arXiv:2602.08504v1 [cs.GT] 9 Feb 2026

加性效用下比例性的通用理论

Piotr Sko
wron 华沙大学
p.skowron@mimuw.edu.pl

我们考虑这样一种模型：根据选民偏好选出候选人子集，同时满足规定哪些子集可行的一般约束。该模型涵盖了委员会选举中的多样性约束、参与式预算（包括规定如何将资金分配给来自不同资金池的项目的约束）以及公共决策。近期，研究者已为这一通用模型定义了比例性公理，但提出的规则仅适用于批准选票，即每位选民提交一个自己认为可接受的候选人子集。我们为基数投票提出比例性规则：每位选民为每位候选人赋予一个数值，表示选中该候选人时其获得的效用。在构建这些规则时，我们还引入了生成比例性排名的方法，以确保排名的每个前缀都满足比例性。

1 引言 **2**

2 模型 **4**
2.1 可行性约束 .42.2 比例性公理 .52.3 排序规则 .6

3 加性效用下的比例度 6

4 PropRankRule **11**
4.1 一般方案 .114.2 缩放因子 .124.3 PropRank 的比例度 .144.4 PropRank 的比例性正当代表性 .204.5 关于全局缩放因子的评注 .22

5 均等份额法 一般约束 23
5.1 算法主循环 .235.2 带前瞻的均等份额子程序 .235.3 一般约束下均等份额法的 PJR 程度 .26

6 平等份额 有界超支和回溯启发式 28

7 实验评估 **29**

8 结论 **31**

1 引言

我们研究一种模型，其目标是根据选民的偏好，从一组可选候选人中选出一个子集 C。所选子集必须可行，其中可行性约束由一族子集 $\mathcal{F} \subseteq 2^C$定义；子集 $W \subseteq C$是可行解，当且仅当 $W \in \mathcal{F}$。这一通用框架涵盖了社会选择理论中研究的广泛情境 [27]。例如，当 $\mathcal{F}$ 由所有具有指定基数的子集构成时，该模型对应委员会选举 [17, 25]。我们的目标是选出一个可行子集，使得选民的偏好得到公平体现。公平性通过比例性的概念加以形式化：如果一个占选民群体 γ 一定比例的选民群体，对某些候选人有足够一致的偏好，那么该群体就应能影响所选候选人中大约 γ 这一比例的候选人。各种比例性公理都体现了这一理念。其中最重要的包括正当代表性的各种变体，它们最初是在委员会选举的背景下提出的 [2, 22, 32, 35]。

在本文中，我们设计规则（算法），用于选择比例公平的结果，假设选民通过加性效用表达其偏好——也就是说，每位选民 i 赋予一个效用值 $u_i(c)$ 给每位候选人 c。寻找并计算比例性结果的问题，特别是满足正当代表性各种变体的结果，要么对于非常特定类型的可行性约束（例如委员会选举和参与式预算），要么当选民具有简单的基于批准的偏好（即每位选民对每位候选人赋予的效用为1或0）时，都已得到充分理解。

可行性约束

如前所述，我们的框架涵盖了委员会选举模型；此外，它还能容纳多样性约束，这些约束对当选委员会的构成提出额外的结构性要求（例如，当选委员会应实现性别平衡） [1, 4, 10]。当 $\mathcal{F}$ 由总成本不超过预定预算的所有子集组成时，我们便得到参与式预算模型 [32, 33, 34]。

此外，通过引入辅助候选项并施加额外约束，我们可以对更复杂的投票情境进行建模；乍看之下，这些情境似乎并不涉及从候选人中选出一个子集 [27]。例如，考虑委员会选举：选民可以对每位候选人表示赞成、反对或中立。我们可以利用一般约束模型的表达能力，将这种更丰富的偏好设置简化为一种框架，在该框架中，选民对候选人只有非负效用 [23]。具体而言，对于每位候选人 $c \in C$，我们都可以引入一个辅助候选人 $\neg c$，代表不选择 c这一选项。当且仅当选民在原选举中反对 c 时，他们才赞成 $\neg c$。这样，选民便可以从排除自己反对的候选人中获得效用，因此仍然处于非负效用模型之内。为确保这一构造按预期发挥作用，我们必须施加额外的可行性约束，规定 c 和 $\neg c$ 不能同时入选。同样，我们的模型还涵盖了公共决策问题：在这类问题中，我们需要就若干独立议题 [8, 11, 13, 19, 24, 37],作出决策；也涵盖了一般的判断聚合模型 [14, 26]，以及根据个人的集体偏好制定工作日程的问题 [31]。关于如何通过约束对不同社会选择问题进行建模，更多讨论请参见 Masaˇrík 等人近期发表的论文 [27]。

在加性效用的情况下，已知能处理这些特定模型的规则寥寥无几。一个值得注意的例外是 Mavrov 等人最近的研究 [28], ：他们分析了一种基于最大化纳什福利 [16] 平滑变体、适用于一般约束的规则；然而，这种规则仅满足较弱的比例性概念（参见 Masaˇrík 等人的讨论 [27]），而且

尤其是，即使在参与式预算中，也不满足正当代表性的若干变体 [32]。

在参与式预算这一特定情境下，有人提出了一种称为均等份额法的规则；在基数效用下，该规则满足扩展正当代表性（EJR）至多差一项 [5, 30, 32, 33]。然而，这一规则专为参与式预算约束而设计，如何将其推广到任意可行性约束尚不明确。

对于具有基数效用的委员会选举，人们通常会考虑一种强于正当代表性公理的概念，即核心 [2]。由于核心可能为空，人们投入了大量精力来设计满足其近似变体的算法 [12, 15, 21, 28, 29]，但原则上，这些算法可能会严重违反正当代表性公理。

批准偏好与加性效用

将正当代表性公理扩展到具有一般可行性约束的模型中，在概念上颇为复杂。尽管如此，近期已有研究提出了适用于这一更广泛情境的定义 [27], ，并且这些定义保留了原有定义的许多优良性质。然而，目前已知的用于计算一般可行性约束下比例性结果的规则，都是针对基于批准的偏好量身设计的 [27]。

在批准偏好下，每位选民只需指定自己批准的候选人集合。形式上，基于批准的模型可以视为加性效用模型的一种特殊情况：选民为每位获批准的候选人赋予效用 1，为其他候选人赋予效用 0。目前尚不清楚，针对批准偏好设计的规则如何推广到更丰富的偏好模型中，尤其是如何适用于加性效用。此外，已知一些基于批准投票的规则（例如比例批准投票）在以最自然的方式应用于加性效用模型时，会失去其在比例性方面的良好性质 [32]。

即使选民提交的是批准选票，在许多情况下，采用依赖于隐含的基数效用解释的方法也至关重要。例如，在参与式预算中，通常假设选民从获批准的项目中获得的效用等于其成本，否则效用为零 [7, 18]。这一观察进一步凸显了制定适用于加性效用的比例规则的重要性，即使选民使用的是更简单的选票格式。

基于用虚拟货币购买候选人的算法

我们的规则将候选人选择视为用虚拟货币购买候选人的过程，其灵感来自Phragm´en序贯规则 [6, 25, 27, 36]。选民以恒定速率逐步获得虚拟资金。在原始的Phragm´en规则中，每当赞成某位候选人 c 的选民积累了足够支付其成本的资金时，他们便购买该候选人（其账户被置为零），任何会违反可行性约束的候选人均被移除，该过程持续进行，直到不再存在未购买且未被移除的候选人为止。

对于加性效用，购买过程更为复杂。在任一时刻，若更理想的候选人可能很快变得可负担，选民可以选择不购买当前可负担的候选人。具体而言，每位选民进行内部模拟，以估计当前时刻每位可选候选人可被购买的比例。对于每一位此类候选人，选民计算按该比例缩放的期望效用。据此计算购买部分候选人时支付与效用之比的最佳情形比率。随后，选民利用该比率确定愿意为特定候选人支付多少，以确保其支付与效用之比不超过最佳部分购买的相应比率。精确过程描述于第4节。

该算法还可以构造一个比例排名，该排名中的每个前缀视为一个委员会时都是合乎比例的 [38]。为此，我们只需在购买过程中不移除不可行的候选人，并根据购买时间戳对所有候选人进行排序。因此，我们将该算法称为*PropRank*。这还解决了另一个

具有许多应用的重要问题：在存在加性效用的情况下构造比例性排名。近期已有研究针对排序选民偏好探讨了类似问题 [3]。

一般约束下的均等份额法

PropRank 背后的理念可以进一步发展，将均等份额法及其有界超支变体推广到具有一般可行性约束的模型中。这种方法与前文所述的类似，但我们会尽可能延迟购买可负担候选人。具体而言，我们允许选民逐渐积累虚拟硬币，并找出这样一个最早时刻：若选民在此时支付款项，已购买的候选人就会违反可行性约束。我们在这一时刻之前立即停止，并在当时购买候选人。随后，我们将所有不可行的候选人排除在考虑范围之外，再继续这一过程。

我们通过理论性质和基于真实参与式预算案例 [18] 进行的模拟来分析这些规则。

2 模型

一场选举是一个元组（N，C，成本 $\{u_i\}_{i\in N}$），其中：

1. $N = \{1, 2, \dots n\}$ 是选民的集合，而 $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ 是候选人的集合。
2. 成本：$C \to \mathbb{N}$ 是一个将每位候选人关联到成本的函数，并且
3. 对于每个 $i \in N$, u_i：$C \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 是一个效用函数，用于指定选民 i 对特定候选人的认可程度。一般性不失，假设每位候选人至少能从一位选民那里获得正效用。我们用 $u_{\max}$ 表示选民赋予候选人的最高效用，即 $u_{\max} = \max_{i\in N,\ c\in C} u_i(c)$。

如果所有选民的效用都来自二元集合 $\{0, 1\}$，那么我们称这种选举为基于批准投票的。模型的另一个重要特例是所有候选人的成本都相同；在这种情况下，我们称之为统一成本。我们使用以下记法：

$$A_i = \{c \in C \colon u_i(c) > 0\} \qquad \text{and} \qquad N_c = \{i \in N \colon u_i(c) > 0\}.$$

2.1 可行性约束

我们将可行性约束定义为候选人子集构成的一个族，$\mathcal{F} \subseteq 2^C$，且该族向下封闭——也就是说，对于所有 $A \subseteq B \subseteq C$，若 $B \in \mathcal{F}$，则 $A \in \mathcal{F}$。[1] 我们将 $\mathcal{F}$ 中的元素称为可行子集。一个选择规则是一个函数，它以一次选举和可行性约束为输入，并返回候选人的一个可行子集。

一个具有可行性约束的选举的简单例子，是经典的委员会选举模型 [17, 25], ，在该模型中，所有大小不超过 k 的候选人子集都是可行的，其中 k 是某个固定常数。Masařík 等人 [27] 讨论了其他几个通过可行性约束自然定义的重要选举例子。其中一类尤为重要的可行性约束，是拟阵约束。

定义 1（拟阵约束）。可行性约束 $\mathcal{F}$ 构成拟阵，当且仅当对于所有 $X, Y \in \mathcal{F}$ 满足 $|X| < |Y|$ 的情况，都存在一个元素 $c \in Y \setminus X$ 使得 $X \cup \{c\} \in \mathcal{F}$。」

[1] 向下封闭性的假设纯粹是技术性的，并不限制我们结果的普遍性。等价地，可以将 $\mathcal{F}$ 定义为能够扩展为可行解的子集族，正如 Masařík 等人近期的研究中所解释的那样 [27]。

可用拟阵约束建模的情形包括标准委员会选举 [17, 25], 带性别配额的委员会选举 [1, 4, 10, 27], 公共决策 [13,19, 37], 以及序贯决策 [24]; 参见 Masaˇr 论文中的讨论ık 等人 [27]。

当我们指出可行性约束具有拟阵结构时，便隐含地假设所有候选人成本均相同且为 1。事实上，在我们的语境中，这些成本直观上对应于每个候选人在可行性约束中占据的“空间量”；而在拟阵假设下，所有候选人的权重直观上都相同。

另一类重　　要的选举对应于参与式预算（*PB*） [9, 20, 33]　　.

定义 2（参与式预算（PB）约束）。族 $\mathcal{F}$ 构成参与式预算约束，当且仅当存在一个常数 $b > 0$，称为预算，使得

$$\mathcal{F} = \left\{ W \subseteq C : \sum_{c \in W} \mathrm{cost}(c) \leqslant b \right\}. \qquad \lrcorner$$

2.2 比例性公理

我们考虑的比例性公理都基于凝聚性的概念。下面给出一个定义，它扩展了 Masaˇrık 等人 [27] 和 Peters 等人 [33]提出的两个定义。

定义3（一般可行性约束下的凝聚性）。考虑一场选举 $E = (N, C,$ 成本 $\{u_i\}_{i \in N})$。我们称选民群体 S 是 (α, β)-凝聚的，$\alpha \in \mathbb{R}$，$\beta \in \mathbb{N}$，如果对于每个可行集 $T \in \mathcal{F}$ 其规模受限于

$$|T| < \beta \cdot \frac{n - |S|}{|S|},$$

存在一个集合 X 使得 $|X| \leqslant \beta$，$\sum_{c \in X} \min_{i \in S} u_i(c) \geqslant \alpha$，并且 $X \cup T \in \mathcal{F}$。选民群体 S 是 α-凝聚的 如果它是 (α, β)-凝聚的 对于某个 $\beta \in \mathbb{N}$。 $\lrcorner$

该定义略显复杂，但从较高层面可以概括如下。直观而言，群体 S 一致认为候选人 c 所代表的价值至少为$\min_{i \in S} u_i(c)$；因此，总和 $\sum_{c \in X} \min_{i \in S} u_i(c)$ 可被视为 S 中的选民就 X的价值所达成的某种强形式的一致。若直观上群体 S 有权选择 β 名候选人，且 S 一致认为其价值至少为 α，则该群体被视为 (α, β)-凝聚的。关键问题是：何时应赋予这样一个群体对 β 名候选人的权利？为确定这一点，考虑来自 $N \setminus S$的选民。从 S的视角看，最坏情况下，这些选民的偏好可能与 S的偏好不相交，从而在应选择哪些候选人方面产生潜在冲突。如果 S 有权获得 β 名候选人，那么根据比例性，其余选民将大致有权获得 $\beta \cdot {}^{n-|S|}/_{|S|}$ 名候选人。因此，如果其选择不会使 $N \setminus S$ 可选的候选人数量（在可行性约束内）降至 $\beta \cdot {}^{n-|S|}/_{|S|}$以下，则 S 应有权获得 β 名候选人；形式化地说，如果这样的选择不会剥夺来自$N \setminus S$ 的选民购买一个规模低于 $\beta \cdot {}^{n-|S|}/_{|S|}$ 的集合 T的权利。

下面给出参与式预算约束的一个更具体的定义 [33]:

定义4（预算为 b 的参与式预算约束的凝聚性）。我们称一群选民 S 是 α-凝聚的，$\alpha \in \mathbb{R}$，当且仅当存在 $X \subseteq C$ 使得来自 S 的选民获得一定比例的预算份额后 b 能够负担得起购买来自 X （也就是说 $b \cdot {}^{|S|}/_{n} \geqslant \mathrm{cost}(X)$），并且 $\sum_{c \in X} \min_{i \in S} u_i(c) \geqslant \alpha$。 $\lrcorner$

