arXiv:2602.08496v1 [math.AP] 9 Feb 2026

点源驱动的黏性伯格斯方程：弱极限公式

Smritikana Pal 和 Manas R. Sahoo

Abstract. 本文求得了点源项驱动的黏性 Burgers 方程解在黏性系数趋于零时的弱极限。该弱极限与一个变分问题相关，该问题由三类泛函构成；在不存在源项时，这种情况并不常见。

1. Introduction

点源驱动的守恒律可归入一类更广泛的方程，即

$$u_t + F(t,x,u)_x = \alpha(t,x)\delta. \tag{1.1}$$

上述类型的方程有助于研究非均质介质中的流体流动，例如岩石类型变化条件下、与石油工业相关的流体流动。该方程与具有不连续通量的哈密顿-雅可比方程密切相关。许多作者研究了具有不连续通量函数的哈密顿-雅可比方程，参见 [1–4]。这一研究可追溯至 E. Hopf 的工作 [7], ，他研究了上述问题 (1.1) 中 $F(t,\ x,\ u) = \frac{u^2}{2}$ 且 $\alpha(t,\ x) = 0$ 的情形。他采用消失黏性方法，在黏性系数趋于零时取极限，从而得到问题 (1.1) 的弱熵解。随后，Lax（ [10]）和 Oleˇinik [12,13] 进一步推动了这一领域的发展。例如，Lax 研究了问题 (1.1)，其中 $F(t,\ x,\ u) = f(u)$ 是一个凸函数，且 $\alpha(t,\ x) = 0$。他为熵可容许弱解得到了一个显式公式。Oleˇinik 通过考虑单侧利普希茨条件研究了唯一性。最近，Chung 等人 [5]针对 $\epsilon = 1.$ 考虑了以下问题

$$\begin{cases} u_t + (\frac{u^2}{2})_x = \epsilon u_{xx} + \delta, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 u_0 是有界可测函数。借助沿边界一阶接触这一有趣思路，他们得到了沿边界正则性较低的解

2020 数学学科分类。 35D30, 35F25, 35L03,35L65, 35L67。关键词与短语。 带点源的伯格斯方程；消失黏性极限；Lax-Oleˇınik公式。数学科学学院，国家科学教育与研究学院（霍米·巴巴国立研究所校外中心），布巴内斯瓦尔，贾特尼邮局，库尔达，奥迪沙752050，印度。电子邮箱：smritikana.pal@niser.ac.in, manas@niser.ac.in。

，并研究了上述问题在 $\epsilon = 1$ 下的大时间渐近行为。利用拉普拉斯逆变换，可以得到黏性问题的显式公式，见 [15]。于是问题是：“能否得到消失黏性极限？”本文回答了这个问题。本文考虑的问题可写为通量不连续的守恒律，这一问题已得到深入研究；参见 [1–4]，及其中的参考文献。现在我们介绍一些与该问题相关的有趣研究：Ostrov [14] 考虑了这一问题

$$\begin{cases} v_t + F^\delta(x, v_x) = \epsilon v_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ v(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 F^δ 是 F 的正则化，并证明了$v_{\epsilon,\ \delta}$（式 (1.3) 的唯一解）收敛到唯一的黏性解 v

$$\begin{cases} v_t + F(x, v_x) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ v(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.4}$$

as $\epsilon \to 0,\ \delta \to 0$. Karlsen、Risebro 和 Towers [8] 证明了解 o f

$$\begin{cases} u_t + F^\delta(x, u)_x = \epsilon u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

当 $\epsilon \to 0,\ \delta \to 0$ 时收敛到式 (1.1) 的一个解，且不满足界面熵条件

$$meas\{t : f'(u^+(t)) > 0, g'(u^-(t)) < 0\} = 0 \tag{1.5}$$

其中 F 在 $x = 0$ 处有一个间断点，并由下式给出

$$F(x,u) = H(x)f(u) + (1 - H(x))g(u)$$

and $f,\ g$ 是 Lipschitz连续函数，且 H 是 Heaviside函数。

例如，在上述研究中，Karlsen 等人 [8] 研究了上述问题的消失黏性极限。消失黏性近似并不收敛到 Adimurthi 等人 [4]得到的解。本文不对通量函数进行正则化，而是考虑正则性较低的解，并证明我们的解收敛到 Adimurthi 等人 [4]得到的解。为求得黏性问题(1.2)的解，我们采用沿边界的一阶接触方法，见 [5]。

本文结构如下：在第 2 节中，我们得到消失黏性近似的显式公式。在第 3 节，我们得到解的分布极限 U^ϵ，其中 $U^\epsilon_x = u^\epsilon$ 是黏性问题 (1.2) 的解。在第 4 节中，我们研究与第 3 节所得极限相关的极小化子的一些性质，并得到极限函数的显式公式 u。消失黏性极限与 Adimurthi 等人得到的显式公式一致。 [1] 确实是无黏方程的弱解，即

$$\begin{cases} u_t + (\frac{u^2}{2})_x = \delta, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.6}$$

2. Explicit solution for viscous regularization

对于 $\epsilon > 0$，我们在以下定理中给出问题(1.2)的显式解。

定理 2.1。 问题 (1.2) 的显式解 $u^\epsilon, \epsilon > 0$ 由 $u^\epsilon(x,t) = -\frac{2\epsilon\theta^\epsilon_x}{\theta^\epsilon}$给出，其中

$$\theta^\epsilon(x,t) = \begin{cases} R^\epsilon(x,t) & x > 0, t > 0 \\ L^\epsilon(x,t) & x < 0, t > 0, \end{cases}$$

且 R^ϵ, L^ϵ 如下：

$$\begin{aligned} R^\epsilon(x,t) = e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \Big[& \frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}} \int_0^\infty \Big\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\epsilon t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\epsilon t}} \Big\} \theta_0^\epsilon(\xi) d\xi \\ & + \int_0^t \Big(e^{\frac{\tau}{2\epsilon}} g(\tau) \Big)' \, erfc\Big(\frac{x}{2\sqrt{\epsilon(t-\tau)}} \Big) d\tau + g(0) erfc\Big(\frac{x}{2\sqrt{\epsilon t}} \Big) \Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^\epsilon(x,t) = & \frac{-1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}} \int_0^\infty \Big\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\epsilon t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\epsilon t}} \Big\} \theta_0^\epsilon(-\xi) d\xi + \int_0^t g\prime(\tau) \; erfc\Big(\frac{-x}{2\sqrt{\epsilon(t-\tau)}} \Big) d\tau \\ & + g(0) erfc\Big(\frac{-x}{2\sqrt{\epsilon t}} \Big). \end{aligned}$$

这里，项 θ_0^ϵ 和 g 如下：

$$\begin{aligned} \theta_0^\epsilon(x) &= e^{-\frac{1}{2\epsilon}\int_0^x u_0(y)dy} \\ g(t) &= g(0) e^{-\frac{t}{4\epsilon}} I_0(-\frac{t}{4\epsilon}) + \frac{\epsilon^{\frac{3}{2}}}{\pi} \int_0^t \frac{1 - e^{-\frac{\tau}{2\epsilon}}}{\tau^{\frac{3}{2}}} f(t-\tau) d\tau \end{aligned} \tag{2.1}$$

且 I_0 是第一类修正贝塞尔函数。此外，项 $f(t)$ 如下：

$$f(t) = \frac{1}{2(\epsilon t)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \Big[e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \theta_0^\epsilon(\xi) + \theta_0^\epsilon(-\xi) \Big] \xi e^{-\frac{\xi^2}{4\epsilon t}} d\xi - \frac{g(0)}{\sqrt{\epsilon t}} (e^{-\frac{t}{2\epsilon}} + 1). \tag{2.2}$$

进一步地，$u^\epsilon \in C((0,\infty); H^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})) \cap C^\infty\big(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (0,\infty)\big)$ 并满足以下弱形式。

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \big[u^\epsilon \phi_t + \frac{1}{2}(u^\epsilon)^2 \phi_x - \epsilon u^\epsilon_x \phi_x \big] dx dt + \int_0^\infty \phi(0,t) dt - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(x,0) dx = 0, \tag{2.3}$$

对所有 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$。

证明。 考虑以下初值问题：

$$\begin{aligned} u_t + u u_x - \epsilon u_{xx} = \delta, \; x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \; x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

为将这一非线性方程转化为线性方程，我们考虑以下众所周知的霍普夫–科尔变换：

$$\theta^\epsilon(x,t) = e^{-\frac{1}{2\epsilon}\int_0^x u(y,t) dy}.$$

Then

$$\theta_x^\epsilon(x,t) = e^{-\frac{1}{2\epsilon}\int_0^x u(y,t)dy}\Big(-\frac{1}{2\epsilon}u(x,t)\Big).$$

因此

$$u(x,t) = -\frac{2\epsilon\theta_x^\epsilon}{\theta^\epsilon}$$

and

$$\begin{aligned}\theta^\epsilon(x,0) = \theta_0^\epsilon(x) &= e^{-\frac{1}{2\epsilon}\int_0^x u(y,0)dy} \\ &= e^{-\frac{1}{2\epsilon}\int_0^x u_0(y)dy}.\end{aligned}$$

Now,

$$u_t = -2\epsilon\Big(\frac{\theta_t^\epsilon}{\theta^\epsilon}\Big)_x,$$

and

$$\begin{aligned}u_x &= -2\epsilon\Big(\frac{\theta_x^\epsilon}{\theta^\epsilon}\Big)_x \\ u_{xx} &= -2\epsilon\Big(\frac{\theta_x^\epsilon}{\theta^\epsilon}\Big)_{xx}.\end{aligned}$$

然后将上述表达式代入(2.4)并化简，我们得到

$$-2\epsilon\Big(\frac{\theta_t^\epsilon}{\theta^\epsilon}\Big)_x = \epsilon^2\Big[-2\Big(\frac{\theta_x^\epsilon}{\theta^\epsilon}\Big)_x - 2\Big(\frac{\theta_x^\epsilon}{\theta^\epsilon}\Big)^2\Big]_x + \delta.$$

若 θ^ϵ 满足，则上述成立

$$\theta_t^\epsilon = \epsilon\theta_{xx}^\epsilon - H(x)\frac{\theta^\epsilon}{2\epsilon},$$

where $H(x)$是Heaviside函数。因此，问题(2.4)化为

$$\begin{aligned}\theta_t^\epsilon &= \epsilon\theta_{xx}^\epsilon - H(x)\frac{\theta^\epsilon}{2\epsilon}\ , x\in\mathbb{R}, t>0 \\ \theta^\epsilon(x,0) &= \theta_0^\epsilon(x)\ , x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

设 $R^\epsilon(x,t)$为右半域 $\{x>0\}$ 中满足以下条件的解

$$\begin{aligned}R_t^\epsilon - \epsilon R_{xx}^\epsilon &= -\frac{R^\epsilon}{2\epsilon},\ x>0, t>0 \\ R^\epsilon(x,0) &= \theta_0^\epsilon(x),\ x>0 \\ R^\epsilon(0,t) &= g(t),\ t>0.\end{aligned} \tag{2.6}$$

设 $L^\epsilon(x,t)$为左半域 $\{x<0\}$ 中满足以下条件的解

$$\begin{aligned}L_t^\epsilon &= \epsilon L_{xx}^\epsilon,\ x<0, t>0 \\ L^\epsilon(x,0) &= \theta_0^\epsilon(x),\ x<0 \\ L^\epsilon(0,t) &= g(t),\ t>0\end{aligned} \tag{2.7}$$

其中， $g(t)$ 是 t 的函数，其具体形式将在后文确定。考虑如下变换

$$R^\epsilon(x,t) = e^{-\frac{t}{2\epsilon}}w^\epsilon(x,t). \tag{2.8}$$

Then

$$R_t^\epsilon = e^{-\frac{t}{2\epsilon}} w_t^\epsilon + e^{-\frac{t}{2\epsilon}}(-\frac{1}{2\epsilon})w^\epsilon,$$
$$R_{xx}^\epsilon = e^{-\frac{t}{2\epsilon}} w_{xx}^\epsilon.$$

然后，简化（2.6），得到如下结果。

$$\begin{aligned} w_t^\epsilon &= \epsilon w_{xx}^\epsilon,\ x>0, t>0 \\ w^\epsilon(x,0) &= \theta_0^\epsilon(x),\ x>0 \\ w^\epsilon(0,t) &= e^{\frac{t}{2\epsilon}} g(t),\ t>0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

因此，(2.9) 的解由下式给出

$$w^\epsilon(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}} \int_0^\infty \Big\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\epsilon t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\epsilon t}} \Big\} \theta_0^\epsilon(\xi) d\xi + \frac{x}{2\sqrt{\pi\epsilon}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4\epsilon(t-\tau)}} \frac{e^{\frac{\tau}{2\epsilon}} g(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} d\tau. \tag{2.10}$$

