2}{2}}+c\|g\|_{\mathcal{E}}^2.\end{aligned}$$

取 c 足够小，并应用引理2.9，即可完成 (2.11) 的证明。 □

3. 调制分析

3.1. 调制参数的界。 我们研究如下形式的解:

$$u(t)=\mathrm{e}^{i\zeta(t)}W_{\mu(t)}+\mathrm{e}^{i\theta(t)}W_{\lambda(t)}+g(t),\tag{3.1}$$

with

$$|\mu(t)-1|\ll1,\quad\big|\zeta(t)+\frac{\pi}{2}\big|\ll1,\quad\lambda(t)\ll1,\quad|\theta(t)|\ll1\quad\text{and}\quad\|g\|_{\mathcal{E}}\ll1.\tag{3.2}$$

我们通常省略时间变量，将 ζ 记作 $\zeta(t)$ 等。

对 (3.1) 关于时间求导，得到

$$\partial_tu=\zeta'i\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu-\frac{\mu'}{\mu}\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu+\theta'i\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda-\frac{\lambda'}{\lambda}\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda+\partial_tg.$$

另一方面，利用 $\Delta(W_\mu)+f(W_\mu)=\Delta(W_\lambda)+f(W_\lambda)=0$，我们得到

$$i\Delta u+if(u)=i\Delta g+i\big(f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda+g)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\big),$$

因此，由 (1.1) 得到

$$\begin{aligned}\partial_t g =& i\Delta g + i\big(f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda + g) - f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu) - f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\big)\\ &- \zeta' i\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \frac{\mu'}{\mu}\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu - \theta' i\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda + \frac{\lambda'}{\lambda}\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda.\end{aligned} \tag{3.3}$$

上面的方程应理解为一种记号上的简化，因为我们研究的是非经典解。任何涉及 $g(t)$的计算，都可以改写为关于 $u(t)$和调制参数 ζ、 μ、 θ、 λ 的计算；而且大多数时候，我们只用到 (3.3) 在弱意义下成立这一事实。然而，后面我们还需要计算 $g(t)$中二次型的时间导数，在这种情况下，该计算的严格含义就不那么明确了。

为了建立关于调制参数的自举论证，我们给出以下引理。

引理 3.1. 设 $c>0$ 是任意小的常数。设 $T_0<0$ 足够大（取值依赖于 c），且 $T<T_1\le T_0$。假设对于 $T\le t\le T_1$，有

$$\big|\zeta(t)+\frac{\pi}{2}\big| \le |t|^{-\frac{3}{N-6}}, \tag{3.4}$$

$$|\mu(t)-1| \le |t|^{-\frac{3}{N-6}}, \tag{3.5}$$

$$|\theta(t)| \le |t|^{-\frac{1}{N-6}}, \tag{3.6}$$

$$\big|\lambda(t)-\kappa|t|^{-\frac{2}{N-6}}\big| \le |t|^{-\frac{5}{2(N-6)}}, \tag{3.7}$$

$$\|g\|_{\mathcal{E}} \le |t|^{-\frac{N-1}{2(N-6)}}. \tag{3.8}$$

Then

$$|\zeta'(t)| \le c|t|^{-\frac{N-3}{N-6}}, \tag{3.9}$$

$$|\mu'(t)| \le c|t|^{-\frac{N-3}{N-6}}, \tag{3.10}$$

$$\Big|\lambda'(t)-\frac{3C_2}{\|W\|_{L^2}^2}\lambda(t)^{\frac{N-4}{2}}\Big| \le c|t|^{-\frac{2N-7}{2(N-6)}}, \tag{3.11}$$

$$\Big|\theta'(t)+\frac{C_3}{\|W\|_{L^2}^2}\theta(t)\lambda(t)^{\frac{N-6}{2}}-\frac{K(t)}{\lambda(t)^2\|W\|_{L^2}^2}\Big| \le c|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}, \tag{3.12}$$

对于 $T\le t\le T_1$，其中

$$\kappa := \Big(\frac{2C_1}{3(N-6)C_2}\Big)^{\frac{2}{N-6}}, \tag{3.13}$$

$$K := -\big\langle \mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda, f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda+g)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g\big\rangle. \tag{3.14}$$

注 3.2. 我们实际上不会用到 (3.7)，只会用到 $\lambda(t)\sim|t|^{-\frac{2}{N-6}}$ 这一事实。 ——

注 3.3. 下面的证明关键依赖于我们对正交条件 (2.8) 的选择，该选择要求 W， $\Lambda W\in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^N)$，等价地说， $N\ge 7$。

证明。 我们遵循 [11, 引理 3.1], 中的论证，但需要处理非局部相互作用。我们采用通常的方法，对正交条件关于时间求导，从而得到如下形式的线性方程组：

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14}\\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24}\\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34}\\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu^2\zeta'\\ \mu\mu'\\ \lambda^2\theta'\\ \lambda\lambda'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B_1\\ B_2\\ B_3\\ B_4\end{pmatrix}.$$

这里，系数 M_{ij} 和 B_i 依赖于 g、ζ、μ、θ 和 λ。我们现在将计算所有这些系数，并证明适当的界。

第一行。对 $\langle i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, g\rangle = 0$ 求导，并使用 (3.3)，我们得到

$$\begin{aligned}0 =&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, g\rangle = -\zeta'\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, g\rangle - \frac{\mu'}{\mu}\langle i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda\Lambda W_\mu, g\rangle + \langle i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, \partial_t g\rangle\\ =&\zeta'\big(-\langle i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, i\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\rangle - \langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, g\rangle\big) + \frac{\mu'}{\mu}\big(\langle i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu\rangle - \langle i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda\Lambda W_\mu, g\rangle\big)\\ &+\theta'\langle i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, -i\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\rangle + \frac{\lambda'}{\lambda}\langle i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, \mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda\rangle\\ &+\big\langle i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, i\Delta g + i\big(f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda + g) - f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu) - f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\big)\big\rangle.\end{aligned}$$

注意到 $\langle -\Lambda W_\mu, W_\mu\rangle = \|W_\mu\|_{L^2}^2 = \mu^2\|W\|_{L^2}^2$，因此我们得到

$$M_{11} = \mu^{-2}\big(-\langle i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, i\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\rangle - \langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, g\rangle\big) = \|W\|_{L^2}^2 + O(\|g\|_{\mathcal{E}}) = \|W\|_{L^2}^2 + O(|t|^{-\frac{N-1}{2(N-6)}}),$$

$$M_{12} = \mu^{-2}\big(\langle i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu\rangle - \langle i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda\Lambda W_\mu, g\rangle\big) = O(\|g\|_{\mathcal{E}}) = O(|t|^{-\frac{N-1}{2(N-6)}}),$$

$$M_{13} = \lambda^{-2}\langle i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, -i\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\rangle = O(1),$$

$$M_{14} = \lambda^{-2}\langle i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, \mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda\rangle = O(1).$$

考虑这一项

$$B_1 = -\big\langle i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, i\Delta g + i\big(f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda + g) - f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu) - f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\big)\big\rangle.$$

由于 $\{i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu\} \subset \ker Z_{\zeta,\mu}^*$ 我们得到

$$\begin{aligned}B_1 &= -\big\langle i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, i\big(f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda + g) - f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu) - f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda) - f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)g\big)\big\rangle\\ &= -\big\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, \big(f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda + g) - f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu) - f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda) - f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)g\big)\big\rangle.\end{aligned}$$

首先我们证明

$$\big|\big\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda + g) - f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda) - f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g\big\rangle\big| \lesssim \|g\|_{\mathcal{E}}^2. \tag{3.15}$$

利用 $|\Lambda W| \lesssim W$ Hölder、Sobolev、Hardy-Littlewood-Sobolev不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\big|\big\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda + g) - f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda) - f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g\big\rangle\big|\\ =&\big|\big\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, \left(|x|^{-4} * |g|^2\right) g + \left(|x|^{-4} * |g|^2\right)\left(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right)\\ &+2\left[|x|^{-4} * \Re\left((\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\overline{g}\right)\right] g\big\rangle\big|\\ \lesssim&\|\Lambda W_\mu\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\Big(\big\||x|^{-4} * |g|^2\big\|_{L^{\frac{N}{2}}}\|g\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}} + \big\||x|^{-4} * |g|^2\big\|_{L^{\frac{N}{2}}}\|\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\\ &+\big\||x|^{-4} * \Re\left((\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g\right)\big\|_{L^{\frac{N}{2}}}\|g\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\Big)\\ \lesssim&\|W_\mu\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\Big(\big\|g^2\big\|_{L^{\frac{N}{N-2}}}\Big(\|g\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}} + \|\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}} + \| + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\Big)\\ &+\|(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\overline{g}\|_{L^{\frac{N}{2}}}\|g\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\Big)\\ \lesssim&\|g\|_{\mathcal{E}}^2.\end{aligned}$$

因此，(3.15)成立。

接下来我们证明

$$\left|\left\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\right\rangle\right|\lesssim\lambda^{\frac{N-2}{2}}. \tag{3.16}$$

利用 f 的表达式，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\right\rangle\right|\\
=&\left|\left\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, \left(|x|^{-4}*W_\mu^2\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda+2\left(|x|^{-4}*\Re\left(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\overline{\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda}\right)\right)\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\right.\right.\\
&\left.\left.+\left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+2\left(|x|^{-4}*\Re\left(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\overline{\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda}\right)\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right\rangle\right|.
\end{aligned}$$

首先，我们考虑 $\left|\left\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu,\ \left(|x|^{-4}*W_\mu^2\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right\rangle\right|$。

在区域 $|x|\le 1$ 中，我们写成

$$\|W_\lambda\|_{L^1(|x|\le 1)}=\lambda^{\frac{N+2}{2}}\|W\|_{L^1(|x|\le\lambda^{-1})}\lesssim\lambda^{\frac{N+2}{2}}\int_0^{\lambda^{-1}}r^{-N+2}r^{N-1}\,\mathrm{d}r\sim\lambda^{\frac{N-2}{2}}.$$

利用 $|\Lambda W_\mu|\cdot||x|^{-4}*W_\mu^2|\in L^\infty$，我们在区域 $|x|\le 1$ 中得到第一项 $\left|\left\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu,\ \left(|x|^{-4}*W_\mu^2\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right\rangle\right|\lesssim\lambda^{\frac{N-2}{2}}$。至于 $|x|\ge 1$，我们注意到 $\|W_\lambda\|_{L^\infty\ (|x|\ge 1)}\lesssim\lambda^{\frac{N-2}{2}}$，并且 $|\Lambda W_\mu|\cdot||x|^{-4}*W_\mu^2|$ 在 L^1 中有界。因此第一项为 $\left|\left\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu,\ \left(|x|^{-4}*W_\mu^2\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right\rangle\right|\lesssim\lambda^{\frac{N-2}{2}}$。

第二项 $\left|\left\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu,\ \left(|x|^{-4}*\Re\left(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right)\right)\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\right\rangle\right|$ 可以通过 Hölder、Sobolev、Hardy-Littlewood-Sobolev不等式进行估计。利用 $W_\mu\lesssim W$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, \left(|x|^{-4}*\Re\left(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\overline{\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda}\right)\right)\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\right\rangle\right|\\
\lesssim&\|\Lambda W_\mu\|_{L^{\frac{2N(N-1)}{(N-2)^2}}}\|W_\mu\|_{L^{\frac{2N(N-1)}{(N-2)^2}}}\left\||x|^{-4}*\Re\left(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\overline{\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda}\right)\right\|_{L^{\frac{N(N-1)}{3N-4}}}\\
\lesssim&\|W_\mu W_\lambda\|_{L^{\frac{N-1}{N-2}}}\\
\lesssim&\left(\int_{\mathbb{R}^N}\langle x\rangle^{-(N-2)\frac{N-1}{N-2}}\langle\frac{x}{\lambda}\rangle^{-(N-2)\frac{N-1}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{N-1}}\\
\lesssim&\left(\int_{|x|\le\lambda}\mathrm{d}x+\int_{\lambda\le|x|\le 1}\left|\frac{x}{\lambda}\right|^{-(N-1)}\mathrm{d}x+\int_{|x|\ge 1}|x|^{-(N-1)}\left|\frac{x}{\lambda}\right|^{-(N-1)}\right)^{\frac{N-2}{N-1}}\\
\lesssim&\lambda^{\frac{N(N-2)}{N-1}}+\lambda^{N-2}\ll\lambda^{\frac{N-2}{2}}.
\end{aligned}$$

