arXiv:2602.08510v1 [math.DG] 9 Feb 2026

共形到爱因斯坦算子的相容复形

IGOR KHAVKINE 和 JOSEF ŠILHAN

摘要。共形到爱因斯坦算子是一种共形不变的线性超定微分算子，其非零解对应于共形类中的爱因斯坦度量。我们在维数为 $n \geq 4$、外尔曲率满足自然的一般性假设时，为该算子构造相容复形；这意味着至多存在一个线性无关的解。我们还得到了射影到里奇平坦算子的类似结果。该构造基于其中一位作者此前提出的方法，利用了起始算子已有的对称性和几何性质。在此情形下，相容复形分别由共形不变算子和射影不变算子组成。我们还就如何将伯恩斯坦-盖尔范德-盖尔范德序列解释为局部平坦情形下的相容复形作了一些评论，这或许具有普遍意义。

1. 引言

研究共形相关的爱因斯坦度量是一个经典问题 [6]，也是近期研究的活跃领域，参见专著 [4]或关于曲率障碍的讨论 [17]。在光滑流形 $(M, [g])$ 上的共形几何 M 是一类共形相关的度量（具有任意签名）$[g] = \{e^{2\Upsilon} g\}$，其中 $\Upsilon \in C^\infty(M)$ 处处为正且 $n =$ 维数为 $M \geq 3$。其中的爱因斯坦度量在 $[g]$ 局部由所谓的共形到爱因斯坦算子控制

$$E_0 \colon \mathcal{E}[1] \to \mathcal{E}_{(ab)_0}[1], \quad \sigma \mapsto \big(\nabla_{(a}\nabla_{b)_0} + \mathrm{P}_{(ab)_0}\big)\sigma. \tag{1}$$

该算子是线性的、共形不变且过定的，并且无零点的解 $\sigma \in \mathcal{E}[1]$ 与 $[g]$ 中的爱因斯坦度量 $\hat{}g$ 一一对应。具体而言，若利用 g 的黎曼体积形式将 σ 识别为一个函数，则 $\hat{}g = \sigma^{-2} g$。我们用记号 $\mathcal{E}[w]$、$w \in \mathbb{R}$ 表示普通 $(-\frac{w}{n})$ 密度丛，即 $\Lambda^n T^*M = \mathcal{E}[-n]$、$\nabla$ 是 g 的列维-奇维塔联络，$(-)_0$ 表示无迹部分

2020 数学主题分类。53C18, 35N10, 53B10。关键词和短语。共形几何、超定微分算子、相容复形、伯恩斯坦-盖尔范德-盖尔范德序列。资助：IK 的研究部分得到了 GAČR 项目 GA22-00091S 以及捷克科学院研究计划 RVO: 67985840 的支持。JŠ 得到了 GAČR 项目 GA22-00091S 的资助。

而 P_{ab} 表示 g 的肖滕张量。我们还使用抽象指标记法，即 $\mathcal{E}_a = T^*M$、$\mathcal{E}_{(ab)} = S^2T^*M$、$\mathcal{E}_{[ab]} = \Lambda^2T^*M$ 等。我们记作 $\mathcal{E}_a[w] := \mathcal{E}_a \otimes \mathcal{E}[w]$，更复杂的张量丛也采用类似记法。更一般地，下面将讨论的所有微分算子都是线性的、系数光滑的，并且在某个固定流形 M 上的向量丛之间进行映射。我们将两个微分算子 K 和 L 的复合记为 $K \circ L$；若不会引起混淆，也简记为 KL。

在解决诸如 $E_0(\sigma) = 0$这样的微分方程之后，另一个重要问题是确定算子 E_0的值域。例如，分析微分形式上的外微分算子 d 的像，在某种意义上会引出 de Rham复形和德拉姆上同调。在另一种情境中，分析几何偏微分方程（如拉普拉斯方程或狄拉克方程）的对称性时，中间计算会涉及这样一个问题：某个张量是否属于给定微分算子的像。具体例子包括函数上的外微分 [21] 或向量场上的共形 Killing 算子 [2]。我们研究算子 E_0 的部分动机，是将其作为研究类似但更复杂算子的入门；我们采用的视角并非从最大对称性（或平坦性）出发，而是从更一般的几何出发。

根据超定偏微分方程的理论， [23, 7], 像 E_0 这样作用于光滑函数的线性微分算子，其像可以在局部刻画为另一个微分算子的核，例如 E_1，即所谓的相容算子（关于下文所用精确定义，参见定义 4.2 ）。处理相容算子时，同时确定一整列这样的算子实际上更为方便， E_k 它们构成 E_{k-1}的相容复形。本文将在一定的曲率假设下，明确构造共形到爱因斯坦算子的一个相容复形E_0 （第5节），以及一个与之密切相关的射影几何算子（第6节）。

目前，只有在具有对称性的几何情形下，人们才大多知道如何显式构造相容复形。一个著名的例子是常截面曲率黎曼度量上的 Killing 算子的 Calabi 复形 [8, 13, 18]。从现代观点来看，这是平坦射影几何中的伯恩斯坦-盖尔范德-盖尔范德（BGG）复形的一个例子。更一般地，我们可以考虑抛物几何中的 BGG 序列 [25, 9]。在局部平坦情形下，任何此类序列都会给出第一个算子的相容复形（参见第 4.3 节）。这些（超定）算子称为第一 *BGG* 算子，而（1）就是一个重要例子。然而，BGG 序列无法在局部平坦情形之外给出相容复形，甚至不再构成复形。事实上，关于以下内容几乎一无所知：

弯曲抛物几何中第一 BGG 算子的相容复形。广义相对论中，某些具有物理和数学意义的（伪）黎曼流形上的 Killing 算子的相容复形已有所研究 [19, 1]；事实上，它们正是通过我们在本文中将采用的方法构造出来的。此外，文献 [11, 12] 还取得了一项部分成果：在局部对称空间上构造出了相容复形的前两个算子（即 Killing 算子及其相容算子）。

我们的主要结果是在适当的一般情形下，为 E_0 中的1构造一个相容复形，如下所示。假设 $n \geq 4$，则共形几何$(M,\ [g])$ 局部平坦，当且仅当韦尔张量 W_{abcd} 为零。作为“相反”的情形，我们称$(M,\ [g])$ 为一般的，如果由$\mathcal{E}^d \to \mathcal{E}_{abc}$ 诱导的丛映射 W_{abcd} 是单射。那么，(1)的解空间至多为一维，详情参见第3.2 节。

定理 1.1。假设$(M,\ [g])$ 是一般的，且(1)的解空间为一维。那么，存在一个关于 E_0 的相容复形，其形式为

$$\mathcal{E}[1] \xrightarrow{E_0} \mathcal{E}_{(ab)_0}[1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{id}-D_1C_1 \\ \tilde{d}C_1 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \mathcal{E}_{(ab)_0}[1] \\ \oplus \\ \mathcal{E}_{[ab]}[1] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} C_1 & -H_1' \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix}} \begin{matrix} \mathcal{E}_a[1] \\ \oplus \\ \mathcal{E}_{[abc]}[1] \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \tilde{d} \end{pmatrix}} \mathcal{E}_{[abcd]}[1]. \xrightarrow{\tilde{d}} \mathcal{E}_{[abcde]}[1] \cdots.$$

这里的算子

$$C_1 \colon \mathcal{E}_{(ab)_0}[1] \to \mathcal{E}_a[1], \qquad D_1 \colon \mathcal{E}_a \to \mathcal{E}_{(ab)_0}[1],$$
$$\tilde{d} \colon \mathcal{E}_{[a_1 \ldots a_k]}[1] \to \mathcal{E}_{[a_0 \ldots a_k]}[1], \qquad H_1' \colon \mathcal{E}_{[ab]}[1] \to \mathcal{E}_a[1]$$

定义见第3.3节。所有这些算子都是共形不变的，˜复形的其余部分只是扭曲外微分 d 作用于经 $\mathcal{E}[1]$扭曲的微分形式上。

此外，我们还在第 E_0 节中得到了一个相容复形，其中 5.1 的解空间是零维的。这个复形短得多——只有三个算子（包括 E_0）。后一种情况也可以推广到三维。这尤其意味着，关于 E_0 的相容复形问题，在任意签名的三维情形以及黎曼号差的四维情形下都已完全解决，参见备注 5.3。

在第2 节中，我们简要总结约定以及共形几何中的相关事实。接着，第3节介绍共形到爱因斯坦算子 E_0 的所有相关性质，这些性质将用于我们的主要结果。第4 节简要回顾相容复形的基本思想，并总结文献 [19], 中的构造方法。该方法适用于一致为有限型的算子，我们的

E_0 及其射影类比便是其中的例子。最后，在第5节中，我们证明主要结果（定理1.1），该结果适用于一般的共形结构；而在第6节中，我们针对其射影类比得到一个类似结果 E_0 （定理6.1）。

2. 共形几何

设 $(M,[g])$ 是维数为 $n\geq 3$ 、签名为 (p,q) 的共形流形，其中 $n=p+q$。我们将使用第 1 节开头提到的记号。共形结构给出共形度量 $\boldsymbol{g}_{ab}\in\mathcal{E}_{(ab)}[2]$ ，其逆为 $\boldsymbol{g}^{ab}\in\mathcal{E}^{(ab)}[-2]$。对于 $\nabla_a\boldsymbol{g}_{bc}=0$ 中的所有度量（及相应的列维-奇维塔联络 ∇），我们有 $[g]$。此外，我们有共形体积形式 $\boldsymbol{\epsilon}_{a_1\dots a_n}\in\mathcal{E}_{[a_1\dots a_n]}[n]$ ，它也是平行的。