在本文中，我们通过要求选民对定义3中的所有候选人的效用同时达成一致，进一步强化了凝聚性条件。X 这使我们得到了更强的凝聚性概念，进而得到较弱的比例性概念。

定义5。我们称一群选民 S 是强（α， β）-凝聚的，$\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{N}$, 若对于每个大小不超过 $|T| < \beta \cdot n - |S| / |S|$ 的可行集 $T \in \mathcal{F}$，都存在一个集合 X，使得 $|X| = \beta$,$\beta \cdot \min_{i \in S,\ c \in X} u_i(c) \geqslant \alpha$，且 $X \cup T \in \mathcal{F}$。」

最重要的比例性公理之一是扩展正当代表性 [2, 27, 33]。

定义 6（扩展正当代表性）。给定一个选举 $E = (N, C$, 成本 $\{u_i\}_{i \in N})$，我们称结果 W 满足扩展正当代表性（EJR），如果对于每个 $\alpha \in \mathbb{R}$，以及由α构成的凝聚选民群体 S，都存在 $i \in S$，使得 $u_i(W) \geqslant \alpha$。如果对于每个 $\alpha \in \mathbb{R}$，以及强 α-凝聚选民群体 S，都存在 $i \in S$，使得 $u_i(W) \geqslant \alpha$，则称结果 W 满足弱扩展正当代表性（EJR）。如果一个选择规则总是返回满足 EJR（分别地，弱 EJR）的结果，我们就称该规则满足 EJR（分别地，弱 EJR）。」

值得注意的是，对于批准选票，凝聚性与强凝聚性等价，这也意味着对于批准选票，EJR 与弱 EJR 等价。

2.3 排名规则

一种排名规则是一个函数，它以选举为输入，并生成候选人的排序——即候选人的线性序。由于排名规则会对所有可用候选项进行排序，因此无需考虑可行性约束。为定义排名规则的比例性，我们遵循 Skowron 等人提出的方法。 [38]。

定义 7（排名规则的扩展正当代表性）。给定一个选举 $E = (N, C$，成本 $\{u_i\}_{i \in N})$，如果候选人的排序 $\succ$ 中的每个前缀 W 都满足预算设为 $b = \sum_{c \in W}$成本(c)时参与式预算约束下的扩展正当代表性，则称该排序满足扩展正当代表性。如果排名规则始终返回满足扩展正当代表性的排序，则称该排名规则满足扩展正义代表性（EJR）。」

3 加性效用下的比例度

在扩展正义代表性的定义中，我们要求至少存在一名获得满足的选民。然而，这一定义隐含地保证了凝聚群体的总体效用较高。当我们从群体 S 中移除选民 i（其高效用已有保证）后，便得到一个更小的凝聚群体 $S \setminus i$，该公理仍然适用于这个群体（尽管它可能意味着对这个缩小后的群体给出相应较低的保证）。通过反复应用这一推理，我们可以推知，整个群体 S 的效用都有较高保证。比例度公理更明确地体现了这一直觉，并提供了一种量化群体选民的偏好在多大程度上得到考虑的方法。比例度最初是在批准偏好的背景下提出的 [36]；下文将其推广至加性效用。

定义 8（比例度）。考虑一场选举 $E = (N$， C， 成本 $\{u_i\}_{i \in N})$，以及一个候选人子集 $W \subseteq C$，成本$(W) \leqslant b$。我们称 W 具有 比例度 为d: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 如果对于每个 $\alpha \in \mathbb{R}$，以及 α-凝聚选民群体 S 这些选民的平均满意度至少等于 $d(\alpha)$:

$$\frac{1}{|S|} \sum_{i \in S} u_i(W) \geqslant d(\alpha).$$

若某个选择规则总是返回比例度为 d 的结果，则该规则具有 d 的比例度。」

类似地，我们只需将定义 8中的凝聚性条件替换为强凝聚性，即可给出弱比例度的定义。

现在，我们确立比例度与扩展正义代表性（EJR）之间的关系，并表明这种关系与基于批准投票的委员会选举这一特殊情形下的关系基本相同。

定理 1. 考虑参与式预算约束，并假设选民人数可以被预算整除。如果委员会 W 满足扩展正义代表性（*EJR*），那么其比例度为$d(\alpha) = (\alpha - u_{\max})/2$，其中 $u_{\max}$ 是选民赋予某个候选人的最高效用。

证明. 考虑一次选举 $E = (N, C,$ 成本 $\{u_i\}_{i\in N})$、预算值 b，以及一个满足扩展正义代表性（EJR）的候选人子集$W \subseteq C$。我们将通过对凝聚群体的规模进行归纳法来证明该定理的结论。对于规模为零的凝聚群体，结论显然成立。设 $S \subseteq N$ 是一个α-凝聚选民群体，并假设对于所有规模严格小于 $|S|$的凝聚群体，结论均成立；我们将证明结论对 S也成立。设 X 是用于证明 S 具有凝聚性的集合。对于每个 $c' \in X$，令 $\alpha(c') = \min_{i\in S} u_i(c')$；对于每个 $c' \in X$，我们将 $s(c')$ 定义为：

$$s(c') = \frac{n}{b} \cdot (\mathrm{cost}(X) - \mathrm{cost}(c')).$$

现在，注意到我们有：

$$1 - \frac{s(c')}{|S|} \geqslant \left(1 - \frac{s(c')}{\mathrm{cost}(X) \cdot \frac{n}{b}}\right) = \left(1 - \frac{\frac{n}{b} \cdot (\mathrm{cost}(X) - \mathrm{cost}(c'))}{\mathrm{cost}(X) \cdot \frac{n}{b}}\right) = \frac{\mathrm{cost}(c')}{\mathrm{cost}(X)}.$$

将此表达式对所有 $c' \in X$ 求和，可得：

$$\sum_{c'\in X} \frac{|S| - s(c')}{|S|} \geqslant \sum_{c'\in X} \frac{\mathrm{cost}(c')}{\mathrm{cost}(X)} = 1 = \sum_{c'\in X} \frac{\alpha(c')}{\sum_{c\in X} \alpha(c)}.$$

因此，必定存在 c' 使得

$$\frac{|S| - s(c')}{|S|} \geqslant \frac{\alpha(c')}{\sum_{c\in X} \alpha(c)}. \tag{1}$$

设 $X' = X \setminus \{c'\}$。注意到，满足 $|S'| \geqslant s(c')$ 的群体 $S' \subseteq S$ 是 $(\alpha - \alpha(c'))$-凝聚的。因此，根据扩展正义代表性，在每一个这样的群体中都存在一名选民 i，使得 $u_i(W) \geqslant \sum_{c\in X'} \alpha(c)$。我们将这一推理应用于 $S' = S$，找到一名效用适当高的选民 i，接着将其应用于$S' = S \setminus \{i\}$，依此类推，直到最终得到一个规模为 $s' = s(c')$ 的群体。现在，利用归纳假设，我们可以评估来自 S的选民的总效用：

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in S} u_i(W) &\geqslant \underbrace{(|S| - s') \sum_{c\in X'} \alpha(c)}_{\text{EJR applied several times}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot s' \cdot \left(\sum_{c\in X'} \alpha(c) - u_{\max}\right)}_{\text{inductive assumption}} \\
&\geqslant \frac{1}{2} \cdot |S| \left(\sum_{c\in X} \alpha(c) - u_{\max}\right) + \frac{1}{2} \cdot |S|(u_{\max} - \alpha(c')) + \frac{1}{2} \cdot |S| \cdot \sum_{c\in X'} \alpha(c) \\
&\qquad - s' \sum_{c\in X'} \alpha(c) + \frac{1}{2} \cdot s' \cdot \left(\sum_{c\in X'} \alpha(c) - u_{\max}\right) \\
&\geqslant \frac{1}{2} \cdot |S| \left(\sum_{c\in X} \alpha(c) - u_{\max}\right) + \frac{1}{2} \cdot |S|(u_{\max} - \alpha(c')) + \frac{1}{2} \cdot |S| \cdot \sum_{c\in X'} \alpha(c)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - \frac{1}{2} \cdot s' \cdot \left(\sum_{c \in X'} \alpha(c) + u_{\max} \right) \\
&\geqslant \frac{1}{2} \cdot |S| \left(\sum_{c \in X} \alpha(c) - u_{\max} \right) - \frac{1}{2} \cdot |S| \alpha(c') + \frac{1}{2} \cdot |S| \cdot \sum_{c \in X'} \alpha(c) \\
&\quad - \frac{1}{2} \cdot s' \cdot \sum_{c \in X'} \alpha(c) + \frac{1}{2} \cdot u_{\max} \cdot (|S| - s') \\
&\geqslant \frac{1}{2} \cdot |S| \left(\sum_{c \in X} \alpha(c) - u_{\max} \right) - \frac{1}{2} \cdot |S| \alpha(c') + \frac{1}{2} \cdot (|S| - s') \cdot \sum_{c \in X'} \alpha(c) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot u_{\max} \cdot (|S| - s') \\
&\geqslant \frac{1}{2} \cdot |S| \left(\sum_{c \in X} \alpha(c) - u_{\max} \right) \underbrace{- \frac{1}{2} \cdot |S| \alpha(c') + \frac{1}{2} \cdot (|S| - s') \cdot \sum_{c \in X} \alpha(c)}_{\text{we can estimate this by (1)}} \\
&\geqslant \frac{1}{2} \cdot |S| \left(\sum_{c \in X} \alpha(c) - u_{\max} \right).
\end{aligned}
$$

至此归纳步骤完成，因而证明完毕。 □

请注意，定理 1 给出了适用于每个凝聚选民群体的一个推论 S。通过考察该定理的证明，我们可以看到， $u_{\max}$ 实际上对应于选民 S 在能够体现该群体凝聚性的集合中，对某个候选人赋予的最高效用。尽管这种表述更强，但出于简洁考虑，我们更倾向于采用原来的表述。

对于带有拟阵约束的基于批准的选举，也存在类似的推论 [27]。例1 展示了一个带有拟阵约束但效用为加性效用的实例，在该实例中这一推论并不成立。然而，定理 2 证明了一个较弱的推论，该推论取决于凝聚群体的规模，并适用于所有类型的约束。

例1。 我们将介绍一种算法，用于构造一个实例，在该实例中，扩展正义代表性（EJR）并不能保证比例度达到 $d(\alpha) = (\alpha - u_{\max})$。固定一个自然数 $z \in \mathbb{N}$，并考虑一个公共决策实例，其中候选人集合被划分为互不相交的候选人对$C = C_1 \cup \ldots C_{2z}$， $|C_i| = \{a_i, b_i\}$， 每个 $i \in \{1, \ldots, 2z\}$对应一对；可行结果是每对中至多包含一名候选人的结果。选民人数等于 $n = z$。考虑一个选民群体 S， 其中 $|S| = z$ 名选民一致地将效用 $(z - i)^2$ 赋予 a_i， 对于 $i \leqslant z$。此外，来自 S 的第 i名选民将效用 w_i （稍后指定）赋予 a_{z+i}。考虑一个子集 $S' \subseteq S$，并估算使得 S' 对某个固定的 $\beta \in \mathbb{N}$为（α， β）-凝聚群体时， α 所能取的最大值。为此，我们的算法会考察 $\beta \in \{1, \ldots z\}$的每个可能取值。对于一个固定的 β 值，我们构造一个对抗集合 T，使得：

$$
|T| = \left\lfloor \beta \cdot \frac{n - |S'|}{|S'|} \right\rfloor.
$$

在最坏情况下， T 由索引最低的 $|T|$ 个候选人 b_i 组成。此时，对应的最佳集合 X 所能提供的效用至多为：

$$
\sum_{i=|T|}^{\min(z, \beta + |T|)} (z - i)^2.
$$

上述表达式在所有 β 中的最大值，就是前面提到的效用 $w_{|S'|}$。因此，由所有满足 $i \leqslant z$ 且 $i > z$ 的 b_i （其中 a_i ）组成的解满足扩展正义代表性。从 S 中选民的效用平均值因此为：

$$\frac{1}{z} \cdot \sum_{i=1}^{z} w_i.$$

原群体 S 至少是 α-凝聚的：

$$\alpha_S = \sum_{i=1}^{z} (z-i)^2.$$

表达式 $(u_S + z^2)/\alpha_S$ 对于 $z = 200$ 的值约为 0.38，低于 0.5。」

定理 2. 如果结果 W 满足扩展正义代表性（*EJR*），那么对于每个 (α, β)-凝聚选民群体 S，该群体 S 中来自 W 的平均效用至少等于：

$$\frac{1}{|S|} \sum_{i \in S} u_i(W) \geqslant \alpha \cdot (\gamma - 1) \cdot \left(\gamma \cdot \log \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) - 1 \right) - u_{\max}$$

其中 $\gamma = n/|S|$，而 $u_{\max}$ 是选民赋予某个候选人的最高效用。

证明。 设 $S \subseteq N$ 是一个 (α, β)-凝聚选民群体。首先，我们将证明每个群体$S' \subseteq S$ 对于

$$\beta' = \beta \cdot \frac{(n - |S|)|S'|}{(n - |S'|)|S|} \qquad \alpha' = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \lfloor \beta' \rfloor \geqslant \frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta' - u_{\max}.$$

事实上，考虑一个可行候选人集合 $T \in \mathcal{F}$。如果存在一个集合 X，使得 $|X| \leqslant \beta$，$\sum_{c \in X} \alpha(c) \geqslant \alpha$，且 $X \cup T \in \mathcal{F}$，那么我们只需选取 $\lfloor \beta' \rfloor$ 个候选人 $c \in X$，其 $\alpha(c)$值最高，凝聚性条件便得到满足。否则，根据 S 是 (α, β)-凝聚的这一事实，我们知道：

$$|T| \geqslant \beta \cdot \frac{n - |S|}{|S|} \geqslant \beta \cdot \frac{(n - |S|)|S'|}{(n - |S'|)|S|} \cdot \frac{n - |S'|}{|S'|} = \beta' \cdot \frac{n - |S'|}{|S'|},$$

因此，凝聚性的条件也得到了满足。

现在，与定理 1 的证明类似，我们将对 S的不同子集多次应用扩展正义代表性。由此，我们得到：

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in S} u_i(W) &\geqslant \sum_{s'=0}^{|S|} \frac{\alpha}{\beta} \cdot \lfloor \beta' \rfloor \geqslant \sum_{s'=0}^{|S|} \alpha \cdot \frac{(n - |S|)s'}{(n - s')|S|} - |S| \cdot u_{\max} \\
&= \alpha \cdot \frac{n - |S|}{|S|} \cdot \sum_{s'=1}^{|S|} \frac{s' - n + n}{n - s'} - |S| \cdot u_{\max} \\
&= \alpha \cdot \frac{n - |S|}{|S|} \cdot \sum_{s'=1}^{|S|} \left(\frac{n}{n - s'} - 1 \right) - |S| \cdot u_{\max} \\
&= \alpha \cdot \frac{n(n - |S|)}{|S|} \cdot \sum_{s'=1}^{|S|} \frac{1}{n - s'} - \alpha(n - |S|) - |S| \cdot u_{\max}
\end{aligned}$$