第三项 $\left|\left\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, \left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\right\rangle\right|$ 较为复杂，我们需要按区域分别考虑。在区域 $|x|\le\sqrt{\lambda}$，$W_\mu\lesssim W_\lambda$ 中，结合 (2.24)，得到

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu, \left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\right\rangle\right|&\lesssim\int_{|x|\le\sqrt{\lambda}}\left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)W_\lambda|\Lambda W_\mu|\,\mathrm{d}x\\
&\lesssim\int_{|x|\le\sqrt{\lambda}}\left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)W_\lambda\,\mathrm{d}x\\
&\lesssim\int_{|x|\le\sqrt{\lambda}}\lambda^{-2}\left\langle\frac{x}{\lambda}\right\rangle^{-4}\lambda^{-\frac{N-2}{2}}\left\langle\frac{x}{\lambda}\right\rangle^{-(N-2)}\mathrm{d}x\\
&\lesssim\lambda^{\frac{N-2}{2}}.
\end{aligned}$$

在区域 $|x|\geq\sqrt{\lambda}$, $W_\lambda^-\lesssim W_\mu\lesssim W$中，结合 (2.17)，得到

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu,\left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\right\rangle\right|\lesssim&\int_{|x|\geq\sqrt{\lambda}}\left(|x|^{-4}*W_\lambda W_\mu\right)W_\mu^2\,\mathrm{d}x\\ \lesssim&\int_{|x|\geq\sqrt{\lambda}}\left(|x|^{-4}*W_\lambda\right)W_\mu^2\,\mathrm{d}x\\ \lesssim&\int_{|x|\geq\sqrt{\lambda}}\lambda^{\frac{N-6}{2}}\left\langle\frac{x}{\lambda}\right\rangle^{-2}\langle x\rangle^{-2(N-2)}\,\mathrm{d}x\\ \lesssim&\lambda^{\frac{N-2}{2}}.\end{aligned}$$

因此，第三项 $\left|\left\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu,\ \left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\right\rangle\right|\lesssim\lambda^{\frac{N-2}{2}}$.

第四项 $\left|\left\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu,\ \left(|x|^{-4}*\Re\left(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right)\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right\rangle\right|\lesssim\lambda^{\frac{N-2}{2}}$可以用与前面三项类似的方法进行估计。因此，我们证明了 (3.16)。

最后，我们证明

$$\left|\left\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu,\left(f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)\right)g\right\rangle\right|\lesssim\lambda^{\frac{N-2}{4}}\|g\|_{\mathcal{E}}. \tag{3.17}$$

利用 $f'(u)g$ 的表达式（由 (2.1) 定义），可得

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu,\left(f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)\right)g\right\rangle\right|\\ =&\left|\left\langle \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu,\left(|x|^{-4}*\left(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right)^2\right)g+2\left[|x|^{-4}*\Re\left((\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\overline{g}\right)\right](\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\right.\\ &\left.-\left(|x|^{-4}*W_\mu^2\right)g-2\left[|x|^{-4}*\Re\left(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\overline{g}\right)\right]\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\right\rangle|.\end{aligned}$$

类似于 (3.16)，可以证明 (3.17) 成立。

将 (3.15)、(3.16)、(3.17) 相加，并利用 (3.7)、(3.8)，得到

$$|B_1|\lesssim|t|^{-\frac{N-2}{N-6}}. \tag{3.18}$$

第二行。对 $\langle-\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu,g\rangle=0$ 求导，得到

$$\begin{aligned}0=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle-\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu,g\rangle=-\zeta'\langle i\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu,g\rangle+\frac{\mu'}{\mu}\langle\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu,g\rangle-\langle\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu,\partial_t g\rangle\\ =&\zeta'\left(\langle\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu,i\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\rangle-\langle i\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu,g\rangle\right)+\frac{\mu'}{\mu}\left(-\langle\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu,\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu\rangle+\langle\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu,g\rangle\right)\\ &+\theta'\langle\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu,i\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\rangle+\frac{\lambda'}{\lambda}\langle-\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu,\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda\rangle\\ &-\left\langle\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu,i\Delta g+i\left(f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda+g)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\right)\right\rangle,\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}M_{21}&=\mu^{-2}\left(\langle\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu,i\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\rangle-\langle i\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu,g\rangle\right)=O(\|g\|_{\mathcal{E}}),\\ M_{22}&=\mu^{-2}\left(-\langle\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu,\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu\rangle+\langle\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu,g\rangle\right)=\|W\|_{L^2}^2+O(\|g\|_{\mathcal{E}}),\\ M_{23}&=\lambda^{-2}\langle\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu,i\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\rangle=O(1),\\ M_{24}&=\lambda^{-2}\langle-\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu,\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda\rangle=O(1).\end{aligned}$$

现在考虑这一项

$$\begin{aligned}B_2&=\left\langle\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu,i\Delta g+i\left(f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda+g)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\right)\right\rangle\\ &=\left\langle\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu,i\left(f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda+g)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)g\right)\right\rangle,\end{aligned}$$

其中第二个等式由 $\{\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\}\subset\ker Z_{\zeta,\,\mu}^*$ 得出。式 (3.18) 的证明给出

$$|B_2|\lesssim|t|^{-\frac{N-2}{N-6}}. \tag{3.19}$$

第三行。对 $\langle i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,\ g\rangle=0$ 求导，得到

$$\begin{aligned}0=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,g\rangle=-\theta'\langle \mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,g\rangle-\frac{\lambda'}{\lambda}\langle i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda\Lambda W_\lambda,g\rangle+\langle i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,\partial_t g\rangle\\
=&\zeta'\langle i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,-i\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\rangle+\frac{\mu'}{\mu}\langle i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu\rangle\\
&+\theta'\big(\langle i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,-i\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\rangle-\langle \mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,g\rangle\big)+\frac{\lambda'}{\lambda}\big(\langle i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda\rangle-\langle i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda\Lambda W_\lambda,g\rangle\big)\\
&+\big\langle i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,i\Delta g+i\big(f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda+g)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\big)\big\rangle,\end{aligned}$$

由此得到

$$M_{31}=\mu^{-2}\langle i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,-i\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\rangle=O(\lambda^2)=O(|t|^{-\frac{4}{N-6}}),$$

$$M_{32}=\mu^{-2}\langle i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,\mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu\rangle=O(\lambda^2)=O(|t|^{-\frac{4}{N-6}}),$$

$$M_{33}=\lambda^{-2}\big(\langle i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,-i\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\rangle-\langle \mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,g\rangle\big)=\|W\|_{L^2}^2+O(\|g\|_{\mathcal{E}})=\|W\|_{L^2}^2+O(|t|^{-\frac{N-1}{2(N-6)}}),$$

$$M_{34}=\lambda^{-2}\big(\langle i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda\rangle-\langle i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda\Lambda W_\lambda,g\rangle\big)=O(\|g\|_{\mathcal{E}})=O(|t|^{-\frac{N-1}{2(N-6)}}).$$

考虑这一项

$$\begin{aligned}B_3=&-\big\langle i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,i\Delta g+i\big(f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda+g)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\big)\big\rangle\\
=&-\big\langle i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,i\big(f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda+g)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f'(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g\big)\big\rangle\\
=&-\big\langle \mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda+g)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f'(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g\big\rangle,\end{aligned}$$

其中第二个等号由$\{i\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda\}\subset\ker Z^*_{\theta,\lambda}$得到。将此公式与 (3.14) 比较，我们得到

$$\begin{aligned}B_3-K=&-\langle \mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\rangle\\
&-\big\langle \mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,\big(f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f'(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\big)g\big\rangle.\end{aligned}\tag{3.20}$$

首先，我们通过证明以下结论来处理第二行

$$\big|\big\langle \mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,\big(f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f'(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\big)g\big\rangle\big|\lesssim\lambda^{\frac{N}{4}}\|g\|_{\mathcal{E}}.\tag{3.21}$$

这可以类似于 (3.17) 证明。

我们只需处理 (3.20) 中的第一行。我们将证明

$$\Big|\langle \mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\rangle-C_3\theta\lambda^{\frac{N-2}{2}}\Big|\lesssim|t|^{-\frac{N}{N-6}}.\tag{3.22}$$

为此，我们先验证

$$|\langle \mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)-f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f'(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)\rangle|\lesssim\lambda^{\frac{N}{2}}.\tag{3.23}$$

与 (3.17) 类似，这个不等式可以证明。

最后，我们需要验证

$$\Big|\langle \mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,f'(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)\rangle-C_3\theta\lambda^{\frac{N-2}{2}}\Big|\lesssim|t|^{-\frac{N}{N-6}}.\tag{3.24}$$

$f'(z)$ 的定义给出

$$f'(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)=\big(|x|^{-4}*W_\lambda^2\big)\,\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+2\Re(\mathrm{e}^{i(\zeta-\theta)})\,\big(|x|^{-4}*(W_\mu W_\lambda)\big)\,\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda,\tag{3.25}$$

因此

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda, f'(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)\rangle =&\Re(\mathrm{e}^{i(\zeta-\theta)})\Big[\int \left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)W_\mu\Lambda W_\lambda\,\mathrm{d}x\\ &+2\left(|x|^{-4}*(W_\mu W_\lambda)\right)W_\lambda\Lambda W_\lambda\,\mathrm{d}x\Big].\end{aligned}\tag{3.26}$$

利用 (2.24)，我们有

$$\begin{aligned}\int \left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)W_\mu\Lambda W_\lambda\,\mathrm{d}x=&\int \lambda^{-2}\left(|\cdot|^{-4}*W^2\right)\left(\frac{x}{\lambda}\right)W_\mu\Lambda W_\lambda\,\mathrm{d}x\\ \lesssim&\int \lambda^{-2}\left(|\cdot|^{-4}*W^2\right)\left(\frac{x}{\lambda}\right)W_\mu W_\lambda\,\mathrm{d}x\\ \lesssim&\int \lambda^{-2}\left(|\cdot|^{-4}*W^2\right)\left(\frac{x}{\lambda}\right)W_\mu\lambda^{-\frac{N-2}{2}}W\left(\frac{x}{\lambda}\right)\,\mathrm{d}x\\ =&\lambda^{\frac{N-2}{2}}\int \left(|\cdot|^{-4}*W^2\right)(x)W_\mu(\lambda x)W(x)\,\mathrm{d}x\\ \lesssim&\lambda^{\frac{N-2}{2}}\lesssim|t|^{-\frac{N-2}{N-6}}.\end{aligned}\tag{3.27}$$