记 ∇ 和 ∇ 分别为与 g_{ab} 和 $\hat{g}_{ab}=e^{2\Upsilon}g_{ab}$ 对应的列维-奇维塔联络，并令 $\Upsilon_a=\nabla_a\Upsilon$，则有

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}_a\sigma&=\nabla_a\sigma+w\Upsilon_a\sigma,\\ \hat{\nabla}_a\tau_b&=\nabla_a\tau_b-\Upsilon_a\tau_b-\Upsilon_b\tau_a+\Upsilon^r\tau_r\boldsymbol{g}_{ab}\end{aligned}\tag{2}$$

其中 $\sigma\in\mathcal{E}[w]$ 和 $\tau_b\in\mathcal{E}_b$。利用莱布尼茨法则，可以计算一般张量丛上 $\hat{\nabla}_a$ 与 ∇_a 之间的类似关系。我们用 $R_{ab}{}^c{}_d$ 表示 ∇ 的黎曼曲率张量，用 $W_{ab}{}^c{}_d$ 表示其韦尔张量，用 $Ric_{ab}=(n-2)P_{ab}+g_{ab}J$ 表示里奇张量；它也给出了该张量与肖滕张量 P_{ab} 及其迹 $J=P^a{}_a$ （其迹）的关系；用 $Y_{abc}=2\nabla_{[b}P_{c]a}$ 表示科顿张量。注意，韦尔张量与从 $[g]$ 中选取的度量无关。注意，对于 $n\geq 4$ ，$(M,[g])$ 局部平坦当且仅当 $W_{abcd}=0$ ；而对于 $n=3$，当且仅当 $Y_{abc}=0$。

3. 共形到爱因斯坦算子

我们研究由以下二阶线性微分算子给出的偏微分方程组

$$E=E_0:\mathcal{E}[1]\to\mathcal{E}_{(ab)_0}[1],\quad \sigma\mapsto(\nabla_{(a}\nabla_{b)_0}+P_{(ab)_0})\sigma\tag{3}$$

其中，下标 0 表示相对于 $\boldsymbol{g}_{ab}$ 的无迹部分。该算子是共形不变的，其非零解可通过重新缩放得到 $[g]$ 中的爱因斯坦度量。也就是说，$[g]$ 含有爱因斯坦度量，当且仅当 E 至少有一个无零点的解。

我们的目标是为 (3) 构造一个相容复形。一般而言，这似乎颇为困难，因此我们只考虑两种特殊情形（它们相当对立）：局部平坦情形和“泛型情形”。在前一种情形中，众所周知的 BGG 分解给出了相容复形（参见第 4.3 节）。我们主要关注泛型情形；其确切含义将在第 3.2 节中说明。

3.1. 共形平坦情形。 算子 E_0 是共形不变算子序列 $E_0, \dots, E_{n-1}$ 中的第一个，其中 E_{n-1} 是 E_0 的形式伴随，其余算子均为一阶算子，

$$E_k : \mathcal{E}_{[a_1\dots a_k]} \boxtimes \mathcal{E}_b[1] \to \mathcal{E}_{[a_0\dots a_k]} \boxtimes \mathcal{E}_b[1], \qquad \tau_{a_1\dots a_k b} \mapsto (k+1)\operatorname{Pr}_{\boxtimes} \nabla_{[a_0}\tau_{a_1\dots a_k]b} \tag{4}$$

对于 $1 \le k \le n-2$。这里 $\boxtimes$ 表示嘉当积，即，丛 $\mathcal{E}_{[a_1\dots a_k]} \boxtimes \mathcal{E}_b$ 由杨表给出，其第一列长度为 k，第二列长度为 1；此外，我们还相对于 $\boldsymbol{g}_{ab}$ 投影到无迹部分。$\operatorname{Pr}_{\boxtimes}$ 恰好是到该丛的投影。特别地，$\mathcal{E}_a \boxtimes \mathcal{E}_b = \mathcal{E}_{(ab)_0}$。

该序列可通过将外微分与所谓的 tractor 联络相扭合而得到——在局部平坦情形下，该联络是平坦的——这一技术称为“BGG 机制”。假设处于局部平坦情形，则 tractor 联络是平坦的，因此该序列称为 *BGG* 复形，并且已知它是定义 4.2 意义下的相容复形。详情请参阅第 4.3 节。

3.2. 一般共形结构。 假设 $n \ge 4$，如果韦尔张量作为映射是单射，我们就称共形类 $(M,\ [g])$ 一般[1]

$$W_{abcd} \colon \mathcal{E}^d \to \mathcal{E}_{abc}[2], \quad v^d \mapsto W_{abcd}v^d. \tag{5}$$

因此存在一个反演 $W^{abce} \in \mathcal{E}^{[ab]\overline{ce}}[-2]$，

$$\overline{W}^{abce} : \mathcal{E}_{abc}[2] \to \mathcal{E}^e \quad \text{such that} \quad \overline{W}^{abce}W_{abcd} = \delta^e_d.$$

请注意，这样的反演并非唯一给定。在这种情况下，必须将某个具体选择作为我们后续讨论的额外几何输入。不过，有时会存在一个优先选择。例如 [17, 第 2 节。5], 如果张量

$$V^b_a := W_{cdea}W^{cdeb} \tag{6}$$

作为端omorphism 是可逆的（等价地，$\det V \neq 0$），其逆为 $V^b_a V^c_b = \delta^c_a$，我们可以采用优先选择

$$\overline{W}^{abcd} := W^{abce}\overline{V}^d_e. \tag{7}$$

一般性假设导致 [17]解存在的显式曲率障碍，E_0 现简要总结如下。使用第 E_1 节中的算子 3.1，其明确表示为 $E_1(\tau)_{abc} = 2\operatorname{Pr}_{\boxtimes}(\nabla_{[a}\tau_{b]c})$，对于 $\tau_{ab} \in \mathcal{E}_{(ab)_0}[1]$，我们计算

$$F_{abc} := (E_1 \circ E_0(\sigma))_{abc} = W_{abcd}(\nabla^d\sigma) + Y_{cab}\sigma \in \big(\mathcal{E}_{[ab]} \boxtimes \mathcal{E}_c\big)[1]. \tag{8}$$

将逆 W^{abce} 应用于 (8)，得到

$$\nabla_a\sigma + Z_a\sigma = \overline{W}^{rst}{}_a F_{rst} \quad \text{for} \quad Z_a := \overline{W}^{rst}{}_a Y_{trs} \in \mathcal{E}_a. \tag{9}$$

[1]称为第 2 节中的弱一般情形 [17, 。5]。

注意， Z 形式——由反演 W^{abcd} 的选择决定——并非共形不变。若将度量改为 $\hat{}g_{ab} = e^{2\Upsilon} g_{ab}$ ，则 $\widehat{}$ 科顿张量的变换为 $Y_{bcd} = Y_{bcd} + \Upsilon^a W_{abcd}$ ，其中 $\Upsilon_a = \nabla_a \Upsilon$。因此

$$\widehat{Z}_a = Z_a - \Upsilon_a. \tag{10}$$

先前的观察引出了 E_0存在解的曲率障碍。若 σ 是一个解，则 $\nabla_a \sigma + Z_a \sigma = 0$。如果我们再对这一关系求一次导数，投影到对称部分或反对称部分，并使用 $E_0(\sigma) = 0$ ，则

$$(dZ)_{ab} = 0 \quad \text{and} \quad \Phi(Z)_{ab} = 0 \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned} (dZ)_{ab} &= 2\nabla_{[a} Z_{b]} \in \mathcal{E}_{[ab]}, \\ \Phi(Z)_{ab} &:= \nabla_{(a} Z_{b)_0} - \mathrm{P}_{(ab)_0} - Z_{(a} Z_{b)_0} \in \mathcal{E}_{(ab)_0}. \end{aligned}$$

事实上，不难看出 E_0 有解，当且仅当满足（11）。特别地，一般性假设意味着 E_0的解空间至多为一维。最后请注意，对于满足（dZ）$_{ab}$ 和 Φ（Z）$_{ab}$ 的依赖于尺度的 1-形式 Z_a ，二者都是共形不变的。直接计算即可轻松验证这一点。更详细的介绍请参见 [17] 。

3.3. **不变微分算子**。同时具有自然性（即仅依赖于共形类 $[g]$ 而不依赖于其他选择）的不变微分算子，在局部平坦情形下已得到完整分类 [5]。其曲率情形的对应物存在性问题更为复杂，但显然，第 E_i 3.1节中的算子在任意共形结构上都有良好定义。

我们还需要更多算子，它们将利用 1-形式来定义Z ，该 1-形式来自（9）。这些算子是共形不变的，但并非自然算子，因为它们仅对一般共形类有定义，而且还取决于反演的选择W^{abcd}。首先注意到

$$\widetilde{\nabla}_a : \mathcal{E}[1] \to \mathcal{E}_a[1], \quad \widetilde{\nabla}_a \sigma = \nabla_a \sigma + Z_a \sigma \tag{12}$$