现在，分别定义误差函数和互补误差函数。

$$err(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du,$$
$$erfc(z) = 1 - err(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du.$$

为简化 (2.10) 中的第二项，考虑积分

$$\begin{aligned} &\int_0^t \Big(e^{\frac{\tau}{2\epsilon}} g(\tau) \Big)' erfc\Big(\frac{x}{2\sqrt{\epsilon(t-\tau)}} \Big) d\tau \\ =&\Big[e^{\frac{\tau}{2\epsilon}} g(\tau) erfc\Big(\frac{x}{2\sqrt{\epsilon(t-\tau)}} \Big) \Big]_0^t - \int_0^t e^{\frac{\tau}{2\epsilon}} g(\tau)(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}) e^{-\frac{x^2}{4\epsilon(t-\tau)}} \frac{(-x)(-1)}{4\sqrt{\epsilon}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} d\tau \\ =&- g(0) erfc\Big(\frac{x}{2\sqrt{\epsilon t}} \Big) + \int_0^t \frac{x}{2\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon(t-\tau)}} \frac{e^{\frac{\tau}{2\epsilon}} g(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} d\tau. \end{aligned}$$

So,

$$\begin{aligned} \frac{x}{2\sqrt{\pi\epsilon}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4\epsilon(t-\tau)}} \frac{e^{\frac{\tau}{2\epsilon}} g(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} d\tau = &\int_0^t \Big(e^{\frac{\tau}{2\epsilon}} g(\tau) \Big)' erfc\Big(\frac{x}{2\sqrt{\epsilon(t-\tau)}} \Big) d\tau \\ &+ g(0) erfc\Big(\frac{x}{2\sqrt{\epsilon t}} \Big). \end{aligned}$$

于是由（2.10）可得,

$$\begin{aligned} w^\epsilon(x,t) = &\frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}} \int_0^\infty \Big\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\epsilon t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\epsilon t}} \Big\} \theta_0^\epsilon(\xi) d\xi + \int_0^t \Big(e^{\frac{\tau}{2\epsilon}} g(\tau) \Big)' erfc\Big(\frac{x}{2\sqrt{\epsilon(t-\tau)}} \Big) d\tau \\ &+ g(0) erfc\Big(\frac{x}{2\sqrt{\epsilon t}} \Big). \end{aligned}$$

因此，由（2.8）可得

$$R^{\epsilon}(x,t) = e^{-\frac{t}{2\epsilon}}\Big[\frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}\int_0^{\infty}\Big\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\epsilon t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\epsilon t}}\Big\}\theta_0^{\epsilon}(\xi)d\xi + \int_0^t \Big(e^{\frac{\tau}{2\epsilon}}g(\tau)\Big)'\, erfc\Big(\frac{x}{2\sqrt{\epsilon(t-\tau)}}\Big)d\tau + g(0)erfc\Big(\frac{x}{2\sqrt{\epsilon t}}\Big)\Big].$$

现在，(2.7) 的解为

$$\begin{aligned} &L^{\epsilon}(x,t)\\ &= \frac{-1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}\int_0^{\infty}\Big\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\epsilon t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\epsilon t}}\Big\}\theta_0^{\epsilon}(-\xi)d\xi - \frac{x}{2\sqrt{\pi\epsilon}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{4\epsilon(t-\tau)}}\frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\tau. \end{aligned} \tag{2.11}$$

为简化 (2.11) 中的第二项，考虑积分

$$\begin{aligned} &\int_0^t g\prime(\tau)\; erfc\Big(\frac{-x}{2\sqrt{\epsilon(t-\tau)}}\Big)d\tau\\ &= \Big[g(\tau)erfc\Big(\frac{-x}{2\sqrt{\epsilon(t-\tau)}}\Big)\Big]_0^t - \int_0^t g(\tau)(-\frac{2}{\sqrt{\pi}})e^{-\frac{x^2}{4\epsilon(t-\tau)}}\frac{(-x)(-1)(-1)}{4\sqrt{\epsilon}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\tau\\ &= -g(0)erfc\Big(\frac{-x}{2\sqrt{\epsilon t}}\Big) - \int_0^t \frac{x}{2\sqrt{\pi\epsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\epsilon(t-\tau)}}\frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\tau. \end{aligned}$$

So,

$$\frac{-x}{2\sqrt{\pi\epsilon}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{4\epsilon(t-\tau)}}\frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\tau = \int_0^t g\prime(\tau)\; erfc\Big(\frac{-x}{2\sqrt{\epsilon(t-\tau)}}\Big)d\tau + g(0)erfc\Big(\frac{-x}{2\sqrt{\epsilon t}}\Big).$$

因此，由（2.11）可得,

$$L^{\epsilon}(x,t) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}\int_0^{\infty}\Big\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\epsilon t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\epsilon t}}\Big\}\theta_0^{\epsilon}(-\xi)d\xi + \int_0^t g'(\tau)\; erfc\Big(\frac{-x}{2\sqrt{\epsilon(t-\tau)}}\Big)d\tau + g(0)erfc\Big(\frac{-x}{2\sqrt{\epsilon t}}\Big). \tag{2.12}$$

现在我们计算 $R_x^\epsilon(x,t)$ 和 $L_x^\epsilon(x,t)$，然后假设 $R_x^\epsilon(0,t) = L_x^\epsilon(0,t)$，以求出未知函数 $g(t)$。现在，

$$
\begin{aligned}
R_x^\epsilon(x,t) &= e^{-\frac{t}{2\epsilon}}\Big[\frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}\int_0^\infty \Big\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\epsilon t}}\frac{-(x-\xi)}{2\epsilon t} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\epsilon t}}\frac{-(x+\xi)}{2\epsilon t}\Big\}\theta_0^\epsilon(\xi)d\xi \\
&\quad + \int_0^t \Big(e^{\frac{\tau}{2\epsilon}}g(\tau)\Big)'\Big(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big)\frac{e^{\frac{-x^2}{4\epsilon(t-\tau)}}}{2\sqrt{\epsilon(t-\tau)}}d\tau + g(0)\Big(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big)\frac{e^{\frac{-x^2}{4\epsilon t}}}{2\sqrt{\epsilon t)}}\Big] \\
&= e^{-\frac{t}{2\epsilon}}\Big[\frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}\int_0^\infty \Big\{\frac{(\xi-x)}{2\epsilon t}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\epsilon t}} + \frac{(x+\xi)}{2\epsilon t}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\epsilon t}}\Big\}\theta_0^\epsilon(\xi)d\xi \\
&\quad - \int_0^t \Big(e^{\frac{\tau}{2\epsilon}}g(\tau)\Big)'\frac{e^{\frac{-x^2}{4\epsilon(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi\epsilon(t-\tau)}}d\tau - \frac{g(0)e^{\frac{-x^2}{4\epsilon t}}}{\sqrt{\pi\epsilon t}}\Big] \\
&= e^{-\frac{t}{2\epsilon}}\Big[\frac{1}{4\sqrt{\pi}(\epsilon t)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty \theta_0^\epsilon(\xi)\Big((\xi-x)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\epsilon t}} + (\xi+x)e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\epsilon t}}\Big)d\xi\Big] \\
&\quad - \frac{e^{-\frac{t}{2\epsilon}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \Big(e^{\frac{\tau}{2\epsilon}}g(\tau)\Big)'\frac{e^{\frac{-x^2}{4\epsilon(t-\tau)}}}{\sqrt{\epsilon(t-\tau)}}d\tau - \frac{e^{-\frac{t}{2\epsilon}}g(0)}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{\frac{-x^2}{4\epsilon t}}}{\sqrt{\epsilon t}}
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

and,

$$
\begin{aligned}
L_x^\epsilon(x,t) &= \frac{-1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}\int_0^\infty \Big\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\epsilon t}}\frac{-(x-\xi)}{2\epsilon t} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\epsilon t}}\frac{-(x+\xi)}{2\epsilon t}\Big\}\theta_0^\epsilon(-\xi)d\xi \\
&\quad + \int_0^t g\prime(\tau)\Big(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big)\frac{-e^{\frac{-x^2}{4\epsilon(t-\tau)}}}{2\sqrt{\epsilon(t-\tau)}}d\tau + g(0)\Big(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big)\frac{-e^{\frac{-x^2}{4\epsilon t}}}{2\sqrt{\epsilon t)}} \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}\int_0^\infty \Big\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\epsilon t}}\frac{-(x-\xi)}{2\epsilon t} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\epsilon t}}\frac{(x+\xi)}{2\epsilon t}\Big\}\theta_0^\epsilon(-\xi)d\xi \\
&\quad + \int_0^t \frac{g'(\tau)}{\sqrt{\pi\epsilon(t-\tau)}}e^{\frac{-x^2}{4\epsilon(t-\tau)}}d\tau + \frac{g(0)}{\sqrt{\pi\epsilon t}}e^{\frac{-x^2}{4\epsilon t}} \\
&= \frac{-1}{4\sqrt{\pi}(\epsilon t)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty \theta_0^\epsilon(-\xi)\Big\{(\xi-x)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\epsilon t}} + (x+\xi)e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\epsilon t}}\Big\}d\xi \\
&\quad + \int_0^t \frac{g'(\tau)}{\sqrt{\pi\epsilon(t-\tau)}}e^{\frac{-x^2}{4\epsilon(t-\tau)}}d\tau + \frac{g(0)}{\sqrt{\pi\epsilon t}}e^{\frac{-x^2}{4\epsilon t}}.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

将 $x=0$ 代入 (2.13) 和 (2.14)，分别得到：

$$
\begin{aligned}
R_x^\epsilon(0,t) &= e^{-\frac{t}{2\epsilon}}\Big[\frac{1}{4\sqrt{\pi}(\epsilon t)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty 2\theta_0^\epsilon(\xi)\xi e^{-\frac{\xi^2}{4\epsilon t}}d\xi\Big] \\
&\quad - \frac{e^{-\frac{t}{2\epsilon}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \Big(e^{\frac{\tau}{2\epsilon}}g(\tau)\Big)'\frac{1}{\sqrt{\epsilon(t-\tau)}}d\tau - \frac{e^{-\frac{t}{2\epsilon}}g(0)}{\sqrt{\pi\epsilon t}},
\end{aligned}
$$

and

$$L_x^\epsilon(0,t)=\frac{-1}{4\sqrt{\pi}(\epsilon t)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty \theta_0^\epsilon(-\xi)\{2\xi e^{\frac{-\xi^2}{4\epsilon t}}\}d\xi+\int_0^t g'(\tau)\frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon(t-\tau)}}d\tau+\frac{g(0)}{\sqrt{\pi\epsilon t}}.$$

假设 $R_x^\epsilon(0,t)=L_x^\epsilon(0,t)$，我们得到：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\sqrt{\pi}(\epsilon t)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2\epsilon}}\theta_0^\epsilon(\xi)\xi e^{-\frac{\xi^2}{4\epsilon t}}d\xi-\frac{e^{-\frac{t}{2\epsilon}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\Big(e^{\frac{\tau}{2\epsilon}}g(\tau)\Big)'\frac{1}{\sqrt{\epsilon(t-\tau)}}d\tau-\frac{e^{-\frac{t}{2\epsilon}}g(0)}{\sqrt{\pi\epsilon t}}\\&=\frac{-1}{2\sqrt{\pi}(\epsilon t)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty\theta_0^\epsilon(-\xi)\xi e^{\frac{-\xi^2}{4\epsilon t}}d\xi+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t g'(\tau)\frac{1}{\sqrt{\epsilon(t-\tau)}}d\tau+\frac{g(0)}{\sqrt{\pi\epsilon t}}.\end{aligned}$$

化简该方程，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2(\epsilon t)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty\Big[e^{-\frac{t}{2\epsilon}}\theta_0^\epsilon(\xi)+\theta_0^\epsilon(-\xi)\Big]\xi e^{-\frac{\xi^2}{4\epsilon t}}d\xi-\frac{g(0)}{\sqrt{\epsilon t}}(e^{-\frac{t}{2\epsilon}}+1)\\&=\int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{2\epsilon}}\Big(\frac{g(\tau)}{2\epsilon}+g'(\tau)\Big)\frac{1}{\sqrt{\epsilon(t-\tau)}}d\tau+\int_0^t\frac{g'(\tau)}{\sqrt{\epsilon(t-\tau)}}d\tau\end{aligned}$$

由此确定边界条件 $g(t)$。在上述方程中，我们将左端记为 $f(t)$。于是上述方程可写为

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2(\epsilon t)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty\Big[e^{-\frac{t}{2\epsilon}}\theta_0^\epsilon(\xi)+\theta_0^\epsilon(-\xi)\Big]\xi e^{-\frac{\xi^2}{4\epsilon t}}d\xi-\frac{g(0)}{\sqrt{\epsilon t}}(e^{-\frac{t}{2\epsilon}}+1)\\&=\Big[\Big(\frac{g(\tau)}{2\epsilon}+g'(\tau)\Big)*\frac{e^{-\frac{\tau}{2\epsilon}}}{\sqrt{\epsilon\tau}}\Big](t)+\Big[g'(\tau)*\frac{1}{\sqrt{\epsilon\tau}}\Big](t).\end{aligned}\tag{2.15}$$