类似地，利用 (2.17)，我们可以得到

$$\int \left(|x|^{-4}*(W_\mu W_\lambda)\right)W_\lambda\Lambda W_\lambda\,\mathrm{d}x\lesssim\lambda^{\frac{N-2}{2}}\lesssim|t|^{-\frac{N-2}{N-6}}.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}&\Big|\Re(\mathrm{e}^{i(\zeta-\theta)})\Big[\int \left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\Lambda W_\lambda\,\mathrm{d}x+2\left(|x|^{-4}*(W_\mu W_\lambda)\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\Lambda W_\lambda\,\mathrm{d}x\Big]\\ &+\theta\Big[\int \left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\Lambda W_\lambda\,\mathrm{d}x+2\left(|x|^{-4}*(W_\mu W_\lambda)\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\Lambda W_\lambda\,\mathrm{d}x\Big]\Big|\\ \lesssim&|t|^{-\frac{N+1}{N-6}}\ll|t|^{-\frac{N}{N-6}}.\end{aligned}\tag{3.28}$$

接下来，我们证明

$$\begin{aligned}&\Big|\int \left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)\Lambda W_\lambda\,\mathrm{d}x+2\left(|x|^{-4}*W_\lambda\right)W_\lambda\Lambda W_\lambda\,\mathrm{d}x\\ &-\int \left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)W_\mu\Lambda W_\lambda\,\mathrm{d}x-2\left(|x|^{-4}*(W_\mu W_\lambda)\right)W_\lambda\Lambda W_\lambda\,\mathrm{d}x\Big|\\ \lesssim&\lambda^{\frac{N}{2}}+|\mu-1|\lambda^{\frac{N-2}{2}}\lesssim|t|^{-\frac{N}{N-6}}.\end{aligned}\tag{3.29}$$

事实上，在区域 $|x|\geq\sqrt{\lambda}$ 中，两项都满足该界，其证明可类似于 (3.27)。在区域 $|x|\leq\sqrt{\lambda}$ 中，我们有

$$\left|W_\mu-\mu^{-\frac{N-2}{2}}\right|\lesssim|x|^2\lesssim\lambda\quad\text{and}\quad\left|\mu^{-\frac{N-2}{2}}-1\right|\lesssim|\mu-1|,$$

由此可得 (3.29)。

由 (2.5)，可得

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\frac{1}{|x|^4}*W_\lambda^2\Big)\Lambda W_\lambda+2\Big(\frac{1}{|x|^4}*(W_\lambda\Lambda W_\lambda)\Big)W_\lambda\,\mathrm{d}x=-C_3\lambda^{\frac{N-2}{2}},$$

(3.24) 可由 (3.26)、(3.28) 和 (3.29) 得出。

由 (3.20)、(3.21)、(3.22) 以及三角不等式，我们推得

$$\left|B_3-K+C_3\theta\lambda^{\frac{N-2}{2}}\right|\lesssim|t|^{-\frac{N}{N-6}}+|t|^{-\frac{N}{2(N-6)}}\|g\|_{\mathcal{E}}\lesssim|t|^{-\frac{2N-1}{2(N-6)}}.\tag{3.30}$$

特别地，由于 $|\theta\lambda^{\frac{N-2}{2}}|\lesssim|t|^{-\frac{N-1}{N-6}}$，我们有

$$\left|B_3\right|\lesssim|t|^{-\frac{N-1}{N-6}}+|t|^{-\frac{N}{N-6}}+|t|^{-\frac{N}{2(N-6)}}\|g\|_{\mathcal{E}}+\|g\|_{\mathcal{E}}^2\lesssim|t|^{-\frac{N-1}{N-6}}+C_0^2|t|^{-\frac{N}{N-6}}\lesssim|t|^{-\frac{N-1}{N-6}}.\tag{3.31}$$

第四行。对 $\langle -\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, g\rangle = 0$ 求导，得到

$$\begin{aligned}0 =&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle -\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, g\rangle = -\theta'\langle i\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, g\rangle + \frac{\lambda'}{\lambda}\langle \mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda, g\rangle - \langle \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, \partial_t g\rangle\\ =&\zeta'\langle i\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, i\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\rangle - \frac{\mu'}{\mu}\langle \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu\rangle\\ &+\theta'\big(\langle \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, i\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\rangle - \langle i\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, g\rangle\big) + \frac{\lambda'}{\lambda}\big(\langle -\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, \mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda\rangle + \langle \mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda, g\rangle\big)\\ &-\big\langle \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, i\Delta g + i\big(f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda + g) - f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu) - f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\big)\big\rangle,\end{aligned}$$

由此得到

$$M_{41} = \mu^{-2}\langle i\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, i\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\rangle = O(\lambda^2) = O(|t|^{-\frac{4}{N-6}}),$$

$$M_{42} = \mu^{-2}\langle \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, \mathrm{e}^{i\zeta}\Lambda W_\mu\rangle = O(\lambda^2) = O(|t|^{-\frac{4}{N-6}}),$$

$$M_{43} = \lambda^{-2}\big(\langle \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, i\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\rangle - \langle i\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, g\rangle\big) = O(\|g\|_{\mathcal{E}}) = O(|t|^{-\frac{N-1}{2(N-6)}}),$$

$$M_{44} = \lambda^{-2}\big(\langle -\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, \mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda\rangle + \langle \mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda, g\rangle\big) = \|W\|_{L^2}^2 + O(\|g\|_{\mathcal{E}}) = \|W\|_{L^2}^2 + O(|t|^{-\frac{N-1}{2(N-6)}}).$$

考虑这一项

$$\begin{aligned}B_4 &= \big\langle \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, i\Delta g + i\big(f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda + g) - f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu) - f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\big)\big\rangle\\ &= \big\langle \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, i\big(f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda + g) - f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu) - f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda) - f'(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g\big)\big\rangle,\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 $\{\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\} \subset \ker Z^*_{\theta,\lambda}$ 得出。

与 (3.15) 类似，我们有

$$(3.32)\quad \big|\big\langle \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, i\big(f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda+g)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g\big)\big\rangle\big| \lesssim \|g\|_{\mathcal{E}}^2$$

(3.21) 的证明给出

$$(3.33)\quad \big|\big\langle \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, i\big(f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda) - f'(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\big)g\big\rangle\big| \lesssim \lambda^{\frac{N}{4}}\|g\|_{\mathcal{E}}.$$

(3.23) 的证明给出

$$(3.34)\quad \big|\big\langle \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, i\big(f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda) - f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu) - f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda) - f'(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)\big)\big\rangle\big| \lesssim \lambda^{\frac{N}{2}}.$$

最后，我们证明

$$(3.35)\quad \Big|\big\langle \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, if'(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)\big\rangle - 3C_2\lambda^{\frac{N-2}{2}}\Big| \lesssim |t|^{-\frac{N}{N-6}}.$$

再次利用 (3.25)，得到

$$(3.36)\quad \big\langle \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, if'(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)\big\rangle = \Re(i\mathrm{e}^{i(\zeta-\theta)})\int \big(|x|^{-4} * W_\lambda^2\big)W_\lambda W_\mu + 2\left(|x|^{-4} * (W_\mu W_\lambda)\right)W_\lambda^2\,\mathrm{d}x.$$

我们有 $\big|\Re(\mathrm{e}^{-i\theta}) - 1\big| \lesssim |\theta|^2 \le |t|^{-\frac{2}{N-6}}$ 以及 $\big|i\mathrm{e}^{i(\zeta-\theta)} - \mathrm{e}^{-i\theta}\big| = |\mathrm{e}^{i\zeta} + i| \lesssim |\zeta| \le |t|^{-\frac{3}{N-6}}$，因此

$$\big|\Re(i\mathrm{e}^{i(\zeta-\theta)}) - 1\big| \lesssim |t|^{-\frac{2}{N-6}}.$$

Since $\left|\int \left(|x|^{-4} * W_\lambda^2\right) W_\lambda W_\mu + 2\left(|x|^{-4} * (W_\mu W_\lambda)\right) W_\lambda^2 \,\mathrm{d}x\right| \lesssim \lambda^{\frac{N-2}{2}} \lesssim |t|^{-\frac{N-2}{N-6}}$, we obtain

$$\begin{aligned}&\left|\Re(i\mathrm{e}^{i(\zeta-\theta)}) \int \left(|x|^{-4} * W_\lambda^2\right) W_\lambda W_\mu + 2\left(|x|^{-4} * (W_\mu W_\lambda)\right) W_\lambda^2 \,\mathrm{d}x\right.\\ &\left. - \int \left(|x|^{-4} * W_\lambda^2\right) W_\lambda W_\mu + 2\left(|x|^{-4} * (W_\mu W_\lambda)\right) W_\lambda^2 \,\mathrm{d}x\right| \lesssim |t|^{-\frac{N}{N-6}}.\end{aligned} \tag{3.37}$$

（3.29）的证明给出

$$\left|\int \left(|x|^{-4} * W_\lambda^2\right) W_\lambda + 2\left(|x|^{-4} * W_\lambda\right) W_\lambda^2 \,\mathrm{d}x - \int \left(|x|^{-4} * W_\lambda^2\right) W_\lambda W_\mu + 2\left(|x|^{-4} * (W_\mu W_\lambda)\right) W_\lambda^2 \,\mathrm{d}x\right| \tag{3.38}$$

$\lesssim \lambda^{\frac{N}{2}} + |\mu - 1|\lambda^{\frac{N-2}{2}} \lesssim |t|^{-\frac{N}{N-6}}$.

由（2.4）可得

$$\int \left(|x|^{-4} * W_\lambda^2\right) W_\lambda \,\mathrm{d}x = C_2 \lambda^{\frac{N-2}{2}},$$

因此，（3.35）由（3.36）、（3.37）和（3.38）推出。

由（3.32）、（3.33）、（3.34）、（3.35）以及三角不等式，我们得到

$$\left|B_4 - 3C_2\lambda(t)^{\frac{N-2}{2}}\right| \lesssim |t|^{-\frac{N}{N-6}} + \|g\|_{\mathcal{E}}^2, \tag{3.39}$$

特别地

$$|B_4| \lesssim |t|^{-\frac{N-2}{N-6}} + \|g\|_{\mathcal{E}}^2 \lesssim |t|^{-\frac{N-2}{N-6}}. \tag{3.40}$$

结论 由上面对系数 M_{ij} 所得的界可知，矩阵（M_{ij}）是严格对角占优的。由于 $N \geq 7$，（3.8）意味着 $\|g\|_{\mathcal{E}} \lesssim t^{-\frac{N-6}{2}}$，因此我们可以写成

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix} = \tag{3.41}$$

$$\begin{pmatrix} \|W\|_{L^2}^2 + O(|t|^{-\frac{2}{N-6}}) & O(|t|^{-\frac{2}{N-6}}) & O(1) & O(1) \\ O(|t|^{-\frac{2}{N-6}}) & \|W\|_{L^2}^2 + O(|t|^{-\frac{2}{N-6}}) & O(1) & O(1) \\ O(|t|^{-\frac{2}{N-6}}) & O(|t|^{-\frac{2}{N-6}}) & \|W\|_{L^2}^2 + O(|t|^{-\frac{2}{N-6}}) & O(|t|^{-\frac{2}{N-6}}) \\ O(|t|^{-\frac{2}{N-6}}) & O(|t|^{-\frac{2}{N-6}}) & O(|t|^{-\frac{2}{N-6}}) & \|W\|_{L^2}^2 + O(|t|^{-\frac{2}{N-6}}) \end{pmatrix}.$$

令 $(m_{jk}) = (M_{jk})^{-1}$。容易看出，克拉默法则表明，(m_{jk}) 也具有 (3.41) 中给出的形式，其中对角项为 $\|W\|_{L^2}^{-2}$，而非 $\|W\|_{L^2}^2$。

结合 (3.18)、(3.19)、(3.31) 和 (3.40)，我们得到

$$|B_1| + |B_2| + |B_3| + |B_4| \lesssim |t|^{-\frac{N-2}{N-6}}.$$

由此以及矩阵 (m_{jk}) 的形式可直接推出 $|\zeta'| + |\mu'| \lesssim |t|^{-\frac{N-2}{N-6}}$，进而得到 (3.9) 和 (3.10)。注意，矩阵 (m_{jk}) 第三行和第四行中的系数使我们额外获得一个因子 $|t|^{-\frac{2}{N-6}}$。我们得到 $\left|\lambda\lambda' - \|W\|_{L^2}^{-2} B_4\right| \lesssim |t|^{-\frac{N-1}{N-6}}$，由 (3.39) 可知这意味着 (3.11)。类似地，由 (3.30) 可得 (3.12)，从而完成证明。□