对于 $\sigma \in \mathcal{E}[1]$，它是 $\mathcal{E}[1]$ 上的共形不变联络。（注意，在 [15] 中，$\sim\nabla$ 被称为 $\mathcal{C}$-联络。）事实上，由（2）可知，在另一度量 $e^{2\Upsilon} g_{ab}$ 下，$\nabla_a \sigma$ 变换为 $\nabla_a \sigma + \Upsilon_a \sigma$ $\Upsilon_a = \nabla_a \Upsilon$，而根据（10）， Z_a 变换为 $Z_a - \Upsilon_a$ 。注意， ∇_a 的曲率 $\widetilde{}$ 为（dZ）$_{ab} = 2\nabla_{[a} Z_{b]}$。此外，我们将由 $\widetilde{\nabla}_a$ 扭曲的外微分记为 $\tilde{d} := d^{\widetilde{\nabla}}$，

$$\begin{aligned} \tilde{d} : \mathcal{E}_{[a_1 \dots a_k]}[1] &\to \mathcal{E}_{[a_0 \dots a_k]}[1], \\ \tau_{a_1 \dots a_k} &\mapsto (k+1)\big(\nabla_{[a_0} \tau_{a_1 \dots a_k]} + Z_{[a_0} \tau_{a_1 \dots a_k]}\big) \end{aligned} \tag{13}$$

˜对于 $\tau_{a_1\dots a_k} \in \mathcal{E}_{[a_1\dots a_k]}[1]$ 和 $k \geq 0$。根据构造， d 是共形不变的。

接下来，我们需要算子

$$D_1 : \mathcal{E}_b[1] \to \mathcal{E}_{(ab)_0}[1], \quad \tau_b \mapsto \nabla_{(a}\tau_{b)_0} - Z_{(a}\tau_{b)_0} \tag{14}$$

对于 $\tau_b \in \mathcal{E}_b[1]$。通过与上文类似的计算，可以轻易验证 D_1 的共形不变性。此记号中的下标所起的作用将在后文说明。此外，我们用 C_1 表示 E_1 与反演- W^{abcd} 的复合，

$$C_1 : \mathcal{E}_{(ab)_0}[1] \to \mathcal{E}_a[1], \quad \tau_{ab} \mapsto 2\overline{W}^{rst}{}_a\nabla_{[r}\tau_{s]t} \tag{15}$$

对于 $\tau_{ab} \in \mathcal{E}_{(ab)_0}[1]$。这个算子按构造即为不变的。

˜算子 D_1 和 C_1 与 E_0 和 d 配合良好。具体而言，

$$\begin{aligned} D_1 \circ \tilde{d} &= E_0 + \Phi(Z) : \mathcal{E}[1] \to \mathcal{E}_{(ab)_0}[1], \\ C_1 \circ E_0 &= \tilde{d} : \mathcal{E}[1] \to \mathcal{E}_a[1], \end{aligned} \tag{16}$$

其中我们将 Φ（Z）视为代数算子。这可由（9）、（11）以及直接计算得出。利用这些算子，我们还可以从（11）中恢复障碍，

$$\begin{aligned} (\tilde{d} \circ C_1 \circ E_0)(\sigma) &= (dZ)\sigma, \\ (D_1 \circ C_1 \circ E_0)(\sigma) &= \Phi(Z)\sigma + E_0(\sigma). \end{aligned} \tag{17}$$

我们也可以复合算子 C_1 和 D_1。结果表明，这会得到一个辅助算子，可将其视为 D_1的类比，其中源丛被替换为 $\mathcal{E}_{[bc]}[1]$ ，目标丛被替换为$\mathcal{E}_a \boxtimes \mathcal{E}_{bc}[1] \subseteq \mathcal{E}_{a[bc]}[1]$。回想一下， $\boxtimes$ 是嘉当积，即 $\mathcal{E}_a \boxtimes \mathcal{E}_{bc}[1]$满足一个长度为 2 的列和一个长度为 1 的列所对应的杨图的对称性，并且关于 $\boldsymbol{g}_{ab}$无迹。这个辅助算子为

$$\overline{D} : \mathcal{E}_{[bc]}[1] \to \mathcal{E}_a \boxtimes \mathcal{E}_{[bc]}[1], \quad \tau_{bc} \mapsto \mathrm{Pr}_{\boxtimes}(\nabla_a - 2Z_a)\tau_{bc} \tag{18}$$

对于 $\tau_{bc} \in \mathcal{E}_{[bc]}[1]$。这里我们采用与第$\mathrm{Pr}_{\boxtimes}$ 节相同的记号3.1。标准计算可验证 D 是共形不变的。

现在，直接计算可验证

$$\begin{aligned} &C_1 \circ D_1 : \mathcal{E}_a[1] \to \mathcal{E}_a[1], \\ &\tau_a \mapsto \tau_a - (H_1'\tilde{d}\tau)_a - \overline{W}^{rsp}{}_a\big[2\Phi(Z)_{pr}\tau_s + \tfrac{1}{2}(dZ)_{rs}\tau_p\big], \end{aligned} \tag{19}$$

其中 $H_1' : \mathcal{E}_{[ab]}[1] \to \mathcal{E}_a[1]$,

$$\psi_{ab} \mapsto -\tfrac{1}{2}\overline{W}^{rsp}{}_a\overline{D}(\psi)_{prs}. \tag{20}$$

D 的共形不变性意味着$\overline{H_1'}$ 也具有共形不变性。

最后请注意，所有不变算子 E_i、∇、d、C_1、D_1、D、$\mathcal{H}'_1$都是作用于权重为 1 且所有“指标均在下方”的丛之间的算子。也就是说，这些算子不会改变共形权重。

4. 相容算子

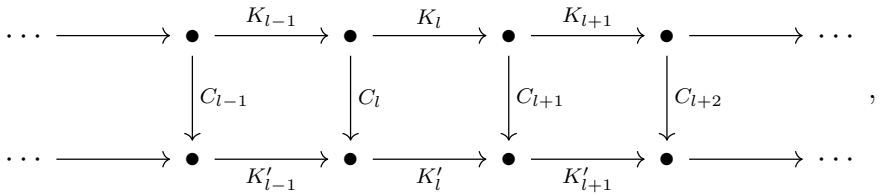
下文第 4.1 节将简要回顾相容复形的精确定义（定义4.2）。随后，第4.2节将回顾 [19] 中介绍的方法，该方法用于为一致有限型的微分算子构造相容复形（命题4.3和4.4）。之后，我们将在所需的构造中运用这一方法，为“通用”共形结构上的共形到爱因斯坦算子构造相容复形 E_0 (3)（第5节）。最后，第4.3节将概述如何运用这一方法证明，局部平坦几何上的 BGG 序列（例如（4））构成此处所定义意义下的相容复形。这一结果本在意料之中，有时也被视为理所当然，但在文献中却很难找到相关论述。

4.1. 背景。

我们首先介绍一些关于同调代数 [27]的基本概念。

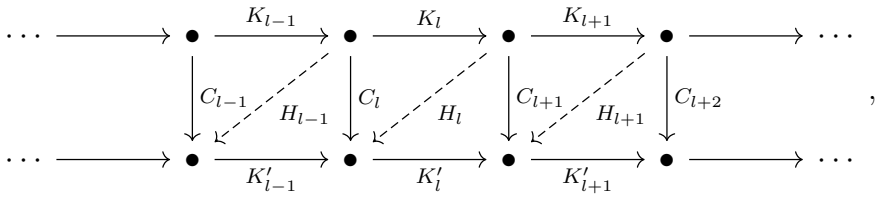
定义 4.1. 一列（可能无限的）可复合线性映射 K_l、$l = l_{\min}$、……、$l_{\max}$，满足在可能时 $K_{l+1} \circ K_l = 0$，称为一个（上链）复形。给定复形 K_l 和 K'_l，以及一列线性映射 C_l，如图所示：

(21)



若其方块交换，即在可能时 $K'_l \circ C_l = C_{l+1} \circ K_l$，则称为复形之间的上链映射 或态射 。复形 K_l 和 K'_l 之间的同伦（它们也可以是同一个复形，$K_l = K'_l$）是一列态射，如图中的虚线箭头所示：

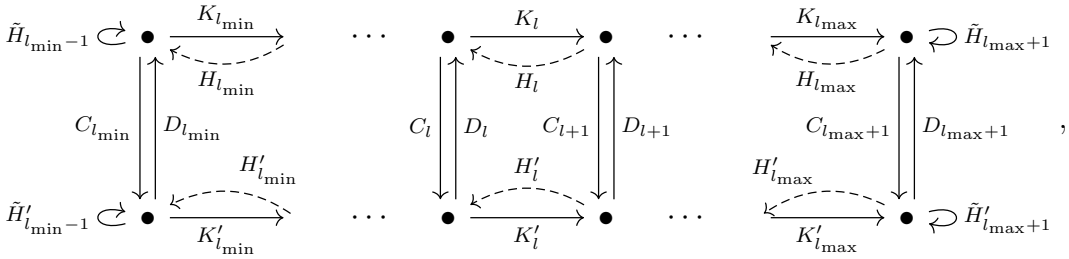
(22)



而映射序列 $C_l = K'_{l-1} \circ H_{l-1} + H_l \circ K_l$ 称为由同伦 H_l 诱导的态射。复形 K_l 与K'_l 之间的同伦等价是一对态射 C_l 和 D_l

它们之间的态射，如图所示

(23)