现在对 (2.15) 两边取拉普拉斯变换，我们得到

$$\begin{aligned}L\{f(t)\}&=L\Big\{\Big(\frac{g(\tau)}{2\epsilon}+g'(\tau)\Big)\Big\}L\Big\{\frac{e^{-\frac{\tau}{2\epsilon}}}{\sqrt{\epsilon\tau}}\Big\}+L\Big\{g'(\tau)\Big\}L\Big\{\frac{1}{\sqrt{\epsilon\tau}}\Big\}\\&=\Big[\frac{G(s)}{2\epsilon}+sG(s)-g(0)\Big]\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\epsilon(s+\frac{1}{2\epsilon})}}+\Big[sG(s)-g(0)\Big]\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\epsilon s}}\end{aligned}$$

其中 $G(s)$ 是 $g(\tau)$ 的拉普拉斯变换。化简该方程，我们得到

$$G(s)=\frac{g(0)}{\sqrt{s(s+\frac{1}{2\epsilon})}}+\frac{\sqrt{\epsilon}L\{f(t)\}}{\sqrt{\pi}\Big(\sqrt{s}+\sqrt{s+\frac{1}{2\epsilon}}\Big)}.$$

进行拉普拉斯逆变换后，我们得到以下结果

$$g(t)=L^{-1}\Big\{\frac{g(0)}{\sqrt{s(s+\frac{1}{2\epsilon})}}\Big\}+\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\pi}}L^{-1}\Big\{\frac{L\{f(t)\}}{\sqrt{s}+\sqrt{s+\frac{1}{2\epsilon}}}\Big\}.\tag{2.16}$$

现在，对于任意常数 a， b,

$$L^{-1}\Big\{\frac{1}{\sqrt{(s+a)(s+b)}}\Big\}=e^{-\frac{(a+b)}{2}t}I_0(\frac{(a-b)t}{2})$$

$$L^{-1}\Big\{\frac{1}{\sqrt{(s+a)}+\sqrt{(s+b)}}\Big\}=\frac{1}{a-b}\Big(\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{2\sqrt{\pi t^3}}\Big)$$

其中 I_0 是第一类修正贝塞尔函数，且对于任意函数 P,Q

$$L^{-1}\Big\{L\{P(t)\}L\{Q(t)\}\Big\}=(P*Q)(t).$$

因此，由方程 (2.16) 可得

$$g(t)=g(0)e^{-\frac{t}{4\epsilon}}I_0(-\frac{t}{4\epsilon})+\frac{\epsilon^{\frac{3}{2}}}{\pi}\int_0^t\frac{1-e^{-\frac{\tau}{2\epsilon}}}{\tau^{\frac{3}{2}}}f(t-\tau)d\tau.$$

因此，在右半域 $\{x>0\}$, $u^\epsilon(x,t)$

$$=\frac{-\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi\epsilon}}\int_0^\infty\theta_0^\epsilon(\xi)\Big[(\xi-x)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\epsilon t}}+(\xi+x)e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\epsilon t}}\Big]d\xi+2\sqrt{\frac{\epsilon}{\pi}}\int_0^t(e^{\frac{\tau}{2\epsilon}}g(\tau))'\frac{e^{-\frac{x^2}{4\epsilon(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau+2\sqrt{\frac{\epsilon}{\pi}}g(0)\frac{e^{-\frac{x^2}{4\epsilon t}}}{\sqrt{t}}}{\frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}\int_0^\infty\Big[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\epsilon t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\epsilon t}}\Big]\theta_0^\epsilon(\xi)d\xi+\int_0^t(e^{\frac{\tau}{2\epsilon}}g(\tau))'\ erfc\Big(\frac{x}{2\sqrt{\epsilon(t-\tau)}}\Big)d\tau+g(0)erfc\Big(\frac{x}{2\sqrt{\epsilon t}}\Big)}$$

而在左半域 $\{x<0\}$, $u^\epsilon(x,t)$

$$=\frac{\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi\epsilon}}\int_0^\infty\theta_0^\epsilon(-\xi)\Big[(\xi-x)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\epsilon t}}+(\xi+x)e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\epsilon t}}\Big]d\xi-2\sqrt{\frac{\epsilon}{\pi}}\int_0^t g'(\tau)\frac{e^{-\frac{x^2}{4\epsilon(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau-2\sqrt{\frac{\epsilon}{\pi}}g(0)\frac{e^{-\frac{x^2}{4\epsilon t}}}{\sqrt{t}}}{\frac{-1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}\int_0^\infty\Big[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\epsilon t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\epsilon t}}\Big]\theta_0^\epsilon(-\xi)d\xi+\int_0^t g'(\tau)\ erfc\Big(\frac{-x}{2\sqrt{\epsilon(t-\tau)}}\Big)d\tau+g(0)erfc\Big(\frac{-x}{2\sqrt{\epsilon t}}\Big)}$$

其中

$$\theta_0^\epsilon(x)=e^{-\frac{1}{2\epsilon}\int_0^x u_0(y)dy}$$

$$g(t)=g(0)e^{-\frac{t}{4\epsilon}}I_0(-\frac{t}{4\epsilon})+\frac{\epsilon^{\frac{3}{2}}}{\pi}\int_0^t\frac{1-e^{-\frac{\tau}{2\epsilon}}}{\tau^{\frac{3}{2}}}f(t-\tau)d\tau$$

$$f(t)=\frac{1}{2(\epsilon t)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty\Big[e^{-\frac{t}{2\epsilon}}\theta_0^\epsilon(\xi)+\theta_0^\epsilon(-\xi)\Big]\xi e^{-\frac{\xi^2}{4\epsilon t}}d\xi-\frac{g(0)}{\sqrt{\epsilon t}}(e^{-\frac{t}{2\epsilon}}+1).$$

我们可以用与 [5] 中相同的方法验证， $u^\epsilon\in C((0,\infty);H^1(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R}))$并满足(2.3)。上述计算表明，该解是唯一的，并且 u^ϵ 在远离边界处为 C^∞ 。□

3. Vanishing viscosity limit

本节中，我们研究黏性正则化解的极限行为。该极限可表述为三个泛函的最小化。这一事实在下述定理中加以描述。

定理 3.1. 对于几乎处处的 $(x,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$，近似量 $[-2\epsilon \log R^{\epsilon}(x,t)]$收敛到 $U_R(x,t)$，其中

$$U_R(x,t) = \min\Big(U_R^1(x,t), U_R^2(x,t), U_R^3(x,t)\Big) + t$$

且 $U_R^1(x,t)$、$U_R^2(x,t)$、$U_R^3(x,t)$ 由下式给出

$$\begin{aligned}
U_R^1(x,t) &= \min_{\substack{0\le\tau<t\\ 0\le u<\tau\\ \xi\ge 0}} \Big[\frac{x^2}{2(t-\tau)} + \frac{\xi^2}{2(\tau-u)} - u + \int_0^{\xi} u_0(z)dz\Big]\\
U_R^2(x,t) &= \min_{\substack{0\le\tau<t\\ \xi\ge 0}} \Big[\frac{x^2}{2(t-\tau)} + \frac{\xi^2}{2\tau} - \tau + \int_0^{-\xi} u_0(z)dz\Big]\\
U_R^3(x,t) &= \min_{\xi\ge 0} \Big[\frac{(x-\xi)^2}{2t} + \int_0^{\xi} u_0(z)dz\Big].
\end{aligned}$$

对于几乎处处的 $(x,t) \in (-\infty,0) \times (0,\infty)$，近似量 $[-2\epsilon \log L^{\epsilon}(x,t)]$ 收敛到$U_L(x,t)$，其中

$$U_L(x,t) = \min\Big(U_L^1(x,t), U_L^2(x,t), U_L^3(x,t)\Big)$$

且 $U_L^1(x,t)$、$U_L^2(x,t)$、$U_L^3(x,t)$ 由下式给出

$$\begin{aligned}
U_L^1(x,t) &= \min_{\substack{0\le\tau<t\\ 0\le u<\tau\\ \xi\ge 0}} \Big[\frac{x^2}{2(t-\tau)} + \frac{\xi^2}{2(\tau-u)} + \tau - u + \int_0^{\xi} u_0(z)dz\Big]\\
U_L^2(x,t) &= \min_{\substack{0\le\tau<t\\ \xi\ge 0}} \Big[\frac{x^2}{2(t-\tau)} + \frac{\xi^2}{2\tau} + \int_0^{-\xi} u_0(z)dz\Big]\\
U_L^3(x,t) &= \min_{\xi\ge 0} \Big[\frac{(x+\xi)^2}{2t} + \int_0^{-\xi} u_0(z)dz\Big].
\end{aligned}$$

上述定理的证明分为多个步骤，并通过一系列引理展开。

引理3.2。 对于所有 $(x,t)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ $R^\epsilon(x,t)$ 均可按如下方式拆分:

(3.1)

$$R^\epsilon(x,t)=e^{-\frac{t}{2\epsilon}}[I_1^\epsilon(x,t)-I_2^\epsilon(x,t)+I_3^\epsilon(x,t)+I_4^\epsilon(x,t)+I_5^\epsilon(x,t)-I_6^\epsilon(x,t)-I_7^\epsilon(x,t)]$$

$$\begin{aligned}
&where,\ I_1^\epsilon(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2\epsilon}[\frac{(x-\xi)^2}{2t}+\int_0^\xi u_0(y)dy]}d\xi\\
&I_2^\epsilon(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2\epsilon}[\frac{(x+\xi)^2}{2t}+\int_0^\xi u_0(y)dy]}d\xi\\
&I_3^\epsilon(x,t)=g(0)\frac{x}{2\sqrt{\pi\epsilon}}\int_0^t I_0(-\frac{\tau}{4\epsilon})\frac{e^{-\frac{1}{4\epsilon}\left[\frac{x^2}{t-\tau}-\tau\right]}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\tau\\
&I_4^\epsilon(x,t)=\frac{x}{(4\pi\epsilon)^{\frac{3}{2}}}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1\int_0^\infty\frac{\xi e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}+\frac{\xi^2}{2(\tau-u)}+(\theta-1)u+\int_0^\xi u_0(y)dy\right]}}{u^{\frac{1}{2}}(\tau-u)^{\frac{3}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\xi d\theta du d\tau\\
&I_5^\epsilon(x,t)=\frac{x}{(4\pi\epsilon)^{\frac{3}{2}}}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1\int_0^\infty\frac{\xi e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}+\frac{\xi^2}{2(\tau-u)}+\theta u-\tau+\int_0^{-\xi} u_0(y)dy\right]}}{u^{\frac{1}{2}}(\tau-u)^{\frac{3}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\xi d\theta du d\tau\\
&I_6^\epsilon(x,t)=\frac{xg(0)}{4\pi^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{2}}}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}(\tau-u)^{\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}+(\theta-1)u\right]}d\theta du d\tau\\
&I_7^\epsilon(x,t)=\frac{xg(0)}{4\pi^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{2}}}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}(\tau-u)^{\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau+\theta u\right]}d\theta du d\tau.
\end{aligned}$$

证明。 利用分部积分， $R^\epsilon(x,t)$ 的表达式可简化为

(3.2)

$$\begin{aligned}
R^\epsilon(x,t)&=e^{-\frac{t}{2\epsilon}}\Big[\frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}\int_0^\infty\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\epsilon t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\epsilon t}}\right\}\theta_0^\epsilon(\xi)d\xi\\
&\quad+\frac{x}{2\sqrt{\pi\epsilon}}\int_0^t\frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau\right]}d\tau\Big]\\
&=e^{-\frac{t}{2\epsilon}}[R_1^\epsilon(x,t)+R_2^\epsilon(x,t)].
\end{aligned}$$

$R_1^\epsilon(x,\ t)$ 可改写为

(3.3)

$$\begin{aligned}
R_1^\epsilon(x,t)&=\frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}\int_0^\infty\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\epsilon t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\epsilon t}}\right\}\theta_0^\epsilon(\xi)d\xi\\
&=\frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2\epsilon}[\frac{(x-\xi)^2}{2t}+\int_0^\xi u_0(y)dy]}d\xi-\frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2\epsilon}[\frac{(x+\xi)^2}{2t}+\int_0^\xi u_0(y)dy]}d\xi\\
&=I_1^\epsilon(x,t)-I_2^\epsilon(x,t).
\end{aligned}$$