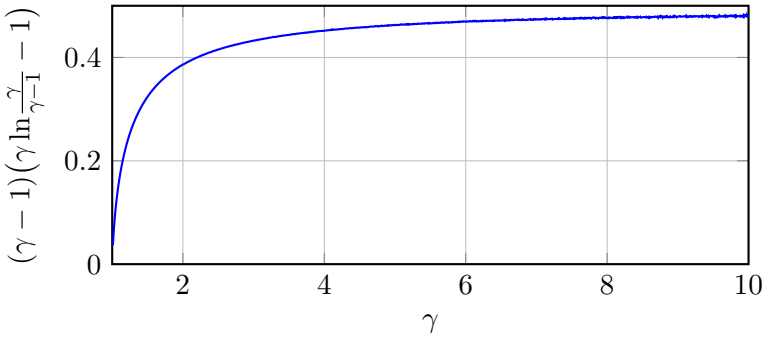

图1：该图展示了由 EJR 公理所蕴含的比例度，它是凝聚选民群体规模 S 的函数，其中 $\gamma = n/|S|$。它说明了比例系数（比例度中紧邻 α 的系数）的取值；在参与式预算约束以及带有拟阵约束的基于批准的选举情形下，该系数等于 $1/2$。在一般情形下，该系数在极限中收敛于 $1/2$。对于 $\gamma = 2$ 和 $\gamma = 3$，该系数分别约为 0.39 和 0.43。

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \alpha \cdot \frac{n(n-|S|)}{|S|} \cdot \log\left(\frac{n}{n-|S|}\right) - \alpha(n-|S|) - |S| \cdot u_{\max} \\
&= |S|\alpha \cdot \frac{|S|\gamma(|S|\gamma-|S|)}{|S|^2} \cdot \log\left(\frac{|S|\gamma}{|S|\gamma-|S|}\right) - \alpha(|S|\gamma-|S|) - |S| \cdot u_{\max} \\
&= |S|\alpha \cdot \left(\gamma(\gamma-1) \cdot \log\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) - (\gamma-1)\right) - |S| \cdot u_{\max}.
\end{aligned}
$$

证明至此完成。 □

为了更好地理解比例度公式，在定理 2 中，我们将其绘制于图1。我们可以看到，该函数迅速趋近于 $1/2$，而这正是参与式预算约束（定理 1）以及带有拟阵约束的基于批准的选举 [27]的理论保证。

进一步地，对于扩展正义代表性的较弱变体，一个更强的推论成立。

定理 3。 考虑拟阵约束。如果一个委员会 W 满足弱 *EJR*，那么其弱比例度为 $d(\alpha) = (\alpha - u_{\max})/2$，其中 $u_{\max}$ 是选民所分配的最高效用。

证明。 证明采用了与 定理 1 和 定理 2 的证明类似的策略。令$S \subseteq N$ 为一个 (α, β)-凝聚选民群体。首先，我们将证明每个群体 $S' \subseteq S$ 都是 (α', β')-凝聚的，其中

$$\beta' = \left\lfloor \beta \cdot \frac{|S'|}{|S|} \right\rfloor \qquad \alpha' = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta'.$$

考虑一个可行集 $T \in \mathcal{F}$，其中有 $|T| < \beta' \cdot \frac{n-|S'|}{|S'|}$。从 T 中移除任意 $\left\lceil \beta \cdot \frac{|S|-|S'|}{|S|} \right\rceil$ 后，我们得到一个集合 T'，满足：

$$
\begin{aligned}
|T'| &= |T| - \left\lceil \beta \cdot \frac{|S|-|S'|}{|S|} \right\rceil \leqslant |T| - \beta \cdot \frac{|S|-|S'|}{|S|} \\
&< \beta' \cdot \frac{n-|S'|}{|S'|} - \beta \cdot \frac{|S|-|S'|}{|S|} = \beta \cdot \frac{n-|S'|}{|S|} - \beta \cdot \frac{|S|-|S'|}{|S|} = \beta \cdot \frac{n-|S|}{|S|}.
\end{aligned}
$$

由于 S 是凝聚的，我们知道存在一个集合 X，其中有 $|X| \leqslant \beta$， $\beta \min_{c \in X} \min_{i \in S} u_i(c) \geqslant \alpha$，且 $X \cup T' \in \mathcal{F}$。由于可行性约束构成一个拟阵，我们知道存在一个集合$X' \subseteq X$，其中有 $|X'| = |X| - \left\lceil \beta \cdot \frac{|S|-|S'|}{|S|} \right\rceil$，满足 $X' \cup T \in \mathcal{F}$。请注意：

$$|X'| = |X| - \left\lceil \beta \cdot \frac{|S| - |S'|}{|S|} \right\rceil = \left\lfloor \beta - \beta \cdot \frac{|S| - |S'|}{|S|} \right\rfloor = \left\lfloor \beta \cdot \frac{|S'|}{|S|} \right\rfloor = \beta'.$$

此外， S' 就 X 达成一致的效用至少为：

$$\beta' \min_{c \in X'} \min_{i \in S} u_i(c) \geqslant \beta' \cdot \frac{\alpha}{\beta} \geqslant \left\lfloor \beta \cdot \frac{|S'|}{|S|} \right\rfloor \cdot \frac{\alpha}{\beta}.$$

这表明 S' 确实是（α'， β'）-凝聚的。

现在，与定理 1 的证明类似，我们将多次应用扩展正义代表性，针对 S的不同子集。因此，我们得到：

$$\sum_{i \in S} u_i(W) \geqslant \sum_{i=0}^{|S|} \left\lfloor \beta \cdot \frac{i}{|S|} \right\rfloor \cdot \frac{\alpha}{\beta} \geqslant \sum_{i=0}^{\beta-1} i \cdot \frac{|S|}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{|S|}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta(\beta-1)}{2}.$$

因此，群体 S 的平均效用至少为：

$$\alpha \cdot \frac{(\beta-1)}{2\beta} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2\beta} \geqslant \frac{\alpha}{2} - \frac{u_{\max}}{2}.$$

证明至此完成。 □

4 PropRank 规则

本节将介绍我们的主要算法。我们先从其基本版本开始，并在后续各节讨论若干改进。其核心思想受 Phragm´en 规则启发：选民不断累积积分，并在负担得起时共同购买获认可的候选人。不过，在我们的设定中，不同候选人可能为不同选民带来不同程度的效用，这使问题变得更加复杂。具体而言，选民暂缓购买当前可负担的候选人，转而攒下积分，以购买日后可能更具成本效益的候选人（也就是单位效用支付比较低的候选人），或许会更有利可图。这一思想与均等份额法的运作方式颇为相似。在我们的算法中，选民会尝试预判未来是否可能出现更合意且可负担的候选人，并据此作出购买决策。

4.1 一般方案

该规则被定义为一个随时间推移购买候选人的过程。我们假设选民一开始的预算均为空，并且每位选民都以每个时间单位一美元的恒定速度赚取资金。因此，在时间 t 每位选民赚取的总金额为 t 美元，并且总共最多花费 t美元购买若干候选人。该规则按轮次进行，初始结果 $W = \emptyset$为空；每一轮购买一名可选候选人，并将其加入 W。如果候选人 c 在已选候选人集合 的条件下是可选的，我们称其 W 当且仅当 $c \notin W$，并且$W \cup \{c\} \in \mathcal{F}$。每一轮都在某个时间点进行，并且多轮可能同时发生。

令 $p_i(r)$ 表示选民 i 在第 r 轮持有的资金数额；令 $t(r)$ 表示第 r 轮的时间。显然， $p_i(r)$ 可能小于 $t(r)$，因为选民可能已经在前几轮进行了购买

。现在，算法中出现了一个新要素：我们假设选民同意只将其资金的一定比例用于某些候选人。该算法由参数 $\kappa \in [0,1]$ 确定，该参数控制每位选民愿意为一位候选人花费多少。对于 κ 的所有取值，算法的主要性质都得以保留，不过我们稍后会讨论最推荐的取值。具体而言，在第 r 轮，选民 i 同意在候选人 c身上最多花费$x_i(c,\ r)$ 美元，其中：

$$x_i(c,r) = \kappa \cdot \frac{2p_i(r)u_i(c)}{u_i(c) + \max(\lambda_i(r), u_i(c))} + (1-\kappa) \cdot \frac{p_i(r)u_i(c)}{\max(\lambda_i(r), u_i(c))}. \tag{2}$$

其中 $\lambda_i(r)$ 是一个缩放因子，下文将予以讨论。请注意，$x_i(c,r)$ 不能超过 $p_i(r)$，即该选民在轮次 r 所持有的资金总额。每当存在一名可负担的候选人 c，即 $\sum_{i \in N} x_i(c,r) \geqslant$ 成本(c)，则将其纳入购买考虑。具体而言，我们计算 ρ 的最小值，使得

$$\sum_{i \in N} \min\left(x_i(c,r), u_i(c) \cdot \rho\right) = \text{cost}(c),$$

选择一名与该 ρ 取值相对应、被纳入购买考虑的候选人，并调整选民预算，具体设定为

$$p_i(r) := p_i(r) - \min\left(x_i(c,r), u_i(c) \cdot \rho\right).$$

该候选　　人被纳入 W，并且所有满足 $W \cup \{c'\} \notin \mathcal{F}$ 的候选人 c' 均被移除　　.

4.2 缩放因子

对于每位选民 $i \in N$，我们维护一个称为全局支出因子的值，记为 $g_i(r)$。该支出因子的值最初设为零，随后在每一轮次中更新。在解释其计算方法之前，我们需要引入一些额外记号。我们称候选人 c 是 (μ, S, α)-可负担的，$\mu, \alpha \in \mathbb{R}, S \subseteq N$，如果来自 S 的所有选民对 c 的估值至少为 α，并且拥有足够的资金来购买 c 的 μ 份额。形式上，c 是 (μ, S, α)-可负担的，如果：

$$\sum_{i \in S} p_i(r) = \mu \cdot \text{cost}(c) \qquad \text{and} \qquad \min_{i \in S} u_i(c) \geqslant \alpha.$$

考虑对候选人进行部分 [30]购买的想法，受到有界超支的均等份额法机制的一定启发。

对于每位选民 i，我们计算 $\mu\alpha$的最大值，其中最大值取遍所有满足 $i \in S$、$(\mu,\ S,\ \alpha)$-可负担且可选的候选人 c'。随后，缩放因子 $\lambda_i(r)$ 被设为上述 $\mu\alpha$ 最大值与 $g_i(r)$中的较大值。如果候选人 c 被购买，则对每位选民 $i \in N$，其全局支出因子 g_i 将更新为 g_i 与当前轮次缩放因子中的较大值。换言之，引入全局缩放因子，是为了确保每位选民的缩放因子在连续轮次中单调不减。

该算法的伪代码见算法 1。该算法采用离散化，以固定的 Δ_t时间增量逐步增加时间。尽管精确计算——即确定候选人最早何时可以被购买——能够在多项式时间内完成，但离散化版本更易于说明算法的主要思路。我们的实现采用二分搜索来确定候选人最早何时可以被购买，因此运行速度显著快于精确计算时间或使用固定时间增量的做法。

引理 1. 缩放因子的值永远不会大于 $u_{\max}$。

算法 1： PropRank 规则的伪代码。

输入： 一个具有可行性约束的选举 $\mathcal{F}$
$W \leftarrow \emptyset$
$C_{\text{rem}} \leftarrow C$ /* 剩余候选人 */
已花费金额$_i \leftarrow 0$ 对每个 $v_i \in V$ /* 每位选民花费的资金 */
$g_i \leftarrow 0$ 对每个 $v_i \in V$ /* 全局缩放因子 */
$t \leftarrow 0$ /* 时间 */
当 $C_{\text{rem}} \neq \emptyset$ **时**
  $\lambda_i = g_i$ 对于每个 $v_i \in V$ /* 局部缩放因子 */
  /* 高效计算局部缩放因子。 */
  对于 $c \in C_{\text{rem}}$ **do**
    m $\leftarrow \sum_{i \in N_c}$ $(t -$ 花费了$_i)$
    缩放 $\leftarrow 0$
    对于 $i \in N_c$ 按 $u_i(c)$ 升序排列时，**执行**
      $\mu \leftarrow$ m/成本(c)
      缩放 $\leftarrow$ max(缩放 $\mu \cdot u_i(c)$)
      $\lambda_i \leftarrow$ max(λ_i,缩放)
      m $\leftarrow$ m $-(t -$ 花费$_i)$
  /* 这部分与均等份额法类似。 */
  对于 $c \in C_{\text{rem}}$ **do**
    $x_i(c) \leftarrow 2 \cdot (t -$ 已花费$_i) \cdot u_i(c)/(u_i(c) +$ 最大值$(\lambda_i, u_i(c)))$ 对每个 $v_i \in V$
    如果 $\sum_{i \in N} x_i(c) <$成本(c) **那么**
      $\rho(c) \leftarrow +\infty$ /* 候选人无法由选民同意支付的金额负担 */
    else
      $p \leftarrow$成本(c)
      $u \leftarrow \sum_{i \in N_c} u_i(c)$
      对于 $i \in N_c$ 按 x_i 的递增顺序排序$(c)/u_i(c)$ **执行**
        如果 $x_i(c) \cdot p \cdot u_i(c)/u$ **则**
          $\rho(c) \leftarrow p/u$
          中断 /* 我们已找到最优解 $\rho(c)$ */
        $p \leftarrow p - x_i(c)$
        $u \leftarrow u - u_i(c)$
  如果 $\rho(c) = \infty$ 对所有 $c \in C_{\text{rem}}$ **则**
    $t \leftarrow t + \Delta_t$ /* Δ_t 是控制时间增加的参数 */
  else
    $c^* \leftarrow$使其达到最小值 $_{c \in C_{\text{rem}}} \rho(c)$
    $W \leftarrow W \cup \{c^*\}$
    $C_{\text{rem}} \leftarrow C_{\text{rem}} \setminus \left(\{c^*\} \cup \{c \in C_{\text{rem}} \colon \ W \cup \{c\} \notin \mathcal{F}\}\right)$
    /* 更新全局缩放因子 */
    对于 $i \in N$ **执行**
      $g_i \leftarrow$ 最大值$(g_i, \ \lambda)$
    /* 更新预算 */
    对于 $i \in N_{c^*}$ **执行**
      支出了$_i \leftarrow$ 花费$_i +$ min$(x_i(c^*)\ \rho(c^*) \cdot u_i(c^*))$
返回 W

证明. 反设结论不成立，并考虑某位选民的缩放因子首次变得大于 $u_{\max}$ 的时间 $t_\circ$ 这意味着在此时，必定存在一个 (μ, S, α)-可负担候选人 c，使得新的缩放因子变为$\mu\alpha > u_{\max\circ}$ 特别地，$\mu > 1_\circ$ 不失一般性，假设 c 是具有以下特征的候选人

此时 $\mu\alpha$ 的最高值。对于每位选民 $i \in S$，我们有：

$$\begin{aligned} x_i(c,r) &= \kappa \cdot \frac{2p_i(r)u_i(c)}{u_i(c) + \max(\lambda_i(r), u_i(c))} + (1-\kappa) \cdot \frac{p_i(r)u_i(c)}{\max(\lambda_i(r), u_i(c))} \\ &> \kappa \cdot \frac{2p_i(r)u_i(c)}{u_i(c) + \mu u_i(c)} + (1-\kappa) \cdot \frac{p_i(r)u_i(c)}{\mu u_i(c)} \\ &= \kappa \cdot \frac{2p_i(r)}{1+\mu} + (1-\kappa) \cdot p_i(r) > \kappa \cdot \frac{p_i(r)}{\mu} + (1-\kappa) \cdot p_i(r) \\ &= \kappa \cdot \frac{p_i(r)}{\sum_{j \in S} p_j(r)/\mathrm{cost}(c)} + (1-\kappa) \cdot p_i(r). \end{aligned}$$