注 3.4. 与 (3.15) 的证明类似的计算表明 $|K| \lesssim \|g\|_{\mathcal{E}}^2 \lesssim |t|^{-\frac{N-1}{N-6}}$，因此我们得到引理 3.1 的以下简单推论：

$$|\zeta'(t)| + \left|\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}\right| + |\theta'(t)| + \left|\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\right| \lesssim |t|^{-1}, \tag{3.42}$$

（对于最后一项，此界是精确的）。

3.2. **稳定分量与不稳定分量的控制**。一个重要步骤是控制稳定分量与不稳定分量 $a_1^{\pm}(t) = \langle \alpha^{\pm}_{\zeta(t)\,\mu(t)}\ g(t)\rangle$ 以及 $a_2^{\pm}(t) = \langle \alpha^{\pm}_{\theta(t)\,\lambda(t)}\ g(t)\rangle$。回顾 $\nu > 0$ 是线性化流的正特征值，见 (2.6)。

引理 3.5. 在引理 *3.1* 的假设下，对 $t \in [T, T_1]$ 成立

$$
\begin{aligned}
\big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_1^+(t) - \frac{\nu}{\mu(t)^2}a_1^+(t)\big| &\le \frac{c}{\mu(t)^2}|t|^{-\frac{N}{2(N-6)}},\\
\big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_1^-(t) + \frac{\nu}{\mu(t)^2}a_1^-(t)\big| &\le \frac{c}{\mu(t)^2}|t|^{-\frac{N}{2(N-6)}},\\
\big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_2^+(t) - \frac{\nu}{\lambda(t)^2}a_2^+(t)\big| &\le \frac{c}{\lambda(t)^2}|t|^{-\frac{N}{2(N-6)}},\\
\big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_2^-(t) + \frac{\nu}{\lambda(t)^2}a_2^-(t)\big| &\le \frac{c}{\lambda(t)^2}|t|^{-\frac{N}{2(N-6)}},
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

其中 $c \to 0$ 如 $|T_0| \to +\infty$。

证明。该证明类似于 [11], 中引理 3.4 的证明，故我们省略该证明。 □

4. Bootstrap argument

我们转向证明的核心，即建立自举估计。我们考虑一个解 $u(t)$，并按照 (3.1)、(3.2) 与 (2.8) 进行分解。时刻 $T \le T_0$ 的初始数据选取如下。

Le引理 4.1。存在 $T_0 < 0$，使得对所有 $T \le T_0$ 以及所有满足 λ^0、a_1^0、a_2^0 的 g

$$
\big|\lambda^0 - \kappa T^{-\frac{2}{N-6}}\big| \le \frac{1}{2}|T|^{-\frac{5}{2(N-6)}}, \qquad |a_1^0| \le \frac{1}{2}|T|^{-\frac{N}{2(N-6)}}, \qquad |a_2^0| \le \frac{1}{2}|T|^{-\frac{N}{2(N-6)}},
\tag{4.1}
$$

存在满足 $g^0 \in X^1$ 的

$$
\langle \Lambda W, g^0\rangle = \langle iW, g^0\rangle = \langle i\Lambda W_{\lambda^0}, g^0\rangle = \langle -W_{\lambda^0}, g^0\rangle = 0,
\tag{4.2}
$$

$$
\langle \alpha^-_{-\frac{\pi}{2},1}, g^0\rangle = 0, \quad \langle \alpha^+_{-\frac{\pi}{2},1}, g^0\rangle = a_1^0, \quad \langle \alpha^-_{0,\lambda^0}, g^0\rangle = 0, \quad \langle \alpha^+_{0,\lambda^0}, g^0\rangle = a_2^0,
\tag{4.3}
$$

$$
\|g^0\|_{\mathcal{E}} \lesssim |T|^{-\frac{N}{2(N-6)}}.
\tag{4.4}
$$

该 g^0 关于 λ^0、a_1^0 和 a_2^0 的 X^1 拓扑是连续的。

注 4.2。关于连续性，我们只声称证明中构造的函数 g^0 关于 λ^0、a_1^0 和 a_2^0 是连续的。显然，g^0 并不能由 (4.2)、(4.3) 和 (4.4) 唯一确定。

注 4.3。条件 (4.2) 正是 (2.8)，其中 $(\zeta, \mu, \theta, \lambda) = (-\frac{\pi}{2}, 1, 0, \lambda^0)$。因此，若考虑带有初始数据 $u(T) = -iW + W_{\lambda^0} + g^0$ 的 (1.1) 的解 $u(t)$，并按照 (3.1) 对其进行分解，则 $g(T) = g^0$，且调制参数的初始值为 $\big(\zeta(T)\ \mu(T)\ \theta(T)\ \lambda(T)\big) = \big(-\frac{\pi}{2}, 1, 0, \lambda^0\big)$。

证明。证明与 [11, 引理 4.1], 相同，主要利用隐函数定理得到正交分解。这里略去。 □

在本节余下部分，我们将分析具有初始数据 $u(T) = -iW + W_{\lambda^0} + g^0$的方程 (1.1) 的解 $u(t)$，其中 g^0 由前一个引理给出。

命题 4.4。存在 $T_0 < 0$，具有以下性质。令 $T < T_1 < T_0$，并令 λ^0、a_1^0、a_2^0 满足 (4.1)。设 $g^0 \in X^1$ 由引理 *4.1* 给出，并考虑具有初始数据 $u(T) = -iW + W_{\lambda^0} + g^0$的方程 (1.1) 的解$u(t)$。假设 $u(t)$ 存在于

时间区间 $[T,T_1]$上，且对于 $t\in[T,T_1]$，条件 (3.4)、(3.5)、(3.6)、(3.7) 和 (3.8) 均成立，并且还满足

$$|a_1^+(t)|\le|t|^{-\frac{N}{2(N-6)}},\qquad |a_2^+(t)|\le|t|^{-\frac{N}{2(N-6)}}. \tag{4.5}$$

那么，对于 $t\in[T,T_1]$，有

$$\big|\zeta(t)+\frac{\pi}{2}\big|\le\frac{1}{2}|t|^{-\frac{3}{N-6}}, \tag{4.6}$$

$$|\mu(t)-1|\le\frac{1}{2}|t|^{-\frac{3}{N-6}}, \tag{4.7}$$

$$|\theta(t)|\le\frac{1}{2}|t|^{-\frac{1}{N-6}}, \tag{4.8}$$

$$\|g(t)\|_{\mathcal{E}}\le\frac{1}{2}|t|^{-\frac{N-1}{2(N-6)}}. \tag{4.9}$$

在给出证明之前，我们需要做一些准备。

4.1. 一种维里型修正。命题 4.4 的证明中，棘手之处在于控制 $\theta(t)$。为此，我们需要使用一个维里泛函，现定义如下。由[11, 引理 4..5], 可得如下函数

引理 4.5。对于任意 $c>0$ 和 $R>0$，存在一个径向函数 $q(x)=q_{c,R}(x)\in C^{3,1}(\mathbb{R}^N)$，满足以下性质：
(P1) $q(x)=\frac{1}{2}|x|^2$ 对 $|x|\le R$，*(P2)* 存在 $R>0$（取决于 c 和 R），使得 $q(x)\equiv const$ 对于 $|x|\ge R$，*(P3)* $|\nabla q(x)|\lesssim|x|$ 和 $|\Delta q(x)|\lesssim 1$ 对所有 $x\in\mathbb{R}^N$ 均成立，其中常数与 c 和 R 无关，*(P4)* $\sum_{1\le j,k\le N}\big(\partial_{x_jx_k}q(x)\big)v_jv_k\ge -c\sum_{j=1}^N|v_j|^2$ 对所有 $x\in\mathbb{R}^N, v_j\in\mathbb{C}$ 均成立，*(P5)* $\Delta^2 q(x)\le c\cdot|x|^{-2}$ 对所有 $x\in\mathbb{R}^N$ 均成立。

注 4.6. 为避免处理 Pohozaev 恒等式中的边界项，我们要求具有 $C^{3,1}$ 正则性，参见 (4.11) 的证明。

在下文中，$q(x)$ 始终表示一个属于 $C^{3,1}(\mathbb{R}^N)$ 类的函数，它满足 (P1)–(P5)，且 c 足够小、R 足够大。

对于 $\lambda>0$，我们按如下方式定义算子 $A(\lambda)$ 和 $A_0(\lambda)$。

$$[A(\lambda)h](x):=\frac{N-2}{2N\lambda^2}\Delta q\big(\frac{x}{\lambda}\big)h(x)+\frac{1}{\lambda}\nabla q\big(\frac{x}{\lambda}\big)\cdot\nabla h(x),$$
$$[A_0(\lambda)h](x):=\frac{1}{2\lambda^2}\Delta q\big(\frac{x}{\lambda}\big)h(x)+\frac{1}{\lambda}\nabla q\big(\frac{x}{\lambda}\big)\cdot\nabla h(x).$$

将这些定义与 $q(x)$ 是 $\frac{1}{2}|x|^2$ 的一个近似这一事实结合起来，我们看到，$A(\lambda)$ 和 $A_0(\lambda)$ 分别是 $\lambda^{-2}\Lambda$ 和 $\lambda^{-2}\Lambda_0$ 的近似（其意义尚未精确定义）。我们将用 A 和 A_0 分别代替 $A(1)$ 和 $A_0(1)$。注意以下尺度变换公式，它们可直接由定义得到：

$$\forall h\in\mathcal{E}:\qquad A(\lambda)(h_\lambda)=\lambda^{-2}(Ah)_\lambda,\quad A_0(\lambda)(h_\lambda)=\lambda^{-2}(A_0h)_\lambda.$$

引理 4.7. 算子 $A(\lambda)$和 $A_0(\lambda)$具有以下性质：

- 对于 $\lambda>0$ 族 $\{A(\lambda)\}$, $\{A_0(\lambda)\}$, $\{\lambda\partial_\lambda A(\lambda)\}$, $\{\lambda\partial_\lambda A_0(\lambda)\}$，它们在$\mathscr{L}(\mathcal{E};\dot{H}^{-1})$ 中有界；族 $\{\lambda A(\lambda)\}$, $\{\lambda A_0(\lambda)\}$ 在 $\mathscr{L}(\mathcal{E};L^2)$ 中有界，且界依赖于函数 $q(x)$ 的选取，

- 对于 $u=\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, v=g$, 有

$$\langle A(\lambda)u,f(u+v)-f(u)-f'(u)v\rangle=-\langle A(\lambda)v,f(u+v)-f(u)\rangle+o\left(|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}\right), \tag{4.10}$$

- 对于所有复值的 $h_1, h_2 \in X^1(\mathbb{R}^N)$，以及 $\lambda > 0$，有

$$\langle h_1, A_0(\lambda) h_2 \rangle = -\langle A_0(\lambda) h_1, h_2 \rangle, \qquad \textit{hence } iA_0(\lambda) \textit{ is a symmetric operator,}$$

- 对于任意 $c_0 > 0$，若在引理 *4.5* 中将 c 取足够小，则对所有 $h \in X^1$，有

$$\langle A_0(\lambda) h, \Delta h \rangle \leq \frac{c_0}{\lambda^2} \|h\|_{\mathcal{E}}^2 - \frac{1}{\lambda^2} \int_{|x| \leq R\lambda} |\nabla h(x)|^2 \, \mathrm{d}x. \tag{4.11}$$