使得 C_l 与 D_l 在同伦意义下互为逆（H_l 与 H'_l），即

$$
\begin{aligned}
D_l \circ C_l &= \mathrm{id} - K_{l-1} \circ H_{l-1} - H_l \circ K_l, \\
C_l \circ D_l &= \mathrm{id} - K'_{l-1} \circ H'_{l-1} - H'_l \circ K'_l,
\end{aligned} \tag{24}
$$

并具有特殊的端点情形

(25)

$$
\begin{aligned}
&\tilde{D}_{l_{\min}} \circ C_{l_{\min}} = \mathrm{id} - H_{l_{\min}-1} - H_{l_{\min}} \circ K_{l_{\min}}, \quad K_{l_{\min}} \circ H_{l_{\min}-1} = 0, \\
&\tilde{C}_{l_{\min}} \circ D_{l_{\min}} = \mathrm{id} - H'_{l_{\min}-1} - H'_{l_{\min}} \circ K'_{l_{\min}}, \quad K'_{l_{\min}} \circ H'_{l_{\min}-1} = 0, \\
&\tilde{D}_{l_{\max}+1} \circ C_{l_{\max}+1} = \mathrm{id} - H_{l_{\max}} \circ K_{l_{\max}} - H_{l_{\max}+1}, \quad H_{l_{\max}+1} \circ K_{l_{\max}} = 0, \\
&\tilde{C}_{l_{\max}+1} \circ D_{l_{\max}+1} = \mathrm{id} - H'_{l_{\max}} \circ K'_{l_{\max}} - H'_{l_{\max}+1}, \quad H'_{l_{\max}+1} \circ K'_{l_{\max}} = 0,
\end{aligned}
$$

其中 H 映射可以任意选取，只要它们满足给定的恒等式。H 算子可以从数据中省略，因为只要它们满足 *(25)* 左列中的恒等式，就可以将它们定义为满足 *(25)* 左列中的恒等式。

请注意，我们对有限长度复形之间同伦等价的定义经过专门设置，使得较长复形之间的等价即使经过截断，仍然是等价。

接下来，我们将注意力限制在所有映射均由微分算子给出的情形。

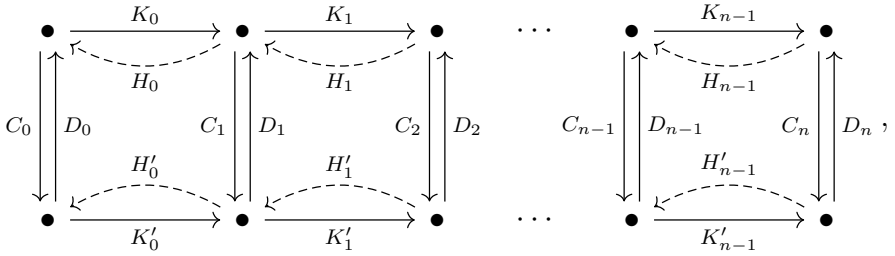
定义 *4.2*（参见 [22, 定义 *10.5.*4], [24, 定义 *1.2.2*–4]）。给定一个微分算子 K，任何可与之复合的微分算子 L，只要满足$L \circ K = 0$，就是 K 的（部分）相容算子。如果 K_1 是 K 的相容算子，那么当任何其他相容算子 L 都能经由 $L = L' \circ K_1$ 分解，且其中某个微分算子为 L' 时，就称它为完备的或泛的。微分算子复形 $K_b l = 0, 1, \ldots$ 称为 K 的相容复形，当 $K_0 = K$ 且对于每个 $l \geq 1$，K_l 都是 K_{l-1} 的完全相容算子时。

我们对 部分、完备或泛等属性的用法并不规范。在文献中，如果不使用任何属性，通常就意味着满足完备性条件 [24, Def.1.2.2], ；而部分相容算子似乎没有标准名称。

4.2. 充分条件与构造。关于相容算子的性质，我们可以作两点相关说明。完备相容算子，例如 K_1，不一定唯一。不过，根据其泛因子分解性质，任意两个相容算子，例如 K_1 和 K_1'，必定可以相互因子分解，$K_1 = L_1 \circ K_1'$ 和$K_1' = L_1' \circ K_1$ 分别通过某些微分算子 L_1 和 L_1' 实现。另一方面，虽然相容条件 $K_1 \circ K = 0$ 很容易检验，但要验证某个特定 K_1的完备性／泛性质可能颇具挑战性。然而，如果 K 和 K_1 都能化约为另一对算子，例如 K' 和 K_1'，且已知这对算子满足相容条件和完备性条件，那么这种化约便可作为 K_1具有完备性的证据。这两点都说明了以下内容的实用性

命题 4.3 ([19,引理4])。考虑两个微分算子复形 K_l和 K_l'，其中 $l = 0, 1, \cdots, n-1$，以及它们之间的一个同伦等价，如图所示

(26)

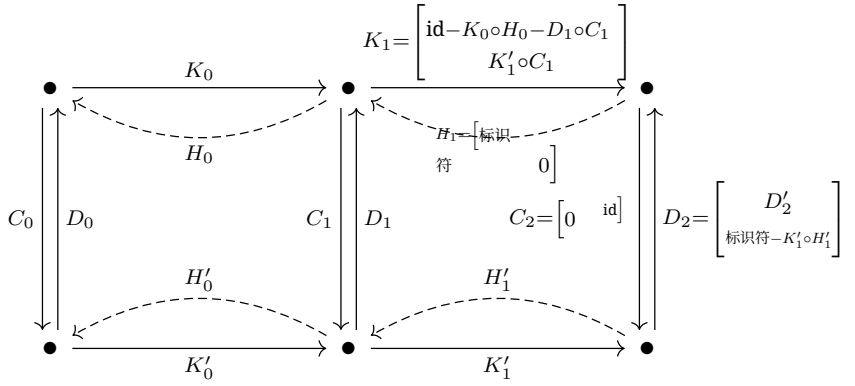


~ ~ ~ ~为简便起见，我们假设 H_{-1}、H_{-1}'、H_n、H_n' 均为零。如果 K_l' 是 K_0'的一个相容复形，那么 K_l 就是 K_0的一个相容复形。

以下观察是我们显式构造相容算子的方法的核心，同时也为其完备性提供了见证

命题 4.4 （参见 [19, 引理5], [24, 命题 1.2。7]）。考虑如下微分算子图：

(27)



如果其截断到第一个方格在定义*4.1*（长度为 *1*）的意义下是同伦等价，并且算子 K'_1 已知是 K'的完全相容算子，那么存在微分算子 H'_1 和 D'_2，使得上图中的第二个方格将其补全为同伦等价（长度为 *2*）。

这一观察的一个推论是，根据命题4.3 ，算子 K_1 （27）也被证明是 K的一个完全相容算子。实际应用中，这个 K_1 算子可能包含相当多的冗余信息，因此可能需要手动进行一些简化，使其形式更便于使用。只要简化时保留了证明等价性的相关数据，就仍然很容易验证简化后的 K_1是完备的。

4.3. **作为相容复形的 BGG 序列**。 这里我们概述一个论证，说明 BGG 复形在局部平坦的抛物几何上提供了（第一 BGG 算子的）相容复形。下面说明这一结论如何由命题 4.3 推出。该论证的一个版本见 [12, 第4], 节，具体讨论的是 Calabi 复形，即 Killing 算子的 BGG 序列。本节假定参考文献 [25, 9] 为背景资料。

一个 BGG 复形由对 tractor 丛 $\mathcal{V}$ 的选择参数化。随后，一些表示论数据构造出其算子，我们统称为 E_l，并提供生成同伦等价实例的全部数据，如带有参考相容复形的（26）所示。我们展示所得图表中的一个一般方形，后文将引用该方形：

(28)
$$\begin{array}{ccc} V_l & \xrightarrow{E_l=\pi_{l+1}d^{\overline{\nabla}}\Pi_l} & V_{l+1} \\ \Big\uparrow{\scriptstyle \Pi_l} \;\Big\downarrow{\scriptstyle \pi_l P'_l(d^{\overline{\nabla}}\partial^*)} & \overset{0}{\curvearrowleft} & \Big\uparrow{\scriptstyle \Pi_{l+1}} \;\Big\downarrow{\scriptstyle \pi_{l+1}P'_{l+1}(d^{\overline{\nabla}}\partial^*)}\,. \\ V'_l & \xrightarrow[d^{\overline{\nabla}}]{} & V'_{l+1} \end{array}$$

（26）的下层由丛 $V'_l := \Lambda^l T^*M \otimes \mathcal{V}$ 以及 $K'_l = d^{\nabla} : \Gamma(V'_l) \to \Gamma(V'_{l+1})$ 构成，其中 ∇ 是 $\mathcal{V}$上的平坦 tractor 联络。

抛物几何的李代数数据产生了Kostant 余微分及其丛版本 $\partial^* : V'_l \to V'_{l-1}$。我们设 $V_l :=$核 ∂^*/像 ∂^* 属于V'_l。这些是（26）上层的丛。根据构造，存在一个投影 $\pi_l :$ 核 $\partial^*|_{V'_l} \to V_l$，此外还存在一个微分分裂 $\Pi_l : \Gamma(V_l) \to \Gamma($核 $\partial^*|_{V'_l})$ 它

