arXiv:2602.08493v1 [math.DS] 9 Feb 2026

# 两个线性分支的问题

**Fritz Schweiger，萨尔茨堡大学数学系，奥地利萨尔茨堡**
fritz.schweiger@plus.ac.at

**摘要** 具有三个或更多分支的分段分式线性映射已在多篇论文中得到研究。对于许多莫比乌斯映射，其不变测度的密度形式可以精确写出。然而，如果仅有两个分支是线性的，目前尚无显式形式。本文提出了一种部分解决方案。

数学主题分类（*2000*）：11K55, 28D05, 37A05关键词：纤维系统，f-展开，不变测度

## 引言

自 Rényi 的奠基性工作以来 [2]，与数论相关的遍历理论已有大量出版成果（参见 [3], [1], [5]）。分式线性映射$T$：具有三个分支的映射，是遍历理论中纤维系统的有趣例子（参见 [4],[6]）。许多具有三个分支的分式线性系统是遍历的，并且存在一个相对于勒贝格测度 $\lambda$ 绝对连续的不变测度 $\mu$。然而，关于其密度$\mu$，我们所知甚少。基本方法是使用对偶映射。下面对此进行说明。

我们考虑具有划分 $0 < p_1 < p_2 < 1$和三个矩阵 $V_\alpha$，$V_\beta.V_\gamma$ 的莫比乌斯映射，使得相关的分式线性映射满足$V_\alpha[0,p_1] = V_\beta[p_1,p_2] = V_\gamma[p_2,1] = [0,1]$。然后，我们使用与转置矩阵 $V_\alpha^*$，$V_\beta^*$，$V_\gamma^*$相关联的映射。

**(1)** 存在一个可逆对称矩阵 $M$，使得 $MV_i = V_i^* M$、$i = \alpha$，$\beta$，$\gamma$。图像 $B^* = M[0.1] = [\rho,\sigma]$ 与这三个映射一起称为自然对偶，并且

$$h(x) = \int_{B^*} \frac{dy_1 dy_2}{(1 + x_1 y_1 + x_2 y_2)^3}$$

是该不变密度。
(2) 可能存在一个区间 $\rho,\ \sigma]$ 使得三个分支 $V_\alpha^*,\ V_\beta^*,\ V_\gamma^*$构成一个并非自然对偶的纤维系统。这种系统称为例外对偶。接下来

$$h(x)=\int_{B^*}\frac{dy_1dy_2}{(1+x_1y_1+x_2y_2)^3}$$

是不变密度。如果所有分支都有一个公共不动点 $\tau$，那么

$$h(x)=\frac{1}{(1+x\tau)^2}.$$

(3) 如果存在一个有两个分支 $V_0$ 和 $V_1$ 的纤维系统，满足 $V_\alpha =V_0,\ V_\beta=V_1V_0,\ V_\gamma=V_1V_1$ 或 $V_\alpha=V_0,\ V_\beta=V_1V_1,\ V_\gamma=V_1V_0$，那么可以利用跳跃变换求出密度（这种方法称为*1* 步扩展，见 [7]）。此外还存在另外两种情况，其条件为 $V_\gamma=V_1$。

现在，如果 $Vx=\frac{a+bx}{c}$，也就是说，$V$是线性的，那么 $V^*y=\frac{by}{c+ay}$和 $V^*0=0$。这一观察引出了一个有趣的问题。如果三个分支中只有一个是线性的，那么很有希望找到不变测度的密度。如果三个分支都是线性的，那么密度为$h(x)=1$。如果两个分支是线性的，只有一个分支是非线性的，那么不变测度的密度形状（如果存在）尚不清楚！本文为这个问题提供了一个部分解答。

**第一个构造**

这里我们使用划分 $0<\frac{1}{3}<\frac{2}{3}<1$。设$T$为一个分式线性映射，使得 $T$ 在 $[0,\frac{1}{3}]$ 上以及在带有 $T[0,\frac{1}{3}]=T[\frac{2}{3},1]=[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ 的$[\frac{2}{3},1]$ 上是线性的，而在$[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ 和 $T[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]=[0,1]$上是非线性的。稍后我们将看到，值 $\beta=0$ 也对应于 $T$ 是线性的。

我们考虑一个跳跃变换 $S$，即由 $S=T^2$ 在 $[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$ 上以及 $S=T$ 在 $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$上定义的莫比乌斯映射。若 $\nu$ 是 $S$的一个不变测度，其密度为 $h$，则由 $\mu(E)=\nu(E)+\nu(T^{-1}E\cap[0,\frac{1}{3}])+\nu(T^{-1}E\cap[\frac{2}{3},1])$ 定义的 $\mu$（密度为 $g$）对 $T$ 是不变的。