这已在 [11, 引理 4.7]中证明，除 (4.10) 外；(4.10) 与 [11] 不同。因此我们只给出 (4.10) 的证明。

$_{N-1}$证明。 因为 $\|g(t)\|_{\mathcal{E}} \lesssim |t|^{-2(N-6)}$，我们只需考虑 g 的最低次幂。因此，(4.10) 的证明等价于证明

(4.12)
$$\begin{aligned}
&\left\langle A(\lambda) \left(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda \right), \left(|x|^{-4} * |g|^2 \right) \left(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda \right) + 2\Re \left(|x|^{-4} * \left[\left(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda \right) \overline{g} \right] \right) g \right\rangle \\
&= - \left\langle A(\lambda) g, \left(|x|^{-4} * |\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda|^2 \right) g + 2\Re \left[|x|^{-4} * \left(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda \right) \overline{g} \right] \left(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda \right) \right\rangle \\
&\quad + o\left(|t|^{-\frac{N-5}{N-6}} \right).
\end{aligned}$$

我们将分三步证明 (4.12)。

步骤1。 在这一步中，我们将证明 $u = \mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda$ 可以替换为 $\mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda$。为此，我们需要证明以下两个等式。

(4.13)
$$\begin{aligned}
&\left\langle A(\lambda) \left(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda \right), \left(|x|^{-4} * |g|^2 \right) \left(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda \right) + 2\Re \left(|x|^{-4} * \left[\left(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda \right) \overline{g} \right] \right) g \right\rangle \\
&- \left\langle A(\lambda) \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda, \left(|x|^{-4} * |g|^2 \right) \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda + 2\Re \left[|x|^{-4} * \left(\mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda \overline{g} \right) \right] g \right\rangle = o\left(|t|^{-\frac{N-5}{N-6}} \right),
\end{aligned}$$

(4.14)
$$\begin{aligned}
&\left\langle A(\lambda) g, \left(|x|^{-4} * |\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda|^2 \right) g + 2\Re \left(|x|^{-4} * \left[\left(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda \right) \overline{g} \right] \right) \left(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda \right) \right\rangle \\
&- \left\langle A(\lambda) g, \left(|x|^{-4} * W_\lambda^2 \right) g + 2\Re \left[|x|^{-4} * \left(\mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda \overline{g} \right) \right] \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda \right\rangle = o\left(|t|^{-\frac{N-5}{N-6}} \right).
\end{aligned}$$

如果这两个等式成立，那么证明 (4.12) 就等价于证明

$$\begin{aligned}
&\left\langle A(\lambda) \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda, \left(|x|^{-4} * |g|^2 \right) \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda + 2\Re \left(|x|^{-4} * \left(\mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda \overline{g} \right) \right) g \right\rangle \\
&= - \left\langle A(\lambda) g, \left(|x|^{-4} * \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda^2 \right) g + 2\Re \left(|x|^{-4} * \left(\mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda \overline{g} \right) \right) \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda \right\rangle + o\left(|t|^{-\frac{N-5}{N-6}} \right).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

至于 (4.13)，它等价于证明

$$\begin{aligned}
&\left\langle A(\lambda) \mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu, \left(|x|^{-4} * |g|^2 \right) \left(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda \right) \right\rangle + \left\langle A(\lambda) \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda, \left(|x|^{-4} * |g|^2 \right) \mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu \right\rangle \\
&+ \left\langle A(\lambda) \mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu, 2\Re \left[|x|^{-4} * \left(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda \right) \overline{g} \right] g \right\rangle + \left\langle A(\lambda) \mathrm{e}^{i\theta} W_\lambda, 2\Re \left[|x|^{-4} * \left(\mathrm{e}^{i\zeta} W_\mu \overline{g} \right) \right] g \right\rangle \\
&=: I + II + III + IV = o\left(|t|^{-\frac{N-5}{N-6}} \right).
\end{aligned}$$

利用 $A(\lambda)$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}|I| \lesssim & \frac{1}{\lambda^2}\int_{|x|\le\tilde{R}\lambda}|\Lambda W_\mu|\left(|x|^{-4}*|g|^2\right)W_\lambda\,\mathrm{d}x\\ \lesssim & \frac{1}{\lambda^2}\||x|^{-4}*|g|^2\|_{L^{\frac{N}{2}}}\|W_\lambda\|_{L^{\frac{N}{N-2}}(|x|\le\tilde{R}\lambda)}\|\Lambda W_\mu\|_{L^\infty}\\ \lesssim & \frac{1}{\lambda^2}\|g\|^2_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\lambda^{-\frac{N-2}{2}}\left(\int_{|x|\le\tilde{R}\lambda}W^{\frac{N}{N-2}}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-2}{N}}\\ \lesssim & \lambda^{\frac{N-6}{2}}\|g\|^2_{\mathcal{E}}=o\left(|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}\right),\end{aligned}$$

其中，$\tilde{R}$ 由引理 4.5 定义。类似地，我们可以得到 $|II|+|III|+|IV|=o\left(|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}\right)$。因此，(4.13) 成立。

对于 (4.14)，只需证明

$$\begin{aligned}&\langle A(\lambda)g,\left(|x|^{-4}*W_\mu^2\right)g+2\Re\left(|x|^{-4}*\left(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right)\right)g\\ &+2\Re\left(|x|^{-4}*\left(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\overline{g}\right)\right)\left(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right)+2\Re\left(|x|^{-4}*\left(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\overline{g}\right)\right)\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\rangle\\ =:&I+II+III+IV=o\left(|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}\right).\end{aligned}$$

根据 $A(\lambda)$ 的定义，我们有

$$|I|\lesssim\frac{1}{\lambda^2}\left(\int_{|x|\le\tilde{R}\lambda}|g|^2\left(|x|^{-4}*W_\mu^2\right)\mathrm{d}x+\int_{|x|\le\tilde{R}\lambda}(x\cdot\nabla g)g\left(|x|^{-4}*W_\mu^2\right)\mathrm{d}x\right).$$

我们先考虑项 $\frac{1}{\lambda^2}\int_{|x|\le\tilde{R}\lambda}|g|^2\left(|x|^{-4}*W_\mu^2\right)\mathrm{d}x$。当 $|y|\le\frac{1}{2}\tilde{R}\lambda$ 时，我们有 $W_\mu(y)\lesssim W_\lambda(y)$。结合 $W_\mu(y)\lesssim W(y)\lesssim 1$ 以及引理 2.1，我们可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\lambda^2}\int_{|x|\le\tilde{R}\lambda}|g|^2\left(|x|^{-4}*W_\mu^2\right)\mathrm{d}x\\ =&\frac{1}{\lambda^2}\int_{|x|\le\tilde{R}\lambda}|g|^2\left(\int_{|y|\le\frac{1}{2}|x|}|x-y|^{-4}W_\mu^2(y)\,\mathrm{d}y+\int_{|y|\ge\frac{1}{2}|x|}|x-y|^{-4}W_\mu^2(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ \lesssim&\frac{1}{\lambda^2}\int_{|x|\le\tilde{R}\lambda}|g|^2\left(\int_{|y|\le\frac{1}{2}|x|}|x-y|^{-4}W_\mu(y)W_\lambda(y)\,\mathrm{d}y+\int_{|y|\ge\frac{1}{2}|x|}|x-y|^{-4}\langle y\rangle^{-2(N-2)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ \lesssim&\frac{1}{\lambda^2}\left(\|g\|^2_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\||x|^{-4}*W_\lambda\|_{L^{\frac{N}{2}}(|x|\le\tilde{R}\lambda)}+\int_{|x|\le\tilde{R}\lambda}|g|^2\,\mathrm{d}x\right)\\ \lesssim&\frac{1}{\lambda^2}\left(\lambda^{\frac{N-6}{2}}\|\langle\frac{x}{\lambda}\rangle^{-2}\|_{L^{\frac{N}{2}}(|x|\le\tilde{R}\lambda)}\|g\|^2_{\mathcal{E}}+\|g\|^2_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\left(\int_{|x|\le\tilde{R}\lambda}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{N}}\right)\\ \lesssim&\lambda^{\frac{N-6}{2}}\|g\|^2_{\mathcal{E}}+\|g\|^2_{\mathcal{E}}=o\left(|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}\right).\end{aligned}$$

接下来，我们考虑第二项 $\int_{|x|\le\tilde{R}\lambda}(x\cdot\nabla g)g\left(|x|^{-4}*W_\mu^2\right)\mathrm{d}x$。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda^2}\int_{|x|\le\tilde{R}\lambda}(x\cdot\nabla g)g\left(|x|^{-4}*W_\mu^2\right)\mathrm{d}x\lesssim&\frac{1}{\lambda^2}\lambda\int_{|x|\le\tilde{R}\lambda}|\nabla g||g|\left(|x|^{-4}*W_\mu^2\right)\mathrm{d}x\\ \lesssim&\frac{1}{\lambda}\|\nabla g\|_{L^2}\|g\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\||x|^{-4}*W_\mu^2\|_{L^N}\\ \lesssim&\frac{1}{\lambda}\|g\|^2_{\mathcal{E}}=o\left(|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}\right).\end{aligned}$$

因此，我们得到 $|I| = o\left(|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}\right)$。类似地，我们可以得到 $|II| + |III| + |IV| = o\left(|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}\right)$。因此，(4.14) 成立。

步骤 2. 在这一步中，我们将证明 $A(\lambda)$ 可以在 (4.15) 中替换为 $\frac{1}{\lambda^2}\Lambda$。若此结论成立，结合

$$\langle \Lambda u, f(u+v) - f(u) - f'(u)v\rangle = -\langle \Lambda v, f(u+v) - f(u)\rangle, \tag{4.16}$$

我们可以得到 (4.10) 成立。我们将在第三步中证明 (4.16)。

当 $|x| \le R\lambda, A(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}\Lambda$ 时，因此我们只需考虑 $|x| \ge R\lambda$。当$|x| \ge R\lambda, \left|A(\lambda) - \frac{1}{\lambda^2}\Lambda\right| \lesssim \frac{1}{\lambda^2}\Lambda$ 时，因此我们需要证明

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda^2}\left\langle \Lambda \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, \left(|x|^{-4} * |g|^2\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right\rangle + 2\Re\left\langle \left(|x|^{-4} * \left(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda \overline{g}\right)\right) g\right\rangle \\ =&-\frac{1}{\lambda^2}\left\langle \Lambda g, \left(|x|^{-4} * W_\lambda^2\right) g + 2\Re\left(|x|^{-4} * \left(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\overline{g}\right)\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right\rangle + o\left(|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}\right). \end{aligned} \tag{4.17}$$

首先，我们考虑 $\frac{1}{\lambda^2}\left\langle \Lambda \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, \left(|x|^{-4} * |g|^2\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right\rangle$, , 当 $|x| \ge R\lambda$。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2}\left\langle \Lambda \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, \left(|x|^{-4} * |g|^2\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right\rangle &\lesssim \frac{1}{\lambda^2}\int_{|x|\ge R\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} |\Lambda W_\lambda(x)| W_\lambda(x)|x-y|^{-4}|g(y)|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\lesssim \frac{1}{\lambda^2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} |x-y|^{-4}(W_\lambda(x)\mathbb{1}_{|x|\ge R\lambda})^2\,\mathrm{d}x|g(y)|^2\,\mathrm{d}y \\ &\lesssim \frac{1}{\lambda^2}\|g\|^2_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\left\||x|^{-4} * (W_\lambda(x)\mathbb{1}_{|x|\ge R\lambda})^2\right\|_{L^{\frac{N}{2}}} \\ &\lesssim \frac{1}{\lambda^2}\|g\|^2_{\mathcal{E}}\|W_\lambda\|^2_{L^{\frac{2N}{N-2}}(|x|\ge R\lambda)} \\ &\lesssim \frac{1}{\lambda^2}\|g\|^2_{\mathcal{E}} R^{-(N-2)} = o\left(|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}\right), \end{aligned}$$

如果 R 足够大。同样地，我们可以得到项 $\frac{1}{\lambda^2}\left\langle \Lambda \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda, \Re\left(|x|^{-4} * \left(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda g\right)\right) g\right\rangle = o\left(|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}\right)$.