由条件 $\partial^* \Pi_l = 0$, $\partial^* d^\nabla \Pi_l = 0$和$\pi_l \circ \Pi_l =$ 恒等$_{V_l}$唯一确定。这些工具相互作用，形成了称为“BGG 机制”的演算 [25, 9]。特别是，这产生了（ $K_l = E_l$ 26）上层的 BGG 算子，其形式为 $E_l = \pi_{l+1} d^\nabla \Pi_l$。

我们需要的最后一个要素是微分算子 $\Box = \partial^* d^\nabla + d^\nabla \partial^* : \Gamma(V_l')^- \to \Gamma(V_l')$。注意，$\Box$ 在 $\partial^* d^\nabla$ 的截面上化简为$\operatorname{im} \partial^*$，而在 $d^\nabla \partial^*$ 的相关分次丛的截面上化简为 $V_l' / \ker \partial^*$。由于 $\Box$ 与所谓的 Kostant 拉普拉斯算子 [9, 26] 密切相关，[20], 根据表示论可知，存在多项式 P_l和 P_l'，二者的常数项均为1，使得相应的多项式算子满足

$$P_l(\partial^* d^\nabla)|_{\Gamma(\operatorname{im} \partial^*)} = 0, \qquad P_l'(d^\nabla \partial^*) : \Gamma(V_l') \to \Gamma(\ker \partial^*),$$
$$P_l(\partial^* d^\nabla) P_l'(d^\nabla \partial^*)|_{\operatorname{im} \Pi} = \mathrm{id}, \qquad P_l' = P_{l-1}.$$

现在我们可以指定（26）中的所有缺失算子。令 $C_l := \Pi_l, D_l := \pi_l P_l'(d^\nabla \partial^*)$和 $H_l = 0$。此外，利用多项式 $Q_l(x)$，其由 $P_l(x) = xQ_l(x) + 1$ 给出，并结合上一个显示式中的性质，可得

$$P_l(\partial^* d^\nabla) P_l'(d^\nabla \partial^*) = \big(d^\nabla \partial^* Q_{l-1}(d^\nabla \partial^*) + \mathrm{id}\big)\big(Q_l(\partial^* d^\nabla) \partial^* d^\nabla + \mathrm{id}\big) =$$
$$= \mathrm{id} + d^\nabla \partial^* Q_{l-1}(d^\nabla \partial^*) + \partial^* Q_l(d^\nabla \partial^*) d^\nabla = C_l D_l.$$

现在我们代入 $H_l' = -\partial^* Q_l(d^\nabla \partial^*)$ 并且恒等式 (24) 成立，由此验证 BGG 复形 E_l 与扭曲 de-Rham 复形 d^∇ 在同伦意义下等价，因此 E_l 是 E_0 的相容复形。

5. C2E 算子的相容复形

假设共形结构 $(M, [g_{ab}])$ 的维数 $n \geq 4$ 在 (5) 的意义下是一般的。我们将评述维数3 于注5.3。于是 $E(\sigma) = 0$ 的解空间维数为1或 0。我们将分别讨论这两种情形。回顾一维解空间由性质 (11) 刻画，见第 3.2 节。

5.1. 无非平凡解。

根据 (11)，此情形的特征为

$$\begin{pmatrix} (dZ)_{ab} \\ \Phi(Z)_{ab} \end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{equivalently} \quad \begin{pmatrix} \zeta^{ab} & \eta^{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (dZ)_{ab} \\ \Phi(Z)_{ab} \end{pmatrix} = 1,$$

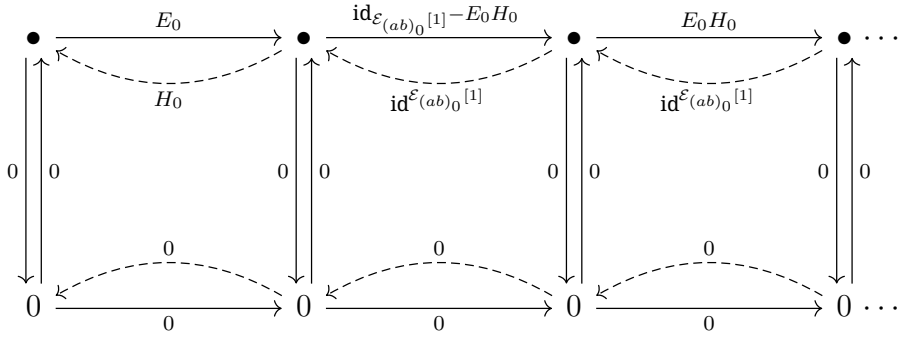
对于某些张量场 $\zeta^{ab} \in \mathcal{E}^{[ab]}$和 $\eta^{ab} \in \mathcal{E}^{(ab)_0}$。那么存在一个 $E = E_0$ 的左逆 $H_0 : \mathcal{E}_{(ab)_0}[1] \to \mathcal{E}[1]$，

$$H_0 \circ E_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{E}[1]}, \quad \text{with}$$
$$H_0(\tau) := \begin{pmatrix} \zeta^{ab} & \eta^{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\tilde{d} \circ C_1(\tau))_{ab} \\ ((D_1 \circ C_1 - \mathrm{id})(\tau))_{ab} \end{pmatrix} \tag{29}$$

对于 $\tau_{ab} \in \mathcal{E}_{(ab)_0}[1]$，参见（17）。

如果我们不加思索地反复应用命题 4.4 中相容算子的逐步构造，就会得到以下等价图，它无限重复最后两个方块，因此长度无限：

(30)

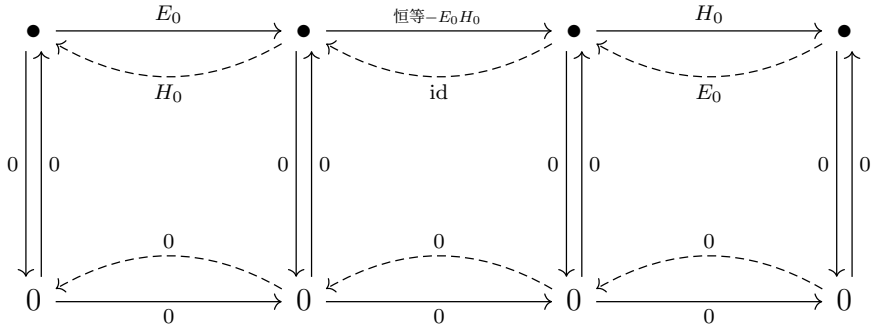


然而，很容易注意到，第二个相容算子E_0H_0 包含许多冗余分量，因为利用（29），我们可以将其分解为

$$H_0 = H_0(E_0H_0) = (H_0E_0)H_0.$$

不难将（30）中的第三个等价方块改写为使用 H_0 而非 E_0H_0。然后，继续应用命题（4.4）中的构造，我们得到一个大为简化的等价图，其长度现为3：

(31)



我们可以将这一计算的结果概括为如下相当一般的

引理 5.1. 给定一个微分算子 E_0，若存在一个左逆微分算子 H_0，使得

$$H_0 \circ E_0 = \mathrm{id}, \tag{32}$$

则（31）的顶行是 E_0 的一个长度为*3*的完整相容复形。

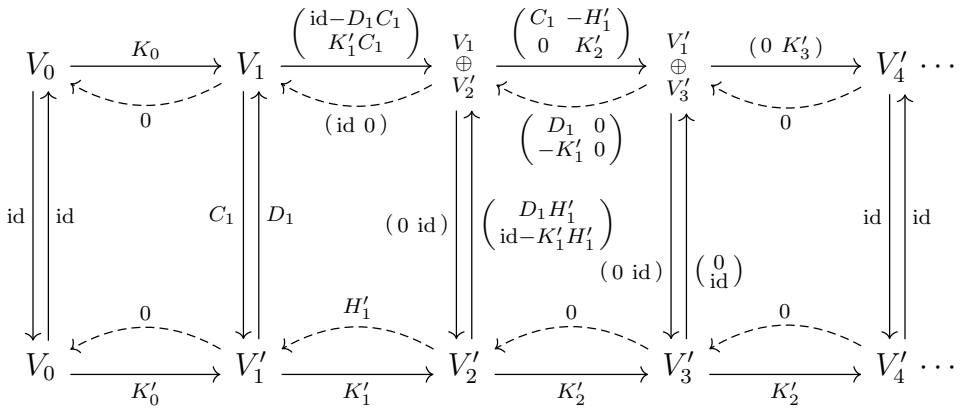
证明。恒等式（32）足以验证图（31）中的数据构成同伦意义下的复形等价，

底行显然是一个相容复形。因此，根据命题 4.3，顶行也是一个相容复形。经检查，命题 4.4 的构造给出0作为下一个相容算子。因此，该图可以截断为长度 3。 □

5.2. **一维解空间**。此情形的特征是 $dZ = 0$ 和 $\Phi(Z) = 0$，见（11）及下文的讨论。我们假设$n \geq 4$ 因为对 $n = 3$ 而言，不可能存在一维解空间。在后一种维数下，若 $[g_{ab}]$ 中存在爱因斯坦度量，则科顿张量为零，因此 $[g_{ab}]$ 是共形平坦的。

事实证明，这里我们需要命题 4.4 的一个相当特定的情形：只需假设 $C_0 = D_0 = \mathrm{id}$ 和 $H_0 = H'_0 = 0$ 位于（27）的第一个方块中。然后可以沿用命题4.4来构造一个相容复形。不过，与第 5.1 节类似，这个过程可以大幅简化。利用少数几个关键恒等式，我们得到以下一般性结果：