代入 g 的值后，我们将 $R_2^\epsilon(x,\ t)$ 简化如下：
(3.4)

$$
\begin{aligned}
R_2^\epsilon(x,t) &= \frac{x}{2\sqrt{\pi\epsilon}}\int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau\right]} d\tau \\
&= \frac{x}{2\sqrt{\pi\epsilon}}\int_0^t \frac{e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau\right]}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\Big[g(0)e^{-\frac{\tau}{4\epsilon}}I_0(-\frac{\tau}{4\epsilon}) + \frac{\epsilon^{\frac{3}{2}}}{\pi}\int_0^\tau \frac{1-e^{-\frac{u}{2\epsilon}}}{u^{\frac{3}{2}}} f(\tau-u)du\Big]d\tau \\
&= g(0)\frac{x}{2\sqrt{\pi\epsilon}}\int_0^t I_0(-\frac{\tau}{4\epsilon})\frac{e^{-\frac{1}{4\epsilon}\left[\frac{x^2}{t-\tau}-\tau\right]}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\tau \\
&+ \frac{x}{2\sqrt{\pi\epsilon}}\frac{\epsilon^{\frac{3}{2}}}{\pi}\int_0^t \frac{e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau\right]}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\tau \frac{1-e^{-\frac{u}{2\epsilon}}}{u^{\frac{3}{2}}} f(\tau-u)\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau \\
&= I_3^\epsilon(x,t) + \tilde{R}_2^\epsilon(x,t).
\end{aligned}
$$

where, $\tilde{R}_2^\epsilon(x,t) = \dfrac{x}{2\sqrt{\pi\epsilon}}\dfrac{\epsilon^{\frac{3}{2}}}{\pi}\displaystyle\int_0^t \frac{e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau\right]}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\tau \frac{1-e^{-\frac{u}{2\epsilon}}}{u^{\frac{3}{2}}}\times$

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2(\epsilon(\tau-u))^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty \Big[e^{-\frac{(\tau-u)}{2\epsilon}}\theta_0^\epsilon(\xi)+\theta_0^\epsilon(-\xi)\Big]\xi e^{-\frac{\xi^2}{4\epsilon(\tau-u)}}d\xi - \frac{g(0)}{\sqrt{\epsilon(\tau-u)}}\Big(e^{-\frac{(\tau-u)}{2\epsilon}}+1\Big)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{x}{2\sqrt{\pi\epsilon}}\frac{\epsilon^{\frac{3}{2}}}{\pi}\int_0^t \frac{e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau\right]}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\tau \frac{1}{2\epsilon u^{\frac{1}{2}}}\int_0^1 e^{-\frac{\theta u}{2\epsilon}}d\theta\times \\
&\left[\frac{1}{2(\epsilon(\tau-u))^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty \Big[e^{-\frac{(\tau-u)}{2\epsilon}}\theta_0^\epsilon(\xi)+\theta_0^\epsilon(-\xi)\Big]\xi e^{-\frac{\xi^2}{4\epsilon(\tau-u)}}d\xi - \frac{g(0)}{\sqrt{\epsilon(\tau-u)}}\Big(e^{-\frac{(\tau-u)}{2\epsilon}}+1\Big)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{x}{(4\pi\epsilon)^{\frac{3}{2}}}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1\int_0^\infty \frac{\xi}{u^{\frac{1}{2}}(\tau-u)^{\frac{3}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}+\frac{\xi^2}{2(\tau-u)}+(\theta-1)u+\int_0^\xi u_0(y)dy\right]}d\xi d\theta du d\tau \\
&+ \frac{x}{(4\pi\epsilon)^{\frac{3}{2}}}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1\int_0^\infty \frac{\xi}{u^{\frac{1}{2}}(\tau-u)^{\frac{3}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}+\frac{\xi^2}{2(\tau-u)}+\theta u-\tau+\int_0^{-\xi} u_0(y)dy\right]}d\xi d\theta du d\tau \\
&- \frac{xg(0)}{4\pi^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{2}}}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}(\tau-u)^{\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}+(\theta-1)u\right]}d\theta du d\tau \\
&- \frac{xg(0)}{4\pi^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{2}}}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}(\tau-u)^{\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau+\theta u\right]}d\theta du d\tau \\
&= I_4^\epsilon(x,t) + I_5^\epsilon(x,t) - I_6^\epsilon(x,t) - I_7^\epsilon(x,t).
\end{aligned}
$$

Ther因此，结合 (3.2)、(3.3)、(3.4)，我们得到 (3.1)。由此引理得证 . □

类似地，我们可以证明关于 $L^\epsilon(x,\ t)$。的以下引理

引理 3.3. 对于所有 $(x,t)\in(-\infty,0)\times(0,\infty)$ $L^\epsilon(x,t)$，都可以分解如下：

(3.5)

$$L^\epsilon(x,t)=-J_1^\epsilon(x,t)+J_2^\epsilon(x,t)+J_3^\epsilon(x,t)+J_4^\epsilon(x,t)+J_5^\epsilon(x,t)-J_6^\epsilon(x,t)-J_7^\epsilon(x,t),$$

where,

$$J_1^\epsilon(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2\epsilon}[\frac{(x-\xi)^2}{2t}+\int_0^{-\xi}u_0(y)dy]}d\xi$$

$$J_2^\epsilon(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2\epsilon}[\frac{(x+\xi)^2}{2t}+\int_0^{-\xi}u_0(y)dy]}d\xi$$

$$J_3^\epsilon(x,t)=-g(0)\frac{x}{2\sqrt{\pi\epsilon}}\int_0^t I_0(-\frac{\tau}{4\epsilon})\frac{e^{-\frac{1}{4\epsilon}\left[\frac{x^2}{t-\tau}+\tau\right]}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\tau$$

$$J_4^\epsilon(x,t)=-\frac{x}{(4\pi\epsilon)^{\frac{3}{2}}}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1\int_0^\infty\frac{\xi e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}+\frac{\xi^2}{2(\tau-u)}+(\theta-1)u+\tau+\int_0^\xi u_0(y)dy\right]}}{u^{\frac{1}{2}}(\tau-u)^{\frac{3}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\xi d\theta du d\tau$$

$$J_5^\epsilon(x,t)=-\frac{x}{(4\pi\epsilon)^{\frac{3}{2}}}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1\int_0^\infty\frac{\xi e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}+\frac{\xi^2}{2(\tau-u)}+\theta u+\int_0^{-\xi}u_0(y)dy\right]}}{u^{\frac{1}{2}}(\tau-u)^{\frac{3}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\xi d\theta du d\tau$$

$$J_6^\epsilon(x,t)=-\frac{xg(0)}{4\pi^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{2}}}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}(\tau-u)^{\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}+(\theta-1)u+\tau\right]}d\theta du d\tau$$

$$J_7^\epsilon(x,t)=-\frac{xg(0)}{4\pi^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{2}}}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}(\tau-u)^{\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}+\theta u\right]}d\theta du d\tau.$$

引理 3.4. 令 $I_i^\epsilon(x,t)$ $J_i^\epsilon(x,t)$ $i=1$、2、$\cdots$、7，如引理(3.2)和(3.3)中所定义。于是

$$\begin{aligned}&I_1^\epsilon(x,t)-I_2^\epsilon(x,t)\geq 0,\\&I_3^\epsilon(x,t)-I_6^\epsilon(x,t)-I_7^\epsilon(x,t)\geq 0,\ \forall x,t>0\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&-J_1^\epsilon(x,t)+J_2^\epsilon(x,t)\geq 0,\\&J_3^\epsilon(x,t)-J_6^\epsilon(x,t)-J_7^\epsilon(x,t)\geq 0,\ \forall x<0,t>0.\end{aligned}$$

证明。 **步骤 1：** 对于所有 $x,\ \xi>0$，$(x-\xi)^2\leq(x+\xi)^2$. 因此我们有如下结果。

$$e^{-\frac{1}{2\epsilon}[\frac{(x-\xi)^2}{2t}+\int_0^\xi u_0(y)dy]}\geq e^{-\frac{1}{2\epsilon}[\frac{(x+\xi)^2}{2t}+\int_0^\xi u_0(y)dy]}.$$

由此立即可得 $I_1^\epsilon(x,t)-I_2^\epsilon(x,t)\geq 0,\ \forall x,t>0.$

步骤二： 由 (3.4)，我们可以写成

$$
\begin{aligned}
&I_3^\epsilon(x,t)-I_6^\epsilon(x,t)-I_7^\epsilon(x,t)\\
=&g(0)\Bigg[\frac{x}{2\sqrt{\pi\epsilon}}\int_0^t I_0(-\frac{\tau}{4\epsilon})\frac{e^{-\frac{1}{4\epsilon}\left[\frac{x^2}{t-\tau}-\tau\right]}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\tau\\
&-\frac{x}{4\pi^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{2}}}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}(\tau-u)^{\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}+(\theta-1)u\right]}d\theta du d\tau\\
&-\frac{x}{4\pi^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{2}}}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}(\tau-u)^{\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau+\theta u\right]}d\theta du d\tau\Bigg]\\
=&g(0)F^\epsilon(x,t).
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

因此，由 (3.2) 可知，$R^\epsilon(x,t)$ 中 $g(0)$ 的系数是 $F^\epsilon(x,t)$。再由 (2.8) 和 (2.10) 可知，$R^\epsilon(x,t)$ 中 $g(0)$ 的系数的符号仅取决于 g 中 $g(0)$ 的系数的符号。再由 (2.1) 和 (2.2) 可得

$$
\begin{aligned}
g(t)=&\frac{\epsilon^{\frac{3}{2}}}{\pi}\int_0^t\frac{1-e^{-\frac{\tau}{2\epsilon}}}{\tau^{\frac{3}{2}}}\Big[\frac{1}{2(\epsilon(t-\tau))^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty\Big[e^{-\frac{t-\tau}{2\epsilon}}\theta_0^\epsilon(\xi)+\theta_0^\epsilon(-\xi)\Big]\xi e^{-\frac{\xi^2}{4\epsilon(t-\tau)}}d\xi\Big]d\tau\\
&+g(0)\Bigg[e^{-\frac{t}{4\epsilon}}I_0(-\frac{t}{4\epsilon})-\frac{\epsilon^{\frac{3}{2}}}{\pi}\int_0^t\frac{1-e^{-\frac{\tau}{2\epsilon}}}{\tau^{\frac{3}{2}}}\Big(\frac{e^{-\frac{t-\tau}{2\epsilon}}+1}{\sqrt{\epsilon(t-\tau)}}\Big)d\tau\Bigg].
\end{aligned}
$$

记 g 中 $g(0)$ 的系数为 $G^\epsilon(t)$。现在我们断言 $G^\epsilon(t)$ 是非负的。假设相反。现选取 $u_0(x)=\begin{cases}M\\,-M & x<0\end{cases}$,,，其中 M 是一个非常大的数。

Then

$$
\begin{aligned}
\theta_0^\epsilon(\xi)&=e^{-\frac{M\xi}{2\epsilon}}\\
\theta_0^\epsilon(-\xi)&=e^{-\frac{M\xi}{2\epsilon}},
\end{aligned}
$$

这表明 $g(t)$ 中的第一项非常小。因此，对某个 $t\geq 0$，$g(t)$ 变为负，这与 $g(t)$ 对所有 $t\geq 0$ 均为正的结果相矛盾（见 [5], 第 2530 页，命题 2.4 的证明）。故断言成立。因此，对所有 $t\geq 0$，$F^\epsilon(x,t)$ 是非负的。于是 (3.6) 蕴含

$$
I_3^\epsilon(x,t)-I_6^\epsilon(x,t)-I_7^\epsilon(x,t)\geq 0,\ \forall x,t>0.
$$