Next, 我们考虑

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda^2}\left\langle \Lambda g, \left(|x|^{-4} * W_\lambda^2\right) g + 2\Re\left(|x|^{-4} * \left(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\overline{g}\right)\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right\rangle \\ =&\frac{1}{\lambda^2}\left\langle g + x\cdot\nabla g, \left(|x|^{-4} * W_\lambda^2\right) g + 2\Re\left(|x|^{-4} * \left(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\overline{g}\right)\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right\rangle. \end{aligned}$$

项 $\frac{1}{\lambda^2}\left\langle g,\left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)g+2\Re\left(|x|^{-4}*\left(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda g\right)\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right\rangle$ 可以按上述方法进行估计，因此我们需要考虑 $\frac{1}{\lambda^2}\left\langle x\cdot\nabla g,\left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)g+2\Re\left(|x|^{-4}*\left(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda g\right)\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right\rangle$。

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda^2}\left\langle x\cdot\nabla g,\left(|x|^{-4}*W_\lambda^2\right)g\right\rangle\\
\lesssim&\frac{1}{\lambda^2}\int_{|x|\geq R\lambda}\int_{\mathbb{R}^N}|x||\nabla g(x)||g(x)||x-y|^{-4}W_\lambda(y)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{\lambda^2}\int_{|x|\geq R\lambda}\Big(\int_{|y|\leq\frac{1}{2}|x|}|x-y|^{-4}W_\lambda^2(y)|x||\nabla g(x)||g(x)|\,\mathrm{d}y\\
&+\int_{|y|\geq\frac{1}{2}|x|}|x-y|^{-4}W_\lambda^2(y)|x||\nabla g(x)||g(x)|\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\\
\lesssim&\frac{1}{\lambda^2}\int_{|x|\geq R\lambda}\int_{|y|\leq\frac{1}{2}|x|}W_\lambda^2(y)\,\mathrm{d}y|x|^{-3}|\nabla g(x)||g(x)|\,\mathrm{d}x\\
&+\frac{1}{\lambda^2}\int_{|y|\geq\frac{1}{2}R\lambda}\int_{|x|\geq R\lambda}|x-y|^{-4}|x||\nabla g(x)||g(x)|\,\mathrm{d}xW_\lambda^2(y)\,\mathrm{d}y\\
\lesssim&\frac{1}{\lambda^2}\|W_\lambda\|_{L^2}^2\|\nabla g\|_{L^2}\|g\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\left(\int_{|x|\geq R\lambda}|x|^{-3N}\right)^{\frac{1}{N}}\\
&+\frac{1}{\lambda^2}\||x|^{-4}*(|x||\nabla g||g|\mathbb{1}_{|x|\geq R\lambda})\|_{L^N}\|W_\lambda^2\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(|y|\geq\frac{1}{2}R\lambda)}\\
\lesssim&\frac{1}{\lambda^2}\|g\|_{\mathcal{E}}^2R^{-2}+\frac{1}{\lambda^2}\||x||\nabla g||g|\|_{L^{\frac{N}{N-3}}(|x|\geq R\lambda)}\lambda R^{-(N-3)}\\
\lesssim&\frac{1}{\lambda^2}\|g\|_{\mathcal{E}}^2R^{-2}+\frac{1}{\lambda^2}\||x|^{-\frac{N-4}{2}}|\nabla g||x|^{\frac{N-2}{2}}|g|\|_{L^{\frac{N}{N-3}}(|x|\geq R\lambda)}\lambda R^{-(N-3)}\\
\lesssim&\frac{1}{\lambda^2}\|g\|_{\mathcal{E}}^2R^{-2}+\frac{1}{\lambda^2}\||x|^{-\frac{N-4}{2}}\|_{L^{\frac{2N}{N-6}}(|x|\geq R\lambda)}\|\nabla g\|_{L^2}\|g\|_{\mathcal{E}}\lambda R^{-(N-3)}\\
\lesssim&\frac{1}{\lambda^2}\|g\|_{\mathcal{E}}^2R^{-2}+\frac{1}{\lambda^2}\|g\|_{\mathcal{E}}^2R^{-(N-2)}=o\left(|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}\right),
\end{aligned}
$$

如果 R 足够大。同样地，我们可以得到项 $\frac{1}{\lambda^2}\left\langle x\cdot\nabla g,\ \Re\left(|x|^{-4}*\left(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda g\right)\right)\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right\rangle=o\left(|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}\right)$. 因此，（4.17）成立。

步骤 3。在这一步中，我们将证明（4.16）成立。根据 Λ 的定义，我们知道对于 $\forall u$, $\Lambda u=-\mathrm{d}\,\mathrm{d}\lambda\,u_\lambda$. 根据缩放的定义，我们有 $\int F(u_\lambda)\,\mathrm{d}x=\int F(u)\,\mathrm{d}x$, $\int f(u_\lambda)v_\lambda\,\mathrm{d}x=\int f(u)v\,\mathrm{d}x$。因此我们有 $\mathrm{d}\,\mathrm{d}\lambda\big|_{\lambda=1}\int F(u_\lambda)\,\mathrm{d}x=0$, $\mathrm{d}\,\mathrm{d}\lambda\big|_{\lambda=1}\int f(u_\lambda)v_\lambda\,\mathrm{d}x=0$。由上述讨论可得

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\big|_{\lambda=1}\left(\int F(u_\lambda+v_\lambda)-F(u_\lambda)-f(u_\lambda)v_\lambda\,\mathrm{d}x\right)=0,\\
\Leftrightarrow&\int f(u+v)\Lambda(u+v)-f(u)\Lambda u-f'(u)(\Lambda u)v-f(u)\Lambda v\,\mathrm{d}x=0,\\
\Leftrightarrow&\langle f(u+v)-f(u)-f'(u)v,\Lambda u\rangle=-\langle f(u+v)-f(u),\Lambda v\rangle,
\end{aligned}
$$

也就是说，(4.16) 成立。 □

4.2.闭合自举。对于薛定谔方程，这已在 [11,引理 4.4] 中得到证明。除了非线性部分外，大多数论证都无需修改即可适用；不过，为方便读者，我们在此给出完整的计算。

命题 *4.4* 的证明。我们将证明分为三步。首先证明 (4.6) 和 (4.7)。然后利用维里泛函和变分估计证明 (4.8)，其中

替换为任意严格正的常数。为此，我们必须以某种方式处理调制方程 (3.12) 中的项 $\|W\|_{L^2}^{-2}K$。它包含关于 g 的二次项，其大小恰好是临界尺度，因而无法恢复那个小常数。然而，事实表明我们可以利用维里泛函来吸收 K 的主要部分。证明 (4.8) 是最困难的一步。最后，(4.9) 将由变分估计得出。

步骤1. 在 $[T,t]$ 上对 (3.9) 积分，并利用 $\zeta(T)=-\frac{\pi}{2}$ 这一事实，可得

$$\big|\zeta(t)+\frac{\pi}{2}\big|=\big|\zeta(t)-\zeta(T)\big|=\Big|\int_T^t\zeta'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big|\le c\int_T^t|\tau|^{-\frac{N-3}{N-6}}\le c\cdot\frac{N-6}{3}|t|^{-\frac{3}{N-6}}\le\frac{1}{2}|t|^{-\frac{3}{N-6}},$$

条件是 $c\le\frac{3}{2(N-6)}$。(4.7) 的证明类似。

步骤2. 首先，我们证明对于 $t\in[T,T_1]$，有

$$|a_1^-(t)|<|t|^{-\frac{N}{2(N-6)}},\qquad |a_2^-(t)|<|t|^{-\frac{N}{2(N-6)}}. \tag{4.18}$$

这一点在初始时成立，见 (4.3)。假设 $T_2\in(T,T_1)$ 是 (4.18) 对 $t\in[T,T_2)$ 成立的最后时刻。举例来说，设 $a_1^-(T_2)=|T_2|^{-\frac{N}{2(N-6)}}$。但由于 $\|g(T_2)\|_{\mathcal{E}}^2\lesssim|T_2|^{-\frac{N-1}{N-6}}\ll|T_2|^{-\frac{N}{2(N-6)}}$，由 (3.43) 可得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_1^-(T_2)<0$，这与假设 Notion：对 $t<T_2$，$a_1^-(t)<|T_2|^{-2(N-6)}$ 相矛盾。另一个不等式的证明类似。

设 $c_0>0$。我们将证明，若 T_0 取得足够大（依赖于 c_0），则

$$|\theta(t)|\le c_0|t|^{-\frac{1}{N-6}},\qquad \text{for } t\in[T,T_1]. \tag{4.19}$$

由能量守恒、(2.10) 和 (4.4)，我们有

$$\big|E(u)-2E(W)\big|=\big|E(u(T))-2E(W)\big|\lesssim|T|^{-\frac{N}{N-6}}\le|t|^{-\frac{N}{N-6}},$$

因此 (2.11) 给出

$$\theta\lambda^{\frac{N-2}{2}}\lesssim|t|^{-\frac{N}{N-6}}\quad\Rightarrow\quad\theta\lesssim|t|^{-\frac{N}{N-6}+\frac{N-2}{N-6}}=|t|^{-\frac{2}{N-6}}\ll|t|^{-\frac{1}{N-6}}. \tag{4.20}$$

剩下需要证明

$$\theta\ge-c_0|t|^{-\frac{1}{N-6}}. \tag{4.21}$$

为此，我们考虑如下实标量函数：

$$\psi(t):=\theta(t)-\frac{1}{2\|W\|_{L^2}^2}\langle g(t),iA_0(\lambda(t))g(t)\rangle.$$

我们将证明，对 $t\in[T,T_1]$ 成立

$$\psi'(t)\ge-c_1|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}, \tag{4.22}$$

通过最终增大 $|T_0|$，可以使 $c_1>0$ 任意小。

由 (4.20) 得到 $\theta\lambda^{-\frac{N-6}{2}}\ll|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}$，因此，在引理 3.1 中取 $c=\frac{1}{4}c_1$，并选择足够大的 $|T_0|$，(3.12) 给出

$$\begin{aligned}\psi'&\ge-\frac{C_3}{\|W\|_{L^2}^2}\theta\lambda^{\frac{N-6}{2}}+\frac{K}{\lambda^2\|W\|_{L^2}^2}-\frac{c_1}{4}|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}-\frac{1}{2\|W\|_{L^2}^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle g,iA_0(\lambda)g\rangle\\&\ge\frac{1}{\|W\|_{L^2}^2}\Big(\frac{1}{\lambda^2}K-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle g,iA_0(\lambda)g\rangle\Big)-\frac{c_1}{2}|t|^{-\frac{N-5}{N-6}},\end{aligned} \tag{4.23}$$

因此我们需要计算 $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle g,iA_0(\lambda)g\rangle$，忽略 $\ll|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}$ 阶项。在本证明中，符号 $\simeq$ 表示“当 $|T_0|\to+\infty$ 时，忽略 $\ll|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}$ 阶项”。——

由于 $iA_0(\lambda)$ 是对称的，我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle g,iA_0(\lambda)g\rangle=\frac{1}{2}\lambda'\langle g,i\partial_\lambda A_0(\lambda)g\rangle+\langle\partial_t g,iA_0(\lambda)g\rangle. \tag{4.24}$$