引理 5.2. 考虑如下微分算子图：(33)



向右延拓为 $C_i = D_i = \mathrm{id}$ 和 $H_i = H'_i = 0$。若底行是一个完整相容复形，则将其截断至第一个单元是一个同伦等价，而且 H'_1 是一个满足恒等式的算子

$$\mathrm{id} - C_1 \circ D_1 = H'_1 \circ K'_1, \tag{34}$$

那么，(33) 中的图表是一个同伦等价，其顶行是一个完整相容复形。

证明。所有所需的恒等式都可通过显式计算验证，并归结为假设中的恒等式。结论可由简单应用命题 4.4得出。 □

一个直接推论便是我们的主定理1.1，它展示了共形到爱因斯坦算子 E_0 (3)的一个相容复形，其中对于一般的韦尔张量，该复形有一个独立解。

定理*1.1*的证明。定理陈述中的复形恰好是（33）的顶行，前提是

$$V_0 = \mathcal{E}[1], \qquad V_1 = \mathcal{E}_{(ab)_0}[1], \qquad V_i' = \mathcal{E}_{[a_1\cdots a_i]}[1],$$
$$K_0 = E_0, \qquad K_i' = \tilde{d},$$

以及算子 C_1 和 D_1 由式（15）和式（14）给出，其中 H_1' 由式（20）给出。因此，根据引理 5.2，可得其为相容复形。我们只需验证式（33）中第一个方块的交换性，这由式（16）以及涉及H_1'的恒等式（19）的重新排列式（34）保证。□

注记5.3。事实证明，我们构造相容复形的方法，在某些低维情形下给出了完备的答案。

(1) 假设维数为 $n = 3$。那么，对于所有共形结构（$M, [g]$），韦尔张量恒等于零。因此我们需要改用科顿张量 Y_{abc}：当且仅当（M, $[g]$）共形平坦时，Y_{abc} 才为零。此外，除非（$M, [g]$）是平坦的，否则 E_0 的解空间是平凡的。因此，合适的一般性概念是处处满足假设 $Y_{abc} \neq 0$。接着，对某个 ζ^{abc}，利用 $\zeta^{abc}Y_{abc} = 1$，根据式（8）可得 $\zeta^{abc}\left(E_1 \circ E_0\left(\sigma\right)\right)_{abc} = \sigma$。由此得到满足 $H_0 \circ E_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{E}[1]}$ 的 H_0，于是可以按照第 5.1 节构造一个相容复形（长度为 3）。

(2) 假设 $n = 4$，则有一个众所周知的维数相关恒等式 [14, 式（31）]

$$W^{abcd}W_{abce} = \tfrac{1}{4}|W|^2\delta^e_d. \quad |W|^2 = W^{abcd}W_{abcd}. \tag{35}$$

因此，进一步假设黎曼号差，由（6）和（7）中的可逆性讨论可知，韦尔张量要么一般，要么恒等于零。此外，容易验证，σ、$\bar{\sigma} \in \mathcal{E}[1]$ 的两个线性无关解 E_0 会导出共形Killing场$k_a = \sigma\nabla_a\bar{\sigma} - \bar{\sigma}\nabla_a\sigma$，使得 $W_{abcd}k^d = 0$（适用于任意维数和签名），参见 [16]；这意味着在四维情形下一般性不成立——因而具有共形平坦性（$W = 0$）。总之，我们得到了黎曼号差下所有四维共形结构的相容复形。

(3) 可以考虑与（35）类似、但涉及更复杂张量场的恒等式。假设 $n = 4$ 并考虑以下关于 W_{abcd}的多项式张量，

$$\overset{2}{W}_{abcd} := W_{rsab}W^{rs}{}_{cd} \quad \text{and} \quad \overset{3}{V}{}^b_a := W_{rs}{}^{tb}W^{rs}{}_{pq}W^{pq}{}_{ta}.$$

[2]若 $|W|^2 = 0$则同样有 $W_{rsta}W^{rstb} = 0$根据（35），因此 W_{abcd}是完全无迹的。按照 [14]，这意味着 $\overset{2}{W}_{[ab}{}^{[cd}\delta_{e]}{}^{f]} = 0$消失。将此关系与 $W^{ab}{}_{cd}$

得到

$$\overset{3}{V}{}^{b}_{a} = \tfrac{1}{4}\overset{3}{V}{}^{r}_{r}\delta^{b}_{a}.$$

对于非定号差的情形，当3种情况下，但处处非零时，可以用它代替（35）

上述两种韦尔张量的反演方法都不适用于所有一般的4维流形。在附录A 中，我们给出了一族四维洛伦兹号差下的例子，其中任何由韦尔张量协变构成的标量都必须为零。按照附录A的术语，这些是佩特罗夫III型韦尔张量。

6. 射影类比

共形算子 E_0 在射影几何中有一个密切的类比。事实上，相容复形也有一个密切的射影对应物。为此，我们需要找出第3节讨论的不变算子的射影版本；第5 节中的构造完全相同（只需使用其中所需所有不变算子的射影版本）。

这里我们沿用 [3]中的记号。光滑可定向流形$(M, [\nabla])$上的射影结构 M, 维数 $M \geq 2$ 由一类 ∇特殊的射影等价无挠联络构成。也就是说，$[\nabla]$ 中的联络保体积，且具有相同的测地线类（视为未参数化曲线）。于是，$\hat{\nabla}$与 $\nabla \in [\nabla]$ 之间的差由恰当1-形式 $\Upsilon_a = \nabla_a \Upsilon$ $\Upsilon \in C^\infty(M)$控制。

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_a \sigma &= \nabla_a \sigma + w \Upsilon_a \sigma, \\ \hat{\nabla}_a \tau_b &= \nabla_a \tau_b - \Upsilon_a \tau_b - \Upsilon_b \tau_a, \\ \hat{\nabla}_a \varphi^b &= \nabla_a \varphi^b + \Upsilon_a \varphi^b + \Upsilon_r \varphi^r \delta^b_a \end{aligned} \tag{36}$$

其中 $\sigma \in \mathcal{E}[w]$, $\tau_b \in \mathcal{E}_b$和 $\varphi^b \in \mathcal{E}^b$。这里的 $\mathcal{E}[w]$是射影密度丛，详情参见 [3] 。按照这一约定，我们有 $\Lambda^n T^*M \cong \mathcal{E}[-(n+1)]$。里奇张量 Ric_{ab} 与射影肖滕张量 P_{ab}之间的关系为 $Ric_{ab} = (n-1)\,\mathrm{P}_{ab}$，它们是对称张量（对于特殊联络 ∇）。射影 Cotton 张量定义为$Y_{abc} = 2\nabla_{[b}\mathrm{P}_{c]a}$。射影不变韦尔张量 $W_{ab}{}^{c}{}_{d}$ 是 ∇的曲率张量 $R_{ab}{}^{c}{}_{d}$ 的无迹部分。对于 $n \geq 3$，射影平坦性由 $W_{ab}{}^{c}{}_{d} = 0$ 刻画；对于 $n = 2$，则由 $Y_{abc} = 0$ 刻画。

我们从算子序列开始 E_i 该序列由公式（4）给出，我们以射影意义考察它： $\mathcal{E}[1]$ 是射影密度，而嘉当积的含义略有不同，因为 $\boxtimes$ 仅表示指标的适当对称化（当所有指标均为下指标时无需去除迹）。该算子序列具有射影不变性，并且对于射影平坦类构成一个复形

$[\nabla]$。按照第4.3节中的讨论，它为射影到里奇平坦的算子提供了一个相容复形

$$E_0\colon \mathcal{E}[1] \to \mathcal{E}_{(ab)}, \quad \sigma \mapsto (\nabla_a\nabla_b + \mathrm{P}_{ab})\sigma. \tag{37}$$

也就是说，σ 在 $[\nabla]$中无零点的 E_0 解对应于里奇平坦的联络 ∇ $[\nabla]$。具体而言，如果 ∇ 对应于体积形式 ϵ（在相差一个常数倍的意义下唯一确定），即 $\nabla\epsilon = 0$，并且我们利用 ϵ将σ 视为一个函数，那么 $\hat{}\epsilon = \sigma^{-(n+1)}\epsilon$ 对应于 $\widehat{\nabla}$。

接下来，我们讨论一个适用于本研究目的的一般性条件。假设其具有射影意义，我们有

$$F_{abc} := (E_1 \circ E_0(\sigma))_{abd} = -W_{ab}{}^c{}_d(\nabla_c\sigma) + Y_{dab}\sigma \in \big(\mathcal{E}_{[ab]} \boxtimes \mathcal{E}_c\big)[1], \tag{38}$$

与（8）的区别在于韦尔张量的指标位置（我们无法升降指标）。因此，我们称（M，$[\nabla]$）是一般的，若丛映射 $\tau_c \mapsto W_{ab}{}^c{}_d\tau_c$ 是单射。于是存在该映射的逆$W^{ab}{}_e{}^d$ ，即 $W^{ab}{}_e{}^dW_{ab}{}^c{}_d = \delta^c_e$。将逆映射$-W^{ab}{}_e{}^d$ 作用于上面的公式，我们得到

$$\nabla_a\sigma + Z_a\sigma = -\overline{W}^{rs}{}_a{}^tF_{rst} \quad \text{for} \quad Z_a := -\overline{W}^{rs}{}_a{}^tY_{trs} \in \mathcal{E}_a. \tag{39}$$