由于这个候选人在时间 t 之前不可能被买下，因此必有：

$$\begin{aligned} \mathrm{cost}(c) &> \sum_{i \in S} x_i(c,r) > \kappa \cdot \sum_{i \in S} \frac{p_i(r)}{\sum_{j \in S} p_j(r)/\mathrm{cost}(c)} + (1-\kappa) \sum_{i \in S} p_i(r) \\ &= \kappa \cdot \mathrm{cost}(c) + (1-\kappa) \sum_{i \in S} p_i(r) \end{aligned}$$

这意味着：

$$\mathrm{cost}(c) > \sum_{i \in S} p_i(r).$$

由此我们推断出 $\mu < 1$，这与矛盾相悖。 □

引理 1 为我们直观地估算选民愿意为候选人 c 支付多少提供了依据，即 $x_i(c,r) \in [p_i(r) \cdot u_i(c)/u_{\max}, p_i(r)]$。有趣的是，这意味着对于基于批准的效用，$x_i(c,r) = p_i(r)$，因此我们得到以下适用于每个 $\kappa \in [0,1]$ 的推论。

推论 1. 对于基于批准的效用，*PropRank* 成为 *Phragmén* 顺序规则。

4.3 PropRank 的比例度

现在我们来讨论 PropRank算法的强比例性保证。我们将介绍主要的理论结果，基本上表明，转向加性效用后，Phragmén 顺序规则的比例度不会有任何损失。不过，我们首先会说明证明思路，并给出一些有用的引理。

考虑一次选举 $E = (N, C, \{u_i\}_{i \in N})$，以及 PropRank 为 E选出的委员会 W。此外，考虑一个由 S组成的 α-凝聚选民群体。我们将估算该群体中每位选民平均为一单位满意度支付多少资金。为此，我们分析以下势函数。与规则的定义类似，令 $p_i(t)$ 表示选民 $i \in S$在时间 t 持有的资金数额；进一步，令 $p_{\mathrm{avg}}(t) = 1/|S| \sum_{i \in S} p_i(t)$ 表示该群体选民持有资金的平均金额。对于时间 t，我们将势值 $\phi(t)$定义为：

$$\phi(t) = \sum_{i \in S} \big(p_i(t) - p_{\mathrm{avg}}(t)\big)^2.$$

粗略地说，$\phi(t)$ 是 S中选民余额的方差。在估计 Phragmén 规则的比例度时，也考虑过类似的势函数 [36]。

首先请注意，当每位选民的积分数量增加时，势值保持不变（获得积分不会改变势值）。接下来，我们分析选民使用资金为候选人支付费用时会发生什么。选民同时为某位候选人

支付费用，但为了便于分析，我们将其拆分为若干笔独立支付，每位来自 S 的选民各支付一笔（我们不考虑 S 以外选民所作的支付）。

令 $\lambda_{\mathrm{loc}}(c,\ S,\ t)$ 表示仅考虑候选人 c 和群体 S 时得到的局部缩放因子。此外，令 $\lambda_{\mathrm{glo}}(S,\ t)$ 表示在时间 $t' < t$ 考察、且遍历该时刻可选的所有候选人 c 后得到的此类局部缩放因子的最大值。最后，令

$$\lambda(c, S, t) = \max\left(\lambda_{\mathrm{glo}}(S, t), \lambda_{\mathrm{loc}}(c, S, t)\right).$$

显然，对于固定的子集 S，数值 $\lambda(c,\ S,\ t)$ 随时间 t 单调不减。此外，对于每个 $i \in S$，在时间 t 时 i 的局部缩放因子大于或等于 $\lambda(c,\ S,\ t)$，其中对每个在时间 t 可选的候选人 c 均成立。最后，我们使用以下补充记号：

$$\gamma(c) = \frac{|S|\alpha(c)}{2\mathrm{cost}(c)}.$$

令 $t(c)$ 表示第一位选民即将首次为 c 支付的时间，并令 $t^{\rightarrow}(c)$ 表示购买 c 之后的时间。

引理 2。 假设在 $t(c)$ 时存在一位尚未当选的候选人，称其为 c_T。考虑一次候选人购买，称该候选人为 c，其中有一些来自 S 的选民参与其中。取一位为 c 支付了 x 美元的选民 $i \in S$。令 Δ_ϕ 表示这次单独购买 i 所导致的势函数变化，则：

$$\Delta_\phi \leqslant \lambda(c_T, S, t(c)) \cdot x \cdot \left(\frac{1}{\gamma(c_T)} - \frac{x}{u_i(c)}\right). \tag{3}$$

证明。 我们引入一个额外的时间 $t(i,\ c)$，其形式上等于 $t(c)$，但对应于此前为 i 支付费用的选民已经完成购买、而 i 即将付款的时刻。此外，令 $t^{\rightarrow}(i,\ c)$ 表示选民 i 为 c 付款之后的时刻（形式上，这两个时间当然都等于 $t(c)$）。

让我们评估 i 进行这一次购买所导致的势函数变化：

$$\begin{aligned}
\Delta_\phi = &\sum_{j\in S:\, j\neq i} \left(p_j(t(i,c)) - \left(p_{\mathrm{avg}}(t(i,c)) - \frac{x}{|S|}\right)\right)^2 + \left(p_i(t(i,c)) - x - \left(p_{\mathrm{avg}}(t(i,c)) - \frac{x}{|S|}\right)\right)^2 \\
&\quad - \sum_{j\in S} \left(p_j(t(i,c)) - p_{\mathrm{avg}}(t(i,c))\right)^2 \\
= &\sum_{j\in S} \left(p_j(t(i,c)) - \left(p_{\mathrm{avg}}(t(i,c)) - \frac{x}{|S|}\right)\right)^2 - \sum_{j\in S} \left(p_j(t(i,c)) - p_{\mathrm{avg}}(t(i,c))\right)^2 \\
&\quad + x^2 - 2x\left(p_i(t(i,c)) - p_{\mathrm{avg}}(t(i,c)) + \frac{x}{|S|}\right) \\
= &\sum_{j\in S} \frac{x}{|S|}\left(2p_j(t(i,c)) - 2p_{\mathrm{avg}}(t(i,c)) + \frac{x}{|S|}\right) + x^2 - 2x\left(p_i(t(i,c)) - p_{\mathrm{avg}}(t(i,c)) + \frac{x}{|S|}\right)
\end{aligned}$$

由于 $\sum_{j\in S}\left(2p_j(t(i,c)) - 2p_{\mathrm{avg}}(t(i,c))\right) = 0$，我们得到：

$$\begin{aligned}
\Delta_\phi &= |S| \cdot \frac{x}{|S|} \cdot \frac{x}{|S|} + x^2 - 2x\left(p_i(t(i,c)) - p_{\mathrm{avg}}(t(i,c)) + \frac{x}{|S|}\right) \\
&= x\left(2p_{\mathrm{avg}}(t(i,c)) - 2p_i(t(i,c)) + x - \frac{x}{|S|}\right) \leqslant x\left(2p_{\mathrm{avg}}(t(i,c)) - 2p_i(t(i,c)) + x\right)
\end{aligned}$$

回顾可知，在 $t(c)$中曾有一名尚未当选的候选人 c_T 可选，并假设该 c_T是(μ, S, α)-可负担的。此外，我们知道

$$p_{\text{avg}}(t(i,c)) = \frac{1}{|S|} \cdot \sum_{j \in S} p_j(t(i,c)) \leqslant \frac{1}{|S|} \cdot \sum_{j \in S} p_j(t(c)) = \frac{\mu}{|S|} \cdot \text{cost}(c_T) \leqslant \frac{\lambda(c_T, S, t(c))}{|S|\alpha} \cdot \text{cost}(c_T).$$

此外，当 $\kappa = 1$ 时， x 的值最高，因此我们知道：

$$\begin{aligned}
-2p_i(t(i,c)) + x &= -2p_i(t(c)) + x = x \cdot \left(\frac{-2p_i(t(c))}{x} + 1 \right) \\
&\leqslant x \cdot \left(\frac{-2p_i(t(c))(u_i(c) + \max(\lambda_i(t(c)), u_i(c)))}{2p_i(t(c))u_i(c)} + 1 \right) \\
&= x \cdot \frac{-2p_i(t(c)) \max(\lambda_i(t(c)), u_i(c))}{2p_i(t(c))u_i(c)} \\
&= -\frac{x}{u_i(c)} \cdot \max(\lambda_i(t(c)), u_i(c)) \leqslant -\frac{x}{u_i(c)} \cdot \lambda(c_T, S, t(c)).
\end{aligned}$$

因此，我们可以进一步估算势函数的变化：

$$\Delta_\phi \leqslant \lambda(c_T, S, t(c)) \cdot x \cdot \left(\frac{2\text{cost}(c_T)}{|S|\alpha} - \frac{x}{u_i(c)} \right).$$

至此，引理的证明完成。 □

直观而言，引理 2 说明，在 c_T 可选之前，针对候选人的所有购买都是有效的，也就是说，平均而言，每单位效用的支付至多等于 $1/\gamma(c_T)$。下面，我们将这一观察形式化。

引理 3. 考虑一组选定的候选人 W，并对其标记为 $W = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$，使候选人的索引与其被选中的顺序相对应。固定索引 $p \leqslant r$，令 $c_T(a_j)$ 表示在购买 a_j 之前刚可选的候选人中， $\gamma(c_T)$ 的值最高的候选人 c_T。令 $x_i(c)$ 表示选民 i 为候选人 c 支付的资金数额。那么：

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{i \in S} u_i(a_j) \geqslant \sum_{j=1}^{p} \left(\gamma(c_T(a_j)) \cdot \sum_{i \in S} x_i(a_j) \right).$$

证明。 使用引理 2中的记号。令 $z_{i,\,c} = {}^{u_i}_{(c)\,x} - \gamma(c_T)$，并进一步改写不等式 (3)：

$$\begin{aligned}
\Delta_\phi &\leqslant \lambda(c_T, S, t(c)) \cdot x \cdot \left(\frac{1}{\gamma(c_T)} - \frac{1}{\gamma(c_T) + z_{i,c}} \right) \\
&= \lambda(c_T, S, t(c)) \cdot x \cdot \frac{z_{i,c}}{\gamma(c_T)(\gamma(c_T) + z_{i,c})} \leqslant x z_{i,c} \cdot \frac{\lambda(c_T, S, t(c))}{\gamma(c_T)^2}.
\end{aligned}$$

让我们直观地理解上述对 Δ_ϕ 的估计，接下来再将这一推理形式化。在选出 c_T 之前，选民平均每花费一美元至少能获得 $\gamma(c_T)$ 的效用。事实上，如果某位选民每花费一美元获得的效用低于 $|z_{i,\,c}|$ （也就是说，$z_{i,\,c}$ 为负），那么每花费这样一美元，势函数就至少会减少 $|z_{i,\,c}|\lambda_i(c_T,\, S,\, t(c))/\gamma(c_T)^2$。反过来，如果某位选民每花费一美元获得的效用高于 $|z_{i,\,c}|$，那么每花费一美元，势函数至多会增加 $|z_{i,\,c}|\lambda_i(c_T,\, S,\, t)/\gamma(c_T)^2$。由于势函数

始终非负，我们可以推断，选民平均每花费一美元至少能获得 $\gamma(c_T)$ 的效用。当 c_T 已被选出但 c'_T 尚未被选出时，也可以采用类似的推理。

根据我们的记号，对每个 $c \in W$，我们可以写成：

$$\sum_{i\in S} u_i(c) = \sum_{i\in S}\Big(x_i(c)\gamma(c_T) + x_i(c)z_{i,c}\Big) = \gamma(c_T)\sum_{i\in S} x_i(c) + \sum_{i\in S} x_i(c)z_{i,c}$$
$$\geqslant \gamma(c_T)\sum_{i\in S} x_i(c) + \Big(\phi(t^{\rightarrow}(c)) - \phi(t(c))\Big)\cdot\frac{\gamma(c_T)^2}{\lambda(c_T,S,t(c))}.$$

对所有 $c \in \{a_1,\ldots,a_q\}$ 求和，并利用系数 $\lambda^{\gamma\ c_T}_{S\ t}{}^{2}()(c_T,,(c))$ 随时间非递增这一事实，以及势函数非负这一事实，可得：

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i\in S} u_i(a_j) = \sum_{i\in S} u_i(a_1) + \sum_{j=2}^{p}\sum_{i\in S} u_i(a_j)$$
$$\geqslant \gamma(c_T(a_1))\sum_{i\in S} x_i(a_1) + \Big(\phi(t^{\rightarrow}(a_1)) - \phi(t(a_1))\Big)\cdot\frac{\gamma(c_T(a_1))^2}{\lambda(c_T(a_1),S,t(a_1))} + \sum_{j=2}^{p}\sum_{i\in S} u_i(a_j)$$
$$\geqslant \gamma(c_T(a_1))\sum_{i\in S} x_i(a_1) + \Big(\phi(t^{\rightarrow}(a_1)) - \phi(t(a_1))\Big)\cdot\frac{\gamma(c_T(a_2))^2}{\lambda(c_T(a_2),S,t(a_2))} + \sum_{j=2}^{p}\sum_{i\in S} u_i(a_j)$$
$$\geqslant \ldots \geqslant \sum_{j=1}^{p}\left(\gamma(c_T(a_j))\cdot\sum_{i\in S} x_i(a_j)\right) + \Big(\phi(t^{\rightarrow}(a_p)) - \phi(t(a_1))\Big)\cdot\frac{\gamma(c_T(a_p))^2}{\lambda(c_T(a_p),S,t(a_p))}$$
$$\geqslant \sum_{j=1}^{p}\left(\gamma(c_T(a_j))\cdot\sum_{i\in S} x_i(a_j)\right).$$

证明到此完成。 □

现在，我们可以陈述主要定理了。

定理 4. 对于参与式预算约束，*PropRank* 的比例度为 $d(\alpha) = (\alpha - u_{\max})/2$。

证明。 设 T 是一个集合，证明 S 是 α-cohesive。我们重新标记 $T = \{c_1,\ldots,c_z\}$，使得：

$$\frac{\alpha(c_1)}{\text{cost}(c_1)} \geqslant \frac{\alpha(c_2)}{\text{cost}(c_2)} \geqslant \ldots \geqslant \frac{\alpha(c_z)}{\text{cost}(c_z)}.$$

设 $t = b/n$，并设 f_S 是一个函数，它给出了下界：来自 S 的选民每获得给定金额的资金所能得到的效用。从引理 3 可得：

1. 在选中 c_1 之前，该函数的斜率至少为 $|S|\alpha(c_1)/2$成本(c_1)。此外，对于大小大于或等于成本(c_1)的参数区间，该函数都具有这一斜率。

2. 接着，在选中 c_2 之前，f_S 的斜率至少为 $|S|\alpha(c_2)/2$成本(c_2)。对于大小大于或等于成本(c_2)的参数区间，该函数都具有这一斜率。依此类推。

显然，f_S 是凹的。我们只需确保 T 中的候选人尚未被移除。令 c_{out} 表示 T 中 $\alpha(c_{\text{out}})$ 成本(c_{out}) 比率最高且当时尚未被移除的候选人