第一项的量级为 $\lesssim \left|\frac{\lambda'}{\lambda}\right| \cdot \|g\|_{\mathcal{E}}^2 \ll |t|^{-\frac{N-5}{N-6}}$，因此可以忽略。我们根据 (3.3) 展开 $\partial_t g$。考虑 (3.3) 第二行中的各项。由 (3.42) 以及 $\|A_0(\lambda)g\|_{\dot{H}^{-1}} \lesssim \|g\|_{\mathcal{E}}$这一事实可知，它们的贡献为 $\lesssim |t|^{-1}\|g\|_{\mathcal{E}} \leq |t|^{-\frac{3N-13}{2(N-6)}} \ll |t|^{-\frac{N-5}{N-6}}$，因此可以忽略，所以我们可以写成

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle g, iA_0(\lambda)g\rangle \simeq \langle \Delta g + f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda + g) - f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu) - f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda), A_0(\lambda)g\rangle. \tag{4.25}$$

现在我们来验证

$$|\langle f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda) - f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu) - f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda), A_0(\lambda)g\rangle| \ll |t|^{-\frac{N-5}{N-6}}. \tag{4.26}$$

函数 $A_0(\lambda)g$ 的支集包含在半径为 $R\lambda$的球内。在此区域中，我们有 $W_\mu \ll W_\lambda$，因此由 (2.2) 得到

$$|\langle f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda) - f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu) - f(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)| \lesssim |x|^{-4} * W_\lambda^2 + \left(|x|^{-4} * W_\lambda\right) W_\lambda.$$

通过变量代换，我们得到

$$\left\||x|^{-4} * W_\lambda^2 + \left(|x|^{-4} * W_\lambda\right) W_\lambda\right\|_{L^2(|x|\leq \widetilde{R}\lambda)} = \lambda^{\frac{N-4}{2}} \left\||x|^{-4} * W^2 + \left(|x|^{-4} * W\right) W\right\|_{L^2(|x|\leq \widetilde{R})} \lesssim |t|^{-\frac{N-4}{N-6}}.$$

根据引理 4.7 的第一条性质，有 $\|A_0(\lambda)g\|_{L^2} \lesssim \lambda^{-1}\|g\|_{\mathcal{E}} \lesssim |t|^{-\frac{N-5}{2(N-6)}}$，因此由柯西-施瓦茨不等式可得 (4.26)（且有较大余量）。由三角不等式，结合 (4.25) 和 (4.26)，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle g, iA_0(\lambda)g\rangle \simeq \langle \Delta g + f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda + g) - f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda), A_0(\lambda)g\rangle.$$

我们利用 (4.10)、(4.11) 以及 $A_0(\lambda)g = \frac{1}{N\lambda^2}\Delta q\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)g + A(\lambda)g$ 这一事实变换右端项。注意，对任意 $c_2 > 0$，只要将 c_0 取足够小，就有 $\frac{c_0}{\lambda^2}\|g\|_{\mathcal{E}}^2 \leq \frac{c_2}{2}|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}$，因此

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle g, iA_0(\lambda)g\rangle \\
\leq& c_2|t|^{-\frac{N-5}{N-6}} - \frac{1}{\lambda^2}\Big(\int_{|x|\leq R\lambda} |\nabla g|^2\,\mathrm{d}x - \Big\langle f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda + g) - f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda), \frac{1}{N}\Delta q\Big(\frac{\cdot}{\lambda}\Big)g\Big\rangle\Big) \\
&- \langle A(\lambda)(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda), f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda + g) - f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda) - f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g\rangle,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

其中 c_2 可以任意小。考虑第二行。我们将验证 4.28

$$\left|\Big\langle f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda + g) - f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda), \frac{1}{N}\Delta q\Big(\frac{\cdot}{\lambda}\Big)g\Big\rangle - \langle f'(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g, g\rangle\right| \ll |t|^{-\frac{N-1}{N-6}}.$$

事实上， Δq有界，因此 $\left\|\frac{1}{N}\Delta q\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)g\right\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}} \lesssim \|g\|_{\mathcal{E}}$。由 (2.2) 可得

$$\begin{aligned}
&\|f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda + g) - f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda) - f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}} \\
=&\|(|x|^{-4} * |g|^2)\left(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right) + 2\left(|x|^{-4} * \Re(\left(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right)\overline{g})\right)g + (|x|^{-4} * |g|^2)g\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}} \\
\lesssim&\||x|^{-4} * |g|^2\|_{L^{\frac{N}{2}}}\|\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}} + \||x|^{-4} * \Re(\left(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu + \mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\right)\overline{g})\|_{L^{\frac{N}{2}}}\|g\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}} \\
&+ \||x|^{-4} * |g|^2\|_{L^{\frac{N}{2}}}\|g\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}} \\
\lesssim&\|g\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}^2 + \|g\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}^3 \\
\lesssim&\|g\|_{\mathcal{E}}^2 \ll \|g\|_{\mathcal{E}}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

现在由 (2.1) 和引理 2.1 可得

$$
\begin{aligned}
&\big\|\big(f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f'(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)\big)g\big\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(|x|\le\widetilde{R}\lambda)}\\
\lesssim&\big\|(|x|^{-4}*W_\mu^2)g+\Big(|x|^{-4}*\Re\Big(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\mathrm{e}^{-i\theta}W_\lambda\Big)\Big)g+\Big(|x|^{-4}*\Re\Big(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\overline{g}\Big)\Big)\Big(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\Big)\\
&+\Big(|x|^{-4}*\Re\Big(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\overline{g}\Big)\Big)\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\big\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(|x|\le\widetilde{R}\lambda)}\\
\lesssim&\||x|^{-4}*W_\mu^2\|_{L^{\frac{N}{2}}(|x|\le\widetilde{R}\lambda)}\|g\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}+\||x|^{-4}*\Re\Big(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\mathrm{e}^{-i\theta}W_\lambda\Big)\|_{L^{\frac{N}{2}}(|x|\le\widetilde{R}\lambda)}\|g\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\\
&+\||x|^{-4}*\Re\Big(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu\overline{g}\Big)\|_{L^{\frac{N}{2}}(|x|\le\widetilde{R}\lambda)}\|\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(|x|\le\widetilde{R}\lambda)}\\
&+\||x|^{-4}*\Re\Big(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\overline{g}\Big)\|_{L^{\frac{N}{2}}(|x|\le\widetilde{R}\lambda)}\|W_\mu\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(|x|\le\widetilde{R}\lambda)}\\
\lesssim&\Big(\|\langle x\rangle^{-4}\|_{L^{\frac{N}{2}}(|x|\le\widetilde{R}\lambda)}+\||x|^{-4}*W_\lambda\|_{L^{\frac{N}{2}}(|x|\le\widetilde{R}\lambda)}+\|W_\mu\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(|x|\le\widetilde{R}\lambda)}\Big)\|g\|_{\mathcal{E}}\\
\lesssim&\Big(\lambda^2+\lambda^{\frac{N-6}{2}}\|(|x|^{-4}*W)(\frac{x}{\lambda})\|_{L^{\frac{N}{2}}(|x|\le\widetilde{R}\lambda)}+\lambda^{\frac{N-2}{2}}\Big)\|g\|_{\mathcal{E}}\\
\ll&\|g\|_{\mathcal{E}}.
\end{aligned}
$$

我们已得到

$$
\Big|\big\langle f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda+g)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda),\frac{1}{N}\Delta q\big(\frac{\cdot}{\lambda}\big)g\big\rangle-\big\langle f'(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g,\frac{1}{N}\Delta q\big(\frac{\cdot}{\lambda}\big)g\big\rangle\Big|\ll|t|^{-\frac{N-1}{N-6}}.
$$

但 $\frac{1}{N}\Delta q\big(\frac{x}{\lambda}\big)=1$ 对于 $|x|\le R\lambda$ 以及

$$
\|f'(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(|x|\ge R\lambda)}=\|(|x|^{-4}*W_\lambda^2)g+2\Big(|x|^{-4}*\Re\Big(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda\overline{g}\Big)\Big)\mathrm{e}^{i\zeta}W_\lambda\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(|x|\ge R\lambda)}.
$$

按上述计算，我们可以得到

$$
\|f'(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(|x|\ge R\lambda)}\ll\|g\|_{\mathcal{E}}\ll1,
$$

当 R 充分大时。这证明了 (4.28)。

界 (4.5) 与 (4.18) 连同 (2.55) 表明

$$
\int_{|x|\le R\lambda}|\nabla g|^2\,\mathrm{d}x-\langle f'(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda))g,g\rangle\ge-c_3\|g\|_{\mathcal{E}}^2,
$$

通过扩大 R， c_3 可以任意小。因此，我们得到 (4.27) 的第二行是 $\le c_2|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}$，其中 c_2 可以任意小。

接下来只需处理 (4.27) 的第三行。我们将证明，除去可忽略项后,—它等于 $\frac{1}{\lambda^2}K$。 $A(\lambda)(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)$ 的支集包含于 $|x|\le\widetilde{R}\lambda$，且 $\|A(\lambda)(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)\|_{L^\infty}\lesssim\lambda^{-2}$，因此

$$
\|A(\lambda)(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu)\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}\lesssim\big(\lambda^N\lambda^{-\frac{4N}{N-2}}\big)^{\frac{N-2}{2N}}=\lambda^{\frac{N-6}{2}}\sim|t|^{-1}.
$$

由 (4.29) 可得

$$
\|f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda+g)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}\lesssim\|g\|_{\mathcal{E}}^2\ll|t|^{-\frac{1}{N-6}}.
$$

因此，在 (4.27) 的第三行中，我们可以将 $A(\lambda)(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)$ 替换为 $A(\lambda)(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)$。性质 (P3) 意味着 $|AW-\Lambda W|\lesssim W$ 逐点成立，其中的常数与 c 和 R 无关； R 用于函数 q 的定义。经过重新缩放和相位变换后，我们得到

$\left|A(\lambda)(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-\frac{1}{\lambda^2}\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda\right|\lesssim\frac{1}{\lambda^2}W_\lambda$。但是，对于 $|x|\le R\lambda$，$A(\lambda)W=\frac{1}{\lambda^2}\Lambda W_\lambda$，因此我们得到

$$\begin{aligned}&\left|\langle A(\lambda)(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-\frac{1}{\lambda^2}\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,\ f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda+g)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g\rangle\right|\\ \lesssim&\frac{1}{\lambda^2}\int_{|x|\ge R\lambda}W_\lambda\cdot|f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda+g)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g|\,\mathrm{d}x\\ \lesssim&\|W_\lambda\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(|x|\ge R\lambda)}\|f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda+g)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(|x|\ge R\lambda)}.\end{aligned}$$

由 (4.29) 可得

$$\begin{aligned}&\left|\langle A(\lambda)(\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-\frac{1}{\lambda^2}\mathrm{e}^{i\theta}\Lambda W_\lambda,f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda+g)-f(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)-f'(\mathrm{e}^{i\zeta}W_\mu+\mathrm{e}^{i\theta}W_\lambda)g\rangle\right|\\ \lesssim&\frac{1}{\lambda^2}\|g\|_{\mathcal{E}}^2\|W\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(|x|\ge R)}\lesssim c_2|t|^{-\frac{N-5}{N-6}},\end{aligned}$$

其中 c_2 可随 $R\to+\infty$ 任意小。

重新进行从 (4.24) 开始的所有计算，我们得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle g,iA_0(\lambda)g\rangle\le\frac{c_1}{2}|t|^{-\frac{N-5}{N-6}}+\frac{1}{\lambda^2}K.$$