同理，我们可以对 $J_i^\epsilon(x,\ t)$ 进行证明。因此引理得证。 □

定理 3.1 的证明：
证明。 **步骤 1:**令 $U(x,t)=\min(\Big[_2{}^{x^2}{}_{(t-\tau)}-\tau\Big],U_R^1(x,t)\ U_R^2(x,t)\ U_R^3(x,t))$。注意到

$$I_1^\epsilon(x,t) \le e^{-\frac{U_R^3(x,t)}{2\epsilon}} e^{\frac{U_R^3(x,t)}{2}} \frac{I_1^1(x,t)}{\sqrt{\epsilon}}$$

$$I_2^\epsilon(x,t) \le e^{-\frac{U_R^3(x,t)}{2\epsilon}} e^{\frac{1}{2}\min\limits_{\xi\ge 0}\left[\frac{(x+\xi)^2}{2t}+\int_0^\xi u_0(z)dz\right]} \frac{I_2^1(x,t)}{\sqrt{\epsilon}}$$

$$\begin{aligned} I_3^\epsilon(x,t) &= g(0)\frac{x}{2\sqrt{\pi\epsilon}}\int_0^t I_0(-\frac{\tau}{4\epsilon})\frac{e^{-\frac{1}{4\epsilon}\left[\frac{x^2}{t-\tau}-\tau\right]}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\tau \\ &= g(0)\frac{x}{2\sqrt{\pi\epsilon}}\int_0^t\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau\sin^2(\frac{\pi\theta}{2})\right]}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\tau \\ &\le e^{-\frac{1}{2\epsilon}\min\limits_{0\le\tau<t}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau\right]} e^{\frac{1}{2}\min\limits_{0\le\tau<t}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau\right]} \frac{I_3^1(x,t)}{\sqrt{\epsilon}} \end{aligned}$$

$$I_4^\epsilon(x,t) \le e^{-\frac{U_R^1(x,t)}{2\epsilon}} e^{\frac{U_R^1(x,t)}{2}} \frac{I_4^1(x,t)}{\epsilon^{\frac{3}{2}}}$$

$$I_5^\epsilon(x,t) \le e^{-\frac{U_R^2(x,t)}{2\epsilon}} e^{\frac{U_R^2(x,t)}{2}} \frac{I_5^1(x,t)}{\epsilon^{\frac{3}{2}}}$$

$$I_6^\epsilon(x,t) \le e^{-\frac{1}{2\epsilon}\min\limits_{0\le\tau<t}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau\right]} e^{\frac{1}{2}\min\limits_{0\le\tau<t}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau\right]} \frac{I_6^1(x,t)}{\sqrt{\epsilon}}$$

$$I_7^\epsilon(x,t) \le e^{-\frac{1}{2\epsilon}\min\limits_{0\le\tau<t}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau\right]} e^{\frac{1}{2}\min\limits_{0\le\tau<t}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau\right]} \frac{I_7^1(x,t)}{\sqrt{\epsilon}}.$$

那么，

$$\begin{aligned} &2\epsilon\log(R^\epsilon(x,t)) \\ &\le 2\epsilon\log\left[e^{-\frac{t}{2\epsilon}}\left(I_1^\epsilon(x,t)+I_2^\epsilon(x,t)+I_3^\epsilon(x,t)+I_4^\epsilon(x,t)+I_5^\epsilon(x,t)+I_6^\epsilon(x,t)+I_7^\epsilon(x,t)\right)\right] \\ &\le 2\epsilon\log\left[e^{-\frac{U(x,t)+t}{2\epsilon}}\left(e^{-\frac{U_R^3(x,t)-U(x,t)}{2\epsilon}} e^{\frac{U_R^3(x,t)}{2}} \frac{I_1^1(x,t)}{\sqrt{\epsilon}}\right.\right. \\ &+ e^{-\frac{U_R^3(x,t)-U(x,t)}{2\epsilon}} e^{\frac{1}{2}\min\limits_{\xi\ge 0}\left[\frac{(x+\xi)^2}{2t}+\int_0^\xi u_0(z)dz\right]} \frac{I_2^1(x,t)}{\sqrt{\epsilon}} \\ &+ e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left(\min\limits_{0\le\tau<t}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau\right]-U(x,t)\right)} e^{\frac{1}{2}\min\limits_{0\le\tau<t}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau\right]} \frac{I_3^1(x,t)}{\sqrt{\epsilon}} \\ &+ e^{-\frac{U_R^1(x,t)-U(x,t)}{2\epsilon}} e^{\frac{U_R^1(x,t)}{2}} \frac{I_4^1(x,t)}{\epsilon^{\frac{3}{2}}} + e^{-\frac{U_R^2(x,t)-U(x,t)}{2\epsilon}} e^{\frac{U_R^2(x,t)}{2}} \frac{I_5^1(x,t)}{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \\ &\left.\left.+ e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left(\min\limits_{0\le\tau<t}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau\right]-U(x,t)\right)} e^{\frac{1}{2}\min\limits_{0\le\tau<t}\left[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau\right]} \frac{I_6^1(x,t)}{\sqrt{\epsilon}}\right)\right] \end{aligned}$$

$$+e^{-\frac{1}{2\epsilon}\Big(\min\limits_{0\le\tau<t}\Big[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau\Big]-U(x,t)\Big)}e^{\frac{1}{2}\min\limits_{0\le\tau<t}\Big[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau\Big]}\frac{I_7^1(x,t)}{\sqrt{\epsilon}}\Big)\Big].$$

这意味着

$$\limsup_{\epsilon\to 0}[2\epsilon\log(R^\epsilon(x,t))]\le-\Big(U(x,t)+t\Big). \tag{3.7}$$

步骤二：

$$\begin{aligned}U(x,t)&=\min(\Big[\frac{x^2}{2(t-\tau)}-\tau\Big],U_R^1(x,t),U_R^2(x,t),U_R^3(x,t))\\&=\min(U_R^1(x,t),U_R^2(x,t),U_R^3(x,t)).\end{aligned}$$

通过考虑以下两种情形，我们推导出下极限。

情形一： $U(x,t)=\min(U_R^1(x,t),U_R^2(x,t))$。根据引理（3.4），

$$I_1^\epsilon(x,t)-I_2^\epsilon(x,t),I_3^\epsilon(x,t)-I_6^\epsilon(x,t)-I_7^\epsilon(x,t)\ge 0,\ \forall x,t>0,$$

由（3.1）式可得

$$R^\epsilon(x,t)\ge e^{-\frac{t}{2\epsilon}}[I_4^\epsilon(x,t)+I_5^\epsilon(x,t)]. \tag{3.8}$$

现在我们求出 $I_4^\epsilon(x,t)$ $I_5^\epsilon(x,t)$ 的下界。

假设 $\Big[\frac{x^2}{2(t-\tau)}+\frac{\xi^2}{2(\tau-u)}+(\theta-1)u+\int_0^\xi u_0(y)dy\Big]$ 在唯一点$\tau=\tau_1,\xi=\xi_1,u=u_1,\theta=0$ 处取得最小值（已在定理 (4.2) 中证明）。对于给定的 $\delta_2>0$，存在一个$\delta_1>0$ 使得

$$\Big|\frac{x^2}{2(t-\tau)}+\frac{\xi^2}{2(\tau-u)}+(\theta-1)u+\int_0^\xi u_0(y)dy-U_R^1(x,t)\Big|\le\delta_2$$

对于 $|\tau-\tau_1|,|\xi-\xi_1|,|u-u_1|,|\theta|\le\delta_1$. 于是,

$$\begin{aligned}&I_4^\epsilon(x,t)\\&=\frac{x}{(4\pi\epsilon)^{\frac{3}{2}}}\int_0^t\int_0^\tau\int_0^1\int_0^\infty\frac{\xi e^{-\frac{1}{2\epsilon}\Big[\frac{x^2}{2(t-\tau)}+\frac{\xi^2}{2(\tau-u)}+(\theta-1)u+\int_0^\xi u_0(y)dy\Big]}}{u^{\frac{1}{2}}(\tau-u)^{\frac{3}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\xi d\theta du d\tau\\&\ge\frac{x}{(4\pi\epsilon)^{\frac{3}{2}}}\int_{\tau_1}^{\tau_1+\delta_1}\int_{u_1}^{u_1+\delta_1}\int_0^{\delta_1}\int_{\xi_1}^{\xi+\delta_1}\frac{\xi e^{-\frac{1}{2\epsilon}\Big[\frac{x^2}{2(t-\tau)}+\frac{\xi^2}{2(\tau-u)}+(\theta-1)u+\int_0^\xi u_0(y)dy\Big]}}{u^{\frac{1}{2}}(\tau-u)^{\frac{3}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\xi d\theta du d\tau \qquad (3.9)\\&\ge\frac{x}{(4\pi\epsilon)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{U_R^1(x,t)+\delta_2}{2\epsilon}}\int_{\tau_1}^{\tau_1+\delta_1}\int_{u_1}^{u_1+\delta_1}\int_0^{\delta_1}\int_{\xi_1}^{\xi_1+\delta_1}\frac{\xi}{u^{\frac{1}{2}}(\tau-u)^{\frac{3}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\xi d\theta du d\tau\\&=\frac{x}{(4\pi\epsilon)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{U_R^1(x,t)+\delta_2}{2\epsilon}}A(\delta_1).\end{aligned}$$

同样地，假设 $\Big[\frac{x^2}{2(t-\tau)}+\frac{\xi^2}{2(\tau-u)}+\theta u-\tau+\int_0^{-\xi}u_0(y)dy\Big]$ 在唯一点 $\tau=\tau_2,\xi=\xi_2,$ $\theta=0,u=0$处取得最小值（已在定理 (4.2) 中证明）。那么对于 $\delta_2>0,$存在

一个 $\delta_3 > 0$ 使得

$$\Big|\frac{x^2}{2(t-\tau)} + \frac{\xi^2}{2(\tau-u)} + \theta u - \tau + \int_0^{-\xi} u_0(y)dy - U_R^2(x,t)\Big| \le \delta_2$$

当 $|\tau-\tau_2|,\ |\xi-\xi_2|,\ |\theta|,\ |u| \le \delta_3$. 于是,

$$\begin{aligned} I_5^\epsilon(x,t) &\ge \frac{x}{(4\pi\epsilon)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{U_R^2(x,t)+\delta_2}{2\epsilon}} \int_{\tau_2}^{\tau_2+\delta_3}\int_0^{\delta_3}\int_0^{\delta_3}\int_{\xi_2}^{\xi_2+\delta_3} \frac{\xi}{u^{\frac{1}{2}}(\tau-u)^{\frac{3}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} d\xi d\theta du d\tau \\ &= \frac{x}{(4\pi\epsilon)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{U_R^2(x,t)+\delta_2}{2\epsilon}} B(\delta_3). \end{aligned} \tag{3.10}$$

因此，结合（3.8）、（3.9）和（3.10），我们得到

$$\begin{aligned} &2\epsilon\log(R^\epsilon(x,t)) \\ &\ge 2\epsilon\log\Big(e^{-\frac{t}{2\epsilon}}\Big[I_4^\epsilon(x,t) + I_5^\epsilon(x,t)\Big]\Big) \\ &\ge 2\epsilon\log\Big[\frac{x}{(4\pi\epsilon)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{t+\delta_2}{2\epsilon}}\Big(e^{-\frac{U_R^1(x,t)}{2\epsilon}}A(\delta_1) + e^{-\frac{U_R^2(x,t)}{2\epsilon}}B(\delta_3)\Big)\Big] \\ &\ge 2\epsilon\log\Big[\frac{x}{(4\pi\epsilon)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{t+\delta_2+U(x,t)}{2\epsilon}}\Big(e^{-\frac{U_R^1(x,t)-U(x,t)}{2\epsilon}}A(\delta_1) + e^{-\frac{U_R^2(x,t)-U(x,t)}{2\epsilon}}B(\delta_3)\Big)\Big]. \end{aligned}$$

因此，$\liminf_{\epsilon\to 0}\Big[2\epsilon\log(R^\epsilon)(x,\ t)\Big] \ge -\Big[t+\delta_2+\min\{U_R^1(x,\ t)\, U_R^2(x,\ t)\}\Big]$. 由于 δ_2 是任意的，我们有

$$\liminf_{\epsilon\to 0}\Big[2\epsilon\log(R^\epsilon)(x,t)\Big] \ge -\Big[t+U(x,t)\Big]. \tag{3.11}$$

情形二： $U_R^3(x,\ t) < \min(U_R^1(x,\ t)\ U_R^2(x,\ t))$。在这种情况下,

$$R^\epsilon(x,t) \ge I_1^\epsilon(x,t) - I_2^\epsilon(x,t) \tag{3.12}$$

当 $I_4^\epsilon(x,\ t)\, I_5^\epsilon(x,\ t)\ \ge 0$ 并且根据引理（3.4） $I_3^\epsilon(x,\ t) - I_6^\epsilon(x,\ t) - I_7^\epsilon(x,\ t)\ \ge 0$. 现在注意到

$$\begin{aligned} I_2^\epsilon(x,t) &\le e^{-\frac{1}{2\epsilon}\min\limits_{\xi\ge 0}\Big[\frac{(x+\xi)^2}{2t} + \int_0^\xi u_0(z)dz\Big]} e^{\frac{1}{2}\min\limits_{\xi\ge 0}\Big[\frac{(x+\xi)^2}{2t} + \int_0^\xi u_0(z)dz\Big]} \frac{I_2^1(x,t)}{\sqrt{\epsilon}} \\ &= e^{-\frac{1}{2\epsilon}\min\limits_{\xi\ge 0}\Big[\frac{(x+\xi)^2}{2t} + \int_0^\xi u_0(z)dz\Big]} B_1(x,t)\frac{I_2^1(x,t)}{\sqrt{\epsilon}}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

假设 $U_R^3(x,t)$ 在 $\xi = \xi_3,$ 处取得最小值，则给定 $\delta_5 > 0,$，存在一个 $\delta_4 > 0$，使得 $|\frac{(x-\xi)^2}{2t} + \int_0^\xi u_0(y)dy - U_R^3(x,t)| \le \delta_5$ 对于 $\xi_3 \le \xi \le \xi_3 + \delta_4.$，我们有以下