已被移除。令 t' 表示其被移除的时间。我们将证明，这一定发生在选民至少花费了 m_t 美元之后，其中

$$m_t = t|S| - \frac{\mathrm{cost}(c_{\mathrm{out}})u_{\max}}{\alpha(c_{\mathrm{out}})}.$$

为了推出矛盾，我们假设情况并非如此。首先，我们证明 $t' \geqslant t$。如果并非如此，那么位于 t' 的选民总共最多花费了：

$$t \cdot n - \frac{\mathrm{cost}(c_{\mathrm{out}})u_{\max}}{\alpha(c_{\mathrm{out}})} = b - \frac{\mathrm{cost}(c_{\mathrm{out}})u_{\max}}{\alpha(c_{\mathrm{out}})} \leqslant b - \mathrm{cost}(c_{\mathrm{out}}).$$

因此， $c_{\text{出局}}$ 本不会被移除。现在，请注意，就在 t' 之前，我们有tha t:

$$\mathrm{cost}(c_{\mathrm{out}}) > \sum_{i \in S} x_i(c_{\mathrm{out}}, t) \geqslant \sum_{i \in S} \frac{p_i(r)\alpha(c_{\mathrm{out}})}{u_{\max}}.$$

因此，在时间 t' ，来自 S 的选民至少已使用了如下数量的资金：

$$t|S| - \sum_{i \in S} p_i(t) \geqslant t|S| - \frac{\mathrm{cost}(c_{\mathrm{out}})u_{\max}}{\alpha(c_{\mathrm{out}})} = m_t.$$

这表明存在矛盾，因此我们得到：在来自 S 的选民至少花费了m_t 美元之后， c_{out} 被移除。现在，令 m'_t 为索引低于 c_{out} 的最后一位候选人被选中的时间，或 c_{out} 被移除的时间，取二者中较大者。

现在，让我们估计 f_S 在 m'_t处的值。请注意，对于大于 m'_t 的自变量，该函数的斜率至多为 $|S|\alpha$ (c_{out})/2成本(c_{out})。因此：

$$\begin{aligned} f(m'_t) &\geqslant f(t|S|) - \frac{|S|\alpha(c_{\mathrm{out}})}{2\mathrm{cost}(c_{\mathrm{out}})} \cdot \frac{u_{\max} \cdot \mathrm{cost}(c_{\mathrm{out}})}{\alpha(c_{\mathrm{out}})} \geqslant f(t|S|) - |S| \cdot \frac{u_{\max}}{2} \\ &\geqslant f\left(\sum_{c \in T} \mathrm{cost}(c)\right) - |S| \cdot \frac{u_{\max}}{2} \geqslant \sum_{c \in T} \mathrm{cost}(c) \cdot \frac{|S|\alpha(c)}{2\mathrm{cost}(c)} - |S| \cdot \frac{u_{\max}}{2} = \frac{1}{2} \cdot |S| \cdot (\alpha - u_{\max}). \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

现在，我们来看一般可行性约束的情形。

定理 5. 考虑 *PropRank* 规则返回的一个结果 W 。对于每个由 α 个选民组成的凝聚群体 S，群体 S 内来自 W 的平均效用 S 至少等于：

$$\frac{1}{|S|} \sum_{i \in S} u_i(W) \geqslant \alpha \cdot \frac{1-\gamma}{2} - \frac{u_{\max}}{2}.$$

其中 $\gamma = |S|/n$，而 $u_{\max}$ 是选民赋予某个候选人的最高效用。

证明。 考虑一个 (α， β)-凝聚选民群体 $S \subseteq N$，以及截至时间

$$t < \frac{\beta}{|S|n} \cdot (n - |S|).$$

令 T 表示截至 t 已购买的候选人集合；显然 $|T| \leqslant tn$。由于 S 是 (α， β)-凝聚的，我们知道存在一个集合 X ，使得 $|X| \leqslant \beta$、 $\sum_{c \in X} \min_{i \in S} u_i(c) \geqslant \alpha$，且$X \cup T \in \mathcal{F}$。我们将 X 中的候选人重新命名，使得 $X = \{c_1, c_2, \ldots, c_{|X|}\}$ ，并且

$$\min_{i \in S} u_i(c_1) \geqslant \min_{i \in S} u_i(c_2) \geqslant \ldots \geqslant \min_{i \in S} u_i(c_{|X|}).$$

令 c_z 为 $X\backslash T$ 中索引最低的元素（也就是说，$\min_{i\in S} u_i(c_z)$ 的值最高的元素）。利用 引理 3，我们定义函数 f，为选民集合 S 提供的效用设定下界，表示每单位资金所能获得的效用。

$$f(|X|) = \sum_{i=1}^{z} \frac{|S|\cdot\alpha(c_i)}{2} + (m-z)\cdot\frac{|S|\cdot\alpha(c_z)}{2} \geqslant |S|\cdot\frac{\alpha}{2}.$$

同样，按照定理 4 的证明，我们推知，在 t 时，选民至多还剩下 $u_{\max}/\alpha(c_z)$ 资金。因此，他们至少花费了：

$$m_t = t|S| - \frac{u_{\max}}{\alpha(c_z)}.$$

现在，考虑 c_z 被移除或索引小于 z 的最后一位候选人被购买的时刻，以较晚者为准。假设到那时，选民已经花费了虚拟预算中的 m'_t，形成 S。显然，$m'_t \geqslant m_t$；对于大于 m'_t 的自变量，函数f 的斜率至多为 $|S|\alpha(c_z)/2$。由于 f 是凹函数，我们得到，选民花费 m'_t 所获得的总效用至少为：

$$f(t|S|) - \frac{|S|\alpha(c_z)}{2}\cdot\frac{u_{\max}}{\alpha(c_z)} \geqslant f(|X|)\cdot\frac{t|S|}{|X|} - \frac{|S|}{2}\cdot u_{\max} \geqslant |S|\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{n-|S|}{n} - \frac{|S|}{2}\cdot u_{\max}$$

因此，平均效用的下界为

$$\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{n-|S|}{n} - \frac{u_{\max}}{2} \geqslant \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{n-\gamma n}{n} - \frac{u_{\max}}{2} = \alpha\cdot\frac{1-\gamma}{2} - \frac{u_{\max}}{2}.$$

证明至此完成。 □

最后，定理 6推广了 Masaˇrík 等人 [27] 针对 Phragm´ensequential 规则所述的类似结果。

定理 6。对于拟阵约束，*PropRank* 的弱比例度为 $d(\alpha) = (\alpha - u_{\max})/2$。

证明。 考虑一个 (α,β)-凝聚选民群体 S。我们首先将时间 t 定义如下：

$$t = \frac{\beta}{|S|} + \frac{\Delta - 1}{n},$$

其中，Δ 是 $[0,1]$ 中满足以下条件的最大非负值：在 t 时，来自 S 的选民至少还剩下 Δ 美元未花费。这样的值是定义良好的，因为特别是 $\Delta = 0$ 满足该前提。存在两种可能：(1) 在 t 时，来自 S 的选民恰好还剩下 Δ 美元未花费（在 t 时，可能发生了一次购买，使得购买前来自 S 的选民还剩下超过Δ 美元未花费，而购买后，他们剩下的未花费金额少于 Δ 美元；在这种情况下，我们只需考虑那些使他们恰好剩下 Δ 美元未花费的购买，必要时按比例计算），或 (2) $\Delta = 1$，且来自 S 的选民合计还剩下严格超过 1 美元。

仅考虑算法截至时间 t（即购买最后一位候选人之前、选民仍持有超过 Δ 美元时）所进行的购买。令 W 表示截至该时刻已购买的候选人集合。从 W 中移除 $\beta - 1$ 个 $\min_{i\in S} u_i(c)$ 值最高的候选人，并令 T 表示移除后的候选人集合。我们有：

$$|T| = |W| - (\beta - 1) < (t\cdot n - \Delta) - \beta + 1 = \frac{n\cdot\beta}{|S|} + \Delta - 1 - \Delta - \beta + 1$$

$$= \frac{n \cdot \beta}{|S|} - \beta = \beta \cdot \frac{n - |S|}{|S|}.$$

因此，由于 S 是 (α, β)-凝聚的，我们知道存在一个集合 X，使得 $|X| = \beta$, $|X| \cdot \min_{i \in S, c \in X} u_i(c) \geqslant \alpha$，且 $X \cup T \in \mathcal{F}$。因此，$\min_{i \in S, c \in X} u_i(c) \geqslant \alpha/\beta$。

如果 $|T \cap X| \geqslant 1$，那么我们知道，在 W 中至少有 $1 + (\beta - 1)$ 个候选人 c 满足 $\min_{i \in S} u_i(c) \geqslant \alpha/\beta$。这已经得出了我们的论点。否则，也就是说，如果 $|T \cap X| = 0$ 我们知道：

$$|T \cup X| \geqslant |W| - (\beta - 1) + \beta = |W| + 1 > |W|.$$

鉴于 $\mathcal{F}$<style id='4}>构成一个拟阵，我们得到存在 $c \in X$ 使得 $W \cup \{c\} \in \mathcal{F}$。这意味着，在每次购买发生且时间尚未达到 t之前，始终存在一个未被移除的候选人 c 满足 $\min_{i \in S} u_i(c) \geqslant \alpha/\beta$。现在，我们可以再次使用 引理 3，从而得到选民从 S 到时间 t 所进行购买的每美元平均效用至少为 $|S|\alpha/2\beta$。

令 m_t 表示选民从 S 到时间 t所使用的资金金额。在情况 (1) 中，我们有：

$$m_t = t|S| - \Delta = \beta + \frac{(\Delta - 1)|S|}{n} - \Delta \geqslant \beta - 1.$$

在情形（2）中，当 $\Delta = 1$ 时，我们有 $t = \frac{\beta}{|S|}$，并且

$$\sum_{i \in S} p_i(t) \leqslant \sum_{i \in S} x_i(c, t) \cdot \frac{u_{\max}}{u_i(c)} \leqslant \sum_{i \in S} x_i(c, t) \cdot \frac{u_{\max}\beta}{\alpha} \leqslant \frac{u_{\max}\beta}{\alpha}$$

so:

$$m_t = t|S| - \sum_{i \in S} p_i(t) \geqslant \beta - \frac{u_{\max} \cdot \beta}{\alpha}.$$

在两种情形下，我们都得到

$$m_t \geqslant \beta - \frac{u_{\max} \cdot \beta}{\alpha}.$$

因此，我们可以推断，选民从 S 获得的平均效用至少为：

$$\frac{1}{|S|} \cdot m_t \cdot \frac{|S|\alpha}{2\beta} \geqslant (\beta - \frac{u_{\max} \cdot \beta}{\alpha}) \cdot \frac{\alpha}{2\beta} \geqslant \frac{\alpha}{2} - \frac{u_{\max}}{2}.$$

证明至此完成。 □

4.4 PropRank 的比例性正当代表性

一种较弱且常被考量的比例性概念称为比例性正当代表性（PJR）。该公理使用相同的凝聚性概念，但对所需选民满意度的条件较弱。下面我们将给出该公理的定量变体，类比地称之为 PJR 度。

定义 9（比例性正当代表性度）。考虑一场选举 $E = (N, C,$ 成本 $\{u_i\}_{i \in N})$，以及一个候选人子集 $W \in \mathcal{F}$。我们称 W具有 比例性正当代表性度（*PJR* 度）为 d: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 如果对于每个 $\alpha \in \mathbb{R}$，以及 α-凝聚选民群体 S 成立

$$\sum_{c \in W} \max_{i \in S} u_i(c) \geqslant d(\alpha).$$

一个选择规则 h 当它始终返回 PJR 度为 d 的结果时，称其 PJR 度为 d。 」

定理 7. 参数为 κ 的 *PropRank* 在参与式预算约束下的 *PJR* 度为 $d(\alpha) = (\alpha - u_{\max})/(\kappa+1)$。

证明。考虑一场选举 $E = (N, C, \text{成本 } \{u_i\}_{i\in N})$，以及 PropRank 为 E 返回的结果 W。考虑一个 α-凝聚选民群体 S，并令 T 表示见证 S 为 α-凝聚的候选人子集。对于每个候选人 c'，我们使用记号 $\alpha(c') = \min_{i\in S} u_i(c')$。将这些候选人重新标记为 $T = \{c_1, c_2, \ldots, c_z\}$，使得：

$$\frac{\alpha(c_1)}{\text{cost}(c_1)} \geqslant \frac{\alpha(c_2)}{\text{cost}(c_2)} \geqslant \cdots \geqslant \frac{\alpha(c_z)}{\text{cost}(c_z)}.$$

对于每个时间 t，令 $m(t)$ 表示 S 中某位选民截至 t 已花费的最大金额。考虑一次使该值从 $m(t)$ 变为 $m(t')$ 的购买，此变化由选民 $i \in S$ 见证。该购买发生在时间 t，购买前这位选民已花费 m_i 美元；显然，$m_i \leqslant m(t)$。假设此时尚未选出候选人 $c_T \in T$。那么局部缩放因子的下界为：

$$\lambda \geqslant \frac{|S|(t - m(t))}{\text{cost}(c_T)} \cdot \alpha(c_T)$$

因此，某位选民的满意度因购买 S 而增加了 u，满足

$$\begin{aligned} m(t') - m_i &\leqslant \kappa \cdot \frac{2(t-m_i)u}{u + \max(\lambda, u)} + (1-\kappa) \cdot \frac{(t-m_i)u}{\max(\lambda, u)} \\ &\leqslant \frac{(2\kappa + 1 - \kappa) \cdot (t - m_i) \cdot u}{\max(\lambda, u)} \leqslant \frac{(\kappa+1) \cdot (t-m_i) \cdot u}{\lambda} \\ &\leqslant \frac{(\kappa+1) \cdot (t-m_i) \cdot u \cdot \text{cost}(c_T)}{\alpha(c_T)|S|(t-m(t))}. \end{aligned}$$

重新表述后，我们得到：

$$\frac{u}{m(t') - m(t)} \geqslant \frac{1}{\kappa+1} \cdot \frac{\alpha(c_T)|S|}{\text{cost}(c_T)} \cdot \frac{(m(t') - m_i) \cdot (t - m(t))}{(m(t') - m(t)) \cdot (t - m_i)} \geqslant \frac{1}{\kappa+1} \cdot \frac{\alpha(c_T)|S|}{\text{cost}(c_T)}.$$

现在，和前面的证明一样，我们考虑一个函数 f，它根据 $m(t)$的值，给出满足比例正义代表条件所能获得的满意度的下界（即：$\sum_{c\in W'} \max_{i\in S} u_i(c)$），且这些购买使得没有选民支付超过 $m(t)$。由此可推得，对于 $x = (\kappa+1) \cdot \text{成本}(c_1)/|S|$，该函数的值至少为 $\alpha(c_1)$。同理，对于 $x = (\kappa+1) \cdot \left(\frac{\text{cost}(c_1)}{|S|} + \frac{\text{成本}(c_2)}{|S|} \right)$，该函数的值至少为 $\alpha(c_1) + \alpha(c_2)$。~~此外，~~注意：~~—~~

$$\sum_{c_T \in T} (\kappa+1) \frac{\text{cost}(c_T)}{|S|} \leqslant \sum_{c_T \in T} (\kappa+1) \cdot \text{cost}(c_T) \cdot \frac{b}{\text{cost}(T) \cdot n} = (\kappa+1) \cdot \frac{b}{n}.$$