由于 $S$是一个具有三个分支的分段分式线性映射，我们尝试寻找自然对偶映射。如果 $V_\alpha,V_\beta,V_\gamma$是 $T$的三个反分支，那么 $V_{\alpha\beta},V_\beta,V_{\gamma\beta}$

是 $S$的三个反分支。注意，密度 $g$ 给出为

$$g(x) = h(x), , 0 < x < \frac{1}{3}, \frac{2}{3} < x < 1$$

$$g(x) = h(x) + g(V_\alpha x)\omega_\alpha(x) + h(V_\gamma x)\omega_\gamma(x), \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}.$$

这里 $\omega_\alpha$ 和 $\omega_\gamma$ 分别表示 $V_\alpha$ 和 $V_\gamma$的雅可比行列式。
结果与 $\beta = 0$的结果一致，即 $h(x) =$ 和 $g(x) = 3$在 $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.
我们用 $\varepsilon = 1$ 表示递增分支，用 $\varepsilon = -1$ 表示递减分支。T 的类型 记作 $[\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma]$。注意，我们假设 $-1 < \beta \leq 2$。然而， $\beta = 0$ h 属于线性映射。

**定理1.** . ***(1)*** 如果映射 $T$的类型为 $[1, 1, 1],$ ，那么 $S$具有自然对偶，且

$$h(x) = \frac{1}{(2 - \beta + 3\beta x)(2 + 3\beta x)}.$$

***(1)*** 如果映射 $T$的类型为 $[1, -1, 1]$，那么 $S$具有自然对偶，且

$$h(x) = \frac{1}{(4 + \beta + 3\beta x)(4 + 3\beta x)}.$$

证明. 我们列出 $T$ 和 $S$的相关（逆）分支。

$$\varepsilon_\alpha = 1 : V_\alpha x = \frac{-1 + 3x}{3}, , \varepsilon_\alpha = -1 : V_\alpha x = \frac{2 - 3x}{3}$$

$$\varepsilon_\beta = 1 : V_\beta x = \frac{1 + (1 + 2\beta)x}{3 + 3\beta x}, \varepsilon_\beta = -1 : V_\beta x = \frac{2 + (-1 + \beta)x}{3 + 3\beta x}$$

$$\varepsilon_\gamma = 1 : V_\gamma x = \frac{1 + 3x}{3}, , \varepsilon_\gamma = -1 : V_\gamma x = \frac{4 - 3x}{3}$$

为确定映射 $S$，计算 $V_{\alpha\beta}x = V_\alpha(V_\beta x)$ 和 $V_{\gamma\beta}x = V_\gamma(V_\beta x)$。我们得到

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = 1 : V_{\alpha\beta}x = \frac{(1 + \beta)x}{3 + 3\beta x}, \varepsilon_{\alpha\beta} = -1 : V_{\alpha\beta}x = \frac{(1 - x}{3 + 3\beta x}$$

$$\varepsilon_{\gamma\beta} = 1 : V_{\gamma\beta}x = \frac{2 + (1 + 3\beta)x}{3 + 3\beta x}, \varepsilon_{\gamma\beta} = -1 : V_{\gamma\beta}x = \frac{3 + (-1 + 2\beta)x}{3 + 3\beta x}$$

我们要寻找一个映射 $Mx = \frac{B+Dx}{A+Bx}$, 使得 $M(V_i x) = V_i^*(Mx)$, $i \in \{\alpha\beta, \beta, \gamma\beta\}$。由此得到关于三个未知数 $A$, $B$, $D$ 的三个齐次方程。要有非平凡解，行列式必须为零，$DET = 0$。

**(1)** 类型 $[1, 1, 1]$

我们得到齐次方程

$$A(3\beta) + B(-2 + \beta) = 0$$

$$A3\beta + B(-2 + 2\beta) - D = 0$$

$$A3\beta + B(-2 + 3\beta) - 2D = 0.$$

于是 $DET = 0$，我们得到 $A = 2 - \beta$、 $B = 3\beta$ 和 $D = 3\beta^2$。

举例来说，我们取 $\beta = 2$。于是有

$$V_{\alpha\beta}x = \frac{x}{1+2x}, V_\beta x = \frac{1+5x}{3+6x}, V_{\gamma\beta}x = \frac{2+7x}{3+6x}$$

and

$$h(x) = \frac{1}{x(1+3x)}.$$

**(2)** 类型 $[1, -1, 1]$

同样，我们得到 $DET = 0$，以及数值 $A = 4 + \beta$、 $B = 3\beta$ 和 $D = 3\beta^2$。举例来说，我们取 $\beta = 1$。于是有