$\hat{}$直接计算可得 $Z_a = Z_a - \Upsilon_a$ 在射影变换（36）下。此外，采用与第3.3节类似的计算可知，射影方程 $E_0(\sigma) = 0$ 有非平凡解，当且仅当 $(dZ)_{ab} = 0$ 且 $\Phi(Z)_{ab} = 0$ 其中

$$(dZ)_{ab} = 2\nabla_{[a}Z_{b]} \in \mathcal{E}_{[ab]},$$
$$\Phi(Z)_{ab} := \nabla_{(a}Z_{b)} - \mathrm{P}_{(ab)} - Z_{(a}Z_{b)} \in \mathcal{E}_{(ab)}.$$

接下来，我们将在第3.3节考察共形不变算子，并讨论它们的射影类比。首先，（外）协变导$\tilde{}$ $\tilde{}$数 ∇ 和 d 与（12）和（13）中完全相同。射影不变算子 C_1 和 D_1 可通过对（15）和（14）稍作修正得到，即

$$C_1 : \mathcal{E}_{(ab)}[1] \to \mathcal{E}_a[1], \qquad \tau_{ab} \mapsto -2\overline{W}^{rs}{}_a{}^t\nabla_{[r}\tau_{s]t}, \tag{40}$$
$$D_1 : \mathcal{E}_b[1] \to \mathcal{E}_{(ab)}[1], \qquad \tau_b \mapsto \nabla_{(a}\tau_{b)} - Z_{(a}\tau_{b)}. \tag{41}$$

现在很容易验证，（16）和（17）中总结的关系在射影情形下也成立。此外，由（D 18）定义的算子具有射影不变性，我们还可得到（19）的射影修正：

$$\big((C_1 \circ D_1)\,\tau\big)_a = \tau_a - \big(H_1'\big(\tilde{d}\tau\big)\big)_a - \overline{W}^{rs}{}_a{}^p\big[2\Phi(Z)_{pr}\tau_s + \tfrac{1}{2}(dZ)_{rs}\tau_p\big], \tag{42}$$

其中

$$(H_1'\psi)_a = \tfrac{1}{2}\overline{W}^{rs}{}_a{}^p(\overline{D}\psi)_{prs}, \tag{43}$$

对于 $\tau_a \in \mathcal{E}_a[1]$、$\psi_{ab} \in \mathcal{E}_{[ab]}[1]$。$D$ 的射影不变性意味着H_1' 也具有射影不变性。

定理 6.1。 在维数 $n \geq 3$下，对于一般射影类 $[\nabla]$的射影到 *Ricci* 平坦算子 E_0 (37) ，其相容复形由 (33)的顶行给出，条件是

$$V_0 = \mathcal{E}[1], \qquad V_1 = \mathcal{E}_{(ab)}[1], \qquad V_i' = \mathcal{E}_{[a_1 \cdots a_i]}[1]$$
$$K_0 = E_0, \qquad K_i' = \tilde{d}$$

与算子 C_1 和 D_1 由以下公式给出(40)和(41)，其中 H_1' 由以下公式给出(43)。

证明。同样，结论可由引理5.2推出。我们只需检查（33）中第一个方块的交换性，这由恒等式（16）的射影类比以及涉及34）的恒等式（H_1'保证；后者现在可由恒等式（42）重新排列得到。□

对于维数 $n = 2$，$(M,\ [\nabla])$ 要么是射影平坦的，要么射影 E_0只有平凡解。后一种情况下，射影科顿张量 Y_{abc} 非零，并且可以轻易复现备注5.3(1)中的讨论。

附录A. 四维洛伦兹号差

正文中已指出，反演W^{abcd}的选取（35）与备注5.3(2)中的四维恒等式结合后，对黎曼度量的任意一般韦尔张量均适用。这是因为二次不变量 $|W|^2 = W_{abcd}W^{abcd} \neq 0$若 $W_{abcd} \neq 0$。对于不定号差度量，最后一个推论不再成立。那么反演（7）是否必然失效？备注5.3(3)表明，更复杂的典范求逆算子（其中 $W^{\underline{abcd}}$ 由 W_{abcd}协变地且代数地确定）在 $|W|^2 = 0$时可能有效。然而，在本附录中，我们给出了洛伦兹号差下所有这类典范求逆算子均失效的明确例子。

在处理一个四维共形结构 $(M, [g])$ 时，若度量代表元 g 的签名为洛伦兹型 $(-+++)$，使用一个适配于 g 的双零标架 $\{l, n, m, \bar{m}\}$ 有时会很方便。其中 l, n 是实零向量，而 $m, \bar{m}$ 是复共轭零向量，唯一非零的内积为 $g(l, n) = 1$ 和 $g(m, \bar{m}) = -1$。我们遵循 [10, §8] 中的约定。该标架的结构性质在 (l, n) 平面内的自旋提升以及 m, $\bar{m}$ 平面内的旋转下保持不变。因此，我们可以为标架向量赋予以下（自旋提升、自旋）权：$|l| = (1, 0)$，$|n| = (-1, 0)$，$|m| = (0, 1)$，$|m| = (0, -1)$；这些权在张量积、置换和度量缩并下保持不变。自旋提升权和自旋权自然地扩展到任意张量空间的标架适配基中的元素。

在 4 维情形下，具有与韦尔张量相同结构的 4 阶张量丛 $\mathcal{W}_{pqrs}$ （具有相同的置换对称性 W_{pqrs} ，与

黎曼张量相同，且无迹）秩为 10，其纤维可方便地用以下 5 个复数纽曼-彭罗斯标量 [10,式（1.294）]

$$
\begin{aligned}
\Psi_0 &= -W_{pqrs} l^p m^q l^r m^s, \\
\Psi_1 &= -W_{pqrs} l^p n^q l^r m^s, \\
\Psi_2 &= -W_{pqrs} l^p m^q \bar{m}^r n^s, \\
\Psi_3 &= -W_{pqrs} l^p n^q \bar{m}^r n^s, \\
\Psi_4 &= -W_{pqrs} n^p \bar{m}^q n^r \bar{m}^s.
\end{aligned} \tag{44}
$$

这些量的选取方式使得，当其中只有一个标量非零时，相应的韦尔张量具有纯升权重，即权重为 -2，当 Ψ_0时，-1 当 Ψ_1时，0当 Ψ_2时，1 当 Ψ_3 以及 2 当 Ψ_4时。韦尔张量代数类型的 *Petrov* 分类 [10, §9] 对应于以下滤过：I 型（$\Psi_0 = 0$）、II 型（$\Psi_0 = \Psi_1 = 0$）、III 型（$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = 0$）和 N 型（$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0$）。由标量（44）重构原张量的公式为 [10, 式（1.298）][2]，，但形式有些笨拙。下面给出一个更适合我们目的的替代公式。

我们将使用以下对称化的 *Kulkarni-Nomizu* 乘积

$$
(AB)_{pr} = A_{(p} B_{r)}, \tag{45}
$$

$$
(A \odot B)_{pqrs} = A_{pr} B_{qs} - A_{qr} B_{ps} - A_{ps} B_{qr} + A_{qs} B_{pr}. \tag{46}
$$

若 $A,\ B \in \mathcal{E}_{(pr)}$，则 $(A \odot B)_{pqrs}$ 具有与韦尔张量相同的指标置换对称性，但不一定自动无迹。由 Newman-Penrose 标量（44）重构的一个方便公式为

$$
\begin{aligned}
W = &-\Psi_0 (nn) \odot (\bar{m}\bar{m}) - \Psi_0^* (nn) \odot (mm) \\
&+ 2\Psi_1 \big((nn) \odot (l\bar{m}) + (nm) \odot (\bar{m}\bar{m}) \big) + 2\Psi_1^* \big((nn) \odot (lm) + (n\bar{m}) \odot (mm) \big) \\
&- (\Psi_0 + \Psi_0^*) \big((ll) \odot (nn) + (mm) \odot (\bar{m}\bar{m}) - 2(ln) \odot (m\bar{m}) \big) \\
&+ 2i(\Psi_0 - \Psi_0^*) \big((lm) \odot (n\bar{m}) - (l\bar{m}) \odot (nm) \big) \\
&+ 2\Psi_3^* \big((ll) \odot (n\bar{m}) + (lm) \odot (\bar{m}\bar{m}) \big) + 2\Psi_3 \big((ll) \odot (nm) + (l\bar{m}) \odot (mm) \big) \\
&- \Psi_4^* (ll) \odot (\bar{m}\bar{m}) - \Psi_4 (ll) \odot (mm).
\end{aligned} \tag{47}
$$

韦尔张量的二次不变量计算结果为

$$
|W|^2 = W_{pqrs} W^{pqrs} = 16 \Re (\Psi_0 \Psi_4 - 4\Psi_1 \Psi_3 + 3\Psi_2^2). \tag{48}
$$

由于 Ψ_i 可以是任意复数，我们当然可以找到使 $W_{pqrs} \neq 0$的取值，但 $|W|^2 = 0$。这意味着，对于 W^{pqrs}，反演公式（35）结合恒等式（35），无法成立。接下来需要检查是否存在具有 $|W|^2 = 0$ 且在我们的意义下（第 3.2节）是一般的韦尔张量。

[2] That formula has a typo; it is missing a factor of $\frac{1}{2}$ in front of its first term.