因此，该函数在 $x = b/n$ 处的值至少等于 $\alpha/\kappa+1$。

考虑候选人 $c_T \in T$ 第一次被淘汰的时刻。我们将证明，当时必定有某位选民至少花费了 $b/n - \text{成本}(|S|\alpha\ c_T)()$ 资金。~~为避免矛盾，~~假设情况并非如此。我们首先证明，c_T不可能在时间 $t' < b/n$被淘汰。事实上，在 t' 已花费的资金总额至多为：

$$t'(n - |S|) + |S| \cdot \left(b/n - \frac{\text{cost}(c_T) u_{\max}}{|S|\alpha(c_T)} \right) < b/n \cdot (n - |S|) + |S| \cdot \left(b/n - \frac{\text{cost}(c_T) u_{\max}}{|S|\alpha(c_T)} \right)$$

$$= b - \frac{\mathrm{cost}(c_T)u_{\max}}{\alpha(c_T)} \leqslant b - \mathrm{cost}(c_T).$$

这就产生了矛盾，因此 c_T 必定最迟在时间 $t'' = b/n$被淘汰。在这一时刻，必定有：

$$\begin{aligned}\mathrm{cost}(c_T) &> \sum_{i\in S} \kappa \cdot \frac{2(t'' - m(t''))u_i(c_T)}{u_i(c_T) + \max(\lambda, u_i(c_T))} + (1-\kappa)\cdot\frac{(t'' - m(t''))u_i(c_T)}{\max(\lambda, u_i(c_T))} \\ &\geqslant \sum_{i\in S} \cdot \frac{(t'' - m(t''))u_i(c_T)}{\max(\lambda, u_i(c_T))} \geqslant |S| \cdot \frac{(t'' - m(t''))\alpha(c_T)}{u_{\max}}.\end{aligned}$$

重新表述后：

$$t'' - m(t'') < \frac{\mathrm{cost}(c_T)u_{\max}}{|S|\alpha(c_T)}.$$

这表明，至少有一位选民花费了不少于 $b/n - \text{成本}(\frac{c_T\ u_{\max}}{|S|\alpha\ c_T}\ )()$ 资金。~~令 τ为从 S起，在索引小于 c_T 的最后一位候选人被购买时，或在 c_T被移除时（取两者中较晚者），该选民的最大支出。显然 $\tau \geqslant b/n - \text{成本}(\frac{c_T\ u_{\max}}{|S|\alpha\ c_T}\ )()$，并且函数 f对于大于或等于 τ的自变量，其取值范围至多为 $\frac{1}{\kappa+1}\cdot\frac{\alpha}{|S|}(c_T)$ 成本(c_T)。~~

因此，我们可以如下评估函数 f 在 τ 处的值：

$$f(\tau) \geqslant f(b/n) - \frac{\mathrm{cost}(c_T)u_{\max}}{|S|\alpha(c_T)} \cdot \frac{1}{\kappa+1} \cdot \frac{\alpha(c_T)|S|}{\mathrm{cost}(c_T)} \geqslant \frac{\alpha}{\kappa+1} - u_{\max}\cdot\frac{1}{\kappa+1}.$$

至此，证明完毕。 □

推论 2. 参数为 $\kappa = 0$ 的 *PropRank* 满足 *PJR*，直至最大效用 y.

定理 7 表明，κ 的最佳取值为 0，此时算法会简化，也变得更加直观。不过，我们并不推荐这一取值，因为我们的实验有力地支持采用更高的取值。直观地说，较大的 κ 能让选民更灵活地购买候选人，并减少过程结束时剩余未使用的资金。因此，我们认为 $\kappa = 1$ 应当是默认版本。

请注意，定理 7 的类似结果也适用于其他类型的约束，其证明思路与定理 5 和定理 6的类似证明相同。

定理 8. 考虑 *PropRank* 规则返回的结果 W。对于每个 α-凝聚选民群体 S，均有

$$\sum_{c\in W} \max_{i\in S} u_i(c) \geqslant \alpha \cdot \frac{1-\gamma}{\kappa+1} - \frac{u_{\max}}{\kappa+1}.$$

其中 $\gamma = |S|/n$，而 $u_{\max}$ 是选民赋予某个候选人的最高效用。

定理 9. 对于拟阵约束，*PropRank* 的弱*PJR*度为 $d(\alpha) = (\alpha - u_{\max})/(\kappa+1)$。

4.5 关于全局缩放因子的说明

请注意，定理 7的证明并不依赖缩放因子的单调性。因此，如果我们只关注 PJR 度，就可以通过移除全局缩放因子来简化该规则。稍后在为一般约束设计均等份额法的变体时，我们也会用到这一观察。

5 一般约束下的均等份额法

现在，我们基于第4节中的思路，设计均等份额法的扩展 [32, 33] ，使其适用于一般可行性约束。首先，我们来强调委员会选举中两种成熟投票规则的主要区别：Phragm'en规则 [6, 25] 和均等份额法。两者都基于选民购买获认可候选人的理念，但在一个重要方面有所不同。Phragm'en规则会随时间逐步分配资金，并在购买变得负担得起时立即贪心地进行购买。相比之下，平等份额会预先为选民分配固定预算，从而促成更多单位效用支付比良好的购买，并最终带来更强的比例性保证。与Phragm'en规则类似，PropRank算法也采用贪心方式，但加入了前瞻机制：它会评估某项购买是否足够划算，或者是否最好暂缓支出，等待之后更有价值的候选人变得负担得起。然而，PropRank本身并未采用为选民提供充足预先预算的理念，因而无法使其在给定的资金分配中进行多次购买。

我们的广义均等份额法结合了 PropRank 和原始均等份额法的理念。它可以视为一系列对均等份额 ADD1 子程序的调用；在每次调用中，都会预先尽可能多地向选民分配资金。不过，在每次调用期间，如果我们预计后续调用子程序时会有价值更高的候选人变为可选，就可以有意推迟购买候选人——这与 PropRank 的做法相同。

5.1 算法主循环

在主算法中，我们要寻找可分配给选民的最大资金数额，使得均等份额子程序只购买符合可行性约束的候选人。完成这些购买后，我们会移除在当前部分解下不再可行的候选人，并重复这一过程。在少数情况下，最大可行资金分配可能无法促成任何购买。如果将选民的应享额度增加任意小的数额，子程序便会购买一些候选人，而这些候选人合在一起会违反可行性约束。此时，我们先确定在应享额度略微增加时会被购买的候选人集合，再从中选出一个可行子集。这样可以确保每次调用均等份额子程序时，结果中至少会增加一名候选人，从而保证算法终止。

主算法的伪代码见算法2。

5.2 带前瞻的均等份额子程序

正如我们所指出的，整体规则可以视为一系列对均等份额 ADD1 子程序的调用。不过，在每次调用中，如果我们预计未来迭代中可能会有价值更高的候选人可选，我们可以有意推迟购买候选人——这与 PropRank 中的做法相同。具体做法是计算用于特定候选人的资金上界。与 PropRank 中通过等式（2）给出这类上界不同，在第 r 轮平等份额中，上界定义如下。假设 W 是已选候选人的集合，我们首先计算在所有选民都有足够资金的情况下，单位效用所需支付的最低金额：

$$\rho_{\text{best}}(i) = \min_{c \in C_{\text{rem}}} \frac{\text{cost}(c)}{\sum_{j \in N} u_j(c)} \quad \text{where} \quad C_{\text{rem}} = \{c \in C \setminus W : W \cup \{c\} \in \mathcal{F}\}.$$

然后，我们计算上界 cap_i，如下所示：

$$\begin{aligned}
&\text{cap}_i(c,r) = \max(x_i(c,r), y_i(c,r)) \quad \text{where:} \\
&x_i(c,r) = \kappa \cdot \frac{2p_i(r)u_i(c)}{u_i(c) + \max(\lambda_i(r), u_i(c))} + (1-\kappa) \cdot \frac{p_i(r)u_i(c)}{\max(\lambda_i(r), u_i(c))}, \\
&y_i(c,r) = \min(\rho_{\text{best}}(i) \cdot u_i(c) \cdot (1+\kappa), p_i(r)).
\end{aligned} \tag{4}$$

该等式类似于等式（2）（针对 PropRank）。关键区别在于，与 PropRank 不同，初始选民预算 p_i 可能很大。因此，在早期阶段，我们或许能够覆盖候选人成本的相当大比例——这些比例常常超过 1。因而，局部缩放因子 λ 可能变得非常大，进而使 $x_i(c,r)$ 的取值下降。正因如此，$x_i(c,r)$ 可能大于 $y_i(c,r)$，这种情况在原始 PropRank 中不会出现。等式不等式 (4)解释了这一效应。为尽量减少未使用预算，它还将 $y_i(c,r)$ 纳入考虑，从而使 $\text{cap}_i(c,r)$ 尽可能大，同时仍确保单位效用的支付保持高效。

下面我们给出一个与引理 1类似的引理，其证明（几乎）相同。

引理 4. 在 MES 的每次迭代结束时，局部缩放因子都不大于 $u_{\max}$。

证明。 为导出矛盾，假设情况并非如此。这意味着，当所有购买都完成后，必定存在一个 (μ, S, α)-可负担候选人 c，使得新的缩放因子变为 $\mu\alpha > u_{\max}$。特别地，$\mu > 1$。不失一般性，假设 c 是当前 $\mu\alpha$ 值最高的候选人。对于每位选民 $i \in S$，我们有：

$$\begin{aligned}
x_i(c,r) &= \kappa \cdot \frac{2p_i(r)u_i(c)}{u_i(c) + \max(\lambda_i(r), u_i(c))} + (1-\kappa) \cdot \frac{p_i(r)u_i(c)}{\max(\lambda_i(r), u_i(c))} \\
&> \kappa \cdot \frac{2p_i(r)u_i(c)}{u_i(c) + \mu u_i(c)} + (1-\kappa) \cdot \frac{p_i(r)u_i(c)}{\mu u_i(c)} \\
&= \kappa \cdot \frac{2p_i(r)}{1+\mu} + (1-\kappa) \cdot p_i(r) > \kappa \cdot \frac{p_i(r)}{\mu} + (1-\kappa) \cdot p_i(r) \\
&= \kappa \cdot \frac{p_i(r)}{\sum_{j \in S} p_j(r)/\text{cost}(c)} + (1-\kappa) \cdot p_i(r).
\end{aligned}$$

由于无法购买 c（在本次迭代结束时，所有购买都已完成），因此必有：

$$\begin{aligned}
\text{cost}(c) &> \sum_{i \in S} x_i(c,r) > \kappa \cdot \sum_{i \in S} \frac{p_i(r)}{\sum_{j \in S} p_j(r)/\text{cost}(c)} + (1-\kappa) \sum_{i \in S} p_i(r) \\
&= \kappa \cdot \text{cost}(c) + (1-\kappa) \sum_{i \in S} p_i(r)
\end{aligned}$$

这意味着：

$$\text{cost}(c) > \sum_{i \in S} p_i(r).$$

由此我们推得 $\mu < 1$，这就产生了矛盾。 □

算法2： 一般约束下均等份额法的伪代码。

输入： 带有可行性约束 $\mathcal{F}$的选举
$W \leftarrow \emptyset$
$C_{\text{rem}} \leftarrow C$ /* 剩余候选人 */
$\text{spent}_i \leftarrow 0$ 对于每个 $v_i \in V$ /* 每位选民的已花费金额 */
当 $C_{\text{rem}} \neq \emptyset$ **时做”】【**
  /* 形式上，该子程序返回一个候选人集合和支付，但
     下文中，我们将结果简单地视为候选人集合。 */
  $t_{\max} \leftarrow$最大的值 t使得 等份额子程序(spent t, C_{rem}) $\cup W \in \mathcal{F}$
  $W_{\text{next}}, p_{\text{next}} \leftarrow$等份额子程序(spent $t_{\max}, C_{\text{rem}}$)
  if $W_{\text{next}} = \emptyset$ **那么**
    $W'_{\text{next}}, p_{\text{next}} \leftarrow$等份额子程序(spent $t_{\max} + \varepsilon, C_{\text{rem}}$)
    $W_{\text{next}} \leftarrow$最大的子集 W'_{next} 使得 $W_{\text{next}} \cup W \in \mathcal{F}$
  $W \leftarrow W \cup W_{\text{next}}$
  已支付$_i \leftarrow$ 已支付$_i + \sum_{c \in W_{\text{next}}} p_{\text{next}}[v_i][c]$
  $C_{\text{rem}} \leftarrow \{c \in C_{\text{rem}} \setminus W : \ W \cup \{c\} \in \mathcal{F}\}$
返回 W

函数等份额子程序(spent, t, C_{rem})**:**
  $W \leftarrow \emptyset$
  为所有 $v_i \in V$ 支付$[v_i][c] \leftarrow 0$, $c \in C$
  当 $C_{\text{rem}} \neq \emptyset$ **时执行**
    $\lambda_i = 0$ 对于每个 $v_i \in V$ /* 局部缩放因子 */
    高效计算局部缩放因子（第 9–16 行，见 算法 1）
    /* 这部分与均等份额法类似。 */
    对于 $c \in C_{\text{rem}}$ **do**
      计算上限$_i(c)$，适用于所有 $v_i \in V, c \in C_{\text{rem}}$ 根据（4），使用 λ_i
      $x_i(c) \leftarrow$对每个 $v_i \in V$ 取 min(cap$_i(c)$ t − spent$_i$)
      如果 $\sum_{i \in N} x_i(c)$ <成本(c) **则**
        $\rho(c) \leftarrow +\infty$ /* 候选人无法由选民同意支付 */
      else
        $p \leftarrow$成本(c)
        $u \leftarrow \sum_{i \in N_c} u_i(c)$
        对于 $i \in N_c$ 按 $x_i(c)/u_i(c)$ **执行**
          如果 $x_i(c) \cdot p \cdot u_i(c)/u$ **那么**
            $\rho(c) \leftarrow p/u$
            跳出 /* 我们已找到最优解 $\rho(c)$ */
          $p \leftarrow p - x_i(c)$
          $u \leftarrow u - u_i(c)$
    如果 $\rho(c) = \infty$ 对所有 $c \in C_{\text{rem}}$ **则**
      返回 W，支付
    else
      $c^* \leftarrow$使.....最小$_{c \in C_{\text{rem}}} \rho(c)$
      $W \leftarrow W \cup \{c^*\}$
      $C_{\text{rem}} \leftarrow C_{\text{rem}} \setminus \{c^*\}$
      对于 $i \in N_{c^*}$，**执行**
        支付$[v_i][c^*] \leftarrow$最小值$(x_i(c^*)$ $\rho(c^*) \cdot u_i(c^*))$
        花费了 $_i \leftarrow$ 已花费$_i$ +支付$[v_i][c^*]$

5.3 一般约束下均等份额法的 PJR 程度

请注意，定理 4至6 的证明中对势函数的估算保持不变，因为它并不依赖于购买发生的具体时间戳。然而，由于现在所有购买都发生在晚得多的时间戳（与标准 PropRank 相比），全局缩放因子可能会被设定得过高。因此，选民在后续轮次中可能会等待过久才进行购买。换言之，在这些较晚的轮次中，选民可能会保留过多储蓄，从而可能导致满意度失衡，尽管他们进行的购买仍具有良好的单位效用支付比。为避免这种情况，我们不再采用全局缩放因子。正如第 4.4 节所述，这一变体保留了 PJR 程度保证，但难以对更强的比例度性质进行形式化分析。以下定理与 PropRank 算法情形下的证明相同。