估计。

$$
\begin{aligned}
I_1^\epsilon(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{(x-\xi)^2}{2t}+\int_0^\xi u_0(y)dy\right]}d\xi \\
&\geq \frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}\int_{\xi_3}^{\xi_3+\delta_4} e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{(x-\xi)^2}{2t}+\int_0^\xi u_0(y)dy\right]}d\xi \\
&\geq \frac{e^{-\frac{U_R^3(x,t)}{2\epsilon}}}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}\int_{\xi_3}^{\xi_3+\delta_4} e^{-\frac{1}{2\epsilon}\left[\frac{(x-\xi)^2}{2t}+\int_0^\xi u_0(y)dy-U_R^3(x,t)\right]}d\xi \\
&\geq \frac{\delta_4}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}e^{-\frac{U_R^3(x,t)+\delta_5}{2\epsilon}}.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

因此，结合 (3.12)、(3.13) 和 (3.14)，可得

$$
\begin{aligned}
&2\epsilon\log(R^\epsilon(x,t)) \\
\geq&2\epsilon\log\Big(e^{-\frac{t}{2\epsilon}}[I_1^\epsilon(x,t)-I_2^\epsilon(x,t)]\Big) \\
\geq&2\epsilon\log\Big[e^{-\frac{t}{2\epsilon}}\Big(\frac{\delta_4}{2\sqrt{\pi\epsilon t}}e^{-\frac{U_R^3(x,t)+\delta_5}{2\epsilon}}-e^{-\frac{1}{2\epsilon}\min\limits_{\xi\geq 0}\Big[\frac{(x+\xi)^2}{2t}+\int_0^\xi u_0(z)dz\Big]}B_1(x,t)\frac{I_2^1(x,t)}{\sqrt{\epsilon}}\Big)\Big] \\
\geq&2\epsilon\log\Bigg[e^{-\frac{t+U_R^3(x,t)+\delta_5}{2\epsilon}}\Big(\frac{\delta_4}{2\sqrt{\pi\epsilon t}} \\
&-e^{-\frac{1}{2\epsilon}\min\limits_{\xi\geq 0}\Big[\frac{(x+\xi)^2}{2t}+\int_0^\xi u_0(z)dz-(U_R^3(x,t)+\delta_5)\Big]}B_1(x,t)\frac{I_2^1(x,t)}{\sqrt{\epsilon}}\Big)\Bigg]
\end{aligned}
$$

因此，$\liminf\limits_{\epsilon\to 0}\Big[2\epsilon\log(R^\epsilon(x,\ t))\Big]\geq-\Big[t+\delta_5+U_R^3(x,\ t)\Big]$. 由于此处 $U(x,\ t)=U_R^3(x,\ t)$，且 δ_5 是任意的，因此我们有

$$
\liminf_{\epsilon\to 0}\Big[2\epsilon\log(R^\epsilon)(x,t)\Big]\geq-\Big[t+U(x,t)\Big]. \tag{3.15}
$$

因此，对于这两种情况，我们都得到

$$
\lim_{\epsilon\to 0}\Big[2\epsilon\log(R^\epsilon)(x,t)\Big]=-\Big[t+U(x,t)\Big]
$$

由 (3.7)、(3.11) 和 (3.15) 可得。因此

$$
\lim_{\epsilon\to 0}\Big[-2\epsilon\log(R^\epsilon)(x,t)\Big]=U(x,t)+t=U_R(x,t)
$$

类似地，我们可以证明近似量 $[-2\epsilon\log\ L^\epsilon(x,t)]$ 收敛到 $U_L(x,t)$。因此定理得证。□

4. Solution of the inviscid equation 1.6

本节中，我们得到 $u^\epsilon(x,t)$ 的弱极限 $u(x,t)$ 的显式公式。该极限是 U 的弱导数，其中 U 是上一节得到的 $-2\epsilon\log(\theta^\epsilon)$ 的逐点极限。这个 $u(x,t)$ 确实是无黏方程 (1.6) 的一个解（见 [1]）。为求得 u^ϵ 的弱极限，我们需要以下引理。第一个引理说明了泛函 $U_L^1, U_L^2, U_L^3, U_R^1, U_R^2$ 和 U_R^3 各自的不相交性质。为方便起见，我们用一个记号表示泛函 $U_L^1, U_L^2, U_R^1, U_R^2$：

$$U_I^i(x,t,\tau,\xi,u) = \begin{cases} \frac{x^2}{2(t-\tau)} + \frac{\xi^2}{2(\tau+(i-2)u)} + (2-i)(\tau-u) \\ + \int_0^{(3-2i)\xi} u_0(z)dz, & x<0, \xi>0, I=L \\ \frac{x^2}{2(t-\tau)} + \frac{\xi^2}{2(\tau+(i-2)u)} + (1-i)\tau + (i-2)u \\ + \int_0^{(3-2i)\xi} u_0(z)dz, & x>0, \xi>0, I=R \end{cases} \tag{4.1}$$

and

$$U_L^3(x,t,\xi) = \frac{(x+\xi)^2}{2t} + \int_0^{-\xi} u_0(z)dz,\ x<0, \xi>0,$$
$$U_R^3(x,t,\xi) = \frac{(x-\xi)^2}{2t} + \int_0^{\xi} u_0(z)dz,\ x>0, \xi>0.$$

引理 4.1. 对于 $i \in \{1,2\}, I \in \{L,R\}$，泛函 $U_I^i(x,t,\tau,\xi)$和 $U_I^3(x,t,\xi)$ 的极小化子满足如下意义下的不相交性质。

(1) 假设 $\min[U_L^i(x,t,\tau,\xi): 0 \le \tau < t, 0 \le u < \tau, \xi \ge 0]$ 在 $\tau = \tau_L^i, \xi = \xi_L^i$ 处取得，且对于 $x_1 < x$，$\min[U_L^i(x_1,t,\tau,\xi): 0 \le \tau < t, 0 \le u < \tau, \xi \ge 0]$ 在$\tau = \bar\tau_L^i$和 $\xi = \bar\xi_L^i$处取得。那么 $\bar\tau_L^i \le \tau_L^i$ 和 $\bar\xi_L^i \le \xi_L^i$。*(2)* 假设 $\min[U_R^i(x,t,\tau,\xi): 0 \le \tau < t, 0 \le u < \tau, \xi \ge 0]$ 在 $\tau = \tau_R^i, \xi = \xi_R^i$ 处取得，且对于 $x_1 > x$，$\min[U_R^i(x_1,t,\tau,\xi): 0 \le \tau < t, 0 \le u < \tau, \xi \ge 0]$在$\tau = \bar\tau_R^i$和 $\xi = \bar\xi_R^i$处取得。那么 $\bar\tau_R^i \le \tau_R^i$和 $\bar\xi_R^i \le \xi_R^i$。*(3)* 假设 $\min[U_L^3(x,t,\xi): \xi \ge 0]$ 在 $\xi = \xi_1$ 处取得，且对于 $x_1 < x$，$\min[U_L^3(x_1,t,\xi): \xi \ge 0]$ 在 $\xi = \xi_2$. 处取得。那么 $\xi_2 \le \xi_1$.*(4)* 假设 $\min[U_R^3(x,t,\xi): \xi \ge 0]$ 在 $\xi = \xi_1$ 处取得，且对于 $x_1 > x$，$\min[U_R^3(x_1,t,\xi)$

:

$\xi \ge 0]$ 在 $\xi = \xi_2$. 处取得。于是 $\xi_2 \le \xi_1$.

证明。 **步骤 1：** 设 $(\bar x, \bar t)$ 是连接 (x,t) 与 $(0,\tau_L^i)$ 的直线上的一点。接下来证明，对于所有 i，$\min_{0\le\tau<\bar t,\ \xi\ge 0} U_L^i(\bar x, \bar t, \tau, \xi)$ 都在唯一的 $\tau = \tau_L^i$ 和 $\xi = \xi_L^i$ 处取得。这意味着特征线在左四分之一平面内不会相交。进而可知，对于任意 $\bar\tau_L^i < \bar t.$，$\bar\tau_L^i \le \tau_L^i$

由于 $U_L^i(x,t,\tau,\xi)$在 $\tau = \tau_L^i$和 $\xi = \xi_L^i$,处取得最小值，因此对任意其他 $\bar\tau_L^i < \bar t$和 $\bar\xi_L^i \ge 0$，我们得到

$$U_L^i(x,t,\tau_L^i,\xi_L^i) - U_L^i(x,t,\bar\tau_L^i,\bar\xi_L^i) \le 0\ \forall i.$$

这意味着

$$\frac{x^2}{2(t-\tau_L^i)}+\frac{{\xi_L^i}^2}{2(\tau_L^i+(i-2)u)}+(2-i)(\tau_L^i-u)+\int_0^{(3-2i)\xi_L^i}u_0(z)dz$$
$$-\frac{x^2}{2(t-\bar{\tau}_L^i)}-\frac{{\bar{\xi_L^i}}^2}{2(\bar{\tau}_L^i+(i-2)u)}-(2-i)(\bar{\tau}_L^i-u)-\int_0^{(3-2i)\bar{\xi}_L^i}u_0(z)dz\leq 0.$$

我们可以将上述内容改写为
(4.2)
$$\frac{1}{2}\int_{\bar{\tau}_L^i}^{\tau_L^i}\frac{x^2}{(t-s)^2}ds+\frac{{\xi_L^i}^2}{2(\tau_L^i+(i-2)u)}-\frac{{\bar{\xi_L^i}}^2}{2(\bar{\tau}_L^i+(i-2)u)}-\int_{(3-2i)\xi_L^i}^{(3-2i)\bar{\xi}_L^i}u_0(z)dz+(2-i)(\tau_L^i-\bar{\tau}_L^i)\leq 0.$$

Now,

$$\begin{aligned}
&U_L^i(\bar{x},\bar{t},\tau_L^i,\xi_L^i)-U_L^i(\bar{x},\bar{t},\bar{\tau}_L^i,\bar{\xi}_L^i)\\
=&\frac{\bar{x}^2}{2(\bar{t}-\tau_L^i)}+\frac{{\xi_L^i}^2}{2(\tau_L^i+(i-2)u)}+(2-i)(\tau_L^i-u)+\int_0^{(3-2i)\xi_L^i}u_0(z)dz\\
&-\frac{\bar{x}^2}{2(\bar{t}-\bar{\tau}_L^i)}-\frac{{\bar{\xi_L^i}}^2}{2(\bar{\tau}_L^i+(i-2)u)}-(2-i)(\bar{\tau}_L^i-u)-\int_0^{(3-2i)\bar{\xi}_L^i}u_0(z)dz\\
=&\frac{1}{2}\int_{\bar{\tau}_L^i}^{\tau_L^i}\frac{\bar{x}^2}{(\bar{t}-s)^2}ds+\frac{{\xi_L^i}^2}{2(\tau_L^i+(i-2)u)}-\frac{{\bar{\xi_L^i}}^2}{2(\bar{\tau}_L^i+(i-2)u)}\\
&-\int_{(3-2i)\xi_L^i}^{(3-2i)\bar{\xi}_L^i}u_0(z)dz+(2-i)(\tau_L^i-\bar{\tau}_L^i),\ \forall i.
\end{aligned}$$

注意

$$\begin{aligned}
\frac{t-s}{x}&=\frac{t-\tau_L^i}{x}+\frac{\tau_L^i-s}{x}\\
&=\frac{\bar{t}-\tau_L^i}{\bar{x}}+\frac{\tau_L^i-s}{x}\\
&=\frac{\bar{t}-\tau_L^i}{\bar{x}}+\frac{\tau_L^i-s}{\bar{x}}-\frac{\tau_L^i-s}{\bar{x}}+\frac{\tau_L^i-s}{x}\\
&=\frac{\bar{t}-s}{\bar{x}}+(\tau_L^i-s)(\frac{1}{x}-\frac{1}{\bar{x}}).
\end{aligned}$$