注意，在缩并（48）中，只有总升权重为零的项会保留下来（因为标量的升权重只能为零）。根据这一论证（或者甚至更直接地从公式（48）），我们可以看出，III 型张量（仅具有正升权重分量）虽然是非平凡的，但具有 $|W|^2 = 0$。同样的论证意味着，由一个

III 型韦尔张量也将消失，包括三次不变量 V_r^r，这意味着备注 5.3 中的规范反演[3] (3) 也会失效。

为验证一般性，接下来我们将证明，对于 III 型张量，当 $\Psi_3 \neq 0$ 时，映射 W : $\mathcal{E}^s \to \mathcal{H}_{pqr}[2] \subset \mathcal{E}_{pqr}[2]$ 是单射，其中$\mathcal{H}_{pqr}[2]$ 表示由满足 $H_{(pq)r} = H_{[pqr]} = 0$ 和 $g^{pr}H_{pqr} = 0$ 的共形加权张量构成的子丛。只要找到适配于我们的双零标架的一组基下 W 的矩阵形式，这一点就显而易见。

引入特殊楔积很方便

$$(A \wedge B)_{pqr} = A_{pr}B_q - A_{qr}B_q. \tag{49}$$

如果 $A \in \mathcal{E}_{(pr)}$，那么 $(A \wedge B)_{(pq)r} = (A \wedge B)_{[pqr]} = 0$。$\mathcal{H}_{pqr}[2]$ 的一组方便的基如下所示，其中我们按所标示的升权重对其元素分组：

$$\begin{array}{cc|c}
-2: & (nn)\wedge\bar{m}, & (nn)\wedge m, \\
-1: & (\bar{m}\bar{m})\wedge n, & 2(nm)\wedge\bar{m}+(nn)\wedge l, \\
 & 2(n\bar{m})\wedge m+(nn)\wedge l, & (mm)\wedge n, \\
0: & 2(l\bar{m})\wedge n+(\bar{m}\bar{m})\wedge m, & 2(n\bar{m})\wedge l+(\bar{m}\bar{m})\wedge m, \\
 & 2(lm)\wedge n+(mm)\wedge\bar{m}, & 2(nm)\wedge l+(mm)\wedge\bar{m} \\
1: & (\bar{m}\bar{m})\wedge l & 2(lm)\wedge\bar{m}+(ll)\wedge n, \\
 & 2(l\bar{m})\wedge m+(ll)\wedge n, & (mm)\wedge l, \\
2: & (ll)\wedge\bar{m} & (ll)\wedge m,
\end{array} \tag{50}$$

其中，我们将按照相对于上表的升权排列基，按行优先顺序排列，并在每行内从左向右排列。

由于映射 W 由缩并定义，因此它保持自旋提升权。此外，如果只有参数化 W_{pqrs} 的 Ψ_3 和 Ψ_4 标量非零，与韦尔张量进行缩并只能分别使升权重增加 1 或 2。显然，W 的矩阵形式相对于纯升权重子空间将呈分块三角形，而检验单射性归结为检验主对角线各块的单射性。将向量参数化为 $v^s = v_l l^s + v_m m^s + v_m^* \bar{m}^s + v_n n^s$，并将缩并 $W_{pqrs}v^s$ 表示为

基（50）表明

$$\mathrm{W}\left[\begin{array}{c} v_n \\ \hline v_m^* \\ v_m \\ \hline v_l \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc|c} & & & & \\ \hline & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \hline 0 & & & & \\ \Psi_3^* & & & & \\ 0 & & & & \\ \Psi_3 & & & & \\ \hline -\Psi_4^* & -\Psi_3^* & 0 & & \\ 0 & 0 & -\Psi_3^* & & \\ 0 & -\Psi_3 & 0 & & \\ -\Psi_4 & 0 & -\Psi_3 & & \\ \hline & 0 & \Psi_4^* & \Psi_3^* & \\ & \Psi_4 & 0 & \Psi_3 & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} v_n \\ \hline v_m^* \\ v_m \\ \hline v_l \end{array}\right]. \tag{51}$$

事实上，我们看到（51）中的矩阵恰好在 $\Psi_3 \neq 0$ 时是单射。这意味着，典型的 III 型韦尔张量在我们的意义下是一般的，同时具有 $|W|^2 = 0$。我们也可以立即看出，N 型韦尔张量不是一般的。

参考文献

[1] S. Aksteiner、L. Andersson、T. Bäckdahl、I. Khavkine 和 B. Whiting，《黑洞时空的相容复形》，《数学物理通讯》384（2021）1585–1614，arXiv:1910.08756。[2] L. Andersson、T. Bäckdahl 和 P. Blue，《二阶对称算子》，《经典与量子引力》31，第13期（2014）135015，38页。[3] T. N. Bailey、M. G. Eastwood 和 A. R. Gover，《用于共形、射影及相关结构的 Thomas 结构丛》，《落基山数学杂志》24（1994）1191–1217。[4] A. L. Besse，《爱因斯坦流形》，《数学及其边界领域成果》第三辑第10卷。施普林格出版社，柏林，1987。[5] B. D. Boe 和 D. H. Collingwood，《诱导表示结构比较理论 II》，《数学杂志》190（1985）1–11。[6] H. W. Brinkmann，《彼此共形映射的爱因斯坦空间》，《数学年刊》94（1925）119–145。[7] R. L. Bryant、S. S. Chern、R. B. Gardner、H. L. Goldschmidt 和 P. A. Griffiths，《外微分系统》，数学科学研究所出版物第18卷。施普林格，纽约，1991。[8] E. Calabi，《论具有常曲率的紧致黎曼流形 I》，载于《微分几何》，C. B. Allendoerfer 编，《纯数学研讨会论文集》第3卷，第155–180页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1961。[9] D. M. J. Calderbank 和 T. Diemer，《微分不变量与曲化 Bernstein-Gelfand-Gelfand 序列》，《纯粹与应用数学杂志》537（2001）67–103。

[10] S. Chandrasekhar, 《黑洞数学理论》, 国际物理学专著丛书第69卷。克拉伦登出版社, 1983。[11] F. Costanza、M. Eastwood、T. Leistner 和 B. McMillan, 《黎曼局部对称空间上的 Calabi 算子》, 2021。arXiv:2112.00841。[12] F. Costanza、M. Eastwood、T. Leistner 和 B. McMillan, 《洛伦兹局部对称空间上联络的值域与 Calabi 算子》, 2023。arXiv:2302.04480。[13] M. Eastwood, 《de Rham复形的变体》, 美国数学会通报46（1999）1368–1376。http://www.ams.org/notices/199911/fea-eastwood.pdf。[14] S. B. Edgar 和 A. Höglund, 《通过双重反对称化得到的维数相关张量恒等式》, 数学物理学杂志43（2002）659–677, arXiv:gr-qc/0105066。[15] A. Garcia-Parrado、J. Herrera 和 M. Vadillo, 《共形爱因斯坦空间与共形协变算子》, 2026。arXiv:2601.17044 [math.DG]。https://arxiv.org/abs/2601.17044。[16] A. R. Gover, 《共形爱因斯坦流形上的拉普拉斯算子与 Q曲率》, 《数学年刊》336（2006）311–334。[17] A. Gover 和 P. Nurowski, 《n维共形爱因斯坦度量的障碍》, 《几何与物理杂志》56（2006）450–484, arXiv:math/0405304。[18] I. Khavkine, 《Calabi 复形与 Killing层上同调》, 《几何与物理杂志》113（2017）131–169, arXiv:1409.7212。[19] I. Khavkine, 《有限型超定偏微分方程的相容复形及其在 Killing方程中的应用》, 《经典与量子引力》36（2019）185012, arXiv:1805.03751。[20] B. Kostant, 《李代数上同调与广义 Borel-Weil定理》, 《数学年刊》第二辑74（1961）329–387。[21] J.-P. Michel、F. Radoux 和 J. Šilhan, 《共形拉普拉斯算子的二阶对称性》, SIGMA: 《对称性、可积性与几何: 方法与应用》10（2014）016。[22] W. M. Seiler, 《对合: 微分方程形式理论及其在计算机代数中的应用》, 数学中的算法与计算第24卷。施普林格, 2010。[23] D. C. Spencer, 《线性偏微分方程的超定系统》, 《美国数学会通报》75（1969）179–240。[24] N. N. Tarkhanov, 《微分算子复形》, 数学及其应用第340卷。克鲁维尔, 多德雷赫特, 1995。[25] A. Čap、J. Slovák 和 V. Souček, 《Bernstein-Gelfand-Gelfand序列》, 《数学年刊》第二辑154（2001）97–113。[26] A. Čap 和 V. Souček, 《曲率Casimir算子与 BGG 机制》, SIGMA: 《对称性、可积性与几何: 方法与应用》3（2007）111。[27] C. A. Weibel, 《同调代数导论》, 剑桥高等数学研究丛书第38卷。剑桥大学出版社, 剑桥, 1994。

捷克科学院数学研究所现地址：Žitná 25，捷克共和国布拉格1区 110 00电子邮箱：khavkine@math.cas.cz

马萨里克大学数学与统计研究所现地址：捷克共和国布尔诺 Kotlářská 2，08号楼，611 37电子邮箱：silhan@math.muni.cz