定理 10。 对于参与式预算约束，参数为 κ 的均等份额法具有 $d(\alpha) = (\alpha - u_{\max})/(\kappa+1)$ 的 *PJR* 度。

证明。对于每个时间 t，令 $m(t)$ 表示来自 S 的某位选民截至 t 已花费的最大金额。考虑一次使该值从 $m(t)$ 变为 $m(t')$ 的购买；这一变化由选民 $i \in S$ 见证，并假设此时候选人 $c_T \in T$ 尚未被选中。那么分两种情况。如果 $\mathsf{cap}_i(c,r) = x_i(c,r)$，则重复定理 7 证明中的计算，可得 S 中某位选民的满意度因这次购买增加了 u，使得：

$$\frac{u}{m(t') - m(t)} \geqslant \frac{1}{\kappa+1} \cdot \frac{\alpha(c_T)|S|}{\mathrm{cost}(c_T)}.$$

否则，也就是说，如果 $\mathsf{cap}_i(c,r) = y_i(c,r)$，那么可得：

$$\begin{aligned}\frac{u}{m(t') - m(t)} &\geqslant \frac{u_i(c)}{y_i(c,r)} = \frac{u_i(c)}{\rho_{\mathrm{best}}(i) \cdot u_i(c) \cdot (\kappa+1)} = \frac{1}{\rho_{\mathrm{best}}(i) \cdot (\kappa+1)} \\ &\geqslant \frac{\sum_{j \in N} u_j(c_T)}{\mathrm{cost}(c_T) \cdot (\kappa+1)} \geqslant \frac{1}{\kappa+1} \cdot \frac{\alpha(c_T)|S|}{\mathrm{cost}(c_T)}.\end{aligned}$$

还需证明，当 c_T 被移除时，来自 S 的至少一位选民必须至少花费 $b/n - \mathrm{cost}(c_T)u_{\max}/(|S|\alpha(c_T))$。若证明这一点，后续证明将与 定理 7 的证明相同。为导出矛盾，假设情况并非如此。我们首先证明 c_T 不可能在时间 $t' < b/n$ 被移除。

事实上，t' 处已花费金额的总和最多为：

$$\begin{aligned}t'(n - |S|) + |S| \cdot \left(b/n - \frac{\mathrm{cost}(c_T)u_{\max}}{|S|\alpha(c_T)}\right) &< b/n \cdot (n - |S|) + |S| \cdot \left(b/n - \frac{\mathrm{cost}(c_T)u_{\max}}{|S|\alpha(c_T)}\right) \\ &= b - \frac{\mathrm{cost}(c_T)u_{\max}}{\alpha(c_T)} \leqslant b - \mathrm{cost}(c_T).\end{aligned}$$

这就产生了矛盾，因此 c_T 必定已在时间 $t'' = b/n$ 或更早时被移除。在这个时间点，必定有：

$$\begin{aligned}\mathrm{cost}(c_T) &> \sum_{i \in S} \kappa \cdot \frac{2(t'' - m(t''))u_i(c_T)}{u_i(c_T) + \max(\lambda, u_i(c_T))} + (1-\kappa) \cdot \frac{(t'' - m(t''))u_i(c_T)}{\max(\lambda, u_i(c_T))} \\ &\geqslant \sum_{i \in S} \cdot \frac{(t'' - m(t''))u_i(c_T)}{\max(\lambda, u_i(c_T))} \geqslant |S| \cdot \frac{(t'' - m(t''))\alpha(c_T)}{u_{\max}}.\end{aligned}$$

在上述估算中，我们使用了局部缩放因子的界限，这是可行的，因为候选人只会在一次迭代结束时被移除，也就是说，在调用一次子路由之后。

重新表述后：

$$t'' - m(t'') < \frac{\mathrm{cost}(c_T)u_{\max}}{|S|\alpha(c_T)}.$$

这表明某位选民至少花费了 $b/n - \text{成本}(\frac{c_T}{|S|\alpha}\frac{u_{\max}}{c_T})()$ 资金。证明完毕。

□

接下来两个定理的证明采用与 PropRank 情形完全相同的策略。我们详细介绍其中一个，以作说明。

定理 11。 考虑均等份额法在参数 κ 下返回的结果 W 。对于每个 (α, β)-凝聚选民群体 S，有：

$$\sum_{c \in W} \max_{i \in S} u_i(c) \geqslant \alpha \cdot \frac{1-\gamma}{\kappa+1} - \frac{u_{\max}}{\kappa+1}.$$

其中 $\gamma = |S|/n$，而 $u_{\max}$ 是选民赋予某位候选人的最高效用。

证明。 该证明结合了定理 5 和 定理 10的证明思路。考虑一个 (α, β)–凝聚选民群体 $S \subseteq N$，以及截至 t所进行的购买：

$$t = \frac{\beta}{|S|n} \cdot (n - |S|).$$

令 T 为截至 t已购买的候选人集合；显然 $|T| \leqslant tn$。对于每位候选人 c'，我们用记号 $\alpha(c') = \min_{i \in S} u_i(c')$。由于 S 是 (α, β)-凝聚的，我们知道存在一个集合 X，使得 $|X| \leqslant \beta$, $\sum_{c \in X} \alpha(c) \geqslant \alpha$，且 $X \cup T \in \mathcal{F}$。我们重新排列 X 中的候选人，使得 $X = \{c_1, c_2, \ldots, c_{|X|}\}$ 并且

$$\alpha(c_1) \geqslant \alpha(c_2) \geqslant \ldots \geqslant \alpha(c_{|X|}).$$

令 c_z 为 $X \setminus T$ 中索引最低的元素（也就是说， $\alpha(c_z)$的值最高）。

对于每个时间 t，令 $m(t)$ 表示来自 S 的某位选民截至 t所花费的最大金额。考虑一次购买，它使该值从 $m(t)$ 变为 $m(t')$；这一变化由选民 $i \in S$所见证，并假设此时尚未选中候选人 $c_X \in X$。我们重复定理 10 证明中的计算，得到某位 S 选民的满意度因这次购买增加了 u，且该值满足：

$$\frac{u}{m(t') - m(t)} \geqslant \frac{1}{\kappa+1} \cdot \alpha(c_X)|S|.$$

现在，和之前一样，我们考虑一个函数 f：给定 $m(t)$ 的值，该函数为通过购买而获得的比例正义代表条件下的满意度提供下界，且这些购买使得没有选民支付超过 $m(t)$。由此可知，对于 $x = \frac{\kappa+1}{|S|}$，该函数的值至少为 $\alpha(c_1)$。类似地，对于 $x = \frac{2(\kappa+1)}{|S|}$，该函数的值至少为 $\alpha(c_1) + \alpha(c_2)$；对于 $x = \frac{\beta}{(\kappa+1)}|S|$，其值至少为 α。因此，对于 $x = t$，该函数的值至少为

$$\frac{\alpha \cdot t|S|}{\beta(\kappa+1)} = \frac{\beta}{|S|n} \cdot (n - |S|) \cdot \frac{\alpha \cdot |S|}{\beta(\kappa+1)} = \frac{n - |S|}{n} \cdot \frac{\alpha}{\kappa+1}.$$

同样，在定理 10 的证明中，我们可以推知，当 c_z 被移除时，选民至少支付了：

$$m_t = t - \frac{u_{\max}}{|S|\alpha(c_z)}.$$

现在，考虑以下两个时刻中较晚的一个： c_z 被移除时，或索引小于 z 的最后一位候选人被购买时。假设到那时，来自 S 的某位选民已花费了其虚拟预算的 m'_t。显然， $m'_t \geqslant m_t$；对于大于 m'_t 的自变量，函数f 的斜率至多为 $|S|\alpha(c_z)/\kappa+1$。由于 f 是凹函数，我们得到：

$$f(m'_t) \geqslant f(t) - \frac{|S|\alpha(c_z)}{\kappa+1} \cdot \frac{u_{\max}}{\alpha(c_z)|S|} \geqslant \frac{n-|S|}{n} \cdot \frac{\alpha}{\kappa+1} - \frac{u_{\max}}{\kappa+1}$$

证明至此完成。 □

定理 12. 对于拟阵约束，参数为 κ 的均等份额法具有弱*PJR*度 $d(\alpha) = (\alpha - u_{\max})/(\kappa+1)$。

6 有界超支与回溯启发式下的平等份额

在对 PabuLib 数据集进行的大量实验中， [18], 我们观察到，PropRank算法比例性未达最优的主要原因是，选民往往会留下大量未支出预算（在我们的理论分析中由 $u_{\max}$ 参数刻画）。事实上，实验结果表明，PropRank在 $\kappa = 1$ 时的表现显著优于在$\kappa = 0$时。受这一观察启发，我们提出了两种启发式算法，它们仍与PropRank的核心设计原则密切一致：

PropRankRem。 在 PropRank 算法中，局部缩放是通过对所有可选候选人取最小值计算得出的 $\mu \cdot u_i(c)$（算法 1 的第 9–16 行）。直观而言，这些候选人可能带来更高的效用，因此值得等待。然而，这种保守做法可能导致选民在算法结束时仍持有大量未使用预算。PropRankRem 通过在候选人 c_{rem} 被排除考虑时重新启动过程来解决这一问题。直观而言，如果未选中这样的候选人，选民就不应继续持有资金，等待未来有能力负担它。重新启动后，局部缩放因子的计算方式与之前相同，但现在计算最小值时会将被排除的候选人 c_{rem} 排除在集合之外。这意味着，先前为了等待 c_{rem} 而暂缓使用预算的选民不再受其影响。由于每次重新启动都会恰好排除一名候选人，因此 PropRank 算法最多重复 m 次；每次重新启动时，用于计算局部缩放的候选人集合都会缩小一名。

PropRankBacktrack. 该算法的基本思路与 PropRank 类似，但以更可控的方式进行回溯。它由多次执行 PropRank 组成。每次执行时，仅使用指定等待集合中的候选人来计算局部缩放因子，该集合记为 C_{wait}。最初，我们设定 $C_{\text{wait}} := C$。

> 每次运行结束后，我们按如下方式更新 C_{wait}。首先，将上一次运行中选出的所有候选人加入 C_{wait}。然后，从 C_{wait} 中移除上一次运行期间最早被移除的候选人。如果不存在这样的候选人——也就是说， C_{wait} 已经是先前选出的集合 W_{prev}的子集——则过程终止并返回 W_{prev}。否则，再次运行 PropRank，并使用更新后的 C_{wait}。

在新一轮 PropRank 执行期间，我们保留上一次执行的结果以供参考。令C_{prev} 和 C_{new} 分别表示在上一次执行和当前执行中用于计算局部缩放的等待集合。在每个时间戳，我们比较在这两个集合下会选出哪位候选人，也就是说，分别根据 C_{prev} 或 C_{new}计算局部缩放时的情况。如果在 C_{prev}下会选出一位候选人，我们就沿用上一次执行的结果，选出该候选人。反之，如果在 C_{new}下会选出一位候选人，而在该时间 C_{prev} 下不会选出任何候选人，我们就选出这位候选人，并从此之后仅使用 C_{new} 计算局部缩放，完全舍弃上一次执行的结果。

换句话说，新的执行过程起初与先前的执行过程完全相同。不过，它最终可能会到达某个时间戳：在该时间戳下，候选人会在 C_{new} 中被选中，而先前的运行在该时刻并未选中任何候选人。随后接受该候选人，从那一刻起便不再考虑先前的执行过程。

该过程会终止，因为在每次后续运行中，购买候选人的时间戳向量要么按字典序递减，要么用于计算局部缩放的候选人集合会严格缩小。尽管如此，该过程可能需要指数级时间。为了解决这个问题，我们引入一个额外的参数 σ 来控制运行时间。具体而言，每个候选人最多可以被重新引入 C_{wait} σ 次。每当一个当前不在 C_{wait} 中的候选人被重新加入（因为它在上一次执行中被选中），我们就增加与该候选人关联的计数器。一旦计数器达到 σ，该候选人就不会再被重新引入 C_{wait}。因此，该过程最多包含 σm 次 PropRank 运行。

有界超支（BOS）。我们还将说明如何将近期提出的有界超支的等额分摊法（BOS） [30] 推广到具有一般可行性约束的情形。该方法遵循与 MES 相同的总体结构：每一步都会确定一个时间戳，相应地增加选民的货币配额，使用原始 BOS 过程进行购买，并移除纳入后会违反可行性的候选人。

需要进一步明确的主要部分，是如何确定下一次调用 BOS 的时间戳。考虑执行一次 BOS。在这次执行过程中，如果 BOS 尝试选择一个不可行的候选人，就像标准 BOS 过程那样，直接跳过该候选人。然而，如果 BOS 尝试选择一个不可行、但无需超支即可获得全额资助的候选人，我们还会判定此次 BOS 执行整体无效。随后，我们将时间戳定义为使相应 BOS 执行有效的最大值。

我们给出了适用于一般约束的 BOS 伪代码，见算法 3。

7 实验评估

在本节中，我们使用来自真实参与式预算实例的数据，对我们的规则进行实验评估 [18], ，涵盖超过 1,300 个实例。遵循文献中的标准假设，我们采用成本效用框架。具体而言，对于采用批准选票的选举，如果选民批准某位候选人 c，则她为该候选人赋予成本(c)的效用；否则，她赋予零效用。

我们评估 使用两种公平性指标和一种功利主义效率指标评估这些实例 :

算法 3： 有界超支的等额分摊法伪代码。

输入： 一个具有可行性约束的选举 $\mathcal{F}$
$W \leftarrow \emptyset$
$C_{\text{rem}} \leftarrow C$ /* 剩余候选人 */
已花费金额$_i \leftarrow 0$ 对每个 $v_i \in V$ /* 每位选民已花费的金额 */
当 $C_{\text{rem}} \neq \emptyset$ **时**
  $t_{\max} \leftarrow$ 满足条件的最大 t，使得 BOS 子程序(spent t, C_{rem}) 返回 True，且最后一个坐标为 True
  $W_{\text{next}}, p_{\text{next}}, \_ \leftarrow$ BOS 子程序(spent $t_{\max}, C_{\text{rem}}$)
  $W \leftarrow W \cup W_{\text{next}}$
  spent$_i \leftarrow$ spent$_i + \sum_{c \in W_{\text{next}}} p_{\text{next}}[v_i][c]$
  $C_{\text{rem}} \leftarrow \{c \in C_{\text{rem}} \setminus W : W \cup \{c\} \in \mathcal{F}\}$
返回 W