由上述计算可得，$\frac{x^2}{(t-s)^2} < \frac{\bar{x}^2}{(\bar{t}-s)^2}$. 因此，

$$
\begin{aligned}
&U_L^i(\bar{x},\bar{t},\tau_L^i,\xi_L^i) - U_L^i(\bar{x},\bar{t},\bar{\tau}_L^i,\bar{\xi}_L^i)\\
=&\frac{1}{2}\int_{\bar{\tau}_L^i}^{\tau_L^i} \frac{\bar{x}^2}{(\bar{t}-s)^2}ds + \frac{{\xi_L^i}^2}{2(\tau_L^i+(i-2)u)} - \frac{{\bar{\xi}_L^i}^2}{2(\bar{\tau}_L^i+(i-2)u)}\\
&-\int_{(3-2i)\xi_L^i}^{(3-2i)\bar{\xi}_L^i} u_0(z)dz + (2-i)(\tau_L^i-\bar{\tau}_L^i)\\
<&\frac{1}{2}\int_{\bar{\tau}_L^i}^{\tau_L^i} \frac{x^2}{(t-s)^2}ds + \frac{{\xi_L^i}^2}{2(\tau_L^i+(i-2)u)} - \frac{{\bar{\xi}_L^i}^2}{2(\bar{\tau}_L^i+(i-2)u)}\\
&-\int_{(3-2i)\xi_L^i}^{(3-2i)\bar{\xi}_L^i} u_0(z)dz + (2-i)(\tau_L^i-\bar{\tau}_L^i) \le 0,\ \forall i.
\end{aligned}
$$

最后一行由 (4.2) 得出。

步骤2：假设在 (x_1,t) $U_L^i(x,t,\tau,\xi)$ 对于 $\tau=\bar{\tau}_L^i$ and $\xi=\bar{\xi}_L^i$, $\forall i$ where $\bar{\tau}_L^i > \tau_L^i$. 取得最小值。在这种情况下，连接 (x,t) 和 $(0,\tau_L^i)$ 的直线将与连接 (x_1,t) 和 $(0,\bar{\tau}_L^i)$ 的直线相交于点 $(\tilde{x},\tilde{t})$（记作此点）。于是，由步骤 1 可得，对于 $\tau=\bar{\tau}_L^i$ and $\xi=\bar{\xi}_L^i$， $U_L^i(\tilde{x},\tilde{t},\tau,\xi)$ 有唯一的最小值；对于 $\tau=\tau_L^i$ and $\xi=\xi_L^i$, $\forall i.$，也有唯一的最小值。这意味着 $\tau_L^i=\bar{\tau}_L^i$ and $\xi_L^i=\bar{\xi}_L^i$。这与 $\bar{\tau}_L^i > \tau_L^i.$ 的事实矛盾。因此 $\bar{\tau}_L^i \le \tau_L^i.$

步骤3：假设在 (x,t) $U_L^i(x,t,\tau,\xi)$ 对于 $\tau=\tau_L^i$ and $\xi=\bar{\xi}_L^i$ 取得最小值。根据步骤2，$\bar{\tau}_L^i \le \tau_L^i$，我们声称 $\bar{\xi}_L^i$ 对于 $\tau=\tau_L^i$ 在 $\xi=0$ 和 $(\bar{\xi}_L^i, 0)$ 的直线与连接 $(0,\ \bar{\tau}_L^i)$ 和 $(\bar{\xi}_L^i,\ 0)$ 的直线相交于点 $(\tilde{x},\ \tilde{t})$（记作）。现在我们计算如下

$$
\begin{aligned}
&U_L^i(x,t,\tau_L^i,\xi_L^i) - U_L^i(x,t,\tau_L^i,\bar{\xi}_L^i)\\
=&\frac{x^2}{2(t-\tau_L^i)} + \frac{{\xi_L^i}^2}{2(\tau_L^i+(i-2)u)} + (2-i)(\tau_L^i-u) + \int_0^{(3-2i)\xi_L^i} u_0(z)dz\\
&-\frac{x^2}{2(t-\tau_L^i)} - \frac{{\bar{\xi}_L^i}^2}{2(\tau_L^i+(i-2)u)} - (2-i)(\tau_L^i-u) - \int_0^{(3-2i)\bar{\xi}_L^i} u_0(z)dz\\
=&\frac{{\xi_L^i}^2}{2(\tau_L^i+(i-2)u)} - \frac{{\bar{\xi}_L^i}^2}{2(\tau_L^i+(i-2)u)} - \int_{(3-2i)\xi_L^i}^{(3-2i)\bar{\xi}_L^i} u_0(z)dz \le 0,\ \forall i,
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

因为 $U_L^i(x,\ t,\ \tau,\ \xi)$ 在 $\tau=\tau_L^i$ 和 $\xi=\xi_1.$ 处取得最小值。现在我们假设 $U_L^i(x_1,\ t,\ \tau,\ \xi)$ 在 $\tau=\tau_2$ 和 $\xi=\xi_2>\xi_1.$ 处取得最小值。那么

$$\begin{aligned}
&U_L^i(x_1,t,\bar{\tau}_L^i,\bar{\xi}_L^i)-U_L^i(x_1,t,\bar{\tau}_L^i,\xi_L^i)\\
=&\frac{x_1^2}{2(t-\bar{\tau}_L^i)}+\frac{\bar{\xi_L^i}^2}{2(\bar{\tau}_L^i+(i-2)u)}+(2-i)(\bar{\tau}_L^i-u)+\int_0^{(3-2i)\bar{\xi}_L^i}u_0(z)dz\\
&-\frac{x_1^2}{2(t-\bar{\tau}_L^i)}-\frac{{\xi_L^i}^2}{2(\bar{\tau}_L^i+(i-2)u)}-(2-i)(\bar{\tau}_L^i-u)-\int_0^{(3-2i)\xi_L^i}u_0(z)dz\\
=&\frac{\bar{\xi_L^i}^2}{2(\bar{\tau}_L^i+(i-2)u)}-\frac{{\xi_L^i}^2}{2(\bar{\tau}_L^i+(i-2)u)}+\int_{(3-2i)\xi_L^i}^{(3-2i)\bar{\xi}_L^i}u_0(z)dz\le 0,\ \forall i.
\end{aligned}$$

现在，由于 $\bar{\tau}_L^i<\tau_L^i$，我们有

$$\frac{\bar{\xi_L^i}^2-{\xi_L^i}^2}{2(\tau_L^i+(i-2)u)}+\int_{(3-2i)\xi_L^i}^{(3-2i)\bar{\xi}_L^i}u_0(z)dz<\frac{\bar{\xi_L^i}^2-{\xi_L^i}^2}{2(\bar{\tau}_L^i+(i-2)u)}+\int_{(3-2i)\xi_L^i}^{(3-2i)\bar{\xi}_L^i}u_0(z)dz\le 0$$

这与 (4.3) 矛盾。因此，这一矛盾说明 $\bar{\xi}_L^i\le\xi_L^i.$ 对于情形 $I=R$，我们可以重复上述步骤，从而得出结果。

现在，由于对于 $\xi\le 0,\ U_L^3(x,\ \underline{t,\ \xi})=\frac{(x-\xi)_{2t}}{}^2+\int_0^{\xi}u_0(z)dz$ 在 $\xi=\xi_1$ 处取得最小值，我们得到如下结果

$$\begin{aligned}
&U_L^3(x,t,\xi_1)-U_L^3(x,t,\xi_2)\\
&=\frac{(x-\xi_1)^2}{2t}+\int_0^{\xi_1}u_0(z)dz-\frac{(x-\xi_2)^2}{2t}-\int_0^{\xi_2}u_0(z)dz\\
&=\frac{x(\xi_2-\xi_1)}{t}+\frac{{\xi_1}^2-\xi_2^2}{2t}+\int_{\xi_2}^{\xi_1}u_0(z)dz\le 0
\end{aligned}$$

对于任意 $\xi_2\le 0.$，现在假设 $U_L^3(x_1,\ t,\ \xi)$ 在 $\xi=\xi_2>\xi_1$ 处取得最小值，则有

$$\begin{aligned}
&U_L^3(x_1,t,\xi_2)-U_L^3(x_1,t,\xi_1)\\
&=\frac{(x_1-\xi_2)^2}{2t}+\int_0^{\xi_2}u_0(z)dz-\frac{(x_1-\xi_1)^2}{2t}-\int_0^{\xi_1}u_0(z)dz\\
&=\frac{x_1(\xi_1-\xi_2)}{t}+\frac{\xi_2^2-{\xi_1}^2}{2t}+\int_{\xi_1}^{\xi_2}u_0(z)dz\le 0.
\end{aligned}$$

将上述两个不等式相加，得到

$$\frac{(\xi_2-\xi_1)(x-x_1)}{t}\le 0$$

这与我们的假设相矛盾。这个矛盾导致了以下事实：$\xi_2\le\xi_1.$ 类似地，我们可以证明泛函 $U_R^3(x,\ t,\ \xi)$。引理得证。□

定理 4.2。对于几乎处处的 $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$，泛函 U_I^i（其中 $i \in \{1,2,3\}$ 和 $I \in \{L,R\}$）分别关于其变量具有唯一的极小值点。

证明。考虑 $U_L^1(x,t,\tau,\xi)$。令 $\tau_*(x,t)$ $\xi_*(x,t)$ 分别表示 t 轴上的最低点和 x 轴上的最左点，其中 $U_L^1(x,t,\tau,\xi)$ 取得最小值。类似地，令 $\tau^*(x,t)$ $\xi^*(x,t)$ 分别表示 t 轴上的最高点和 x 轴上的最右点，其中 $U_L^1(x,t,\tau,\xi)$ 取得最小值。固定 t，利用引理(4.1)，可知 $\xi^*(x,t)$、$\xi_*(x,t)$ 单调递增，而 $\tau^*(x,t)$ $\tau_*(x,t)$ 单调递减。因此，对于几乎处处的 $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$，函数 $\xi^*(x,t)$、$\xi_*(x,t)$、$\tau^*(x,t)$ 和 $\tau_*(x,t)$ 连续。显然，在 $\xi^*(x,t)$ 和 $\xi_*(x,t)$ 的连续点处，有 $\xi^*(x,t) = \xi_*(x,t)$。类似地，在 $\tau^*(x,t)$ 和 $\tau_*(x,t)$ 的连续点处，有 $\tau^*(x,t) = \tau_*(x,t)$。这证明了，对于几乎处处的 $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$，关于 $U_L^1(x,t,\tau,\xi)$ 的最小化者 τ 和 ξ 是唯一的。类似地，我们可以处理其他泛函U_I^i，其中 $i \in \{1,2,3\}$和 $I \in \{L,R\}$。证明完毕。□

引理 4.3. 给定任意 $t > 0$，存在 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，使得 $0 \le x_2(t) \le x_1(t)$且

$$U_R(x,t) = \begin{cases} U_R^2(x,t) + t, & 0 \le x \le x_2(t) \\ U_R^1(x,t) + t, & x_2(t) \le x \le x_1(t) \\ U_R^3(x,t) + t, & x \ge x_1(t). \end{cases}$$

证明。**步骤 1：**

$$\min\{U_R^1(0,t), U_R^2(0,t), U_R^3(0,t)\} = \min\{U_R^1(0,t), U_R^2(0,t)\}$$

由于

$$U_R^1(0,t) = \min_{\substack{0\le\tau<t \\ 0\le u<\tau \\ \xi\ge 0}} \Big[U_R^1(0,t,\tau,\xi,u)\Big], U_R^3(0,t) = \min_{\xi\ge 0}\Big[U_R^3(0,t,\xi)\Big],$$

其中 $U_R^1(x,t,\tau,\xi,u)$ $U_R^3(x,t,\xi)$ 在 (4.1) 中定义，因此在 $u = 0, \tau = t,$处，我们有 $U_R^1(0,t,\tau,\xi,u)$ 与泛函 $U_R^3(0,t,\xi)$ 相同，这意味着

$$U_R^1(0,t) \le U_R^3(0,t).$$

类似地，我们可以证明$U_R^2(0,t) \le U_R^3(0,t)$。

步骤二：设

$$\sup\{y_1 : \min[U_R^1(x,t), U_R^2(x,t), U_R^3(x,t)]\} = \min[U_R^1(x,t), U_R^2(x,t)]\ \forall x \in [0,y_1]\} = x_1(t)$$

for some $x_1(t) \ge 0$. We claim that

$$\forall x > x_1(t),\ \min[U_R^1(x,t), U_R^2(x,t), U_R^3(x,t)] = U_R^3(x,t)$$

。设 $U_R^3(x,\ t,\ y)$ 在 $y = y_1$ 处取得最小值。此外，设 $(\bar{x},\ \bar{t})$ 为连接 $(x,\ t)$ 与 $(y_1,\ 0)$ 的线段上的任意一点。我们将证明，在 $(\bar{x},\ \bar{t})$,

$$\min[U_R^1(x,t), U_R^2(x,t), U_R^3(x,t)] = U_R^3(x,t).$$

相反，假设对于某个 τ_1, ξ_1, u_1 以下结论成立。

$$\frac{\bar{x}^2}{2(\bar{t}-\tau_1)} + \frac{\xi_1^2}{2(\tau_1-u_1)} - u_1 + \int_0^{\xi_1} u_0(z)dz \le \frac{(\bar{x}-y_1)^2}{2\bar{t}} + \int_0^{y_1} u_0(z)dz.$$