$$V_{\alpha\beta}x = \frac{1-x}{3+x}, V_\beta x = \frac{2}{3+3x}, V_{\gamma\beta}x = \frac{3+x}{3+3x}$$

and

$$h(x) = \frac{1}{(4+3x)(5+3x)}.$$

□

**定理 2.** 映射 $S$ 对于另外 *6* 种 $T$没有自然对偶。

证明. 由于映射 $\psi x = 1 - x$ 对于配对 $[1, -1 - 1]$,$[-1, -1, 1]$ 和 $[1, 1, -1]$, $[-1, , 1]$ 是同构，因此只剩下 4 种情况。因此，我们列出剩余的 4 种类型及其行列式。

$[1, -1, -1]$： $DET = 6\beta$

$[1,1,-1]$： $DET = 6\beta^2$[$-1,1,-1$]：
$DET = 12\beta(1+\beta)$[$-1,-1,-1$]：
$DET = 9\beta(2+\beta)$

□

**一般性结果**

我们从 $p_1 = \frac{1}{3}$ 和 $p_2 = -\frac{2}{3}$ 开始。这是一个非常幸运的选择。下一个定理有一点出人意料。

**定理 3.** 设 $0 < p_1 < p_2 < 1$，则对于类型 $[1,1,1]$，以及 $T$ 的类型 $[1,-1,1]$，映射 $S$ 存在自然对偶，当且仅当 $p_1^2 + p_2^2 - p_1p_2 - p_1 = 0$。

证明。 我们给出相关的映射。

$$\varepsilon_\alpha = 1 : V_\alpha x = \frac{-p_1^2 + p_1 x}{p_2 - p_1}$$

$$\varepsilon_\beta = 1 : V_\beta x = \frac{p_1 + (p_2 - p_1 + p_2\beta)x}{1+\beta x},\ \varepsilon_\beta = -1 : V_\beta x = \frac{p_2 + (-p_2 + p_1 + p_1\beta)x}{1+\beta x}$$

$$\varepsilon_\gamma = 1 : V_\gamma x = \frac{p_2^2 - p_1 + (1-p_2)x}{p_2 - p_1},,$$

对于类型 $[1,1,1]$，我们计算

$$V_{\alpha\beta}x = \frac{(p_1 + p_1\beta)x}{1+\beta x},\ V_{\gamma\beta}x = \frac{p_2 + (1 - p_2 + \beta)x}{1+\beta x}$$

并得到 $DET = (p_1^2 + p_2^2 - p_1p_2 - p_1)(\beta^2 + \beta)$。
对于类型 $[1,-1,1]$，我们计算

$$V_{\alpha\beta}x = \frac{p_1 - p_1 x}{1+\beta x},\ V_{\gamma\beta}x = \frac{1 + (-1 + p_2 + p_2\beta)x}{1+\beta x}$$

并求出 $DET = (p_1^2 + p_2^2 - p_1p_2 - p_1)(\beta^2 + \beta)$。在这两种情况下，$DET = 0$ 仅当 $\beta = 0$、$\beta = -1$（不是允许的值）或 $p_1^2 + p_2^2 - p_1p_2 - p_1 = 0$ 时才成立。□

如果 $p_1 + p_2 = 1$，那么我们得到 $p_1 = \frac{1}{3}$ 和 $p_2 = \frac{2}{3}$。另一个有理数解是 $p_1 = \frac{1}{7}$ 和 $p_2 = \frac{3}{7}$。

**最后说明**

本文仅限于寻找 $S$的自然对偶。可能还存在特殊的对偶，但大量可能的构型或许值得进一步研究。

# 参考文献

[1]Iosifescu, M. 和 Kraaikamp, C. 2002：连分数的度量理论Kluwer Axademic Publishers，多德雷赫特( 波士顿(伦敦 2002))2002[2] R´enyi, A. 1957：实数表示及其遍历性质$Acta\ Math.\ Acad.\ Sci.\ Hunggar.$ 8, 477-493[3] Schweiger, F. 1995：纤维系统遍历理论与度量数论 Okford Science Publications，纽约 The Clarendon Press，牛津 1995[4] Schweiger, F. 分式线性映射的可微等价。*IMS*讲义—专著系列动力学与随机过程48 (2006), 237- 247[5] Schweiger, F. 2016：连分数及其推广：*f*-展开简史。Docent Press，波士顿 2016[6] Schweiger, F. 2018：分段分式线性映射与分段二次映射的不变测度。国际数论杂志14 (218), 1559-1572[7] Schweiger, F. 2025：. 关于由其对偶映射构型刻画的莫比乌斯映射《数学探索》16 (2025). 806-818