函数BOS 子程序(spent, t, C_{rem})**:**
  支付$[v_i][c] \leftarrow 0$，适用于所有 $v_i \in V, c \in C$
  $b_i \leftarrow t -$ 为每个 $v_i \in V$ 支付了$_i$
  当 存在 $c \in C \setminus W$，使得 $W \cup \{c\} \in \mathcal{F}$ 且 $\sum_{v_i \in V : u_i(c) > 0} b_i > 0$ **执行**
    $(\alpha^*, \rho^*, c^*) \leftarrow (1, +\infty, c)$
    对于 $c \in C \setminus W$，使得 $W \cup \{c\} \in \mathcal{F}$ **执行**
      $\rho' \leftarrow \rho$ 满足成本$(c) = \sum_{i=1}^{n} \min(b_i, u_i(c) \cdot \rho)$
      对于 $\rho \in \{b_i / u_i(c) : v_i \in V, b_i > 0, u_i(c) > 0\} \cup \{\rho'\}$ **执行**
        $\alpha \leftarrow \min((\sum_{i=1}^{n} \min(b_i, u_i(c) \cdot \rho))$ /成本$(c), 1)$
        如果 $\rho/\alpha < \rho^*/\alpha^*$ **则**
          $(\alpha^*, \rho^*, c^*) \leftarrow (\alpha, \rho, c)$
    对于 $c \in C \setminus W$ 使得 $W \cup \{c\} \notin \mathcal{F}$ 且 $\sum_{v_i \in V : u_i(c) > 0} b_i > 0$ **执行**
      $\rho' \leftarrow \rho$ 满足成本$(c) = \sum_{i=1}^{n} \min(b_i, u_i(c) \cdot \rho)$
      如果 $\rho' < \rho^*/\alpha^*$，**则**
        返回 $\emptyset$，支付，假
    $W \leftarrow W \cup \{c^*\}$
    对于 $v_i \in V$ 满足 $b_i > 0$ 且 $u_i(c^*) > 0$ **执行**
      $b_i \leftarrow \max(0, b_i - u_i(c^*) \cdot \rho^*)$
  返回 W，支付，真

扩展正当代表性及其违反情况（EJR+）[5]：该指标衡量对文献中研究的最强比例性公理之一的违反情况——一种略强于 EJR、且可在多项式时间内验证的变体。这是我们的主要评估指标。我们采用适用于成本效用的 EJR+ 至多一变体 [5]。

排斥率（ER）[18]：该指标表示被完全排斥的选民比例，也就是说，他们支持的候选人都没有获得资金：

$$\frac{1}{n} \cdot \left| \left\{ v_i \in N : \sum_{c \in W} u_i(c) = 0 \right\} \right|.$$

平均成本满意度（Cost-Sat）[18]：该指标表示选民获得的平均总效用：

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{v_i \in N} \sum_{c \in W} u_i(c).$$

为便于进行跨选举比较，我们将该值除以实际选举中所用贪心规则得出的相应指标值进行归一化，这遵循 Papasotiropoulos 等人 [30] 的做法。

我们还将我们的规则与三种专为参与式预算设计、广受认可的规则进行比较：采用 ADD1 补全的平等份额法（MES-PB） [32, 33], 有界超支的均等份额法（BOS-PB） [30], 以及贪心法（Greedy-PB） [18], 该方法按照候选人从选民处获得的总效用依次选择候选人；若某候选人的成本超出当前选择下的剩余预算，则跳过该候选人。

表 1：在 PABULIB 数据上评估所考虑规则生成的结果，其平均成本满意度、排除比例及平均扩展正义代表性+ 违规次数随实例中项目数量的变化。成本满意度以相应结果在功利主义规则下的满意度为基准，以比例表示。

	成本满意度			排除比例			EJR+		
实例规模	$\leqslant 10$	$11-30$	>30	$\leqslant 10$	$11-30$	>30	$\leqslant 10$	$11-30$	>30
贪心算法	1	1	1	20.6%	19.06%	19.9%	0.17	0.57	2.9
MES-PB	0.82	0.82	0.84	23%	16.3%	13.7%	0	0	0
BOS-PB	0.94	0.87	0.87	19.8%	14.8%	12.7%	0.1	0.027	0.032
PropRank ($\kappa=0$)	0.93	0.9	0.91	21.2%	16.1%	14.4%	0.12	0.2	0.15
PropRank ($\kappa=1$)	0.82	0.8	0.83	22%	15.6%	13.4%	0.005	0	0
MES ($\kappa=0$)	0.92	0.9	0.91	21.2%	16.1%	14.4%	0.12	0.2	0.15
MES ($\kappa=1$)	0.86	0.8	0.83	21.8%	15.6%	13.4%	0.005	0	0
PropRankRem ($\kappa=0$)	0.84	0.87	0.83	21.5%	15.4%	12.9%	0.005	0.034	0
PropRankRem ($\kappa=1$)	0.81	0.8	0.78	22.1%	15.6%	12.9%	0	0	0
BOS	0.92	0.89	0.88	21%	15.2%	13.3%	0.033	0.01	0.005

我们得出以下结论：

1. 首先，我们发现，采用 $\kappa=1$ 的 PropRank算法，其比例性显著优于采用 $\kappa=0$ 的变体。2. 第6节讨论的启发式算法进一步提升了基础PropRank变体所能提供的保证，尽管我们无法为这些规则证明类似的理论保证。基础PropRank算法在采用 $\kappa=1$ 时表现最佳，但我们的实验表明，将其与 第6节中的机制结合起来， $\kappa=0$更可取。在此配置下，我们观察到极少的扩展正义代表性+ 违规，且排除比例表现良好，同时总效用与专为参与式预算设计的最佳算法相当。3. 经过调整以适用于一般约束的有界超支的等额分摊法变体表现尤为出色——在扩展正义代表性+ 违规方面甚至优于原始 BOS-PB 变体，而排除比例和总效用方面则表现相近。值得注意的是，在第6节讨论的技术中，这一规则的计算效率也最高。

8 结论

我们针对具有任意可行性约束和加性选民效用的一般选举模型，开发了比例算法。具体而言，我们展示了如何将委员会选举文献中已有的方法——即 Phragm´en 顺序规则和均等份额法——

无论是否允许有界超支，都可以扩展到这一更广泛的场景。这些扩展需要新的概念工具，其中最重要的是一种机制，用以确定选民何时应将虚拟预算用于当前可负担的候选人，而不是暂缓支出，等待后续轮次中更受偏好的候选人变得可负担。

由于我们的 PropRank算法满足委员会单调性，因此可用于构建候选人的比例性排名。

我们证明了这些规则具有强有力的比例性保证。同时，我们发现，这些底层思想还可以进一步发展为更先进的启发式变体，不过代价是运行时间会增加。尽管用于基础算法的证明技术无法直接推广到这些启发式方法，但这些方法仍牢固地建立在与具有可证明保证的规则相同的概念原则之上。实验结果证实，在参与式预算实例中应用这些规则时，它们在比例性指标方面表现良好。尤其是启发式变体表现出色，几乎没有出现扩展正义代表性+ 违规。

致谢

我们感谢 Dominik Peters 和 Jannik Peters 就本文提出的观点进行了极具价值的讨论。

作者获得了欧盟（ERC、PRO-DEMOCRATIC，101076570）的资助。然而，文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究委员会的立场。欧盟和资助机构均不对此承担责任。



参考文献

[1] H. Aziz. 带软多样性约束的委员会选举规则。《群体决策与谈判》，28:1193–1200，2019。doi: 10.1007/s10726-019-09634-5。[2] H. Aziz、M. Brill、V. Conitzer、E. Elkind、R. Freeman 和 T. Walsh。基于认可的委员会投票中的正当代表性。《社会选择与福利》，48(2):461–485，2017。doi: 10.1007/s00355-016-1019-3。[3] H. Aziz、P. Lederer、D. Peters、J. Peters 和 A. Ritossa。排序偏好中的委员会单调性与比例代表制。载于 Itai Ashlagi 和 Aaron Roth 编，*2025*年*ACM*经济与计算会议论文集（*ACM-EC-2025*），第896页，2025年。[4] R. Bredereck、P. Faliszewski、A. Igarashi、M. Lackner 和 P. Skowron。带多样性约束的多赢家选举。载于第*31*届人工智能会议论文集（*AAAI-2018*），第933–940页，2018年。doi: 10.1609/aaai.v32i1.11457。

[5] M Brill 和 J. Peters。多席位投票的稳健且可验证的比例性公理。载于第*24*届*ACM*经济与计算会议论文集（*EC-2023*），第301页，2023年。[6] M. Brill、R. Freeman、S. Janson 和 M. Lackner。Phragm´en 的投票方法与正当代表性。载于第*31*届人工智能会议论文集（*AAAI-2017*），第406–413页，2017年。doi: 10.1609/aaai.v31i1.10598。[7] M. Brill、S. Forster、M. Lackner、J. Maly 和 J. Peters。基于认可的参与式预算中的比例性。载于第*37*届*AAAI*人工智能会议论文集（*AAAI-2023*），第5524–5531页，2023年。[8] L. Bulteau、N. Hazon、R. Page、A. Rosenfeld 和 N. Talmon。持续投票中的正当代表性。*IEEE Access*, 9:96598–96612，2021年。doi: 10.1109/ACCESS.2021.3095087。[9] Y. Cabannes。参与式预算：对参与式民主的重要贡献。《环境与城市化》，16(1):27–46，2004年。[10] L. E. Celis、L. Huang 和 N. K. Vishnoi。带公平性约束的多赢家投票。载于第*27*届国际人工智能联合会议论文集（*IJCAI-2018*），第144–151页，2018年。doi: 10.24963/ijcai.2018/20。[11] N. Chandak、S. Goel 和 D. Peters。序贯决策中的偏好比例聚合。技术报告 arXiv:2306.14858, arXiv.org，2023年。[12] Y. Cheng、Z. Jiang、K. Munagala 和 K. Wang。委员会选举中的群体公平。载于*2019*年*ACM*经济与计算会议论文集，第263–279页。ACM，2019年。doi: 10.1145/3328526.3329577。[13] V. Conitzer、R. Freeman 和 N. Shah。公平的公共决策。载于*2017*年*ACM*经济与计算会议论文集，第629–646页，2017年。doi: 10.1145/3033274.3085125。[14] U. Endriss。判断聚合。载于 F. Brandt、V. Conitzer、U. Endriss、J. Lang 和 A. Procaccia 编，《计算社会选择手册》，第399–426页。剑桥大学出版社，2016年。doi: 10.1017/CBO9781107446984.018。[15] B. Fain、K. Munagala 和 N. S hah。不可分割公共物品的公平分配。载于第*19*届*ACM*经济与计算会议论文集（*EC-2018*），第575–592页，2018年。doi: 10.1145/3219166.3219174。[16] B. Fain、K. Munagala 和 N. Shah。不可分割公共物品的公平分配。载于*2018*年*ACM*经济与计算会议论文集，第575–592页。ACM，2018年。doi: 10.1145/3219166.3219174。扩展版本 arXiv:1805.03164。[17] P. Faliszewski、P. Skowron、A. Slinko 和 N. Talmon。多赢家投票：社会选择理论面临的新挑战。载于 U. Endriss 编，《计算社会选择趋势》。AI Access，2017年。[18] P. Faliszewski、J. Flis、D. Peters、G. Pierczynski、P. Skowron、D. Stolicki、S. Szufa 和 N. Talmon。参与式预算：数据、工具与分析。载于第*32*届国际人工智能联合会议论文集（*IJCAI-2023*），第2667–2674页，2023年。

[19] R. Freeman、A. Kahng 和 D. M. Pennock。赢家人数可变的基于批准的选举中的比例性。载于第二十六届国际人工智能联合大会（*IJCAI-2020*）论文集，第132–138页，2020年。doi：10.24963/ijcai.2020/19.[20] A. Goel、A. Krishnaswamy、S. Sakshuwong 和 T. Aitamurto。背包投票：参与式预算的投票机制。手稿，2016年。[21] Z. Jiang、K. Munagala 和 K. Wang。近似稳定的委员会选举。载于第*52*届计算理论研讨会（*STOC-2020*）论文集，第463–472页，2020年。doi：10.1145/3357713.3384238.[22] Y. H. Kalayci、J. Liu 和 D. Kempe。完全比例正当代表制。载于第*24*届国际自主智能体与多智能体系统会议（*AAMAS- 2025*）论文集，第1070–1078页，2025年。[23] S. Kraiczy、G. Papasotiropoulos、G. Pierczynski 和 P. Skowron。赞成与反对投票中的比例性。技术报告 arXiv:2503.01985，2025年。[24] M. Lackner。持续投票：长期决策中的公平性。载于第*34*届人工智能会议（*AAAI-2020*）论文集，第2103–2110页，2020年。doi：10.1609/aaai.v34i02.5584.[25] M. Lackner 和 P. Skowron。基于批准偏好的多赢家投票。Springer智能系统丛书。Springer，2023年。doi：10.1007/978-3-031-09016-5.[26] C. List 和 B. Polak。判断聚合导论。《经济理论杂志》，145(2):441–466，2010年。doi：10.1007/978-3-642-31485-8 5.[27] T. Masaˇr´ık、G. Pierczy´nski 和 P. Skowron。集体决策中比例性的一般化理论。载于*2024*年*ACM*经济学与计算大会（*ACM-EC-2024*）论文集，第734–754页，2024年。[28] I.-A. Mavrov、K. Munagala 和 Y. Shen。具有分配约束的公平多赢家选举。载于第*24*届*ACM*经济与计算会议（*ACM-EC-2023*）论文集，第964–990页，2023年。doi：10.1145/3580507.3597685.[29] K. Munagala、Y. Shen、K. Wang 和 Z. Wang。通过多线性扩展和市场出清实现委员会选举的近似核心。载于第*33*届*ACM-SIAM*离散算法研讨会（*SODA-2022*）论文集，第2229–2252页，2022年。doi：10.1137/1.9781611977073. 89.[30] G. Papāsotiropoulos、S. Z. Pishbin、O. Skibski、P. Skowron 和 T. Was。有界超支的等额分摊法。载于第*26*届*ACM*经济学与计算会议论文集，第841–868页，2025年。[31] F. Pascual、P. Skowron 和 K. Rzadca。集体日程安排：排程与计算社会选择的交汇。载于第*17*届国际自主智能体与多智能体系统会议（*AAMAS-2018*）论文集，第667–675页，2018年。[32] D. Peters 和 P. Skowron。比例性与福利主义的局限。载于*2020*年*ACM*经济学与计算会议论文集，第793–794页，2020年。doi：10.1145/3391403.3399465。扩展版本 arXiv:1911.11747。

[33] D. Peters、G. Pierczy´nski 和 P. Skowron。具有加性效用的比例参与式预算。载于第三十五届神经信息处理系统大会（*NeurIPS-2021*）论文集，第12726–12737页，2021年。[34] S. Rey 和 J. Maly。不可分参与式预算的（计算）社会选择视角。技术报告 arXiv:2303.00621，2023年。[35] L. S´anchez-Fern´andez、E. Elkind、M. Lackner、N. Fern´andez、J. A. Fisteus、P. Basanta Val 和 P. Skowron。比例性正当代表性。载于第*31*届人工智能会议（*AAAI-2017*）论文集，第670–676页，2017年。doi：10.1609/aaai.v31i1.10611.[36] P. Skowron。多赢家规则的比例度。载于*2021*年*ACM*经济学与计算大会（*ACM-EC-2021*）论文集，第820–840页，2021年。doi：10.1145/3465456.3467641.[37] P. Skowron 和 A. G´orecki。比例公共决策。载于第三十六届人工智能大会（*AAAI-2022*）论文集，第5191–5198页，2022年。doi：10.1609/aaai. v36i5.20454.[38] P. Skowron、M. Lackner、M. Brill、D. Peters 和 E. Elkind。比例性排名。载于第二十六届国际人工智能联合大会（*IJCAI-2017*）论文集，第409–415页，2017年。doi：10.24963/ijcai.2017/58。