Now,

$$\begin{aligned}&\frac{x^2}{2(t-\tau_1)}+\frac{\xi_1^2}{2(\tau_1-u_1)}-u_1+\int_0^{\xi_1}u_0(z)dz-\frac{(x-y_1)^2}{2t}-\int_0^{y_1}u_0(z)dz\\=&\frac{x^2}{2(t-\tau_1)}-\frac{(x-y_1)^2}{2t}+\frac{\xi_1^2}{2(\tau_1-u_1)}-u_1+\int_{y_1}^{\xi_1}u_0(z)dz\end{aligned}$$

因此，只需验证

$$\frac{x^2}{2(t-\tau_1)}-\frac{(x-y_1)^2}{2t}\leq\frac{\bar{x}^2}{2(\bar{t}-\tau_1)}-\frac{(\bar{x}-y_1)^2}{2\bar{t}}. \tag{4.4}$$

上述在下列条件下成立

$$\frac{x^2}{t-\tau_1}-\frac{(x-y_1)^2}{t}\leq\frac{\bar{x}^2}{\bar{t}-\tau_1}-\frac{(x-y_1)^2}{t^2}\bar{t}. \tag{4.5}$$

由于连接 $(x,t),(y_1,0)$ 与 $(\bar{x},\bar{t}),(y_1,0)$ 的两条直线的斜率相等，我们得到 $\frac{x-y_1}{t}=\frac{\bar{x}-y_1}{\bar{t}}$. 将此等式代入 (4.4)，即得 (4.5)。同样，上述在下列条件下成立

$$\frac{x^2}{t-\tau_1}-\frac{\bar{x}^2}{\bar{t}-\tau_1}\leq\frac{(x-y_1)^2}{t}\Big[1-\frac{\bar{t}}{t}\Big]$$

i.e.

$$\frac{x^2}{t-\tau_1}\leq\Big(\frac{x-y_1}{t}\Big)^2(t-\bar{t})+(\bar{t}-\tau_1)\Big(\frac{\bar{x}}{\bar{t}-\tau_1}\Big)^2 \tag{4.6}$$

现在，我们有

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{x-y_1}{t}\Big)^2(t-\bar{t})+(\bar{t}-\tau_1)\Big(\frac{\bar{x}}{\bar{t}-\tau_1}\Big)^2\\=&(t-\tau_1)\Big[\Big(\frac{x-y_1}{t}\Big)^2\frac{t-\bar{t}}{t-\tau_1}+\frac{\bar{t}-\tau_1}{t-\tau_1}\Big(\frac{\bar{x}}{\bar{t}-\tau_1}\Big)^2\Big]\\>&(t-\tau_1)\Big[\frac{x-\bar{x}}{t-\bar{t}}\times\frac{t-\bar{t}}{t-\tau_1}+\frac{\bar{t}-\tau_1}{t-\tau_1}\times\frac{\bar{x}}{\bar{t}-\tau_1}\Big]^2\\&=(t-\tau_1)\Big[\frac{x}{t-\tau_1}\Big]^2=\frac{x^2}{t-\tau_1}\end{aligned} \tag{4.7}$$

其中第三行由连接 $(x,t),(y_1,0)$ 与 $(x,t),(\bar{x},\bar{t})$ 的直线斜率相等以及凸函数的性质得出。因此，显然 (4.7) 与 (4.6) 矛盾。故我们的断言成立。

因此存在 $x_1(t)\ x_2(t)>0$ 使得 $U_R(x,t)=U_R^2(x,t)+t,\ \forall x\in(0,x_2(t)),U_R(x,t)=U_R^1(x,t)+t,$ $\forall x\in(x_2(t)\ x_1(t))\ U_R(x,t)=U_R^3(x,t)+t,\ \forall x>x_1(t)$，并且对于固定的 t. 故该引理成立。□

对于 $U_L(x,t)$，我们同样可以证明以下引理。

引理 4.4. 对于任意 $t>0$，存在 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$，使得 $y_1(t) \le y_2(t) \le 0$ 并且

$$U_L(x,t)=\begin{cases} U_L^1(x,t), & 0\ge x\ge y_2(t)\\ U_L^2(x,t), & y_2(t)\ge x\ge y_1(t)\\ U_L^3(x,t), & x\le y_1(t). \end{cases}$$

引理 4.5. $U_R(x,t)$ 对几乎处处的$(x,t) \in (0,\infty)\times(0,\infty)$ 的空间导数如下。

$$U_{R_x}(x,t)=\begin{cases} \frac{x}{t-\tau_2(x,t)}, & 0\le x\le x_2(t)\\ \frac{x}{t-\tau_1(x,t)}, & x_2(t)\le x\le x_1(t)\\ \frac{x-\xi_1(x,t)}{t}, & x\ge x_1(t). \end{cases}$$

其中，$U_R^i(x,t,\tau,\xi,u)$ $U_R^3(x,t,\tau,\xi)$ 分别在 $i=1$ 处和 $\tau_i(x,t)$ $\xi_1(x,t)$ 处取得最小值。类似地，$U_L(x,t)$ 关于 x 的空间导数为

$$U_{L_x}(x,t)=\begin{cases} \frac{x}{t-\bar\tau_1(x,t)}, & 0\ge x\ge y_2(t)\\ \frac{x}{t-\bar\tau_2(x,t)}, & y_2(t)\ge x\ge y_1(t)\\ \frac{x-\bar\xi_1(x,t)}{t}, & x\le y_1(t) \end{cases}$$

其中，$U_L^i(x,t,\tau,\xi,u)$ $U_L^3(x,t,\tau,\xi)$ 分别在 $i=1$ 处和 $\bar\tau_i(x,t)$ $\bar\xi_1(x,t)$ 处取得最小值。

证明。我们求 $U_R^1(x,t)$ 关于 $x.$ 的导数。设 $x\in(y_1,y_2)$ 和 $U_R^1(x,t)$ 在唯一的 $\tau_1(x,t)$ 处取得最小值。那么，对于 $x_1,x_2\in(y_1,y_2)$ $x_1<x<x_2$，有

$$\begin{aligned} &U_R^1(x_2,t)-U_R^1(x_1,t)\\ \le&\frac{x_2^2}{2(t-\tau_1(x_1,t))}+\frac{\xi_1(x_1,t)^2}{2(\tau_1(x_1,t)-u_1(x_1,t))}-u_1(x_1,t)+\int_0^{\xi_1(x_1,t)}u_0(z)dz\\ &-\frac{x_1^2}{2(t-\tau_1(x_1,t))}-\frac{\xi_1(x_1,t)^2}{2(\tau_1(x_1,t)-u_1(x_1,t))}+u_1(x_1,t)-\int_0^{\xi_1(x_1,t)}u_0(z)dz\\ =&\frac{x_2^2-x_1^2}{2(t-\tau_1(x_1,t))} \end{aligned}$$

这意味着

$$\frac{U_R^1(x_2,t)-U_R^1(x_1,t)}{x_2-x_1}\le\frac{x_2+x_1}{2(t-\tau_1(x_1,t))}$$

令 $x_1,x_2\to x,$ 趋于极限，得到

$$\lim_{x_1,x_2\to x}\frac{U_R^1(x_2,t)-U_R^1(x_1,t)}{x_2-x_1}\le\frac{x}{t-\tau_1(x,t)}. \tag{4.8}$$

最后一行是由 $\tau_1(x,\ t)$ 的唯一性得出的。类似地，我们可以证明

$$\lim_{x_1,x_2\to x}\frac{U_R^1(x_2,t)-U_R^1(x_1,t)}{x_2-x_1}\ge\frac{x}{t-\tau_1(x,t)}. \tag{4.9}$$

因此，由 (4.8) 和 (4.9) 可得

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(U_R^1(x,t)\Big) = \frac{x}{t-\tau_1(x,t)}.$$

类似地，我们可以计算出 $\frac{\partial}{\partial x}\Big(U_R^2(x,t)\Big) = \frac{x}{t-\tau_2}(x,t)$ 和 $\frac{\partial}{\partial x}\Big(U_R^3(x,t)\Big) = \frac{x-\xi_1}{t}(x,t)$，其中 where$U_R^2(x,t)$ $U_R^3(x,t)$ 分别在 $\tau_2(x,t)$ $\xi_1(x,t)$ 处取得最小值。类似地，我们也可以证明 $U_{L_x}(x,t)$ 的情形。□

定理4.6。 粘性方程 (1.2)的解的消失黏性极限是无黏方程 (1.6)的一个弱（分布）解，其中 $u(x,t)$ 由下式给出

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}U_R, & x > 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}U_L, & x < 0. \end{cases}$$

$\frac{\partial}{\partial x}U_R$和 $\frac{\partial}{\partial x}U_L$的显式公式见引理$(4.5)$。

证明。 设 $u^\epsilon(x,t)$ 是方程 (1.2) 的解。我们证明，$u^\epsilon(x,t)$ 的消失黏性极限是方程 (1.6) 的一个解。首先考虑右半域 $\{x > 0\}$。于是有

$$\lim_{\epsilon\to 0} u^\epsilon(x,t) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial x}\Big[-2\epsilon\log(R^\epsilon(x,t))\Big]. \tag{4.10}$$

令 $\phi \in C_c^\infty\Big((0,\ \infty)\times(0,\ \infty)\Big)$. 则

$$\int_0^\infty \Big[-2\epsilon\log(R^\epsilon(x,t))\Big]\phi_x dx = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\Big[-2\epsilon\log(R^\epsilon(x,t))\Big]\phi dx. \tag{4.11}$$

现在由控制收敛定理,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty \Big[-2\epsilon\log(R^\epsilon(x,t))\Big]\phi_x dx = \int_0^\infty \lim_{\epsilon\to 0}\Big[-2\epsilon\log(R^\epsilon(x,t))\Big]\phi_x dx.$$

于是由 (4.11) 和定理3.1可得

$$-\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\Big[-2\epsilon\log(R^\epsilon(x,t))\Big]\phi dx = \int_0^\infty U_R(x,t)\phi_x dx.$$

再次由控制收敛定理,

$$-\int_0^\infty \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial x}\Big[-2\epsilon\log(R^\epsilon(x,t))\Big]\phi dx = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\Big[U_R(x,t)\Big]\phi dx. \tag{4.12}$$

于是结合 (4.10) 和 (4.12)，可得

$$\lim_{\epsilon\to 0} u^\epsilon(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\Big[U_R(x,t)\Big] = u(x,t).$$

该 $u(x,\ t)$ 满足无黏方程 (1.6)（见 [1]）。

□

References

[1] Adimurthi 和 G. D. Veerappa Gowda。带不连续通量的守恒律。京都大学数学杂志，43(1):27–70，2003。[2] Adimurthi、Siddhartha Mishra 和 G. D. Veerappa Gowda。空间变量中通量函数不连续的守恒律。II. 凸凹型通量与广义熵解。计算与应用数学杂志，203(2):310–344，2007。[3] Adimurthi、Siddhartha Mishra 和 G. D. Veerappa Gowda。Godunov 型方法对空间变化的不连续通量函数守恒律的收敛性。数学计算，76(259):1219–1242，2007。[4] Adimurthi、Siddhartha Mishra 和 G. D. Veerappa Gowda。哈密顿-雅可比方程及带不连续系数的守恒律的显式 Hopf-Lax 型公式。微分方程杂志，241(1):1–31，2007。[5] Jaywan Chung、Yong-Jung Kim 和 Marshall Slemrod。带定常点源的 Burgers 方程的显式解。微分方程杂志，257(7):2520–2542，2014。[6] L. C. Evans。偏微分方程。数学研究生教材。美国数学学会，1998。[7] Eberhard Hopf。偏微分方程 $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$。纯粹与应用数学通讯，3:201–230，1950。[8] Kenneth H. Karlsen、Nils H. Risebro 和 John D. Towers。关于具有不连续系数的非线性退化抛物型输运扩散方程。电子版微分方程杂志，第93号，23页，2002。[9] S. N. Kruzkov。具有多个自变量的一阶拟线性方程。数学文集，81:228–255，1970。[10] P. D. Lax。双曲型守恒律系统 II。纯粹与应用数学通讯，10(4):537–566，1957。[11] Philippe LeFloch。带边界条件的显式公式……数学方法与应用科学，14，1991。[12]Olga A. Oleinik。非线性微分方程的不连续解。美国数学会译丛（第二辑），26:95–172，1963。[13] O. A. Oleˇ inik。关于力学中出现的非线性方程组的柯西问题广义解的唯一性。数学科学进展（新辑），12(6(78)):169–176，1957。[14] Daniel N. Ostrov。具有不连续时空依赖性的哈密顿-雅可比方程与标量守恒律的解。微分方程杂志，182(1):51–77，2002。[15] Manas Ranjan Sahoo、Satyanarayana Engu 和 Smriti Tiwari。关于非齐次黏性 Burgers 方程解的大时间渐近行为的一点说明。数学科学学报 *B* 辑（英文版），43(3):1323–1332，2023。