因此 (4.23) 推出 (4.22)。

由于 $\theta(T)=0$，我们有 $|\theta(T)|\lesssim\|g(T)\|_{\mathcal{E}}^2\ll|T|^{-\frac{1}{N-6}}$。在 $[T,t]$ 上对 (4.22) 积分，得到 $\psi(t)\gtrsim-c_1|t|^{-\frac{1}{N-6}}$。但是 $|\langle g(t)\ A_0(\lambda)g(t)\rangle|\lesssim\|g(t)\|_{\mathcal{E}}^2\le|t|^{-\frac{N-1}{N-6}}\ll|t|^{-\frac{1}{N-6}}$，因此得到 $\theta(t)\gtrsim-c_1|t|^{-\frac{1}{N-6}}$；若将 c_1 选得足够小，这便推出 (4.21)。至此，(4.8) 的证明完成。

步骤 3。由 (2.11) 我们得到 $\|g\|_{\mathcal{E}}^2+C_0\theta\lambda^{\frac{N-2}{2}}\le C_1|t|^{-\frac{N}{N-6}}$，因此

$$\|g\|_{\mathcal{E}}^2\le-C_0\theta\lambda^{\frac{N-2}{2}}+C_1|t|^{-\frac{N}{N-6}}\le\frac{1}{8}|t|^{-\frac{N-1}{N-6}}+C_1|t|^{-\frac{N}{N-6}},$$

只要 (4.19) 中的 c_0 足够小。这就得到了 (4.9)。 □

4.3. **通过拓扑论证选择初始数据**。命题 4.4 中的自举未涉及对 $\lambda(t)$、$a_1^+(t)$ 和 $a_2^+(t)$ 的控制。我们将在这里处理这一问题。

命题 4.8。设 $|T_0|$ 足够大。对于所有 $T<T_0$，存在满足(4.1)的 λ^0、a_1^0、a_2^0，使得具有初始数据 $u(T)$ 的解 $u(t)=-iW+W_{\lambda^0}+g^0$ 存在于时间区间 $[T,T_0]$ 上，并且对于 $t\in[T,T_0]$，界 (4.6)、(4.7)、(4.8)、(4.9)，

$$\begin{aligned}\left|\lambda(t)-\kappa|t|^{-\frac{2}{N-6}}\right|&\le\frac{1}{2}|t|^{-\frac{5}{2(N-6)}},\\ |a_1^+(t)|&\le\frac{1}{2}|t|^{-\frac{N}{2(N-6)}},\\ |a_2^+(t)|&\le\frac{1}{2}|t|^{-\frac{N}{2(N-6)}},\end{aligned}\tag{4.30}$$

成立。

证明。证明过程与 [11,命题 4.8],类似，因此省略。 □

定理 *1* 的证明。设 $T_0<0$ 由命题 4.8 给出，并令 T_0，T_1，T_2，.....为趋于 $-\infty$的递减序列。对于 $n\ge1$，令 u_n 为命题 4.8 给出的解。不等式 (4.6)、(4.7)、(4.8)、(4.30) 和 (4.9) 得出

$$\left\|u_n(t)-\left(-iW+W_{\kappa|t|^{-\frac{2}{N-6}}}\right)\right\|_{\mathcal{E}}\lesssim|t|^{-\frac{1}{2(N-6)}},\tag{4.31}$$

对所有 $t \in [T_n, T_0]$ 成立，且常数与 n无关。取一个子序列后，可假设 $u_n(T_0) \rightharpoonup u_0 \in \mathcal{E}$。令 u 为初值条件为 $u(T_0) = u_0$的方程 (1.1) 的解。弱稳定性引理 2.3 意味着 u 存在于时间区间 $(-\infty, T_0]$ 上，并且对所有 $t \in (-\infty, T_0]$，都有 $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$。在 (4.31) 中取弱极限即完成证明。□

参考文献

[1] *T. Aubin*，等周问题与 *Sobolev* 空间，*J. Diff. Geom., 11 (1976), 573–598.* [2] *D. Cao* 和 *Q. Guo*，五维*Hartree*方程的发散解，*Coll. Math., 125(2011), 255–287.* [3] *T. Cazenave*，半线性薛定谔方程。*Courant* 数学讲义，第 *10* 卷。纽约：纽约大学 *Courant* 数学科学研究所，*2003.* [4] *M. del Pino*、*M. Musso* 和 *J. Wei*，能量临界热方程中无穷时间泡塔的存在性与稳定性。*Anal. PDE, 14:5(2021), 1557–1598.* [5] *T. Duyckaerts*、*C. E. Kenig* 和 *F. Merle*，聚焦能量临界波方程径向解的动力学。*Camb. J. Math. 1:1(2013), 75–144.* [6] *T. Duyckaerts*、*C. E. Kenig* 和 *F. Merle*，所有奇数空间维数下径向临界波方程的孤子分辨率。*Acta Math. 230:1(2023), 1–92.* [7] *T. Duyckaerts*、*H. Jia*、*C. E. Kenig* 和 *F. Merle*，聚焦能量临界波方程沿时间序列的孤子分辨率。*Geom. Funct. Anal. 17:4(2017), 798–862.* [8] *Yu. B. Gaididei*、*K. Ø. Rasmussen* 和 *P. L. Christiansen*，含杂质的二维分子结构中的非线性激发，*Phys. Rev. E, 52(1995), 2951–2962.* [9] *J. Ginibre* 和 *G. Velo*，一类*Hartree*方程在能量空间中的散射理论，*Contemp. Math, 263, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 29–60.* [10] *J. Jendrej*，能量临界波动方程双泡解的构造，*Amer. J. Math., 141:1(2019), 55–118.* [11] *J. Jendrej*，能量临界非线性薛定谔方程双泡解的构造，*Anal. PDE, 10:8(2017), 1923–1959.*[12] *J. Jendrej*、*J. Krieger*，能量临界波映射方程中有限时间内聚集的同心泡，*arXiv:2501.08396.* [13] *J. Jendrej*、*A. Lawrie*，径向情形下能量临界非线性波方程的孤子分辨率，*Ann. PDE, 9:2(2023), Paper No. 18, 117 pp.* [14] *C. E. Kenig* 和 *F. Merle*，径向情形下能量临界聚焦非线性薛定谔方程的全局适定性、散射与爆破，*Invent. Math., 166(2006), 645–675.* [15] *C. E. Kenig* 和 *F. Merle*，能量临界聚焦非线性波方程的全局适定性、散射与爆破，*Acta Math., 201:2(2008), 147–212.* [16] *J. Krieger*、*E. Lenzman* 和 *P. Raphaël*，关于 L^2-临界*Hartree*非线性薛定谔方程伪共形爆破的稳定性，*Annales Henri Poincaré, 10:6(2009), 1159–1205.* [17] *J. Krieger*、*Y. Martel* 和 *P. Raphaël*，三维引力*Hartree*方程的双孤子解，*Comm. Pure Appl. Math., 62:11(2009), 1501–1550.* [18] *D. Li*、*C. Miao* 和 *X. Zhang*，聚焦能量临界*Hartree*方程，*J. Diff. Equat., 246(2009), 1139–1163.*[19] *D. Li* 和 *X. Zhang*，关于聚焦质量临界*Hartree*方程极小质量爆破解的分类，*Adv. Math., 220(2009), 1171–1192.* [20] *X. Li*、*C. Liu*、*X. Tang* 和 *G. Xu*，广义能量临界*Hartree*方程径向阈值解的动力学。*Forum Math., 37:5(2025), 1469–1502.* [21] *X. Li*、*C. Liu*、*X. Tang* 和 *G. Xu*，广义能量临界*Hartree*方程正泡解的非退化性，即将在 *Science China Mathematics* 发表。[22] *X. Li*、*C. Liu* 和 *G. Xu*，径向数据下能量临界*Hartree*方程基态以上的全局动力学。*arXiv:2506.05406.* [23] *E. H. Lieb*，*Hardy-Littlewood-Sobolev* 不等式及相关不等式的最佳常数，*Ann. Math., 118(1983), 349–374.* [24] *E. H. Lieb* 和 *M. Loss*，分析，*GSM*，第 *14* 卷，*AMS*，罗得岛州普罗维登斯，*2001.* [25] *C. Miao*、*Y. Wu* 和 *G. Xu*，聚焦能量临界非线性*Hartree*方程的动力学。*Forum Math., 27(2015), 373–447.* [26] *C. Miao*、*G. Xu* 和 *J. Yang*，$\mathbb{R}^4$中具有径向数据的散焦*Hartree*方程的全局适定性，*Commun. Contemp. Math., 22:2(2020), 1950004 (35 pages).* [27] *C. Miao*、*G. Xu* 和 *L. Zhao*，径向数据下能量临界散焦*Hartree*方程的全局适定性与散射，*J. Funct. Anal., 253(2007), 605–627.* [28] *C. Miao*、*G. Xu* 和 *L. Zhao*，*Hartree*方程的柯西问题，*J. PDEs, 21(2008), 22–44.*

[29] *C. Miao*、*G. Xu* 和 *L. Zhao*，径向情形下能量临界聚焦*Hartree*方程的全局适定性、散射与爆破，*Colloquium Mathematicum, 114(2009), 213–236.* [30] *C. Miao*、*G. Xu* 和 *L. Zhao*，具有径向数据的质量临界*Hartree*方程的全局适定性与散射，*J. Math. Pures Appl., 91(2009), 49–79.* [31] *C. Miao*、*G. Xu* 和 *L. Zhao*，$H^{1/2}$次临界散焦*Hartree*方程在 $\mathbb{R}^d$中的全局适定性与散射，*Ann. I. H. Poincaré, NA, 26(2009), 1831–1852.* [32] *C. Miao*、*G. Xu* 和 *L. Zhao*，$\mathbb{R}^4$中质量临界聚焦*Hartree*方程的爆破现象，*Colloquium Mathematicum, 119:1(2010), 23–50.* [33] *C. Miao*、*G. Xu* 和 *L. Zhao*，$\mathbb{R}^{1+n}$中能量临界散焦*Hartree*方程的全局适定性、散射与爆破，*Comm. PDEs, 36(2011), 729–776.* [34] *K. Nakanishi*，*Hartree*方程的能量散射，*Math. Res. Lett., 6(1999), 107–118.* [35] *K. Nakanishi* 和 *T. Roy*，具有径向数据的能量临界薛定谔方程基态以上的全局动力学，*Commun. Pure Appl. Anal. 15:6(2016), 2023–2058.* [36] *L. P. Pitaevskii*，不完美玻色气体中的涡旋线，*Sov. Phys. JETP, 13:2(1961), 451–454.* [37] *W. A. Strauss*，高维空间中孤立波的存在性，*Comm. Math. Phys., 55(1977), 149–162.*[38] *L. Sun*、*J. Wei* 和 *Q. Zhang*，能量临界热方程古老解中的泡塔，*Calc. Var. PDE, 61 (2022), article number 200.* [39] *G. Talenti*，*Sobolev* 不等式中的最佳常数，*Ann. Mat. Pura. Appl. 110(1976), 353–372.* [40] *T. Zhou*，聚焦广义*Hartree*方程的阈值解，*J. Diff. Equat., 439(2025), Paper No. 113394, 61 pp.*

Jacek Jendrej
朱西厄数学研究所、索邦大学、巴黎西岱大学，法国巴黎Jussieu广场4号，邮编75005；以及克拉科夫AGH大学应用数学学院，波兰克拉科夫Adama Mickiewicza大道30号，邮编30-059。电子邮箱：jendrej@imj-prg.fr

Xuemei Li
教育部数学与复杂系统实验室，北京师范大学数学科学学院，北京，100875，中华人民共和国。电子邮箱：xuemei_li@mail.bnu.edu.cn

Guixiang Xu
数学与复杂系统实验室，教育部，数学科学学院，北京师范大学，北京，100875，中华人民共和国。电子邮箱：guixiang@bnu.edu.cn